Akademia Ekonomiczna im. Oskara Langego we Wrocławiu
Wydział Zarządzania i Informatyki
Katedra Statystyki i Cybernetyki Ekonomicznej

Joanna Dębicka

Inwestycyjny aspekt ubezpieczenia na życie i dożycie

Praca doktorska

Promotor:

prof. dr hab. Walenty Ostasiewicz

Wrocław, kwiecień 2000

Praca doktorska Joanny Dębickiej pt.

Inwestycyjny aspekt ubezpieczenia na życie i dożycie

przygotowana została w ramach realizacji
projektu badawczego Nr 1 H02B 017 14
finansowanego przez Komitet Badań Naukowych
w latach 1998-1999

w Katedrze Statystyki i Cybernetyki Ekonomicznej
Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu

pod kierunkiem prof. dr hab. Walentego Ostasiewicza

Przedmowa

Mam przyjemność wyrazić wdzięczność Panu Profesorowi Walentemu Ostasiewiczowi, którego naukowa dociekliwość i cenne uwagi w znacznej mierze przyczynily się do obecnego ksztaltu pracy.

Spis rzeczy

1 Wiadomości wstępne **10**

1.1 Charakterystyka ubezpieczeń na życie 10

1.1.1 Ogólna klasyfikacja i koncepcja ubezpieczeń na życie 10

1.1.2 Ubezpieczenie na życie i dożycie 12

1.2 Elementy matematyki aktuarialnej i finansowej 17

1.2.1 Trwanie życia 17

1.2.2 Wybrane pojęcia matematyki aktuarialnej 22

1.2.3 Oprocentowanie i dyskontowanie 24

1.2.4 Indeksacja z uwzględnieniem inflacji 26

1.3 Procesy stochastyczne 27

1.3.1 Pojęcia ogólne 27

1.3.2 Wybrane gaussowskie procesy stochastyczne 29

2 Efektywność ubezpieczenia **31**

2.1 Wstęp 31

2.2 Przyszła wartość początkowej sumy ubezpieczenia i sumy wpłaconych składek 32

2.2.1 Wariant z rosnącą sumą ubezpieczenia i składką 32

2.2.2 Wariant ze stałą składką i rosnącą sumą ubezpieczenia 33

2.3 Wskaźnik efektywności 34

2.3.1 Definicja wskaźnika efektywności 34

2.3.2 Własności wskaźnika efektywności 35

2.3.3 Przeciętna efektywność ubezpieczenia 43

2.4 Efektywność ubezpieczenia ze składką jednorazową 44

3 Optymalne decyzje **47**

3.1 Sformułowanie problemów 47

3.2 Optymalna strategia 48

3.3 Ubezpieczenie a lokata bankowa 51

3.3.1 Zastosowanie wskaźnika efektywności 51

3.3.2 Skutki finansowe zerwania warunków umowy 56

4 Model strumieni finansowych w ubezpieczeniu na życie i dożycie **59**

4.1 Strumienie finansowe w ubezpieczeniu 59

4.2 Łączne przepływy pieniężne 60

4.3 Zaktualizowane przepływy pieniężne 62

4.3.1 Momenty zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych 64

4.3.2 Łączne zaktualizowane przepływy pieniężne dla grupy 71

4.4 Procesy stochastyczne modelujące stopę procentową 74

4.4.1 Wybrane procesy stopy procentowej 74

4.4.2 Przyklady 79

5 Przykłady zastosowań modelu strumieni finansowych w ubezpieczeniu grupowym 84

5.1 Zobowiązania i ulgi wynikające z zakupu ubezpieczenia grupowego 84
5.2 Analiza przepływów pieniężnych ubezpieczającego 91
5.2.1 Skladka rzeczywista 91
5.2.2 Łączne przepływy pieniężne 95
5.2.3 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy stałej stopie dyskontowej . 101
5.2.4 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy zmiennej stopie dyskontowej 103
5.3 Analiza przepływów pieniężnych ubezpieczonego 108
5.3.1 Łączne przepływy pieniężne 108
5.3.2 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy stałej stopie dyskontowej . 112
5.3.3 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy zmiennej stopie dyskontowej 113
5.4 Różnica pomiędzy podwyżką płac, a ubezpieczeniem na życie i dożycie . . . 117
5.4.1 Pracodawca 117
5.4.2 Pracownik 119
5.5 Analiza wysokości przeciętnego świadczenia 120

A Podstawowe pojęcia 123

B Oznaczenia 126

C Rozkłady trwania życia 129

Wprowadzenie

W wielu krajach ubezpieczenie na życie obok swej podstawowej funkcji traktowane jest jako forma oszczędzania, tym cenniejsza, że zapobiega stratom finansowym związanym ze śmiercią i utratą zdrowia osoby ubezpieczonej. Indywidualne osoby oraz ich rodziny są narażone nie tylko na straty majątkowe, ale także na nagłą śmierć jednego z członków rodziny, leczenie, kalectwo i niezdolność do pracy z powodu wypadku lub choroby. Niestety ubezpieczenie społeczne nie zawsze pokrywa te straty i odpowiednio zabezpiecza ich skutki. Zatem istotnym dla człowieka jest takie planowanie finansów, które umożliwia przeżycie rodziny na godnym poziomie po śmierci lub przejściu na emeryturę głównego żywiciela. Niestety nie zawsze możliwe jest zakumulowanie wystarczającego kapitału na drodze tradycyjnego oszczędzania i indywidualnego inwestowania, stąd konieczność korzystania z innych form pomnażania pieniędzy. Jedną z często stosowanych form inwestowania jest ubezpieczenie na życie i dożycie. Ten typ ubezpieczenia jest instrumentem finansowym, który zabezpiecza fundusz na nagłe potrzeby związane ze śmiercią oraz fundusz emerytalny.

Dotychczasowa analiza opłacalności ubezpieczeń ukierunkowana była na rozwój narzędzi służącym przede wszystkim firmom ubezpieczeniowym (np. teoria ryzyka). Głównym celem pracy jest analiza inwestycyjnego aspektu ubezpieczenia na życie i dożycie z punktu widzenia osoby ubezpieczonej i ubezpieczającej.

W Rozdziale 1 wprowadzone zostały podstawowe pojęcia dotyczące ubezpieczeń, finansów i procesów stochastycznych. Szczegółowo została opisana zasada działania i konstrukcja ubezpieczenia na życie i dożycie. Po przedstawieniu idei ubezpieczeń na życie, dokonana została ich klasyfikacja ze względu na sposób dopisywania zysków do sumy ubezpieczenia oraz oddzielnie ze względu na rodzaj wpłacanych składek. Omówiono wybrane wielkości rachunku aktuarialnego dotyczące rent i niektórych ubezpieczeń życiowych. Ponadto na podstawie tablic trwania życia, opisane zostały sposoby wyznaczania rozkładu dalszego trwania życia ubezpieczonego. Z zakresu procesów stochastycznych opisane zostały pojęcia dotyczące dwóch szczególnych klas: procesów stacjonarnych i procesów o stacjonarnych przyrostach. W szczególności przedstawione zostały niektóre gaussowskie procesy stochastyczne, które wykorzystane zostały w dalszych częściach pracy (proces Wienera, ułamkowy ruch Browna, proces Ornsteina-Uhlenbecka).

W Rozdziale 2 omówiono zaproponowane miary opłacalności ubezpieczenia na życie i dożycie dla indywidualnego właściciela polisy. Inwestycyjny aspekt ubezpieczenia na życie i dożycie polega w tym przypadku na tym, że ubezpieczony inwestując kapitał (składki okresowe lub składka jednorazowa) spodziewa się określonych świadczeń (suma ubezpieczenia) w momencie śmierci lub dożycia końca okresu ubezpieczenia. Podejmując decyzję o wykupieniu polisy, ubezpieczony spodziewa się, że przyniesie ona w przyszłości wymierne korzyści, które mają zapewnić zwrot zainwestowanych składek, oraz pokrycie ewentualnych strat spowodowanych śmiercią lub przejściem na emeryturę. Ponieważ istnieją różne warianty ubezpieczenia na życie i dożycie, które przede wszystkim różnią się sposobem dopisywania zysku do sumy ubezpieczenia, ubezpieczony przed podjęciem decyzji o wykupieniu polisy może dokonać ich analizy. Ze względu na sposób dokonywania corocznej indeksacji sumy ubezpieczenia w ubezpieczeniu na życie i dożycie ze składką okresową (w przypadku rocznej składki płaconej z góry), w pracy wyróżnione zostały dwa warianty: ubezpieczenie z rosnącą sumą ubezpieczenia i rosnącą składką tzw. system francuski (RR) oraz ubezpieczenie z sumą biorącą udział w podziale zysków firmy i stała składką (RS). Dla obu wariantów została określona przyszła wartość początkowej sumy ubezpieczenia jak i sumy wpłaconych składek. Zaproponowana miara opłacalności ubezpieczenia w postaci wskaźnika efektywności dla wariantu RR ma następującą postać

$$W_{x,n}^{RR}(U, K = k) = \frac{1}{w_{x,n}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(1 + u_i)}{\sum_{j=0}^{k-1} \prod_{i=0}^{j}(1 + u_i)},$$

natomiast dla wariantu RS ma ona postać

$$W_{x,n}^{RS}(U, K = k) \quad = \quad \frac{1}{k}(\frac{1}{w_{x,n}} + \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{i=j}^{k-1}(1 + u_i) - (k - 1)),$$

gdzie x jest wiekiem osoby przystępującej do ubezpieczénia, a n długością okresu ubezpieczenia, zaś K jest zmienną losową określającą dalsze trwanie życia ubezpieczonego, a u_i oznacza stopę indeksacji w roku i.

Własności obu wskaźników efektywności zbadane zostały przy założeniu, że indeksacja w całym okresie ubezpieczenia jest stała i równa u ($u = u_1 = u_2 = ... = u_{n-1}$). Wykazano, że są one funkcjami malejącymi parametru x, a rosnącymi ze względu na u oraz n. Ponadto udowodniono, że wskaźnik efektywności wariantu RR jest malejącą funkcją argumentu k, a efektywność ubezpieczenia dla wariantu RS nie jest monotoniczna ze względu na ten parametr. Określona też została wartość oczekiwana wskaźnika efektywności liczona względem rozkładu długości dalszego trwania życia ubezpieczonego, która może być interpretowana jako przeciętna efektywność ubezpieczenia.

W Rozdziale 3, przedstawione zostały dwa problemy decyzyjne dotyczące wyboru odpowiedniej strategii postępowania w celu osiągnięcia zamierzonego celu.

Pierwszy problem dotyczy ubezpieczenia na życie i dożycie, w którym istnieje możliwość zmiany formy dopisywania zysków ze składek. Praktycznie problem ten polega na tym, że ubezpieczony co roku ma prawo podjąć jedną z dwóch decyzji: pozostać przy dotychczasowej składce (wtedy do sumy ubezpieczenia dopisywany jest zysk z dotychczas wpłaconych składek i zysków jakie one przyniosły) lub zdecydować się na jej zwiększenie o proponowany przez towarzystwo ubezpieczeniowe procent (wówczas ubezpieczony decyduje się na system francuski podwyższania sumy ubezpieczenia). Strategia optymalna polega na określeniu wariantu ubezpieczenia dla każdego roku jego trwania, w taki sposób, aby wypłacona (w razie śmierci bądź po dożyciu) suma ubezpieczenia posiadała maksymalną wartość przy jednoczesnym ograniczeniu sumy wpłaconych składek sformułowana została w postaci Twierdzenia 3.2.1.

Drugi problem decyzyjny dotyczy optymalnego wyboru formy inwestowania na n lat kapitału posiadanego przez inwestora. Rozważane są dwie możliwości: powierzyć kapitał firmie ubezpieczeniowej (ubezpieczenie na życie i dożycie ze składką jednorazową) lub dokonywać rocznych lokat bankowych. Naturalnym jest w tym przypadku pytanie o to czy i kiedy odpowiednia lokata bankowa byłaby bardziej korzystna niż polisa ubezpieczeniowa. Celem analizy problemu zatem jest określenie różnic między lokatą bankową, a polisą ubezpieczeniową z punktu widzenia osoby dysponującej pewnym kapitałem, która pragnąc go zainwestować, chce osiągnąć jak największe profity w każdej z mogących ją spotkać sytuacji (tzn. dożycie określonego wieku lub przedwczesna śmierć). Zasadnicza część rozważań skoncentrowana jest na wpływie losowości momentu śmierci na odpowiednio: aktualną sumę ubezpieczenia i zgromadzony kapitał. W szczególności analizowana jest średnia wypłata względem rozkładu długości trwania życia z obu przedsięwzięć inwestycyjnych. Ostatni aspekt dotyczy finansowych skutków zerwania warunków umowy w przypadku lokaty bankowej oraz polisy ubezpieczeniowej.

Rozdział 4 poświęcony został zbudowaniu modelu, który pozwala określić opłacalność zawarcia umowy ubezpieczenia w formie grupowej i indywidualnej. Ponadto model ten może być zastosowany oddzielnie w odniesieniu do każdej ze stron umowy ubezpieczenia (ubezpieczony, ubezpieczający, ubezpieczyciel).

W ocenie efektywności decyzji kapitałowych istotną rolę odgrywają strumienie finansowe powstałe w wyniku podjętych decyzji. Przepływy pieniężne w ubezpieczeniu mogą być interpretowane jako dodatnie (wpłaty) lub ujemne (wypłaty) w zależności od tego z punktu widzenia, której strony są rozpatrywane. Zarówno składka ubezpieczeniowa jak i świadczenie mogą być traktowane jako wypłaty lub wpłaty w zależności od tego, której strony umowy ubezpieczenia dotyczą. Na przykład ubezpieczenie grupowe na życie i dożycie jest umową między firmą ubezpieczeniową (ubezpieczyciel) a pracodawcą (ubezpieczający) i pracownikiem (ubezpieczony). Ubezpieczyciel, w zamian za przyjęte od ubezpieczającego składki (które są dla niego wpłatą), zobowiązuje się do wypłaty sumy ubezpieczenia, gdy umiera ubezpieczony, lub gdy dożywa określonego w polisie wieku. Ubezpieczający zobowiązuje się płacić składki (które dla niego są wypłatą) za ubezpieczonego, natomiast w zamian za to ma możliwość skorzystania z różnego rodzaju ulg. Co więcej ubezpieczony zazwyczaj płaci podatek od składki ubezpieczeniowej (i jest to jego wypłatą). Ponadto w wyniku umowy ubezpieczenia otrzymuje on sumę ubezpieczenia (która jest dla niego wpłatą) jeśli dożyje wyznaczonego w umowie wieku. Wypłata następuje także w przypadku śmierci pracownika, a sumę ubezpieczenia otrzymuje uposażony wskazany przez ubezpieczonego pracownika.

Do analizy przepływów pieniężnych związanych z umową ubezpieczenia wykorzystywana będzie tzw. *funkcja łącznych przepływów pieniężnych* do momentu śmierci w okresie $[k; k+1)$. Funkcja ta określona jest następująco:

$$B_K(k) = \sum_{i=0}^{g} b_k(i) \quad dla \quad k = 0, 1, \cdots,$$

gdzie $g = k + 1$, gdy $k < n$ oraz $g = n + 1$, gdy $k \geq n$, natomiast $b_k(i)$ oznacza wysokość przepływu pieniężnego, wynikającego z umowy ubezpieczenia na życie i dożycie, na początku i-tego roku pod warunkiem, że ubezpieczony umrze w okresie $[k; k+1)$.

Funkcja B_K określa przepływy pieniężne od początku okresu ubezpieczenia do momentu wygaśnięcia polisy, który bezpośrednio związany jest ze zmienną losową K. Funkcja łącznych przepływów pieniężnych przyjmuje wartości dodatnie, gdy istnieje przewaga dochodów nad wydatkami, a ujemne gdy występuje sytuacja przeciwna. W Paragrafie 4.2 wyznaczona została wartość oczekiwana oraz wariancja zakumulowanych przepływów pieniężnych względem rozkładu długości trwania życia ubezpieczonego - K.

Podstawowym miernikiem oceny efektywności długookresowych decyzji finansowych są zdyskontowane przepływy pieniężne, których zaletą jest umożliwienie porównywalności dochodów (przychodów) i wydatków z różnych okresów inwestycji. Niech zaktualizowana wysokość przepływu pieniężnego, wynikającego z umowy ubezpieczenia na życie i dożycie, na początku i-tego roku pod warunkiem, że ubezpieczony umrze w okresie $[k; k+1)$ dana będzie wzorem

$$z_k(i) = b_k(i) \cdot v(i),$$

gdzie $v(i)$ jest funkcją dyskontującą.

W pracy zbadana została *zdyskontowana funkcja łącznych przepływów pieniężnych* do momentu śmierci ubezpieczonego w okresie $[k; k+1)$, która określona jest następująco

$$Z_K(k) = \sum_{i=0}^{g} z_k(i) \quad dla \quad k = 0, 1, \cdots,$$

gdzie $g = k + 1$, gdy $k < n$ oraz $g = n + 1$, gdy $k \geq n$.

Wyznaczenie wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej Z_K zależy od postaci funkcji dyskontującej. W przypadku, gdy stopa procentowa u jest stała przez cały okres ubezpieczenia, a kapitalizacja dokonywana jest na koniec roku współczynnik dyskontujący jest postaci:

$$v(i) = \left(\frac{1}{1+u}\right)^i. \tag{0.0.1}$$

Jeśli roczna stopa procentowa u jest stała w okresie jednostkowym kapitalizacji i kapitalizacja dokonywana jest w sposób ciągły, to współczynnik dyskontujący przyjmuje postać:

$$v(i) = e^{-\delta_u i},$$

gdzie $\delta_u = ln(1+u)$ oznacza stopę oprocentowania ciągłego równoważną stopie procentowej u.

Założenie, że współczynnik dyskonta v (a więc stopa procentowa) jest stały przez cały okres ubezpieczenia jest mało realistyczne. Często zdarza się, że w miarę upływu czasu podlega on losowym zmianom, które modelowane mogą być za pomocą procesów stochastycznych. W takim przypadku funkcja dyskontująca przyjmuje postać

$$v(i) = e^{-Y(i)}, \tag{0.0.2}$$

gdzie $Y(i)$ jest odpowiednio dobranym procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach (szczegółowa konstrukcja procesu $Y(i)$ przedstawiona została w Paragrafie 4.4). Zmienna losowa Z_K opisuje podwójną stochastyczną naturę przepływów pieniężnych: długość trwania życia ubezpieczonego oraz intensywność stopy procentowej.

W pracy rozpatrzone zostały dwa szczególne przypadki modelowania procesu stopy procentowej. Pierwszy jest procesem zdefiniowanym wzorem $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, gdzie $X(s)$ jest dowolnym gaussowskim stacjonarnym procesem o funkcji kowariancji $R(t) = e^{-\alpha t}$ oraz wartości oczekiwanej $\mu > 0$. W literaturze probabilistycznej nazywany on jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka. Proces ten jest często rozpatrywany w kontekście badania intensywności stopy procentowej w matematyce aktuarialnej (G. Parker [24], J.A. Beekman i C.P. Fuelling [4] i [5]). Inną klasę rozpatrywanych modeli stanowią procesy postaci $Y(t) = \sigma W(t) + \mu t$ gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera oraz σ, $\mu > 0$ (Beekman i Fuelling [5], J. Garrido [18]). W Rozdziale 4 zaproponowane zostało wykorzystanie do modelowania procesu stopy procentowej ułamkowego ruch Browna $Y(t) = \sigma B_H(t) + \mu t$, gdzie $H \in [\frac{1}{2}; 1]$

Wielkość zaktualizowanej funkcji przepływów pieniężnych zależy od czasu życia ubezpieczonego, który jest losowy, tak więc Z_K jest zmienną losową, której rozkład zależy od rozkładu zmiennej losowej K. Zatem nie można dokładnie określić aktualnej wartości zaktualizowanej funkcji łącznych przepływów pieniężnych, gdyż zależy ona od rozkładu dalszego trwania życia ubezpieczonego oraz stopy procentowej (stała bądź zmienna). Stąd potrzeba liczenia wartości przeciętnej i wariancji łącznych zaktualizowanych przepływów pieniężnych.

Pierwsze dwa momenty zaktualizowanych przepływów pieniężnych względem łącznego rozkładu długości trwania życia ubezpieczonego oraz intensywności stopy procentowej, określa się następująco (Twierdzenie 4.3.1):

$$\mathbb{E}(Z) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{D})^T \boldsymbol{M} \tag{0.0.3}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_k \tag{0.0.4}$$

$$\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{D})^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}. \tag{0.0.5}$$

Przedstawiając momenty w formie macierzowej udało się uzyskać faktoryzację, która okazała się użyteczna. Przede wszystkim składowe iloczynu macierzy mają dość jasną interpretację. A mianowicie macierz $\boldsymbol{D}$ określa rozkład długości trwania życia ubezpieczonego w okresie ubezpieczenia na życie i dożycie. Macierze $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Delta}$, i $\boldsymbol{R}$ charakteryzują parametry procesu stopy procentowej. Natomiast macierz $\boldsymbol{B}$ określa wysokości przepływów pieniężnych z punktu widzenia strony umowy ubezpieczenia.

Oprócz interpretacji forma macierzowa ułatwia obliczenia numeryczne przy kompleksowej analizie ubezpieczenia. Z otrzymanych wzorów wynika, że aby obliczyć typowy przedział zmienności zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych osobno dla każdej ze stron umowy ubezpieczenia, wystarczy jedynie raz wyznaczyć macierze $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Delta}$ i $\boldsymbol{R}$, a następnie dla każdej ze stron umowy ubezpieczenia (na podstawie wyznaczonej dla niej funkcji $b_k(i)$) określić macierz przepływów pieniężnych $\boldsymbol{B}$.

Ponadto forma macierzowa wzorów na momenty upraszcza przeprowadzenie analizy zmienności zaktualizowanych przepływów pieniężnych w przypadku ubezpieczenia grupowego. Całkowity zaktualizowany zakumulowany przepływ pieniężny $Z_{(N)}$ dla grupy N ubezpieczonych osób, z których każda została ubezpieczona na ten sam okres n, określony jest w postaci wzoru

$$Z_{(N)} = \sum_{l=1}^{N} Z_l,$$

gdzie Z_l oznacza zaktualizowaną funkcję zakumulowanych przepływów pieniężnych l-tej ubezpieczonej osoby w grupie. Korzystając z reprezentacji macierzowej (Twierdzenie 4.3.2) wykazano, że

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{(N)}) &= \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l\right)^T \boldsymbol{M} \\
\mathbb{D}^2(Z_{(N)}) &= \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l\right)^T \boldsymbol{R} \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l\right) - \\
&\quad \sum_{l=1}^{N} \left((\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{I}_k \right),
\end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{B}_l$ jest macierzą przepływów pieniężnych a $\boldsymbol{D}_l$ wektorem rozkładu trwania życia w okresie ubezpieczenia dla l-tej osoby w grupie.

W szczególnym przypadku, gdy $\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{B}$ oraz $\boldsymbol{D}_l = \boldsymbol{D}$ dla każdego $l = 1, \ldots, N$ (czyli dla jednorodnej grupy osób) powyższe wzory przyjmują postać:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{(N)}) &= N(\boldsymbol{BD})^T \boldsymbol{M} \\
\mathbb{D}^2(Z_{(N)}) &= N^2(\boldsymbol{BD})^T \boldsymbol{RBD} - \\
& N\left((\boldsymbol{BD})^T \boldsymbol{\Delta BD} - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta B I}_k\right).
\end{aligned}
$$

W analizie ubezpieczenia jednorodnej grupy istotna jest przeciętna wartość łącznych przepływów pieniężnych przypadająca na jedną osobę w grupie, czyli zmienna losowa postaci $\frac{1}{N}Z_{(N)}$. W przypadku jednorodnej grupy osób wartość oczekiwana zmiennej losowej $\frac{1}{N}Z_{(N)}$ wyraża się wzorem

$$\mathbb{E}(\frac{1}{N}Z_{(N)}) = (\boldsymbol{BD})^T \boldsymbol{M}$$

i nie zależy od ilości osób w grupie. Okazuje się, że wraz ze wzrostem liczby osób w grupie wariancja zmiennej losowej $\frac{1}{N}Z_{(N)}$ dąży do pewnej granicznej wartości:

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{D}^2(\frac{1}{N}Z_{(N)}) = (\boldsymbol{BD})^T \boldsymbol{RBD}.$$

W Rozdziale 5, model strumieni finansowych został zastosowany do grupowego ubezpieczenia na życie i dożycie. Motywacją tej analizy były dokonane w 1995 roku zmiany ustawy o podatku dochodowym od osób prawnych dotyczące wydatków ponoszonych przez podatnika (zakład pracy) pośrednio na rzecz pracowników, jeśli nie wynikały one z układu zbiorowego pracy lub innych aktów prawnych. Zmiany te dotyczą zmniejszenia podstawy opodatkowania zakładu pracy o wysokość składek płaconych za ubezpieczenie pracowników. Ponadto od składek tych zakład pracy nie opłaca składek na rzecz ZUS, a w przypadku śmierci pracownika wypłaca jedynie nadwyżkę (jeśli istnieje) różnicy między odprawą pośmiertną a sumą ubezpieczenia. Zwolnienie pracodawcy z opłat podatkowych oraz innych opłat wynikających ze stosunku pracy, w przypadku zakupu lub współuczestnictwa w zakupie ubezpieczenia dla pracowników ma także konsekwencje w stosunku do poborów pracownika. Pracownik wyrażając zgodę na wykupienie przez zakład pracy ubezpieczenia ma obowiązek potraktować składkę jak swój dochód osobisty i płacić od tego dochodu podatek. Zatem z tytułu zawartego ubezpieczenia też ponosi on pewne wydatki.

Zostala przeprowadzona analiza przepływów pieniężnych dla pracodawcy, który wykupił ubezpieczenie dla pracowników. Zaproponowano kalkulację wszystkich możliwych zwolnień podatkowych i innych wydatków ponoszonych przez pracodawcę z tytułu zawarcia grupowego ubezpieczenia na życie i dożycie. Między innymi określone zostały wysokości przepływów pieniężnych $b_k(i)$, a na ich podstawie funkcja łącznych przepływów pieniężnych. Rozpatrzono zaktualizowaną funkcję przepływów pieniężnych w przypadku kapitalizacji stałej i zmiennej. Podobną analizę przeprowadzono dla ubezpieczonego pracownika.

W Paragrafie 5.4 model strumieni finansowych został zastosowany do porównania ubezpieczenia na życie i dożycie z podwyżką płac w zakładzie pracy. Zgodnie z zasadami finansowania ubezpieczeń grupowych, środki pieniężne przeznaczone przez pracodawcę na ubezpieczenie na życie i dożycie dla pracowników muszą pochodzić z innego źródła niż pula wynagrodzeń pracowników wynikająca ze stosunku pracy. Dlatego pracodawca gospodarując wolnymi środkami może zamiast na ubezpieczenie pracowników, przeznaczyć je bezpośrednio na podwyżki płac. Dokonano analizy korzyści finansowych zarówno dla pracodawcy, jak i pracownika. Dla obu stron określono co jest korzystniejsze (w ciągu n lat): wykupienie ubezpieczenia dla pracownika, czy przeznaczenie przez pracodawcę na podwyżkę wynagrodzenia kwoty równej skladce ubezpieczeniowej.

Rozważana w niniejszej pracy analiza ubezpieczenia na życie i dożycie dotyczy głównie aspektów inwestycyjnych ubezpieczenia od strony ubezpieczonego i ubezpieczającego. Okazuje się, że w oparciu o model strumieni finansowych można dokonać oceny finansowej ubezpieczenia także z punktu widzenia ubezpieczyciela. Dla firmy ubezpieczeniowej szczególnie ważna jest ocena wysokości przyszłego świadczenia, które będzie musiała wypłacić z tytułu sprzedanego ubezpieczenia. Problem ten jest istotny, gdyż zgodnie ze stosowaną przez ubezpieczycieli *zasadą równoważności* składka netto jest równa wartości oczekiwanej przyszłych świadczeń wynikających z umowy ubezpieczenia. Ponadto w celu określenia *dodatku bezpieczeństwa* (inaczej *dodatku na ryzyko* służącego do gromadzenia funduszu przeznaczonego na pokrycie niekorzystnych odchyleń w przebiegu zdarzeń losowych) czyli części składki przeznaczonej na pokrycie ryzyka śmierci ubezpieczonego przed końcem okresu ubezpieczenia, niezbędna jest znajomość wariancji wysokości przyszłego świadczenia. Problem określenia przeciętnej wartości świadczenia i jej zmienności był analizowany przez wielu autorów. Między innymi w 1994 roku G. Parker w pracy [24] badał zdyskontowaną wartość świadczenia, które musi wypłacić ubezpieczyciel w ubezpieczeniu na życie i dożycie. Rozpatrywał on ubezpieczenie, w którym proces stopy procentowej jest modelowany przez proces Ornsteina-Uhlenbecka, a czas trwania życia ubezpieczonego jest losowy. Ponadto, w przypadku ubezpieczenia indywidualnego i grupowego, obliczył wartość oczekiwaną i wariancję wysokości wypłacanego przez ubezpieczyciela świadczenia korzystając z następujących wzorów:

$$\mathbb{E}(Z_l) = \sum_{k_l=0}^{n-1} {}_{k_l|}q_x b_{k_l+1}\mathbb{E}(\exp(-Y(k_l+1)) +_n p_x e_n \mathbb{E}(exp(-Y(n)) \tag{0.0.6}$$

$$\mathbb{E}(Z_l^2) = \sum_{k_l=0}^{n-1} {}_{k_l|}q_x b_{k_l+1}^2\mathbb{E}(\exp(-2Y(k_l+1)) +_n p_x e_n^2 \mathbb{E}(exp(-2Y(n)) \tag{0.0.7}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_sZ_l) &= \sum_{k_s=0}^{n-1}\sum_{k_l=0}^{n-1} {}_{k_s|}q_x\ {}_{k_l|}q_x b_{k_s+1} b_{k_l+1}\mathbb{E}(\exp(-Y(k_s+1) - Y(k_l+1)) \\ &+ 2\sum_{k=0}^{n-1} {}_n p_{x\,k|}q_x b_{k+1} e_n \mathbb{E}(\exp(-Y(k+1) - Y(n)) \\ &+ ({}_np_x)^2 e_n^2 \mathbb{E}(exp(-2Y(n)).\end{aligned} \tag{0.0.8}$$

W ostatnim paragrafie pracy wykazano, że uzyskane przez G. Parkera wzory na określenie dwóch pierwszych momentów zaktualizowanej wysokości świadczenia wypłacanego przez ubezpieczyciela wynikają z Twierdzenia 4.3.1. Wzory (0.0.6), (0.0.7), (0.0.8) przedstawić można w postaci odpowiednio równości (0.0.3), (0.0.4) i (0.0.5) tzn. zwięzłego zapisu macierzowego.

Rozważania dotyczące zarówno aspektów inwestycyjnych ubezpieczonego w indywidualnym ubezpieczeniu na życie i dożycie jak i zobowiązań finansowych pracownika i pracodawcy w ubezpieczeniu grupowym zostały zilustrowane przykładami numerycznymi. Przedstawione w pracy przykłady zostały opracowane w oparciu o Polskie Tablice Trwania Życia ogółem 1990-1991, oraz Zbiór taryf okresowych za jednostkowe ubezpieczenia na życie PZU Życie S.A.

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

1.1 Charakterystyka ubezpieczeń na życie

1.1.1 Ogólna klasyfikacja i koncepcja ubezpieczeń na życie

Koncepcja wspólnej Europy związana jest z potrzebą ujednolicenia prawodawstwa normującego ważniejsze dziedziny działalności państwa poprzez *Dyrektywy*, które są adresowane do państw członkowskich. Obligują one do dokonania zmian i korekt w prawie danego kraju, tak aby było ono zgodne z prawem wspólnoty. Celem dyrektyw jest osiągnięcie jednolitego europejskiego rynku finansowego. Opierając się na dyspozycjach dyrektyw Unii Europejskiej, które nie zezwalają na prowadzenie przez jedno towarzystwo ubezpieczeniowe zarówno działalności w zakresie ubezpieczeń majątkowych jak i życiowych, w Polsce dokonano podziału rynku ubezpieczeniowego na dwa segmenty według odrębnych zakresów działania. Podstawowe regulacje prawne dotyczące funkcjonowania ubezpieczeń w Polsce zawarte są w ustawie o działalności ubezpieczeniowej [31], która wyodrębnia dwa działy ubezpieczeń: Dział I - Ubezpieczenia na życie oraz Dział II - Pozostałe ubezpieczenia majątkowe, specyfikując grupy, rodzaje i ryzyka ubezpieczeniowe.

Podział zakładów ubezpieczeń (ubezpieczycieli) na prowadzących ubezpieczenia na życie (Dział I) oraz prowadzących ubezpieczenia majątkowe i inne osobowe (Dział II) związane jest z:

- uniemożliwieniem przepływu środków finansowych między tymi działami,
- wyższymi wymogami kapitałowymi dla zakładów ubezpieczeń na życie,
- odmiennymi zasadami gospodarki finansowej,
- koniecznością zatrudnienia aktuariusza przez towarzystwa ubezpieczeń na życie.

Różnice te wynikają z istoty ubezpieczeń prowadzonych przez wyróżnione działy. Kryterium tego podziału jest czas trwania ochrony ubezpieczeniowej oraz kalkulacja składek netto, związana z rezerwą matematyczną. W ubezpieczeniach życiowych (długoterminowych) decydującą rolę odgrywają dwa elementy: długość przyszłego czasu trwania życia osoby ubezpieczonej i stopa procentowa lokat ubezpieczeniowych. Dlatego też konieczne jest tworzenie rezerwy matematycznej na przyszłe zobowiązania. Natomiast w ubezpieczeniach nieżyciowych (krótkoterminowych) główną rolę w kalkulacji składki netto odgrywają ilości i wielkości szkód. Związane jest to z faktem, że w ubezpieczeniu trwającym nie dłużej niż rok dochód z inwestowanej składki jest niewielki i nie jest uwzględniany przy jej obliczaniu (A. Banasiński [1]).

Ubezpieczenia na życie są ubezpieczeniami dobrowolnymi. Ochrona ubezpieczeniowa oparta jest na podstawie dobrowolnej umowy zawieranej między ubezpieczającym, ubezpieczonym i ubezpieczycielem.

Naczelną ideą ubezpieczenia jest wspólne (wzajemne) pokrywanie strat powstałych w wyniku zdarzeń losowych. Pojęcie zdarzenia losowego wiązane jest ze zdarzeniami, które występują wbrew woli człowieka lub niezależnie od niej. Ubezpieczenie jest umową, w której zakład ubezpieczeń zobowiązuje się spełnić określone świadczenie w razie zajścia przewidzianego w umowie wypadku, a ubezpieczający zobowiązuje się zapłacić składkę.

Ubezpieczenia na życie mogą być zawierane w formie grupowej przez zakłady pracy lub indywidualnie.

W załączniku do ustawy o działalności ubezpieczeniowej, ubezpieczenia na życie są klasyfikowane w następujący sposób:

1. Ubezpieczenia na życie,
2. Ubezpieczenia posagowe, zaopatrzenia dzieci,
3. Ubezpieczenia na życie jeśli związane są z funduszem inwestycyjnym,
4. Ubezpieczenia rentowe,
5. Ubezpieczenia wypadkowe i chorobowe, będące uzupełnieniem do ubezpieczeń wymienionych w grupach 1-4.

Specyfika ubezpieczenia na życie polega na tym, że ubezpieczeniem zazwyczaj obejmowane są zdarzenia, które muszą wystąpić (śmierć ubezpieczonego), niewiadomy jest tylko, termin wystąpienia. Podstawowym zdarzeniem, jakie obejmuje ubezpieczenie na życie jest śmierć ubezpieczonego lub dożycie określonego w umowie wieku.

Do ubezpieczenia mogą być włączone ryzyka dodatkowe, do których należą:

- śmierć w wyniku nieszczęśliwego wypadku,
- trwałe inwalidztwo w wyniku nieszczęśliwego wypadku,
- czasowa lub trwała niezdolność do pracy,
- ryzyko zachorowania, w tym tzw. ciężkiej choroby,
- urodzenie się dziecka,
- ślub,
- rozpoczęcie studiów i inne.

Ubezpieczenia wypadkowe i zdrowotne formalnie zaliczane są do ubezpieczeń nieżyciowych, jednak gdy stanowią one uzupełnienie ubezpieczenia na życie, są zaliczane do ubezpieczeń na życie.

Wśród ubezpieczeń na życie odrębną kategorię stanowią ubezpieczenia posagowe. Specyfiką tych ubezpieczeń jest fakt, że osobą ubezpieczoną jest rodzic (ojciec albo matka) lub każda inna osoba dorosła, zaś osobą uposażoną jest dziecko. Po okresie ubezpieczenia dziecko otrzymuje świadczenie, które może być porównywane z wpłaconym kapitałem i odsetkami. Ubezpieczenie takie może być zawarte z opcją renty, co oznacza, że w razie śmierci osoby ubezpieczonej dziecko otrzymuje rentę miesięczną do końca okresu ubezpieczenia, a następnie nie uszczuplony kapitał.

Jeszcze inną grupę ubezpieczeń na życie stanowią ubezpieczenia rentowe (okresowe i dożywotnie), przy których - w przeciwieństwie do typowych ubezpieczeń na życie - wysokość świadczeń ubezpieczeniowych wynika z długowieczności osoby ubezpieczonej. W tego typu ubezpieczeniach zazwyczaj śmierć przerywa wypłatę świadczenia. Niekiedy ubezpieczenia rentowe stanowią dodatek do ubezpieczeń na życie i wówczas zamiast jednorazowej wypłaty świadczenia po dożyciu określonego, w umowie ubezpieczenia, wieku ubezpieczony otrzymuje rentę.

Charakter ubezpieczeń na życie sprawia, że niekiedy bardziej przypominają one formę oszczędzania i inwestowania środków finansowych, niż typowe ubezpieczenia (szczególnie dotyczy to ubezpieczeń z funduszem inwestycyjnym), gdzie określone zdarzenie może wystąpić ale nie musi. Poza ubezpieczeniami terminowymi na życie, ryzyko zawsze się realizuje, ale nie wiadomo kiedy to nastąpi. Podstawowa różnica między oszczędzaniem tradycyjnym, a oszczędzaniem w ramach ubezpieczenia na życie polega na tym, że w ubezpieczeniu na życie, w razie zajścia zdarzenia objętego umową ubezpieczony (uposażony) otrzymuje pełną wartość spodziewanych oszczędności, czyli sumę ubezpieczenia. To powoduje, że ubezpieczony uzyskuje pełną kwotę jaką by otrzymał, gdyby nie nastąpiło nieprzewidziane zdarzenie (śmierć, choroba, kalectwo). Natomiast w przypadku tradycyjnego oszczędzania, w razie potrzeby, osoba oszczędzająca może wycofać tylko tyle pieniędzy ile uskładała plus oprocentowanie.

Szczegółowy opis rodzajów ubezpieczeń można znaleźć w pracy E. Stroińskiego [27].

1.1.2 Ubezpieczenie na życie i dożycie

W umowie ubezpieczenia istnieją co najmniej dwie strony: ubezpieczony i ubezpieczyciel. Ponadto może występować uposażony (osoba uprawniona). Ubezpieczony ma obowiązek zapłacić ubezpieczycielowi określoną sumę pieniężną zwaną składką ubezpieczeniową, która wchodzi w skład funduszu ubezpieczeniowego. Fundusz ten pozwala on ubezpieczycielowi wywiązać się ze swoich obowiązków w stosunku do ubezpieczonych, tworzy rezerwę oraz źródło zysku ubezpieczyciela. Zysk ten w znacznej mierze bierze udział w powiększaniu funduszu.

Z szerokiej gamy ubezpieczeń życiowych można wyróżnić następujące dwa rodzaje:

- klasyczne ubezpieczenia na życie (na wypadek śmierci), w których ubezpieczyciel wypłaca świadczenie uposażonemu po śmierci ubezpieczonego,

- ubezpieczenie na dożycie, w którym wypłata świadczenia następuje w przypadku dożycia przez ubezpieczonego wieku określonego w polisie ubezpieczeniowej.

Ubezpieczenie mieszane - na życie i dożycie stanowi połączenie dwóch wymienionych ubezpieczeń: wypłata świadczenia następuje, gdy ubezpieczony dożyje określonego wieku lub gdy śmierć nastąpi przed tym terminem. Zatem ubezpieczenie to oprócz ochrony życia, ma w sobie część oszczędnościową, która powinna spełniać następujące funkcje:

- w razie śmierci ubezpieczonego ma zapewnić realne zabezpieczenie finansowe uposażonemu,

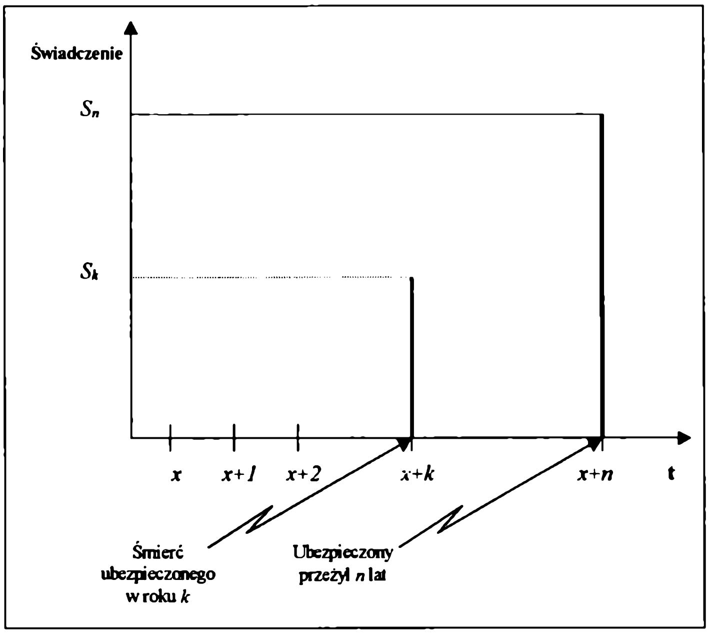
- w momencie osiągnięcia przez ubezpieczonego określonego (w umowie) wieku, wypłacony kapitał powinien posiadać dobrą siłę nabywczą.

Niech n oznacza okres ubezpieczenia, przy czym kolejne lata trwania umowy ubezpieczenia będą oznaczone przez k ($k \in \{0, 1, 2, ...\}$). Ponadto niech x będzie wiekiem wstępu osoby ubezpieczającej się

Suma ubezpieczenia w k-tym roku trwania ubezpieczenia S_k jest to wysokość wypłaty w przypadku śmierci ubezpieczonego lub świadczenie pobrane przez ubezpieczonego po zakończeniu okresu ubezpieczenia. Sumę ubezpieczenia wypłacana na koniec okresu ubezpieczenia (dożycie) oznaczać będziemy przez S_n.

Schematu konstrukcji ubezpieczenia na życie i dożycie został przedstawiony na Rysunku 1.1.

Rysunek 1.1: Schemat konstrukcji ubezpieczenia na życie i dożycie.



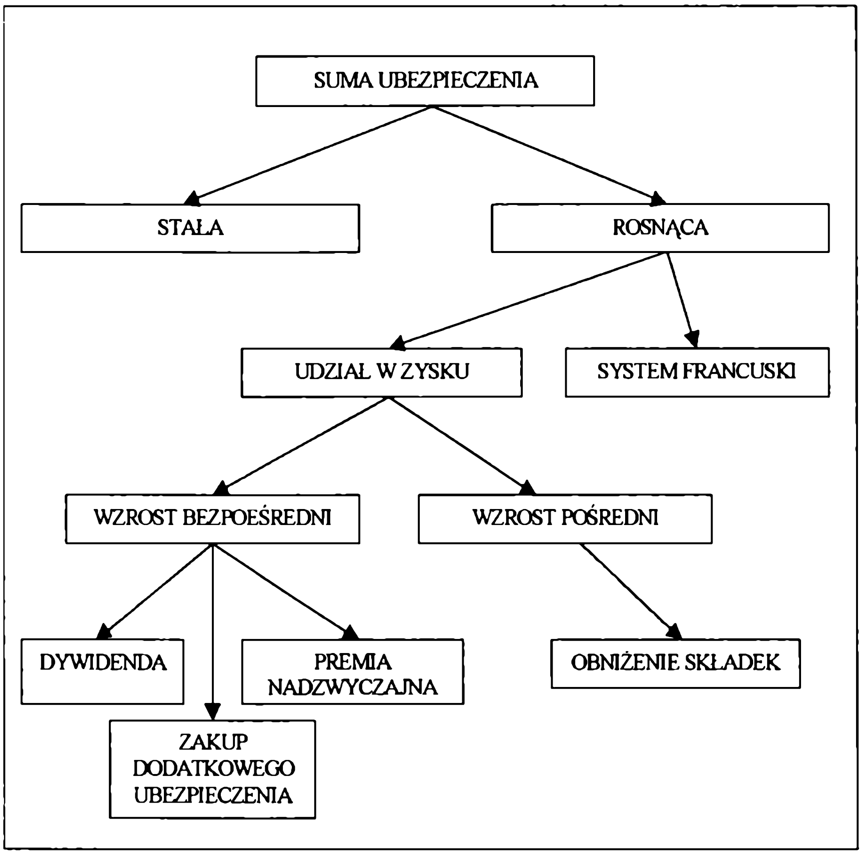
Źródło: Opracowanie własne

Załóżmy, że osoba w wieku x zawiera ubezpieczenie na n lat. W ciągu okresu ubezpieczenia mogą zdarzyć się dwie sytuacje:

- ubezpieczony umrze przed końcem okresu ubezpieczenia. Jeżeli śmierć następuje w roku k, to aktualna suma ubezpieczenia, która w tym momencie jest równa S_k, zostaje wypłacona osobie uposażonej.

- ubezpieczony przeżyje n lat. Wtedy aktualna suma ubezpieczenia S_n zostaje wypłacona ubezpieczonemu.

Rysunek 1.2: Klasyfikacja ubezpieczeń ze względu na sposób dopisywania zysku do sumy ubezpieczenia



Źródło: Opracowanie własne

Głównym zagrożeniem opłacalności tego typu przedsięwzięć jest inflacja. Firmy ubezpieczeniowe proponują różne formy zabezpieczenia przed nią (nazywane indeksacją, udziałem w zysku, czy stopą procentową), od których zależy wysokość sumy ubezpieczenia w danym roku okresu ubezpieczenia.

Zazwyczaj zysk z inwestycji kapitałowych szacowany jest przez większość zakładów ubezpieczeniowych na poziomie około 5% rocznie. Jest to tzw. techniczna stopa oprocentowania.

Przy ustalaniu technicznej stopy procentowej można popełnić dwa rodzaje błędów. Pierwszy to niedoszacowanie możliwości osiągnięcia zysku, które powoduje wzrost składki netto a przez to ubezpieczenia stają się mniej konkurencyjne na rynku, Drugim błędem jest przeszacowanie możliwości osiągnięcia zysku z tytułu posiadanego kapitału, które pociąga ustalenie składki ubezpieczeniowej na niższym poziomie. Powoduje to straty zakładu ubezpieczeń, które będą musiały być pokryte z różnych źródeł na przykład poprzez niższe niż kalkulowano koszty, ale najczęściej ze środków własnych zakładu ubezpieczeń.

Właściwa ocena technicznej stopy oprocentowania jest szczególnie istotna w ubezpieczeniach na życie i dożycie. Zawierając umowę ubezpieczenia na życie zakład ubezpieczeń nie tylko musi określić ile wypłaci w razie zajścia określonego zdarzenia, ale także jest zobowiązany dokonać wypłaty w przeciągu określonego w umowie czasu.

Oprócz technicznej stopy procentowej wysokość sumy ubezpieczenia jest podstawą do obliczania składki jak też podstawą do obliczenia należnego świadczenia. Jeżeli nie istnieją odrębne przepisy odnośnie ubezpieczeń dodatkowych, to zazwyczaj świadczenie wypłacane jest w wysokości sumy ubezpieczenia.

Wypłata świadczenia w wysokości sumy ubezpieczenia zazwyczaj powoduje zrealizowanie i rozwiązanie umowy ubezpieczenia. W umowie ubezpieczenia na życie i dożycie, wypłata sumy ubezpieczenia w przypadku śmierci rozwiązuje umowę i po upływie okresu ubezpieczenia świadczenie nie przysługuje.

Ze względu na to, że ubezpieczenia na życie i dożycie mają charakter długoterminowy i w celu zmniejszenia skutków inflacji suma ubezpieczenia może ulegać okresowemu (przeważnie corocznemu) podwyższaniu.

Formy podwyższania sumy ubezpieczenia ilustruje Rysunek 1.2.

Stała suma ubezpieczenia była stosowana w ubezpieczeniach starego typu, a obecnie ma zastosowanie jedynie w ubezpieczeniach krótkoterminowych na życie. Niektóre zakłady stosują rygorystyczne zasady podwyższania sumy ubezpieczenia (indeksacji) np. jeżeli ubezpieczony rezygnuje przez kolejne dwa lata z podwyższania sumy ubezpieczenia to traci on prawo do indeksacji. Ponadto niektóre zakłady ubezpieczeń nie dokonują indeksacji w trakcie ostatnich lat okresu ubezpieczenia.

Podwyższanie sumy ubezpieczenia może odbywać się bez zmiany składki i mówi się wówczas o udziale ubezpieczonego w zyskach zakładu ubezpieczeń. Związane to jest z posiadaniem przez zakład ubezpieczeń składki oszczędnościowej tzn. rezerwy matematycznej, która odpowiednio zainwestowana, przez firmę ubezpieczeniową, przynosi dochód (zysk). Udział w zysku jest możliwy dzięki temu, że zakłady ubezpieczeń ustalają na niskim poziomie techniczną stopę oprocentowania. Zatem zysk stanowi różnicę między faktycznymi dochodami a zakładanymi w planie technicznym ubezpieczenia i jest dzielony między ubezpieczonego a zakład ubezpieczeń. W Polsce podział zysku na ogół odbywa się w stosunku 85:15. Zysk może być kierowany do ubezpieczonych w formie dywidendy lub premii nadzwyczajnej dodawanej corocznie do sumy ubezpieczenia. Może być też zakupywane dodatkowe ubezpieczenie, a wtedy coroczny zysk stanowi jednorazową składkę za ubezpieczenie.

Inną formą udziału w zysku, ale nie powodującą nominalnego wzrostu sumy ubezpieczenia, jest obniżenie przyszłych składek i przez to podwyższenie pośrednio sumy ubezpieczenia.

Niektóre zakłady ubezpieczeń stosują waloryzację sumy ubezpieczenia równolegle z podwyższaną corocznie składką (system francuski). Wówczas suma ubezpieczenia jak i składka są podwyższane o taki sam procent. Przy waloryzacji sumy ubezpieczenia podstawowego zazwyczaj w tym samym stopniu waloryzowane są wszystkie sumy ubezpieczeń dodatkowych.

Różnicę między tzw. udziałem w zysku, a systemem francuskim przedstawia przykład zaczerpnięty z pracy E. Stroińskiego [27].

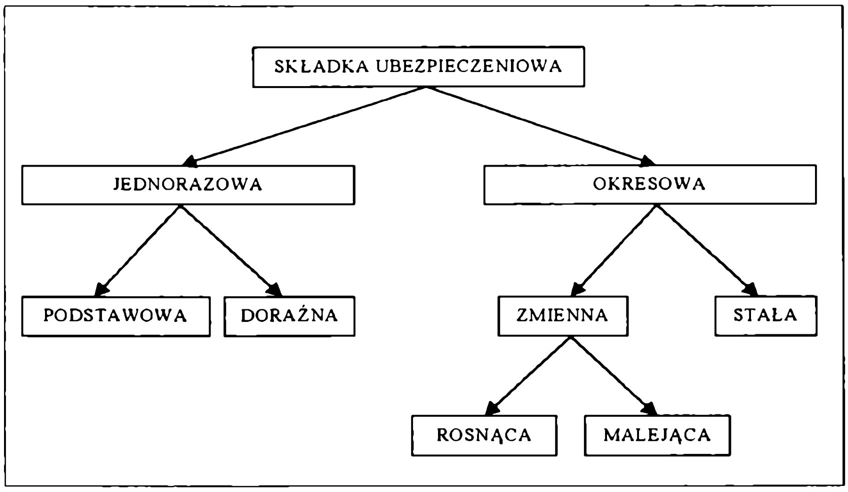
Przykład 1.1.1 *Zakładając łączny dochód z kapitału* 30% *i stopę techniczną* 5%, *podział zysku może być dokonany na dwa sposoby.*

Przy zastosowaniu tzw. udziału w zysku, jeżeli zakład ubezpieczeń osiągnie w ciągu roku dochód z lokat w wysokości 30%, *a w planie technicznym zakładał* 5% *to wówczas* 24% $(= 1,30 : 1,05 - 1)$ *stanowi dodatkowy nieprzewidziany zysk. Zysk ten jest dzielony pomiędzy ubezpieczonego i zakład ubezpieczeń w stosunku* $85 : 15$. *Zatem dodatkowy* *nieprzewidziany zysk ubezpieczonego jest równy* 20,4% (= 24% · 0,85). *Zysk ten dotyczy jednak tylko składki już wpłaconej. Zatem obliczane jest* 20,4% *od wpłaconej składki (bądź sumy składek i zysków jakie one przyniosły w poprzednich latach), po czym wielkość ta w postaci dywidendy, składki na dodatkowe ubezpieczenie lub premii nadzwyczajnej jest przyznawana ubezpieczonemu.*

W przypadku systemu francuskiego zakład ubezpieczeń proponuje podwyższenie wpłaconej składki o 24% *lub mniej, jednak co najmniej o* 20,4%, *co daje możliwość podwyższenia także od* 20,4% *do* 24% *sumy ubezpieczenia.*

Ze względu na częstotliwość i formę składek, ubezpieczenia można podzielić w sposób jak na Rysunku 1.3.

Rysunek 1.3: Klasyfikacja ubezpieczeń ze względu na rodzaj składek.



Źródło: Opracowanie własne

Najczęstszą formą płacenia za ubezpieczenie jest składka okresowa. Jako zasadę przyjmuje się, że składka jest roczna i płacona za rok z góry, choć towarzystwa ubezpieczeniowe dopuszczają składki w formie półrocznej, kwartalnej lub miesięcznej. Suma składek wpłaconych w ciągu roku w krótszych odstępach czasu jest przeważnie wyższa od składki rocznej ponieważ może ona być zainwestowana już na początku roku.

Składki opłaca się za czas trwania odpowiedzialności zakładu ubezpieczeń. Jeżeli składka kwartalna jest opłacona z góry w miesiącu styczniu, a śmierć ubezpieczonego nastąpiła 26 stycznia, to składka za luty i marzec podlega zwrotowi. Kolejne składki, wpłacane przez ustalony okres są, w przypadku stałej składki, jednakowej wysokości. Często skladki podlegają okresowej, przeważnie rocznej podwyżce. Wynika to z chęci dostosowania ich do zmniejszającej się siły nabywczej pieniądza. Wtedy ubezpieczyciel powiadamia ubezpieczonego o stosownej podwyżce, z którą nierozerwalnie związana jest podwyżka sumy ubezpieczenia. Podwyżka ta nie jest obligatoryjna i może nie zostać przyjęta przez ubezpieczającego.

W przypadku składki jednorazowej, jest ona zawsze płacona z góry za cały okres ubezpieczenia. W niektórych typach ubezpieczeń ogólne warunki dopuszczają wpłacanie jednorazowych składek doraźnych, które w całości podwyższają część oszczędnościową. Taka możliwość czasem istnieje także w przypadku ubezpieczeń ze składką okresową.

Terminowa opłata składek należy do obowiązków ubezpieczonego. Ubezpieczyciel nie ma obowiązku przypominać ubezpieczonemu o tym terminie. W przypadku zaprzestania opłaty składek towarzystwo ubezpieczeniowe ma prawo rozwiązać umowę ubezpieczenia lub zamienić ją na ubezpieczenie bezskładkowe. W praktyce zakład ubezpieczeń zamieszcza w ogólnych warunkach ubezpieczenia klauzulę, w myśl której istnieje prolongata na zapłacenie zaległości (nie dłużej jednak niż 3 miesiące). Po tym terminie ubezpieczyciel za wznowienie ubezpieczenia może zażądać zapłacenia zaległych składek wraz z odsetkami.

W ubezpieczeniu grupowym składka może być obliczana w sposób indywidualny, ale może być także obliczana w sposób uproszczony, np. uwzględniając jedynie strukturę wiekową czy zawodową. Często zakład ubezpieczeń rezygnuje z oceny zdrowia poszczególnych osób przyjmując jednolitą taryfę dla wszystkich członków grupy.

1.2 Elementy matematyki aktuarialnej i finansowej

1.2.1 Trwanie życia

Do określenia dalszego czasu trwania życia człowieka (w szczególności ubezpieczonego) są najczęściej wykorzystywane tablice trwania życia, które są głównym narzędziem analizy umieralności. Zawierają one funkcje określające dla osób urodzonych w tym samym czasie ich szansę dożycia dowolnego wieku. Tablice, w których wiek podany jest z dokładnością do jednego roku, są nazywane *tablicami pełnymi*. Tablice, tworzone na podstawie danych o liczbie zgonów i liczbie ludności ujęte w przedziały wiekowe większe niż jeden rok, nazywane są *tablicami skróconymi*.

Tablice trwania życia można także podzielić ze względu na ich relację do rzeczywistości. Dzielą się one na surowe i modelowe. Terminu *tablica surowa* używa się w odniesieniu do tablic, w których wartości funkcji tablicowych są oszacowane na podstawie surowego materiału statystycznego. W tego typu tablicach funkcje oszacowane na podstawie danych z obserwacji nie podlegają interpolacji lub ekstrapolacji oraz żadnym założeniom modelowym. Wśród *tablic modelowych* wyróżnić można *tablicę hipotetyczną* i *tablicę perspektywiczną*. Pierwsza jest rodzajem tablicy modelowej, w której wartości funkcji wynikają z założenia teoretycznego (określającego sytuację nie istniejącą w rzeczywistości) potrzebnego do celów badawczych. Natomiast tablice konstruowane dla okresów przyszłych oparte na pewnych założeniach (które nie mogą być prognozą) nazywane są *tablicami perspektywicznymi*.

Inny podział tablic wymieralności dotyczy metody szacowania rozkładu trwania życia. Umieralność może być analizowana zarówno w ujęciu przekrojowym (*tablice bieżące*) jak i wzdłużnym (*tablice kohortowe*). Najczęściej stosowana jest analiza przekrojowa tzw. bieżąca, gdyż podstawą do wszelkich obliczeń są dane z krótkiego okresu, np. roku lub kilku lat. Analiza wzdłużna powoduje problemy natury technicznej gdyż jej pełne wykonanie wymaga długiego czasu. Wzdłużne ujęcie umieralności pokolenia wymaga obserwowania go w ciągu najczęściej stu lat. W ujęciu kohortowym dane dotyczą grupy osób urodzonych w tym samym czasie (przedziale czasu) i są rejestracją procesu wymierania obserwowanej zbiorowości(pokolenia, kohorty).

W kohortowej teorii konstrukcji tablic trwania życia rozpatrywana jest zbiorowość l_0 osób urodzonych w chwili $t = 0$. Niech $N_0(t)$ oznacza liczbę osób, które dożyły wieku t

$(t > 0)$. Ponadto niech

$$p_j = \mathbb{P}(N_0(t) = j | N_0(0) = l_0), \quad j = 0, 1, 2, 3, ...$$

oznacza prawdopodobieństwo, że chwili t dożyło j osób pod warunkiem, że w chwili $t = 0$ zbiorowość liczyła l_0 osób. W celu określenia p_j zakłada się, że ryzyko śmierci wszystkich osób żyjących w chwili t jest niezależne oraz prawdopodobieństwo śmierci w krótkim przedziale czasu jest w przybliżeniu proporcjonalne do tego czasu.

W praktyce dostępne obserwacje dotyczą przedziałów wieku, co pozwala na oszacowanie funkcji dyskretnych będących analogonami odpowiednich funkcji ciągłych. Kohortowa tablica trwania życia zawiera przede wszystkim dwie funkcje l_x i d_x, które są rejestracją danych i służą do konstruowania pozostałych funkcji. Funkcje te są następujące:

- liczba dożywających - funkcja, której wartość l_x określa liczbę osób żyjących w wieku x spośród l_0 osób tworzących liczebność początkową kohorty;

- liczba zmarłych - funkcja, której wartość d_x określa liczbę osób z tej kohorty, zmarłych w przedziale wieku $(x, x + 1)$.

Liczby osób dożywających i zmarłych są związane następującą zależnością $l_{x+1} = l_x - d_x$ dla $x = 0, 1, ..., w - 1$ oraz $l_w = d_w$, przy czym $d_0 + d_1 + ... + d_w = l_0$.

W tablicy trwania życia określona jest funkcja nazywana *prawdopodobieństwem zgonu* oznaczona jako q_x. Wartość q_x oznacza prawdopodobieństwo, zgonu w przedziale wieku $(x, x + 1)$ pod warunkiem dożycia do wieku x. W niektórych przypadkach wygodniej jest posługiwać się funkcją nazywaną *prawdopodobieństwem przeżycia*, której wartości określone są w następujący sposób $p_x = 1 - q_x$. W rzeczywistości wartości q_x są nieznane i w tablicy umieszcza się ich oszacowania $\hat{q}_x$ na podstawie zaobserwowanych liczb zmarłych i liczb dożywających

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{l_x},$$

a ocena prawdopodobieństwa przeżycia określona jest następująco:

$$\hat{p}_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Tablice kohortowe są konstruowane w celu scharakteryzowania trwania życia jednej kohorty lub dla dokonania analizy porównawczej między kohortami. Zatem budowanie tablic polega na estymacji nieznanych parametrów procesu stochastycznego, opartej na jego obserwacjach. Najważniejsze wyniki dotyczące sformułowania modelu procesu, wyboru odpowiednich estymatorów i określenia ich własności można znaleźć w pracach L. Bolesławieckiego [8] i C.L. Chianga [10].

W praktyce jednak obserwacja tak dużych zbiorowości ludzkich jest niemożliwa. Trudno jest obserwować liczbę osób zmarłych i dożywających spośród jednej grupy osób urodzonych w pewnym okresie na wybranym terytorium. Związane to jest z migracją ludności i nigdy nie można w pełni zarejestrować śmierci poszczególnych jednostek badanej kohorty. Tym samym nie mogą być spełnione założenia, które są podstawą do oszacowania prawdopodobieństw zgonu.

W przypadku braku dokładnych i wiarygodnych danych o liczbie ludności lub liczbie zgonów, można uzyskać przybliżone wartości prawdopodobieństw zgonu i liczby dożywających dla kohort w oparciu o opracowania periodycznie i bieżące tablice trwania życia . Ta metoda konstruowania tablic kohortowych jest uproszczona ale często zupełnie wystarczająca na przykład do szacunków ludności w okresach minionych. Szczegółową konstrukcję i przeliczenia można znaleźć w pracy F. Indan [19].

W tablicy bieżącej oceny prawdopodobieństw zgonu uzyskane są (w krótkim przedziale czasu jak rok lub kilka kolejnych lat) dla osób z wszystkich generacji aktualnie żyjących. Zatem tablice bieżące lub przekrojowe to jakby przekrój przez generacje żyjące w badanym okresie. Praktyczne znaczenie tablic bieżących, w odróżnieniu od kohortowych, nie polega na oszacowaniu rozkładu trwania życia jakiejkolwiek zbiorowości, lecz na odzwierciedleniu poziomu umieralności wszystkich ludzi żyjących w danym okresie.

Do sporządzenia bieżących tablic trwania życia wykorzystywane są dwa źródła danych: rzeczywiste liczby zgonów zarejestrowane przez urzędy stanu cywilnego oraz szacunkowe liczby ludności według wieku określone na podstawie powszechnego spisu ludności. Jednak dane uzyskane tą drogą, są zwykle obarczone pewnymi błędami, ponadto liczby zgonów realizują się w sposób losowy dlatego też prawdopodobieństwa zgonów i przeżycia w tablic pełnej oszacowane z danych surowych wykazuje nieregularne wahania. Ze względu na to że odbiorcami tych tablic są firmy ubezpieczeniowe i instytucje wykonujące prognozy demograficzne, wymagają one wygładzenia, co pociąga za sobą wykluczenie nieuzasadnionych skoków przy przechodzeniu z jednego rocznika wieku do następnego.

Istnieje wiele metod budowy bieżący tablic trwania życia i ich interpretacji z punktu widzenia procesów stochastycznych. Do najczęściej stosowanych należy konstrukcja tablic przekrojowych zaproponowana przez C.L. Chianga [10].

Podstawą konstruowania bieżącej tablicy trwania życia we wszystkich współczesnych metodach są *cząstkowe współczynniki zgonów* ludności według wieku. Cząstkowy współczynnik zgonu jest ilorazem liczby zgonów ludności w danym przedziale wieku przez liczbę osobolat przeżywanych w tym okresie przez ludność, wśród której nastąpiły zgony. Jeżeli współczynnik jest obliczany dla jednego roku, to za ocenę liczbową mianownika przyjmuje się liczbę ludności na środek tego okresu, i chociaż z teoretycznego punktu widzenia takie rozumowanie jest sporym uproszczeniem, w praktyce jednak trudno byłoby dokładnie określić liczbę przeżywanych osobolat. Zatem współczynnik zgonów można zapisać w następujący sposób

$$M = \frac{D}{P}$$

gdzie

- M jest współczynnikiem zgonu dla danego przedziału wieku,
- D liczbą zgonów w tym przedziale,
- P liczbą ludności żyjącej w środku roku w tym przedziale wieku.

Istotne różnice między metodami konstruowania przekrojowych tablic trwania życia pojawiają się przy przekształcaniu współczynnika zgonów na prawdopodobieństwa zgonu.

W przypadku tablicy pełnej powszechnie znane i stosowane są dwa wzory określające zależność między współczynnikiem zgonów w przedziale wieku $(x, x+1)$ (oznaczanym dla tak określonego przedziału wiekowego przez M_x), a prawdopodobieństwem zgonu q_x w tym przedziale, pod warunkiem dożycia do wieku x. Wzory te są następujące:

1. $q_x = \frac{2M_x}{2+M_x}$,
2. $q_x = 1 - exp\{-M_x\}$.

Pierwszy ze wzorów opiera się na założeniu, że rozkład zgonów w roku jest równomierny i wobec tego połowa zgonów przypada na połowę przedziału. Drugi wzór jest również konsekwencją pewnego upraszczającego analitycznego założenia dotyczącego warunkowego prawdopodobieństwa zgonu w nieskończenie małym przedziale czasu. [1]

Wartość q_x, otrzymaną jednym z powyższych sposobów, poddaje się zazwyczaj wyrównaniu, a następnie wyznacza się wartości pozostałych funkcji tablicowych dotyczących rozmaitych prawdopodobieństw związanych ze śmiertelnością. Podstawową zależność przedstawia następująca funkcja:

$$d_x = l_x q_x,$$

gdzie d_x oznacza liczbę zgonów w przedziale wieku $(x, x+1)$, natomiast l_x oznacza liczbę osób, które dożyły wieku x zakładając, że początkowa liczba osób była równa l_0 (najczęściej $l_0 = 100000$). W oparciu o l_x można wyznaczyć pozostałe funkcje wieku x:

- liczba osób w wieku x, które umarły w ciągu roku (nie dożyły wieku $x+1$)

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

- prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x dożyje wieku $x+1$

$$p_x = {}_1p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

- prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje co najmniej n lat

$${}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

- prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x umrze przed osiągnięciem wieku $x+n$

$${}_nq_x = 1 -{}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x},$$

- prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x nie dożyje wieku $x+1$

$$q_x = {}_1q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

W tablicach trwania życia znajdują się dane dotyczące zazwyczaj całego roku, skąd wszystkie funkcje mają charakter skokowy. Więcej informacji na temat tablic trwania życia można znaleźć między innymi w pracy pod redakcją W. Ostasiewicza [23].

Niech $T(x)$ będzie przyszłym czasem trwania życia osoby, która dożyła wieku x. Czas ten można traktować jako zmienną losową, wielkość losowa $x + T(x)$ oznacza wówczas wiek w którym nastąpił zgon osoby, która dożyła x lat.

Niech ponadto $K(x)$ będzie zmienną losową określającą całkowitą liczbę lat, jakie pozostały do przeżycia osobie w wieku x, czyli

$$K(x) = [T(x)],$$

gdzie symbol $[\cdot]$ oznacza część całkowitą liczby. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej K określony jest następująco (por. M. Matłoka [21]):

$${}_{k|}q_x = \mathbb{P}(K(x) = k) = \mathbb{P}(k \leq T(x) < k+1) = {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

[1] Znane są i stosowane rozmaite modyfikacje obu wzorów.

gdzie ${}_{k|}q_x$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x umrze w wieku pomiędzy $x+k$, a $x+k+1$ lat.

W ubezpieczeniu na życie i dożycie stosowane jest prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x dożyje do końca okresu ubezpieczenia n, które określone jest następująco:

$$ {}_{n}p_x = \mathbb{P}(K(x) \geq n) $$

W dalszej części pracy rozkład przyszłego czasu trwania życia osoby w wieku x w ciągu n lat oznaczać będziemy w postaci wektora:

$$ \boldsymbol{D} = (\ q_x,\ {}_{1|}q_x, \ldots,\ {}_{n-1|}q_x,\ {}_{n}p_x)^T. \tag{1.2.1} $$

1.2.2 Wybrane pojęcia matematyki aktuarialnej

Uwzględniając fakt, że analiza w dalszej części pracy dotyczy ubezpieczenia, w których wypłata nie odbywa się w momencie śmierci ale pod koniec roku w którym nastąpiła śmierć ubezpieczonego, omówione zostaną wielkości aktuarialne dotyczące tylko takich ubezpieczeń. Chodzi tu o pełne lata (okresy) liczone od dnia zawarcia umowy, który jest zazwyczaj pierwszym dniem miesiąca.

W celu określenia zaktualizowanej wartości świadczenia z ubezpieczenia w roku k-tym wykorzystywane są dwie podstawowe funkcje. Funkcje te są następujące :

1. Funkcja świadczenia (*ang. benefit function*) $b(k)$ oznaczająca kwotę płaconą przez ubezpieczyciela w momencie k (z tytułu śmierci lub dożycia określonego w umowie wieku przez ubezpieczonego).

2. Funkcja dyskontująca $v(k)$ określająca aktualną wartość jednej jednostki wypłacanej na koniec roku k.

Funkcja oznaczająca obecną wartość świadczenia płaconego w momencie k jest określona za pomocą wzoru (por. N.L. Bowers et al. [9]):

$$ z(k) = b(k)v(k) \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.2.2} $$

Ponieważ moment wypłaty k jest realizacją zmiennej losowej $K(x)$, która zależy od wieku x osoby przystępującej do ubezpieczenia, więc (1.2.2) jest zmienną losową postaci

$$ Z(x) = b(K(x)) \cdot v(K(x)). \tag{1.2.3} $$

Rozkład zmiennej losowej $Z = Z(x)$ zależy od rozkładu zmiennej losowej $K = K(x)$.

Zmienna losowa Z przyjmuje różne postacie w zależności od rodzaju ubezpieczenia na życie (ubezpieczenie na wypadek śmierci z rosnącą sumą ubezpieczenia, ubezpieczenie na dożycie itp.). W Przykładzie 1.2.1 określona została zmienna losowa Z dla ubezpieczenia na życie i dożycie ze stałą sumą ubezpieczenia.

Przykład 1.2.1 *Niech dane będzie ubezpieczenie na życie i dożycie założone dla osoby w wieku x na okres n lat. Towarzystwo ubezpieczeniowe gwarantuje przez n lat wypłatę* 1 *na koniec roku, w którym nastąpi śmierć ubezpieczonego oraz wypłatę ubezpieczonemu* 1, *gdy dożyje on do końca okresu ubezpieczenia.*

Dla takiego ubezpieczenia funkcje $b(k)$ i $v(k)$ mają postać:

$$b(k+1) = 1 \quad dla \quad k = 0, 1, ...,$$

$$v(k+1) = \begin{cases} v^{k+1} & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & dla \quad k = n, n+1, ... \,. \end{cases}$$

Zgodnie z równością (1.2.3) zmienna losowa $Z = Z(x)$ jest postaci:

$$Z = \begin{cases} v^{k+1} & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & dla \quad k = n, n+1, ... \,. \end{cases}$$

Na podstawie zmiennej losowej Z określane są składki ubezpieczeniowe. Zgodnie z *zasady równoważności*, *jednorazowa składka netto* A płacona za ubezpieczenie jest równa wartości oczekiwanej przyszłych świadczeń wynikających z umowy ubezpieczenia. Zatem $A = \mathbb{E}(Z)$. W ubezpieczeniach oprócz składek jednorazowych występują składki okresowe płacone zazwyczaj przez cały okres ubezpieczenia. Przykładem takiej składki może być składka roczna. Do wyznaczenia *rocznej składki netto* P niezbędna jest znajomość wysokości *funduszu rentowego netto* $\ddot{a}$ potrzebnego do wypłaty renty okresowej płatnej z góry .

Poniżej określone zostały (wraz z interpretacją) wybrane wielkości, związane ze zmienną losową Z, których dokładną charakterystykę można znaleźć między innymi w pracy S. Ostasiewicz i W. Ronki-Chmielowiec [22].

1. Ustalona na początku pierwszego roku, obecna wartość płatności w wysokości 1 (z góry) dokonywanych corocznie w okresie n lat, przy oprocentowaniu złożonym ze stopą procentową u

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k. \tag{1.2.4}$$

2. Przeciętna zaktualizowana wielkość wypłaconej (z góry) przez n lat renty na rzecz osoby (która w momencie rozpoczęcia pobierania renty była w wieku x) jest to wysokość funduszu rentowego netto, (w momencie rozpoczęcia pobierania renty) potrzebnego do wypłacenia n letniej renty pewnej, przy założeniu, że stopa procentowa przez n lat będzie równa u

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k}|}\ {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_{n}p_x. \tag{1.2.5}$$

3. Jednorazowa składka netto w ubezpieczeniu terminowym na życie

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_{k|}q_x. \tag{1.2.6}$$

4. Jednorazowa składka netto w czystym ubezpieczeniu na dożycie

$$A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}} = v^n\ {}_{n}p_x. \tag{1.2.7}$$

5. Jednorazowa składka netto w ubezpieczeniu na życie i dożycie

$$A_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_{k|}q_x + v^n \; {}_n p_x. \tag{1.2.8}$$

6. Roczna składka netto w ubezpieczeniu terminowym na życie

$$P^{1}_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} / \ddot{a}_{x:\overline{n|}}.$$

7. Roczna składka netto w czystym ubezpieczeniu na dożycie

$$P_{x:\overline{n|}}^{1} = A_{x:\overline{n|}}^{1} / \ddot{a}_{x:\overline{n|}}.$$

8. Roczna składka netto w ubezpieczeniu na życie i dożycie

$$P_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}} / \ddot{a}_{x:\overline{n|}}.$$

Jednorazowa składka netto, niezależnie od typu ubezpieczenia, jest taką wielkością funduszu, którą ubezpieczony powinien wpłacić w chwili zawierania umowy, aby ubezpieczyciel dysponował wystarczającymi środkami na pokrycie wypłaty sumy ubezpieczenia w trakcie trwania umowy. W indywidualnych przypadkach, może zdarzyć się, że wartość zmiennej losowej Z okaże się większa niż jej wartość średnia. Zatem pobieranie składki netto prowadziłoby, ze względu na losowość, do nieuchronnego bankructwa firmy ubezpieczeniowej. Dlatego też przy wyznaczaniu składki ubezpieczeniowej brutto brane są pod uwagę następujące czynniki

- ryzyko odchylenia zmiennej losowej Z od jej wartości oczekiwanej,
- koszty administracyjno-akwizycyjne związane z założeniem i prowadzeniem ubezpieczenia przez towarzystwo ubezpieczeniowe.

Czynniki te po oszacowaniu i dodaniu do składki netto dają składkę ubezpieczeniową brutto. Istnieje wiele sposobów określania wysokości składki brutto, dwa z nich można znaleźć w pracach E. Stroińskiego [27] i M. Matłoki [21].

1.2.3 Oprocentowanie i dyskontowanie

Powszechnie uważa się, że ta sama kwota pieniężna posiadana dzisiaj ma realną wartość większą od tej jaką będzie mieć w przyszłości. Powodem tego jest nie tylko inflacja czy ograniczoność życia ludzkiego, ale przede wszystkim fakt, że pieniądze posiadane dzisiaj możemy zainwestować i w ten sposób w przyszłości posiadać kwotę pieniężną powiększoną o dopisane oprocentowanie.

Określenie przyszłej wartości kapitału W_0, zainwestowanego przy rocznej stopie procentowej u, zależy od sposobu naliczania odsetek. Jeżeli odsetki są naliczane jedynie od pierwotnego kapitału mówimy o *oprocentowaniu prostym.* W takim przypadku nie uzyskuje się bowiem procentu od procentu. Natomiast przy założeniu *oprocentowania składanego* do pierwotnego kapitału dopisywane są odsetki zarówno od kapitału jak i od dopisanych wcześniej odsetek. Towarzystwa ubezpieczeniowe na życie stosują oprocentowanie złożone, czyli zasadę procentu składanego.

Niech u oznacza stałą stopę procentową. Wówczas odsetki dopisane od kapitału W_0 w ciągu 1 roku są równe uW_0. Wobec tego cała zakumulowana wartość na koniec pierwszego roku jest równa $W_0 + uW_0 = W_0(1+u)$. Analogicznie całkowita zakumulowana wartość W_{n+1} po n latach, włączając pierwotny kapitał i uzyskane oprocentowanie, jest równa:

$$W_n = W_0(1+u)^n. \tag{1.2.9}$$

Wyrażenie $1+u$ nazywane jest *czynnikiem akumulacyjnym*, wielkość W_0 obecną kwotą pieniędzy (obecna wartość), a wielkość W_n jest kwotą pieniędzy na koniec n-tej jednostki czasu (przyszła wartość).

Operacja dyskontowania jest odwrotnością operacji oprocentowania. Określenie *przyszła wartość* (zakumulowana wartość) odnosi się do płatności dokonywanych w przeszłości, podczas gdy określenie *obecna wartość* związana jest z płatnościami, które będą dokonywane w przyszłości.

Niech W_n stanowi wysokość środków pieniężnych, które będą do dyspozycji na koniec n-tego okresu. Na podstawie wzoru (1.2.9), możemy wyliczyć obecną wartość kwoty, którą otrzymamy w przyszłości z następującego wzoru

$$W_0 = W_n(1+u)^{-n}.$$

Wielkość W może być traktowana jako kwota pieniędzy, która powierzona na oprocentowanie złożone o stopie u zostanie zakumulowana do wartości W_n po n latach. Wielkość $(1+u)^{-n}$ jest nazywana *współczynnikiem dyskontującym*, natomiast przez v oznaczone jest wyrażenie $(1+u)^{-1}$ nazywane często *współczynnikiem dyskonta* lub *mnożnikiem dyskontującym.*

Jeżeli stopa procentowa nie jest stała w kolejnych latach i u_k określa stopę procentową (indeksację) za k-ty rok ($k = 1, 2, ...n$), to współczynnik dyskontujący po n latach jest równy:

$$[(1+u_1)(1+u_2)\cdot\ldots\cdot(1+u_n)]^{-1}.$$

Gdy kapitalizacja dokonywana jest częściej niż raz do roku (np. co $1/m$ część roku), to dla ustalonego okresu konwersji $1/m$ roczną stopę procentową $u^{(m)}$ dobiera się w ten sposób, aby oprocentowanie kapitału po m okresach było równe oprocentowaniu po upływie jednego roku ze stopą u tzn.

$$(1+\frac{u^{(m)}}{m})^m = 1+u.$$

Stąd

$$u^{(m)} = m((1+u)^{\frac{1}{m}} - 1),$$

gdzie $1/m$ jest okresem kapitalizacji ze stopą procentową $\frac{u^{(m)}}{m}$.

Pojęcie kapitalizacji ciągłej definiuje się w oparciu o przejście graniczne, gdy okres konwersji $1/m$ dąży do 0 (tzn. $m \to \infty$). Niech δ_u oznacza stopę oprocentowania ciągłego równoważną stopie procentowej u czyli

$$\delta_u = \lim_{m\to\infty} u^{(m)}$$

Możemy zapisać, że

$$\delta_u = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+u)^{\frac{1}{m}} - (1+u)^0}{\frac{1}{m} - 0}, \tag{1.2.10}$$

gdzie prawa strona równości jest pochodną funkcji $(1+u)^x$ w punkcie $x = 0$. Wówczas mamy, że

$$\delta_u = \ln(1+u).$$

Jeśli roczna stopa procentowa u jest stała w okresie jednostkowym kapitalizacji, to czynnik akumulacyjny jest postaci

$$1 + u = e^{\delta_u}. \tag{1.2.11}$$

Natomiast współczynnik dyskontujący wyrażony jest następującym wzorem

$$v^t = e^{-\delta_u t}.$$

Z (1.2.11) wynika, że $\delta_u < u$, lecz dla małych wartości u zachodzi $\ln(1+u) \approx u$.

Jeżeli przyjmuje się założenie, że stopa procentowa może ciągle ulegać zmianom, wtedy taką możliwość wyraża się poprzez zastąpienie stałej δ_u funkcją $X(s)$ oznaczającą intensywność stopy procentowej w chwili $s > 0$. Wówczas współczynnik dyskontujący ma następującą postać

$$v^t = e^{-\int_0^t X(s)ds}, \tag{1.2.12}$$

gdzie $\int_0^t X(s)ds$ jest wysokością stopy procentowej za okres od 0 do momentu t. W takim przypadku intensywność stopy procentowej (lub stopa procentowa) jest zazwyczaj modelowana przez proces stochastyczny.

1.2.4 Indeksacja z uwzględnieniem inflacji

Załóżmy, że pewna kwota W_k (na przykład suma ubezpieczenia, składka lub suma składek i zysków jakie one przyniosły w poprzednich latach) podlega indeksacji na koniec $k+1$-tego roku. Nominalny wzrost wartości W_k po jednym roku (czyli na koniec roku $k+1$) wyraża się następującym wzorem:

$$W_{k+1} = W_k(1+u_k).$$

Rzeczywisty wzrost wartości W_k jest inny, gdyż należy uwzględnić jeszcze inflację (chyba, że jest ona równa zero), która powoduje ona utratę siły nabywczej pieniądza z biegiem czasu. W literaturze najczęściej zakłada się, że okres stopy procentowej (indeksacji) i stopy inflacji jest taki sam i jest równy 1 rok.

Niech stopa inflacji w roku k oznaczana będzie przez i_k, oraz $0 \leq i_k \leq 1$. Ponadto niech a_k oznacza stopę realnego wzrostu w roku k-tym, która jest określona w następujący sposób (M. Dobija, E. Smaga [16])

$$a_k = \frac{1+u_k}{1+i_k} - 1 = \frac{u_k - i_k}{1+i_k}. \tag{1.2.13}$$

W przypadku wystąpienia inflacji w roku $k+1$ indeksacja za ten rok nie określa rzeczywistego wzrostu wartości W_k. Z (1.2.13) wynika, że w celu wyznaczenia realnej indeksacji nie wystarczy tylko od stopy procentowej odjąć stopę inflacji, ale należy jeszcze podzielić przez czynnik $1 + i_k$. Ponadto można mówić o rzeczywistym wzroście wartości W_k tylko wtedy, gdy indeksacja jest większa od inflacji. W przeciwnym przypadku następuje realne zmniejszenie wartości W_k po roku. Można wykazać, że $a_k \in [-\frac{1}{2}, 1]$. Jeżeli $i_k = 0$ to $a_k = u_k$. Ponadto jeśli dla każdego k indeksacja pokrywa co najmniej inflację ($u_k \geq i_k$), to $a_k \in [0,1]$.

Zauważmy, że niekiedy można przyjąć, że stopa realnego wzrostu jest równa różnicy oprocentowania i inflacji. Ponieważ $0 < i_k < 1$, to możemy zapisać, że

$$\frac{1}{1+i_k} = 1 - i_k + i_k^2 - i_k^3 + \ldots. \tag{1.2.14}$$

Z (1.2.13) i (1.2.14) wynika, że dla małych i_k oraz u_k również a_k jest małe. Wówczas

$$\frac{1}{1+i_k} \approx 1,$$

skąd

$$a_k \approx u_k - i_k.$$

Przybliżenie to dokonane jest z pewnym naddatkiem w stosunku do wartości rzeczywistej a_k (Z. Bartoszewski, M. Kwapisz [3]).

1.3 Procesy stochastyczne

1.3.1 Pojęcia ogólne

Definicja 1.3.1 *Procesem stochastycznym nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{Y(t) : t \in T\}$, indeksowaną parametrem t przebiegającym podzbiór T zbioru liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$.

W ubezpieczeniach szczególne zastosowanie mają dwie klasy procesów stochastycznych: *procesy stacjonarne* oraz *procesy o stacjonarnych przyrostach.*

Definicja 1.3.2 *Proces stochastyczny $\{Y(t) : t \in T\}$ nazywany jest procesem stacjonarnym, jeżeli rozkład wektora $(Y(t_{0+s}), Y(t_{1+s}), ..., Y(t_{n+s}))$ na przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$ nie zależy od $s \in R$.*

Definicja 1.3.3 *Proces stochastyczny $\{Y(t) : t \in T\}$ nazywany jest procesem o stacjonarnych przyrostach, jeżeli łączny rozkład wektora przyrostów*

$$(Y(t_1+s) - Y(t_0+s), Y(t_2+s) - Y(t_1+s), ..., Y(t_n+s) - Y(t_{n-1}+s))$$

nie zależy od s.

Każdy proces stacjonarny jest oczywiście procesem o stacjonarnych przyrostach.

Definicja 1.3.4 *Proces stochastyczny $\{Y(t) : t \in T\}$ nazywany jest procesem gaussowskim, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wektor losowy $(Y(t_1), Y(t_2), ..., Y(t_n))$, gdzie $t_1, t_2, ..., t_n \in T$, ma n-wymiarowy rozkład normalny.*

Procesy stochastyczne są charakteryzowane za pomocą następujących funkcji:

- *funkcja wartości oczekiwanej* $\mathbb{E}(Y(t))$;
- *funkcja wariancji* $\mathbb{D}^2(Y(t)) = \sigma_Y^2(t)$
- *funkcja kowariancji* $\mathbf{Cov}(Y(s), Y(t))$.

Jedną z ważniejszych własności klasy gaussowskich procesów stochastycznych jest fakt, iż znajomość funkcji wartości oczekiwanej oraz kowariancji całkowicie wyznacza rozkład procesu. Ponadto okazuje się, że w przypadku, gdy $Y(t)$ jest gaussowskim procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach funkcja wariancji $\sigma_Y^2(t)$ całkowicie określa funkcję kowariancji. W szczególności prawdziwy jest następujący lemat (por. S.M. Berman [6]).

Lemat 1.3.1 *Jeśli $Y(t)$ jest gaussowskim procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach, to*

$$\mathbf{Cov}(Y(s), Y(t)) = \frac{\sigma_Y^2(s) + \sigma_Y^2(t) - \sigma_Y^2(|t-s|)}{2}.$$

*Proof.*Niech $s > t > 0$. Wówczas

$$\mathbb{D}^2(Y(t) - Y(s)) = \mathbb{D}^2(Y(s)) + \mathbb{D}^2(Y(t)) - 2\mathbf{Cov}(Y(s), Y(t)).$$

Wynika stąd, że

$$\mathbf{Cov}(Y(s), Y(t)) = \frac{\mathbb{D}^2(Y(s)) + \mathbb{D}^2(Y(t)) - \mathbb{D}^2(Y(t) - Y(s))}{2}. \tag{1.3.15}$$

Ponieważ z założenia $Y(t)$ ma stacjonarne przyrosty, to dla stałych s i t zachodzi równość

$$\mathbb{D}^2(Y(t) - Y(s)) = \mathbb{D}^2(Y(|t-s|)). \tag{1.3.16}$$

Podstawiając (1.3.16) do (1.3.15) mamy

$$\mathbf{Cov}(Y(s), Y(t)) = \frac{\mathbb{D}^2(Y(s)) + \mathbb{D}^2(Y(t)) - \mathbb{D}^2(Y(|t-s|))}{2}.$$

□

Pełny przegląd teorii procesów stochastycznych znaleźć można w podręczniku A.D. Wentzell'a [28] lub P. Billingsley'a [7]

1.3.2 Wybrane gaussowskie procesy stochastyczne

Jednym z wykorzystywanych w dalszych częściach pracy gaussowskim procesem stochastycznych o stacjonarnych przyrostach jest *proces Wienera.*

Definicja 1.3.5 *Proces stochastyczny $\{W(t) : t \geq 0\}$ nazywany jest procesem Wienera jeśli spełnione są następujące warunki*

1. $\mathbb{P}(W(0) = 0) = 1$.

2. *Dla $0 \leq s \leq t$ przyrost $W(t) - W(s)$ ma rozkład normalny o wartości średniej 0 i wariancji $t - s$.*

3. *Przyrosty procesu $W(t)$ są niezależne.*

Z warunku 2 wynika, że $\mathbb{D}^2(W(t)) = t$ oraz proces $W(t)$ ma stacjonarne przyrosty. Ponadto warunki 1 i 2 pociągają, że $\mathbb{E}(W(t)) = 0$.

Uogólnieniem pojęcia procesu Wienera jest proces stochastyczny nazywany *ułamkowy ruch Browna* (por. Mandelbrot i van Ness [20]).

Definicja 1.3.6 *Proces stochastyczny $\{B_H(t); t \geq 0\}$ nazywany jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0, 1]$, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. $\mathbb{P}(B_H(0) = 0) = 1$.

2. $\mathbb{E}(B_H(t)) = 0$ *dla każdego $t \geq 0$.*

3. *$B_H(t)$ ma rozkład normalny o wartości średniej 0 i wariancji t^{2H}.*

4. $\mathbf{Cov}(B_H(s), B_H(t)) = \frac{s^{2H}+t^{2H}-|s-t|^{2H}}{2}$ *dla $s, t \geq 0$.*

W przypadku, gdy $H = \frac{1}{2}$, ułamkowy ruch Browna $B_{\frac{1}{2}}(t)$ jest procesem Wienera . Niektóre własności ułamkowego ruchu Browna przedstawione zostały w Lemacie 1.3.2.

Lemat 1.3.2 *Jeśli $B_H(t)$ jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0, 1]$, to*

1. *jeśli $H = 1$, to $B_1(t) = t\mathcal{N}$, gdzie $\mathcal{N}$ jest zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$;*

2. *jeśli $H > \frac{1}{2}$, przyrosty $B_H(t)$ są dodatnio skorelowane, czyli* $\mathbf{Cov}(B_H(t_1)-B_H(t_2), B_H(t_2)-B_H(t_3)) > 0$ *dla $t_1 > t_2 > t_3 \geq 0$;*

3. *jeśli $H < \frac{1}{2}$, przyrosty $B_H(t)$ są ujemnie skorelowane, czyli* $\mathbf{Cov}(B_H(t_1)-B_H(t_2), B_H(t_2)-B_H(t_3)) < 0$ *dla $t_1 > t_2 > t_3 \geq 0$.*

Dowody wymienionych w Lemacie 1.3.2 własności i dokładną analizę ułamkowego ruchu Browna znaleźć można w książce G. Samarodnitsky i M. S. Taqqu [25].

Z własności 2 i 3 Lematu 1.3.2 wynika, że struktura ułamkowego ruchu Browna zależy od wielkości parametru H. Przypadek, gdy $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ jest szczególnie ważny ze względu na zastosowania praktyczne. Okazuje się bowiem, że dla $H > \frac{1}{2}$ ułamkowy ruch Browna $B_H(t)$ posiada nie tylko dodatnio skorelowane przyrosty (własność 2 Lematu 1.3.2), lecz także tak zwaną *strukturę zależności dalekiego zasięgu* (*ang. long range dependence structure*), która wyraża się poprzez warunek $\sum_{n=0}^{\infty} r(n) = \infty$ gdzie $r(n) = \mathbf{Cov}(B_H(1), B_H(n+1) - B_H(n))$. Oznacza to, że choć kowariancja między coraz dalej oddalonymi elementami zbiega do zera, to zbieżność ciągu $r(n)$ jest wolniejsza od zbieżności ciągu $\{\frac{1}{n}\}$.

W klasie stacjonarnych gaussowskich procesów stochastycznych proces *Ornsteina-Uhlenbecka* $U(t)$ jest jednym z lepiej zbadanych obiektów. Wynika to z faktu, iż proces ten jest równocześnie procesem Markowa. Oznacza to, że przy znajomości wartości procesu w chwilach $t_1, t_2, ..., t_n$ wartość procesu w chwili $t_{n+1} > t_n$ zależy jedynie od $U(t_n)$.

Definicja 1.3.7 *Stacjonarny proces stochastyczny $U(t)$ nazywamy procesem Ornsteina-Uhlenbecka jeśli spełnione są następujące założenia:*

1. *dla każdego $t \geq 0$ zmienna losowa $U(t)$ ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną* $\mathbf{E}(U(t)) = 0$ *i wariancją* $\mathbb{D}^2(U(t)) = 1$;

2. *funkcja kowariancji procesu $U(t)$ jest postaci* $R(t) = \mathbf{Cov}(U(s+t), U(s)) = \exp(-\alpha t)$, *gdzie $\alpha > 0$.*

Rozdział 2

Efektywność ubezpieczenia

2.1 Wstęp

Głównym celem ubezpieczeń życiowych jest zapobieganie stratom finansowym związanym ze śmiercią i utratą zdrowia osoby ubezpieczonej. Indywidualne osoby oraz ich rodziny są narażone nie tylko na straty majątkowe, ale także na nagłą śmierć jednego z członków rodziny, leczenie, kalectwo i niezdolność do pracy z powodu wypadku lub choroby. Istotnym dla człowieka jest takie zabezpieczanie strat które umożliwia przeżycie rodziny na godnym poziomie po śmierci lub przejściu na emeryturę głównego żywiciela. Nie zawsze możliwe jest zgromadzenie wystarczającego kapitału na drodze tradycyjnego oszczędzania i indywidualnego inwestowania, stąd konieczność korzystania z innych form pomnażania pieniędzy i zabezpieczania możliwych strat. Jedną z często stosowanych form zabezpieczenia jest ubezpieczenie na życie i dożycie. Ten typ ubezpieczenia gwarantuje fundusz na potrzeby związane ze śmiercią oraz fundusz emerytalny. Inwestycyjny aspekt ubezpieczenia na życie i dożycie polega na tym, że ubezpieczony inwestując kapitał (składki okresowe lub składka jednorazowa) spodziewa się określonych świadczeń (suma ubezpieczenia) w momencie śmierci lub dożycia końca okresu ubezpieczenia. Podejmując decyzję o wykupieniu polisy, ubezpieczony ma na celu zagwarantowanie w przyszłości sobie i swojej rodzinie wymiernych korzyści, które mają zapewnić zwrot wpłaconych składek, oraz pokrycie ewentualnych strat spowodowanych śmiercią lub przejściem na emeryturę. Na rynku ubezpieczeniowym, w ramach ubezpieczenia na życie i dożycie, firmy proponują różnorodne warianty ubezpieczenia i oferują rozmaite dodatkowe zabezpieczenia. Dlatego też, przed podjęciem ostatecznej decyzji, człowiek dokonuje wyboru wariantu ubezpieczenia i firmy ubezpieczeniowej, dzięki którym zostaną osiągnięte zamierzone cele i zabezpieczone wymagane potrzeby. W tym celu przede wszystkim, każdy wariant ubezpieczenia staje się przedmiotem oceny z punktu widzenia opłacalności i efektywności. Najczęściej do oceny przedsięwzięć finansowych pod względem inwestycyjnym, stosowana jest analiza wskaźnikowa, która umożliwia sprawdzenie czy posiadane środki będą efektywnie wykorzystywane. W rozdziale tym zaproponowany został miernik efektywności ubezpieczenia jako stosunek spodziewanej sumy ubezpieczenia, do sumy zapłaconych, do momentu otrzymania świadczenia, składek. Ponieważ w ubezpieczeniach moment wypłaty świadczenia jest losowy, to dla uzupełnienia oceny efektywności ubezpieczenia, zaproponowano obliczenie przeciętnej efektywności ubezpieczenia względem rozkładu dalszego trwania życia ubezpieczonego.

2.2 Przyszła wartość początkowej sumy ubezpieczenia i sumy wpłaconych składek

W Rozdziale 1 szczegółowo została opisana zasada działania i konstrukcja ubezpieczenia na życie i dożycie. Ponadto dokonana została klasyfikacja ubezpieczeń ze względu na sposób dopisywania zysków do sumy ubezpieczenia oraz oddzielnie ze względu na rodzaj wpłacanych składek. W Rozdziale 2 rozpatrzone zostaną dwa warianty ubezpieczenia.

Pierwszy to wariant z rosnącą sumą ubezpieczenia i składką, oparty na tzw. systemie francuskim ubezpieczenia.

Drugi to najprostszy model matematyczny opisujący wariant ubezpieczenia w którym składka jest stała, a suma ubezpieczenia bierze udział w podziale zysków firmy ubezpieczeniowej.

W paragrafie tym dla obu wariantów zostały określone przyszłe wartości początkowej sumy ubezpieczenia i sumy wpłaconych składek.

2.2.1 Wariant z rosnącą sumą ubezpieczenia i składką

Niech c będzie wysokością pierwszej rocznej składki wpłaconej z góry za ubezpieczenie z początkową sumą ubezpieczenia S (tzn. sumą ubezpieczenia w pierwszym roku $S = S_1$). Wielkość c_{sk} oznacza sumę składek wpłaconych w ciągu pierwszych k lat.

Jednym z podstawowych wielkości związanych z ubezpieczeniem na życie i dożycie jest *wskaźnik taryfowy* $w_{x,n}$, który określa wysokość składki jaką należy zapłacić za każdą jednostkę sumy ubezpieczenia

$$w_{x,n} S = c. \tag{2.2.1}$$

Z wielkością $w_{x,n}$ związane jest prawdopodobieństwo śmierci człowieka w wieku x w ciągu najbliższych n lat. W niniejszej pracy rozpatrywane są odpowiednie wskaźniki taryfowe tylko dla osób zdrowych i nie uprawiających niebezpiecznego zawodu lub hobby (czyli z tak zwaną klasą ryzyka 0).

Ubezpieczenia na życie są zazwyczaj produktami długoterminowymi. Stąd potrzebna jest taka konstrukcja warunków ubezpieczenia, która zabezpieczałaby ubezpieczonego przed stratą wartości sumy ubezpieczenia spowodowaną inflacją. Jednym z wariantów takiego typu ubezpieczeń są ubezpieczenia oparte na tak zwanym systemie francuskim waloryzacji. System francuski ubezpieczenia polega na corocznym podwyższaniu sumy ubezpieczenia i składki o zaproponowaną przez firmę indeksację, która zależy od jej zysków. W wariancie tym zakłada się, że co roku suma ubezpieczenia jest podnoszona o wysokość sumy ubezpieczenia z poprzedniego roku przemnożoną przez wskaźnik indeksacji. W analogiczny sposób zwiększana jest roczna składka płacona z góry.

Przez cały okres trwania ubezpieczenia dla posiadacza polisy istotne są dwie wielkości: aktualna suma ubezpieczenia S_k oraz suma składek wpłaconych do momentu k. Przy czym wypłacona suma ubezpieczenia, po dożyciu przez ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia, jest równa S_n. Oznacza to, że po ostatnim roku nie podlega ona indeksacji (oprocentowaniu).

Dla tak określonego wariantu ubezpieczenia (tzn. systemu francuskiego ubezpieczenia) suma ubezpieczenia w k-tym roku określona jest następująco

$$S_k^{RR} = (1 + u_{k-1}) S_{k-1}^{RR} = S \prod_{i=0}^{k-1} (1 + u_i), \tag{2.2.2}$$

gdzie u_i oznacza indeksację za i-ty rok ubezpieczenia, dla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $u_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ oraz $u_i \in [0, 1]$.

Natomiast suma składek wpłaconych w ciągu k lat trwania ubezpieczenia określona jest wzorem

$$c_{sk}^{RR} = c\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=0}^{j}(1+u_i). \tag{2.2.3}$$

Opisany wariant w dalszej części pracy nazywany będzie RR (***R***osnąca suma, ***R***osnąca składka), dlatego też we wzorach (2.2.2) i (2.2.3) wielkościom S_k oraz c_{sk} nadano indeks górny RR.

2.2.2 Wariant ze stałą składką i rosnącą sumą ubezpieczenia

Najprostszy model matematyczny opisujący wariant ubezpieczenia, w którym suma ubezpieczenia bierze udział w podziale zysków firmy ubezpieczeniowej, polega na tym, że składka c jest stała podczas całego okresu ubezpieczenia. Suma ubezpieczenia bierze udział w podziale zysków firmy przez coroczne powiększanie jej o kwotę równą iloczynowi indeksacji przez sumę wpłaconych od początku trwania umowy składek i zysków w poprzednich latach.

Zgodnie z zasadami rozpatrywanego wariantu ubezpieczenia, niezależnie od wysokości indeksacji, suma składek wpłaconych w ciągu k lat trwania ubezpieczenia określona jest następująco

$$c_{sk}^{RS} = kc, \tag{2.2.4}$$

natomiast suma ubezpieczenia w k-tym roku określona jest poprzez

$$S_k^{RS} = S_1 + c(\sum_{j=1}^{k-1}\prod_{i=j}^{k-1}(1+u_i)) - c(k-1). \tag{2.2.5}$$

W dalszej części pracy powyższy wariant nazywany będzie RS (***R***osnąca suma, ***S***tała składka). Podobnie jak w wariancie RR, we wzorach (2.2.5) i (2.2.4) wielkościom S_k oraz c_{sk} nadano indeks górny RS.

Niech wektor

$$\boldsymbol{U} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})^T \tag{2.2.6}$$

oznacza indeksację w całym okresie ubezpieczenia. Jeżeli we wzorach (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) i (2.2.5) zamiast elementów wektora indeksacji (2.2.6) wstawimy elementy wektora indeksacji z uwzględnioną inflacją $\boldsymbol{A} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T$ (elementy a_i określone są za pomocą wzoru (1.2.13)), to odpowiednie wzory określać będą realne wartości odpowiednio sumy ubezpieczenia i sumy wpłaconych składek.

2.3 Wskaźnik efektywności

2.3.1 Definicja wskaźnika efektywności

Dalsze trwanie życia osoby w wieku x określa zmienna losowa $K = K(x)$, której rozkład w ciągu kolejnych n lat dany jest w postaci wektora $\boldsymbol{D}$ danego wzorem (1.2.1).

Definicja 2.3.1 *Wskaźnik efektywności ubezpieczenia zdefiniowany jest następująco*

$$W_{x,n}(U, K = k) = \frac{S_k}{c_{sk}} \quad dla \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{2.3.7}$$

Określa on wysokości sumy ubezpieczenia w momencie k realizacji świadczenia S_k do sumy wpłaconych składek c_{sk}. Wskaźnik efektywności ubezpieczenia, jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, nazywany będzie *efektywnością ubezpieczenia*. Tak zdefiniowana efektywność zależy od wieku ubezpieczonego w momencie przystąpienia do ubezpieczenia (x) i okresu ubezpieczenia (n), które z punktu widzenia indywidualnej polisy ubezpieczeniowej są elementami ustalonymi. Ponadto wielkość ta jest funkcją indeksacji (U), która związana jest ściśle z zyskami osiąganymi przez daną firmę ubezpieczeniową. Wielkość współczynnika efektywności zależy także od momentu, w którym dokonana została wypłata świadczenia (k).

Dla rozróżnienia wskaźników efektywności, odpowiadającym poszczególnym wariantom ubezpieczenia, nadane zostały im odpowiednio indeksy górne RR i RS. Podstawiając do (2.3.7) odpowiednio wzory (2.2.2) i (2.2.3) można wykazać, że efektywność dla wariantu RR wyraża się następującym wzorem :

$$W_{x,n}^{RR}(U, K = k) = \frac{1}{w_{x,n}} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(1 + u_i)}{\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=0}^{j}(1 + u_i)}. \tag{2.3.8}$$

Analogicznie, podstawiając do (2.3.7) odpowiednio wzory (2.2.5) i (2.2.4), wskaźnik efektywności dla wariantu RS jest postaci

$$W_{x,n}^{RS}(U, K = k) \; = \; \frac{1}{k}(\frac{1}{w_{x,n}} + \sum_{j=1}^{k-1}\prod_{i=j}^{k-1}(1 + u_i) - (k - 1)). \tag{2.3.9}$$

Jeśli stopa indeksacji jest stała w czasie całego okresu ubezpieczenia ($u_1 = u_2 = ... = u_{n-1} = u$), to (2.3.8) przyjmuje postać

$$W_{x,n}^{RR}(u, K = k) \; = \; \begin{cases} \dfrac{1}{k}\dfrac{1}{w_{x,n}} & \text{gdy} \quad u = 0 \\ \\ \dfrac{1}{w_{x,n}}\dfrac{u(1 + u)^{k+1}}{(1 + u)^k - 1} & \text{gdy} \quad u \in (0, 1]. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

W takim przypadku będziemy pisać zamiast $W_{x,n}^{RR}(U, K = k)$ symbol $W_{x,n}^{RR}(u, K = k)$.

Natomiast wzór (2.3.9) jest następującej postaci

$$W_{x,n}^{RS}(u, K = k) \; = \; \begin{cases} \dfrac{1}{k}\dfrac{1}{w_{x,n}} & \text{gdy} \quad u = 0 \\ \\ \dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{w_{x,n}} + \dfrac{(1 + u)}{a}((1 + u)^{k-1} - 1) - (k - 1)) & \text{gdy} \quad u \in (0, 1]. \end{cases} \tag{2.3.11}$$

Dla wariantu RS wskaźniki efektywności, przy założeniu stałej stopy indeksacji, będziemy zamiast $W_{x,n}^{RS}(U, K = k)$ oznaczać przez $W_{x,n}^{RS}(u, K = k)$.

Jeżeli wskaźnik efektywności jest większy niż 1, to oznacza, że wysokość wypłaconego przez ubezpieczyciela świadczenia przewyższa sumę wpłaconych przez ubezpieczonego składek. Taka sytuacja jest korzystniejsza dla ubezpieczonego. W przeciwnym przypadku (gdy wskaźnik efektywności jest mniejszy od 1) wysokość wypłaconego przez ubezpieczyciela świadczenia jest niższa od sumy wpłaconych przez ubezpieczonego skladek, co jest korzystniejsze dla ubezpieczyciela. Dlatego też wybór wariantu ubezpieczenia ma istotne znaczenie. Dotyczy to w szczególności osób starszych, gdzie wysoka składka podyktowana jest dużym prawdopodobieństwem śmierci.

Przykład 2.3.1 *Osoba w wieku $x = 65$ lat wykupiła ubezpieczenie na życie i dożycie. Okres ubezpieczenia jest równy $n = 10$ lat. Niech co roku indeksacja będzie równa $u = 0,07$. Po dziesięciu latach wskaźniki efektywności zgodnie ze wzorami (2.3.10) i (2.3.11) są równe odpowiednio:*

$$W^{RR}_{65,10}(0,07; K = 10) = 0,98;$$
$$W^{RS}_{65,10}(0,7; K = 10) = 1,08.$$

Okazuje się, że dla wariantu RR suma wpłaconych składek jest większa niż odebrane po dożyciu końca okresu ubezpieczenia świadczenie.

2.3.2 Własności wskaźnika efektywności

Podane niżej własności wskaźnika efektywności zostały określone przy założeniu stałej stopy indeksacji (sformulowano je i udowodniono w pracy [13]).

Wszystkie przykłady w tym Punkcie zostały opracowane w oparciu o wskaźniki taryfowe ubezpieczenia na życie i dożycie oferowanego przez firmę ubezpieczeniową PZU Życie S.A. [29].

Własność 2.3.1 *Przy ustalonych parametrach k, n, u wskaźnik efektywności dla wariantu RR jest funkcją malejącą względem x.*

Dowód.

Dowód będzie składał się z dwóch części. W pierwszej części zakładamy, że $u = 0$ i $x_1 < x_2$. Wtedy $w_{x_1,n} \leq w_{x_2,n}$ i po odwróceniu

$$\frac{1}{w_{x_1,n}} \geq \frac{1}{w_{x_2,n}}.$$

Mnożąc stronami przez $\frac{1}{k}$

$$W^{RR}_{x_1,n}(0, K = k) \geq W^{RR}_{x_2,n}(0, K = k),$$

co potwierdza tezę dla $u = 0$.

W drugiej częścią zakładamy, że $u \in (0, 1]$ i $x_1 < x_2$. Dla ustalonych parametrów u, k

$$W^{RR}_{x,n}(u, K = k) = \frac{1}{w_{x,n}} \frac{u(1+u)^{k+1}}{(1+u)^k - 1} = \frac{1}{w_{x,n}} Const,$$

gdzie $Const > 0$.

Korzystając z faktu, że $\frac{1}{w_{x_1,n}} \geq \frac{1}{w_{x_2,n}}$ otrzymujemy następującą nierówność

$$W^{RR}_{x_1,n}(u, K = k) \geq W^{RR}_{x_2,n}(u, K = k),$$

co kończy dowód.

□

Własność 2.3.2 *Przy ustalonych parametrach k, n, u wskaźnik efektywności dla wariantu RS jest funkcją malejącą względem x.*

Dowód.

Dla $u = 0$ dowód jest analogiczny do dowodu Własności 2.3.1

W przypadku $u \in (0, 1]$ wskaźnik efektywności możemy zapisać w postaci:

$$W_{x,n}^{RS}(u, K = k) = Const_1 \frac{1}{w_{x,n}} + Const_2,$$

gdzie

$$\begin{aligned} Const_1 &= \frac{1}{k} > 0, \\ Const_2 &= \frac{1}{k}(\frac{(1+u)}{u}((1+u)^{k-1} - 1) - (k-1)) > 0. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że $\frac{1}{w_{x_1,n}} \geq \frac{1}{w_{x_2,n}}$ dla $x_1 < x_2$ otrzymano

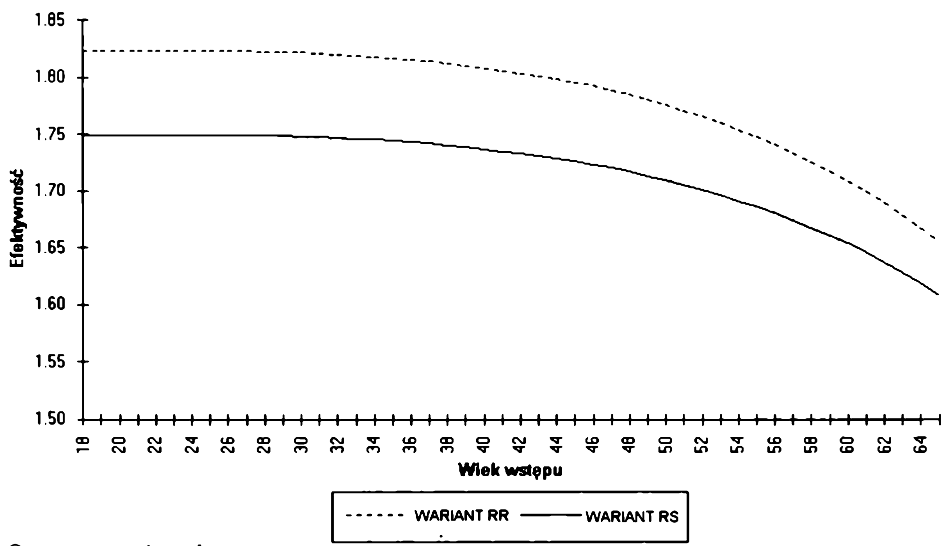
$$W_{x_1,n}^{RS}(u, K = k) \geq W_{x_2,n}^{RS}(u, K = k).$$

To kończy dowód

□

Przykład 2.3.2 *Załóżmy, że 48 osób, w wieku $x_i = 17 + i$, gdzie $i = 1, 2, ...48$, przystąpiło do ubezpieczenia. Wszyscy wykupili pięcioletnią polisę ($n = 5$). Niech coroczny udział w zyskach firmy wynosi 20% ($u = 0,2$).*

Rysunek 2.1: Efektywność a wiek wstępu



Źródło: Opracowanie własne

Na Rysunku 2.1 przedstawione zostały wysokości wskaźników efektywności $W_{x,5}^{RR}(0,2; K = 3)$ i $W_{x,5}^{RS}(0,2; K = 3)$, z których wynika, że w trzecim roku trwania umowy ubezpieczenia, niezależnie od wieku osoby ubezpieczonej, efektywność wariantu RR jest większa od efektywności wariantu RS. Ponadto dla obu wariantów wraz z wiekiem efektywność ubezpieczenia maleje.

Własność 2.3.3 *Przy ustalonych parametrach k, x, n wskaźnik (2.3.10) jest funkcją rosnącą względem u.*

Dowód.

Gdy $u \in (0, 1]$, to zgodnie ze wzorem (2.3.10) mamy

$$W_{x,n}^{RR}(u, K = k) = \frac{1}{w_{x,n}} \frac{u(1+u)^{k-1}}{(1+u)^k - 1}. \tag{2.3.12}$$

Obliczona względem u pochodna jest postaci:

$$W_{x,n}^{RR'}(U, K = k) = \frac{(1+u)^{k-1}((1+u)^{k-1}(uk+1) - 1)}{((1+u)^k - 1)^2}.$$

Ponieważ $(1+u)^{k-1} > 1$ i $(1+u) > 1$, więc licznik jest dodatni. Wobec tego, że mianownik jest dodatni, pochodna jest większa od zera, co świadczy o tym, że badana funkcja jest rosnąca.

W celu zakończenia dowodu wystarczy pokazać że,

$$W_{x,n}^{RR}(u, K = k) > W_{x,n}^{RR}(0, K = k).$$

Przekształcając wzór (2.3.12) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} W_{x,n}^{RR}(u, K = k) &= \frac{1}{w_{x,n}} \frac{u(1+u)^{k-1}}{(1+u)^k - 1} \\ &= \frac{1}{w_{x,n}} \frac{u(1+u)^{k-1}}{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i - 1} \\ &= \frac{1}{w_{x,n}} \frac{u(1+u)^{k-1}}{\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} u^i} \\ &= \frac{1}{w_{x,n}} \frac{u(1+u)^{k-1}}{uk \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{u^i}{i+1}} \\ &= \frac{1}{w_{x,n}} \frac{1}{k} \frac{(1+u)^{k-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{u^i}{i+1}}. \end{aligned}$$

Uwzględniając

$$\binom{k-1}{i} u^i > \binom{k-1}{i} \frac{u^i}{i+1}$$

otrzymujemy,

$$W_{x,n}^{RR}(u, K = k) = \frac{1}{w_{x,n}} \frac{1}{k} \frac{(1+u)^{k-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{u^i}{i+1}} > \frac{1}{k} \frac{1}{w_{x,n}} = W_{x,n}^{RR}(0, K = k).$$

□

Własność 2.3.4 *Przy ustalonych parametrach k, x, n wskaźnik (2.3.11) jest funkcją rosnącą względem u.*

Dowód.

Niech $u \in (0, 1]$, podobnie jak w dowodzie Własności 2.3.3, obliczona względem u pochodna wskaźnika efektywności jest większa od zera, więc wskaźnik efektywności jest funkcją rosnącą względem parametr u. Ponadto

$$W_{x,n}^{RS}(u, K = k) = W_{x,n}^{RS}(0, K = k) + Const,$$

gdzie

$$Const = \frac{1}{k}(\frac{(1+u)}{u}((1+u)^{k-1} - 1) - (k-1)) > 0.$$

Wobec tego

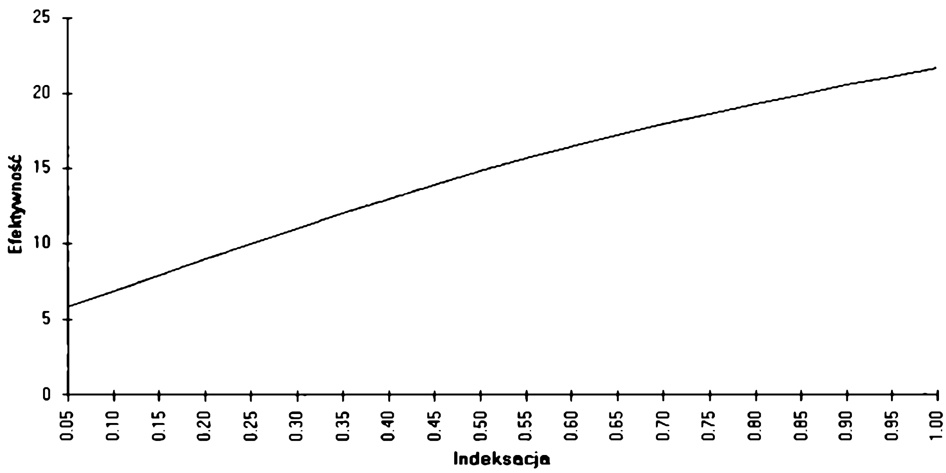
$$W_{x,n}^{RS}(u, K = k) > W_{x,n}^{RS}(0, K = k)$$

dla każdego $u \in (0, 1]$.

□

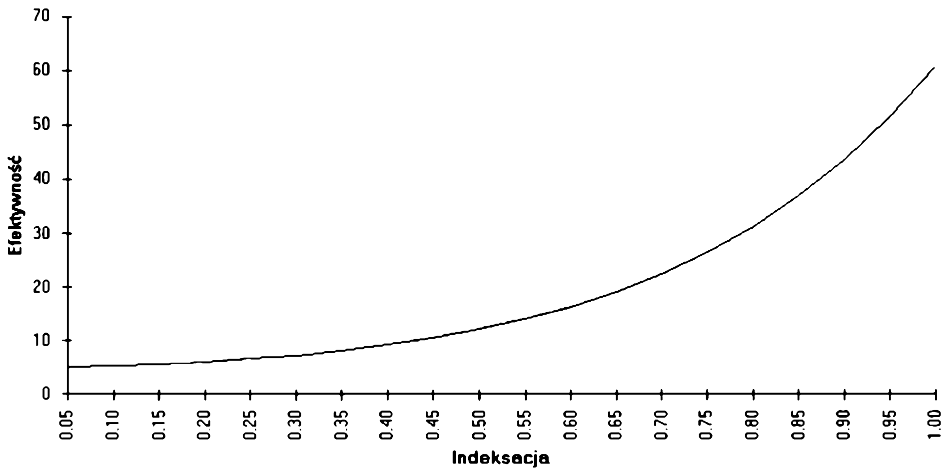
Przykład 2.3.3 *Osoba w wieku $x = 25$ lat wykupiła ubezpieczenie na $n = 30$ lat. Na Rysunku 2.2 i Rysunku 2.3 przedstawiono wysokość wskaźników efektywności w zależności od wysokości indeksacji odpowiednio dla wariantów RR i RS, przy założeniu, że wypłata nastąpiła w dziewiątym roku trwania ubezpieczenia ($k = 9$).*

Rysunek 2.2: Efektywność a indeksacja dla wariantu RR



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 2.3: Efektywność a indeksacja dla wariantu RS



Źródło: Opracowanie własne

Własność 2.3.5 *Przy ustalonych parametrach k, x, u wskaźnik efektywności dla wariantu RR jest funkcją rosnącą względem n.*

Dowód.

Dla $u = 0$ niech $n_1 < n_2$, oraz $1 \leq k \leq n_1$ wtedy $w_{x,n_1} \geq w_{x,n_2}$, stąd $W_{x,n_1}^{RR}(0, K = k) \leq W_{x,n_2}^{RR}(0, K = k)$.

Dla $u \in (0, 1]$ wskaźnik efektywności można zapisać jako

$$W_{x,n}^{RR}(u, K = k) = \frac{1}{w_{x,n}} Const,$$

gdzie $Const > 0$, stąd dla $n_1 < n_2$

$$W_{x,n_1}^{RR}(u, K = k) \leq W_{x,n_2}^{RR}(u, K = k).$$

□

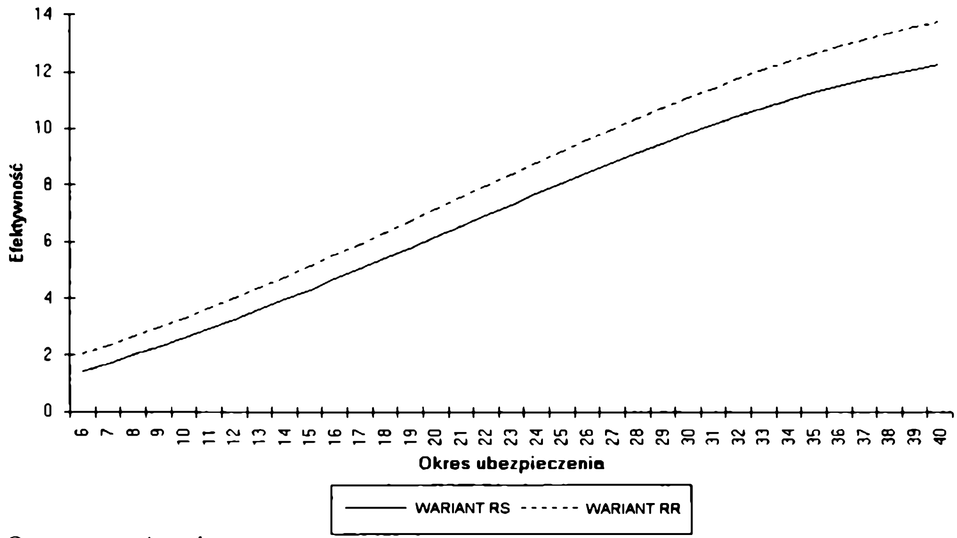
Własność 2.3.6 *Przy ustalonych parametrach k, x, u wskaźnik efektywności dla wariantu RS jest funkcją rosnącą względem n.*

Dowód.

Analogiczny jak Własności 2.3.5.

Przykład 2.3.4 *Niech coroczna indeksacja będzie stała i równa 15% ($u = 0,15$). Rysunek 2.4 pokazuje efektywność w piątym roku trwania ubezpieczeń ($k = 5$) dla polis zawartych na okres od 5 do 40 lat ($n = 5, 6, ...40$). Symulację przeprowadzono dla osoby w wieku 35 lat ($x = 35$).*

Rysunek 2.4: Efektywność a długość okresu ubezpieczenia



Źródło: Opracowanie własne

Następująca własność opisuje wartość wskaźnika efektywności w zależności od realizacji zmiennej losowej K.

Własność 2.3.7 *Przy ustalonych parametrach x, n, u wskaźnik efektywności dla wariantu RR jest funkcją malejącą względem momentu realizacji świadczenia.*

Dowód.

Niech $K_1(x)$ i $K_2(x)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie takim, jak rozkład zmiennej losowej K. Jeżeli $K_1(x) = k_1 < k_2 = K_2(x)$, to dla $u = 0$

$$W_{x,n}^{RR}(0, K_1 = k_1) > W_{x,n}^{RR}(0, K_2 = k_2).$$

W przypadku, gdy $u \in (0, 1]$ współczynnik efektywności dla $K(x) = k$ można przedstawić w postaci

$$W_{x,n}^{RR}(u, k) = Const\frac{(1+u)^k}{(1+u)^k - 1},$$

gdzie

$$Const = \frac{1}{w_{x,n}} \frac{u}{(1+u)} > 0$$

i nie zależy od k. Obliczona pochodna względem parametru k jest postaci

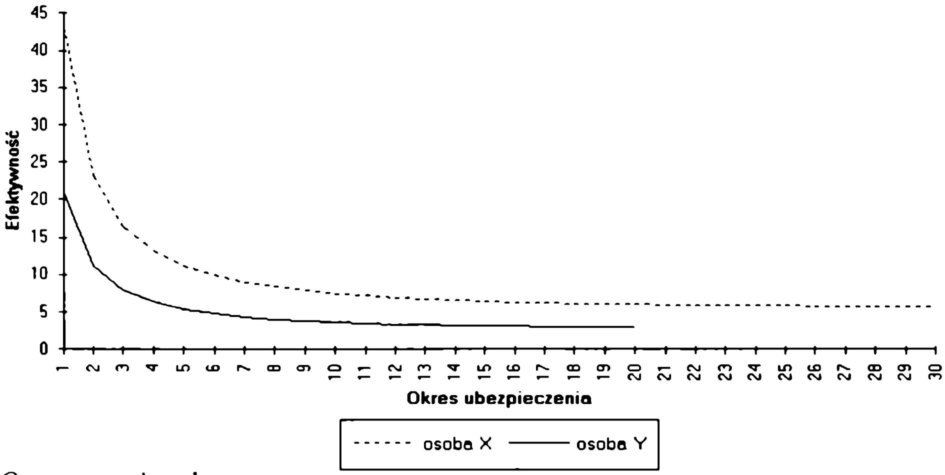
$$W_{x,n}^{RR'}(U, K = k) = Const\frac{-\ln(1+u)(1+u)^k}{((1+u)^k - 1)^2} < 0$$

dla każdego k. Stąd $W_{x,n}^{RR}(u, K = k)$ jest funkcją malejącą względem k.

□

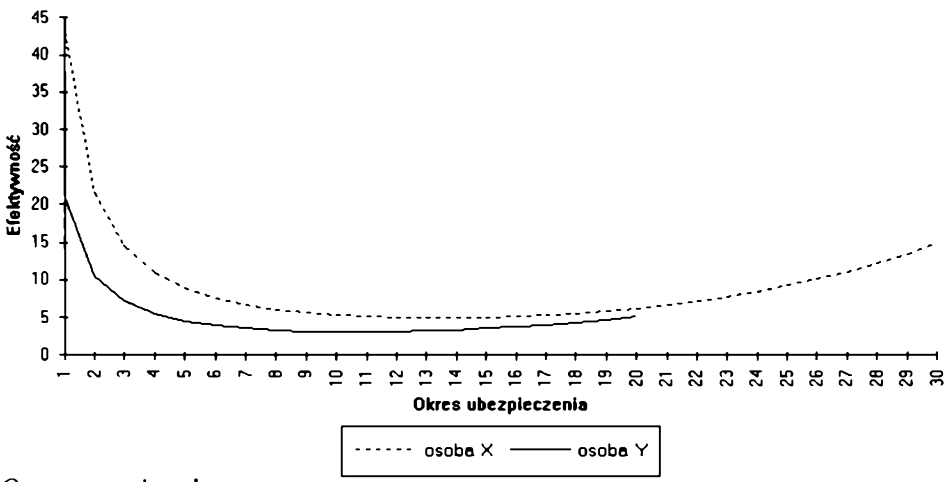
Przykład 2.3.5 *Dwie osoby X i Y zawarły indywidualne ubezpieczenie. Osoba X jest w wieku 25 lat ($x_1 = 25$) i chce wykupić ubezpieczenie na 30 lat ($n_1 = 30$). Osoba Y ma 45 lat i chciałaby ubezpieczenie na 20 lat ($x_2 = 45$, $n_2 = 20$). Zakłada się piętnastoprocentową indeksację co roku ($u = 0.15$). Rysunek 2.5 jest ilustracją graficzną zmian wskaźnika $W^{RR}_{x,n}(u, K = k)$ w ciągu całego okresu ubezpieczenia dla obydwóch ubezpieczonych.*

Rysunek 2.5: Efektywność a czas trwania ubezpieczenia z wariantu RR



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 2.6: Efektywność a czas trwania ubezpieczenia dla wariantu RS



Źródło: Opracowanie własne

Dla wariantu RS współczynnik efektywności jest funkcją malejącą względem $K(x) = k$ tylko w przypadku, gdy $u = 0$. W pozostałych przypadkach może zachowywać się różnie. Ilustracją graficzną stanowi Rysunek 2.6, gdzie wskaźnik $W_{x,n}^{RS}(u, K = k)$ został wyznaczony dla warunków z Przykładu 2.3.5.

2.3.3 Przeciętna efektywność ubezpieczenia

Z Definicji 2.3.1 wynika, że wskaźnik efektywności jest funkcją zmiennej losowej K, a więc także jest zmienną losową. Podstawową charakterystyką $W_{x,n}(U, K)$ jest jej wartość oczekiwana, która dana jest następującym wzorem

$$\mathbb{E}(W_{x,n}(U,K)) = \sum_{k=1}^{n} W_{x,n}(U, K = k)\ {}_{k|}q_x + W_{x,n}(U, K = n)\ {}_{n}p_x. \qquad (2.3.13)$$

Wielkość $\mathbb{E}(W_{x,n}(U, K))$ nazywana będzie przeciętną efektywnością ubezpieczenia.

Niekiedy wzory mają przejrzystą formę i są bardziej czytelne, jeżeli są przedstawione w formie macierzowej. Ponadto zazwyczaj każda macierz ma dość jasną interpretację co ułatwia nie tylko przeprowadzanie analizy badanego zjawiska, ale niejednokrotnie upraszcza przeprowadzanie dowodów lematów i twierdzeń. Oprócz interpretacji forma macierzowa ułatwia obliczenia numeryczne oraz korzystanie z pakietów matematycznych. Dlatego też w pracy, wiele wzorów zostało powtórzonych i przedstawionych w formie macierzowej, co zazwyczaj zostało ujęte w formie *Uwagi.*

Uwaga 2.3.1 *Jeżeli przez* $\boldsymbol{W}$ *oznaczymy wektor wskaźników efektywności w momencie realizacji świadczenia*

$$\boldsymbol{W} = (W_{x,n}(\boldsymbol{U}, K = 1), W_{x,n}(\boldsymbol{U}, K = 2), ..., W_{x,n}(\boldsymbol{U}, K = n-1), W_{x,n}(\boldsymbol{U}, K = n), W_{x,n}(\boldsymbol{U}, K = n))^T,$$

*to wzór (*2.3.13*) można zapisać w postaci*

$$\mathbb{E}(W_{x,n}(\boldsymbol{U}, K)) = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{W},$$

gdzie wektor $\boldsymbol{D}$ *określony jest wzorem (*1.2.1*).*

2.4 Efektywność ubezpieczenia ze składką jednorazową

Rozpatrzmy wariant ubezpieczenia na życie i dożycie, w którym składka wpłacana jest jednorazowo na początku okresu ubezpieczenia. W celu odróżnienia tego ubezpieczenia od rozpatrywanych wariantów RR i RS, wszystkie wielkości charakteryzujące wariant z jednorazową składką oznaczmy dodatkowo górnym indeksem J.

Wartość przyszła początkowej sumy ubezpieczenia w roku k wyrażona jest (analogicznie jak w wariancie RR) wzorem:

$$S_k^J \ = S_1 \textstyle\prod_{i=0}^{k-1}(1 + u_i). \qquad (2.4.14)$$

Ponieważ $c^J = S_1 \cdot w_{x,n}$ (gdzie $w_{x,n}$ odczytywane jest z taryf ubezpieczeń ze składką jednorazową), to wskaźnik efektywności ubezpieczenia (2.3.7) przyjmuje postać:

$$W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}, K = k) = \frac{S_k^J}{c^J} = \frac{1}{w_{x,n}} \prod_{i=0}^{k-1}(1 + u_i). \qquad (2.4.15)$$

Dla stałej stopy indeksacji wzór (2.4.15) można przekształcić do następującej postaci

$$W_{x,n}^J(u, K = k) = \frac{(1+u)^{k-1}}{w_{x,n}}.$$

Ponadto wartość oczekiwana wskaźnika efektywności ubezpieczenia (2.4.15) wyraża następująca równość:

$$\mathbb{E}(W_{x,n}^J(U, K)) = \frac{1}{w_{x,n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{k-1} (1+u_i)\ {}_{k|}q_x + \prod_{i=0}^{n-1} (1+u_i)\ {}_{n}p_x \right). \tag{2.4.16}$$

Uwaga 2.4.1 *Niech $\boldsymbol{I} = (1, 1, ..., 1)^T$ będzie wektorem rozmiaru $(n+1)$ oraz macierz*

$$\boldsymbol{U}_k = diag \begin{cases} 1 & dla\ i < k \\ 1 + u_k & dla\ i \geq k \end{cases}; \tag{2.4.17}$$

gdzie diag oznacza macierz diagonalną rozmiaru $(n+1) \times (n+1)$. Przeciętną wartość wskaźnika efektywności względem dalszego trwania życia można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbb{E}(W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}, K)) = \frac{1}{w_{x,n}} \boldsymbol{I}^T \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{D}. \tag{2.4.18}$$

Przy założeniu, że przez cały okres ubezpieczenia indeksacja jest stala wzór (2.4.16) przybiera postać:

$$\mathbb{E}(W_{x,n}^J(u, K)) = \frac{1}{w_{x,n}} \left(\sum_{k=1}^{n} (1+u)^{k-1}\ {}_{k|}q_x + (1+u)^{n-1}\ {}_{n}p_x \right). \tag{2.4.19}$$

Uwaga 2.4.2 *Niektóre firmy ubezpieczeniowe, w przypadku ubezpieczenia ze składką jednorazową, indeksują sumę ubezpieczenia także po n-tym roku. Wtedy, po dożyciu przez ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia, wypłacana jest suma ubezpieczenia $S_{n+1} = S_n(1+u_n)$, gdzie u_n jest indeksacją za rok n-ty.*

Poniżej przedstawione zostaną dwie własności wartości oczekiwanej wskaźnika efektywności dla ubezpieczenia ze składką jednorazową.

Własność 2.4.1 *Jeżeli $\boldsymbol{U}^{(1)} \leq \boldsymbol{U}^{(2)}$ (czyli $u_i^{(1)} \leq u_i^{(2)}$ dla $i \in \{0, 1, ..., n\}$), to*

$$\mathbb{E}(W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}^{(1)}, K)) \leq \mathbb{E}(W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}^{(2)}, K)).$$

Dowód. Korzystając ze wzoru (2.4.18) można zapisać, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}^{(1)}, K)) - \mathbb{E}(W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}^{(2)}, K)) &= \frac{1}{w_{x,n}} \boldsymbol{I}^T \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{U}_k^1 \boldsymbol{D} - \frac{1}{w_{x,n}} \boldsymbol{I}^T \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{U}_k^2 \boldsymbol{D} \\ &= \frac{1}{w_{x,n}} \boldsymbol{I}^T \left(\prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{U}^1 - \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{U}_k^2\right) \boldsymbol{D}. \end{aligned}$$

Ponieważ elementy macierzy $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{D}$ są dodatnie i $\boldsymbol{U}^{(1)} \leq \boldsymbol{U}^{(2)}$ (zatem $\boldsymbol{U}_k^{(1)} \leq \boldsymbol{U}_k^{(2)}$) to

$$\mathbb{E}(W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}^{(1)}, K)) - \mathbb{E}(W_{x,n}^J(\boldsymbol{U}^{(2)}, K)) \leq 0,$$

co kończy dowód.

□

Niech n_1, n_2 będą dwoma okresami ubezpieczenia w ubezpieczeniu na życie i dożycie. Prawdziwa jest następująca własność:

Własność 2.4.2 *Jeśli* $n_1 \le n_2$, *to* $\mathbb{E}(W^J_{x,n_1}(u,K)) \le \mathbb{E}(W^J_{x,n_2}(u,K))$.

Dowód. Z wzoru (2.4.19) mamy, że

$$\mathbb{E}(W^J_{x,n_2}(u,K)) \;=\; \frac{1}{w_{x,n_2}}\left(\sum_{k=0}^{n_2-1}(1+u)^k\ {}_{k|}q_x + (1+u)^{n_2}\ {}_{n_2}p_x\right).$$

Ponieważ $n_1 \le n_2$, to $w_{x,n_1} \ge w_{x,n_2}$ i można napisać, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W^J_{x,n_2}(u,K)) &\ge \frac{1}{w_{x,n_1}}\left(\sum_{k=0}^{n_2-1}(1+u)^k\ {}_{k|}q_x + (1+u)^{n_2}\ {}_{n_2}p_x\right)\\ = \frac{1}{w_{x,n_1}}&\left(\sum_{k=0}^{n_1-1}(1+u)^k\ {}_{k|}q_x + \sum_{k=n_1}^{n_2-1}(1+u)^k\ {}_{k|}q_x + (1+u)^{n_2}\ {}_{n_2}p_x\right) \qquad (2.4.20)\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{n_2-1}\ {}_{k|}q_x + {}_{n_2}p_x = 1,$$
$$\sum_{k=0}^{n_1-1}\ {}_{k|}q_x + {}_{n_1}p_x = 1,$$

to

$${}_{n_1}p_x = \sum_{k=n_1}^{n_2-1}\ {}_{k|}q_x + {}_{n_2}p_x,$$

skąd (2.4.20) można przekształcić następująco

$$\begin{aligned}&\frac{1}{w_{x,n_1}}\left(\sum_{k=0}^{n_1-1}(1+u)^k\ {}_{k|}q_x + \sum_{k=n_1}^{n_2-1}(1+u)^k\ {}_{k|}q_x + (1+u)^{n_2}\ {}_{n_2}p_x\right)\\ \ge\ &\frac{1}{w_{x,n_1}}\left(\sum_{k=0}^{n_1-1}(1+u)^k\ {}_{k|}q_x + (1+u)^{n_1}\Big(\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\ {}_{k|}q_x + {}_{n_2}p_x\Big)\right)\\ =\ &\frac{1}{w_{x,n_1}}\left(\sum_{k=0}^{n_1-1}(1+u)^k_{k|}q_x + (1+u)^{n_1}\ {}_{n_1}p_x\right) \qquad (2.4.21)\\ =\ &\mathbb{E}(W^J_{x,n_1}(u,K)).\end{aligned}$$

To kończy dowód.

□

Z Własności 2.4.2 wynika, że przy zadanych parametrach x i u im dłuższy okres ubezpieczenia, tym przeciętnie efektywność ubezpieczenia ze składką jednorazową jest większa.

Rozdział 3

Optymalne decyzje

3.1 Sformułowanie problemów

W celu zagwarantowania sobie i swoim bliskim źródła przyszłych dochodów w sytuacjach losowych takich jak niezdolność do pracy lub śmierć albo w sytuacji przejścia na emeryturę, należy zgromadzić na ten cel odpowiedni fundusz. Uczynić to można na wiele sposobów, których podstawową ideą jest bardziej lub mniej systematyczne gromadzenie pieniędzy. Istnieją różne formy pomnażania zgromadzonych funduszy. Na przykład można powierzyć je prywatnej osobie lub instytucji (przykładowo bankowi lub firmie ubezpieczeniowej). Jednak przy wyborze formy oszczędzania należy podjąć optymalną decyzję polegającą na osiągnięciu maksymalnych korzyści.

W oparciu o wskaźnik efektywności i jego wartość przeciętną w rozdziale tym przedstawione zostały dwa problemy decyzyjne dotyczące wyboru odpowiedniej strategii postępowania dzięki, której zostaną osiągnięte zamierzone cele i zabezpieczone wymagane potrzeby decydenta. Pod względem inwestycyjnym podjęcie decyzji ma na celu osiągnięcie maksymalnej korzyści finansowej, przy minimalnych nakładach. Opisane w Paragrafach 3.2 i 3.3 problemy dotyczą powierzenia pieniędzy firmie ubezpieczeniowej lub bankowi.

Pierwszy problem decyzyjny (opisany w pracach [11] i [14]) dotyczy wykupienia polisy ubezpieczenia na życie i dożycie, w którym istnieje możliwość zmiany formy dopisywania zysków ze składek. Polega on na tym, że ubezpieczony co roku ma prawo podjąć jedną z dwóch decyzji: pozostać przy dotychczasowej składce (wtedy do sumy ubezpieczenia dopisywany jest zysk z dotychczas wpłaconych składek i zysków jakie one przyniosły) lub zdecydować się na jej zwiększenie o proponowany przez towarzystwo ubezpieczeniowe procent (wówczas ubezpieczony decyduje się na system francuski podwyższania sumy ubezpieczenia). Znalezienie strategii optymalnej polega na określeniu wariantu ubezpieczenia dla każdego roku jego trwania, w taki sposób, aby wypłacona (w razie śmierci bądź po dożyciu) suma ubezpieczenia posiadała maksymalną wartość przy jednoczesnym ograniczeniu sumy wpłaconych składek. Oznacza to, że optymalna strategia maksymalizuje efektywność ubezpieczenia.

Drugim problem decyzyjny (analizowany w pracy [12]) dotyczy optymalnego wyboru formy inwestowania na n lat kapitału posiadanego przez inwestora. Inwestor ma do dyspozycji dwie możliwości: powierzyć kapitał firmie ubezpieczeniowej (ubezpieczenie na życie i dożycie ze składką jednorazową) lub dokonywać rocznych lokat bankowych. W przypadku lokaty bankowej istnieje możliwość corocznej zmiany banku. Naturalnym jest w tym przypadku pytanie o to czy i kiedy odpowiednia lokata bankowa byłaby bardziej korzystna niż polisa ubezpieczeniowa. Zatem celem analizy problemu jest rozważenie różnic między lokatą bankową, a polisą ubezpieczeniową z punktu widzenia osoby dysponującej pewnym kapitałem, która chce osiągnąć jak największe profity w każdej z mogących ją spotkać sytuacji (dożycie określonego wieku lub przedwczesna śmierć). Przeprowadzona zostanie analiza porównawcza efektywności ubezpieczenia na życie i dożycie z lokatą bankową. Analizowana będzie lokata bankowa z roczną kapitalizacją odsetek. Umożliwi to określenie innego oprocentowania na każdy rok i dostosowanie długości oszczędzania do okresu trwania polisy ubezpieczeniowej. Zakładać będziemy, że tak jak co roku dopisywane są odsetki do rachunku w banku, tak co roku suma ubezpieczenia bierze udział w podziale zysków firmy ubezpieczeniowej (jest indeksowana). Oba przedsięwzięcia charakteryzuje fakt jednorazowej wpłaty na początku okresu. Założenie to pozwala rozpatrzyć jeszcze jeden aspekt oszczędzania - konsekwencję zerwania warunków umowy, czyli wycofanie powierzonego firmie kapitału przed upływem umówionego okresu. W przypadku lokaty bankowej traci się oprocentowanie roczne, natomiast w ubezpieczeniu możliwe jest wycofanie części oprocentowanych składek (tzw. wykup, wartość polisy). Zasadnicza część rozważań skoncentrowana jest na wpływie losowości momentu śmierci na: aktualną sumę ubezpieczenia (świadczenie) i zgromadzony kapitał. W szczególności analizowana jest średnia wyplata względem rozkładu długości trwania życia z obu przedsięwzięć.

3.2 Optymalna strategia

Niektóre firmy ubezpieczeniowe oferują ubezpieczenie na życie i dożycie, w którym co roku istnieje możliwość zmiany wariantu RR na wariant RS i odwrotnie. W przypadku zawarcia takiego typu ubezpieczenia, dla ubezpieczonego istotnym problemem jest znalezienie strategii zmian pomiędzy wariantami RR i RS w kolejnych latach trwania ubezpieczenia. Celem tego paragrafu jest określenie strategii maksymalizującej sumę ubezpieczenia przy jednoczesnym ograniczeniu sumy wpłaconych składek.

Zauważmy, że w pierwszych latach opłacalne jest wybieranie wariantu RR, gdyż gwarantuje on wyższe przyrosty sumy ubezpieczenia (indeksacji nie ulega suma wpłacanych składek ale początkowa suma ubezpieczenia). Ponadto, jeżeli istnieje korzystny moment zamiany wariantu RR na RS, to po zmianie należy kontynuować wariant RS do końca okresu ubezpieczenia. Związane jest to z faktem, że suma wpłaconych składek i zysków jakie one przyniosły do tego momentu przewyższa wysokość sumy ubezpieczenia.

Niech k oznacza rok w którym nastąpiła zmiana z wariantu RR na RS. Ponadto niech S_{k+j}^k oznacza sumę ubezpieczenia w $k+j$-tym roku trwania ubezpieczenia, pod warunkiem, że zmiana wariantu RR na RS nastąpiła w roku k i wariant RS był kontynuowany przez j lat ($j \in \{1, 2, \ldots, n-k\}$). Jeżeli zmiana wariantu RR na RS następuje już po pierwszym roku wówczas końcowa suma ubezpieczenia jest taka sama jak w wariancie RS czyli $S_n^1 = S_n^{RS}$. Natomiast dla $k = n$ wariant RR jest stosowany przez cały okres ubezpieczenia i wtedy $S_n^n = S_n^{RR}$.

Twierdzenie 3.2.1 *Dla ubezpieczenia zawartego na okres n lat przez ubezpieczonego w wieku x, przy ustalonej indeksacji U, zachodzi następująca nierówność*

$$S_n^{RR} \leq S_n^k$$

dla każdego naturalnego $k \in \left[\frac{1}{w_{x,n}}, n\right]$.

Dowód.

Dla ubezpieczenia z wariantem RR, przyjmijmy, że G_k oznacza sumę składek wpłaconych w pierwszych k ($k \in \{1, ..., n\}$) latach trwania ubezpieczenia wraz z oprocentowaniem:

$$G_k = kc \prod_{i=1}^{k-1}(1 + u_i).$$

W celu udowodnienia tezy twierdzenia wystarczy pokazać, że nierówność

$$S_{k+1}^{RR} \leq S_{k+1}^{k} \tag{3.2.1}$$

zachodzi dla $k \geq \frac{1}{w_{x,n}}$. Przekształcając obustronnie nierówność (3.2.1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_k^{RR}(1 + u_k) &\leq S_k^{RR} + u_k G_k \\ S_k^{RR} &\leq G_k \\ \frac{c}{w_{x,n}} \prod_{i=1}^{k-1}(1 + u_i) &\leq kc \prod_{i=1}^{k-1}(1 + u_i) \\ \frac{1}{w_{x,n}} &\leq k, \end{aligned}$$

Zatem nierówność (3.2.1) jest spełniona dla $k \geq \frac{1}{w_{x,n}}$. Ponieważ $k \leq n$ i jest liczbą naturalną więc nierówność (3.2.1) jest spełniona dla każdego naturalnego $k \in \left[\frac{1}{w_{x,n}}, n\right]$.

□

Wniosek 3.2.1 *Optymalny czas $\hat{k}$ zmiany wariantu RR na wariant RS jest równy $\hat{k} = \lceil \frac{1}{w_{x,n}} \rceil$, gdzie $\lceil y \rceil$ oznacza zaokrąglenie liczby y do najbliższej liczby naturalnej większej bądź równej y.*

Dowód.

Teza wniosku wynika z Twierdzenia 3.2.1 i z faktu, że jeżeli zostanie dokonana zmiana wariantu RR na RS w roku $\lceil \frac{1}{w_{x,n}} \rceil$ trwania ubezpieczenia, wtedy wzrost sumy ubezpieczenia jest większy niż w przypadku pozostania przy wariancie RR, gdyż zakumulowane składki przynoszą większe zyski niż zindeksowana suma ubezpieczenia.

□

Z Wniosku 3.2.1 wynika następująca reguła: jeżeli $\lceil \frac{1}{w_{x,n}} \rceil \geq n$, to wariant RR powinien być stosowany przez cały okres ubezpieczenia. Ponadto optymalny czas $\hat{k}$ zmiany wariantu nie zależy od wysokości indeksacji $\boldsymbol{U}$.

Niech $W_{x,n}^k(\boldsymbol{U}, n)$ oznacza współczynnik efektywności dla ubezpieczenia, w którym dokonano zmiany wariantu RR na RS w roku $k \in \left[\frac{1}{w_{x,n}}, n\right]$. Korzystając z definicji wskaźnika efektywności i dokonując oszacowań jego licznika i mianownika można udowodnić następujący lemat

Lemat 3.2.1 *Jeżeli $\lceil \frac{1}{w_{x,n}} \rceil < n$, to dla $k \in \left[\frac{1}{w_{x,n}}, n\right]$*

$$W_{x,n}^k(\boldsymbol{U}, n) \geq W_{x,n}^{RR}(\boldsymbol{U}, K = n).$$

Przykład 3.2.1 *Rozpatrzmy ubezpieczenie na życie i dożycie zawarte przez osobę w wieku 55 lat ($x = 55$) na okres 20 lat ($n = 20$). Niech początkowa suma ubezpieczenia będzie równa 100 ($S = S_1 = 100$). Załóżmy, że $\boldsymbol{U} = (0, 0.2, 0.2, \ldots 0.2)^T$ (indeksacja), ponadto inflacja w całym okresie ubezpieczenia jest stała i równa $0,1$. Wówczas realną stopę zysku określa wektor $\boldsymbol{A} = (0, 0.09, 0.09, \ldots 0.09)$.*

Korzystając z taryf PZU ŻYCIE S.A. [29] otrzymano następujący wskaźnik taryfowy:

$$w_{55,20} = 0.05965\ .$$

Optymalny czas (z Wniosku (3.2.1)) zmiany wariantu RR na wariant RS jest równy:

$$\lceil \frac{1}{w_{55,20}} \rceil = \lceil 16.76 \rceil = 17.$$

Korzystając z optymalnej strategii:

$$S_{20}^{17} = 522.40,$$

$$c_{20}^{17} = 297.99.$$

Natomiast używając wariantu RR przez cały okres ubezpieczenia:

$$S_{20}^{RR} = 514.17,$$

$$c_{20}^{RR} = 305.17.$$

Zatem

$$W_{55,20}^{17}(\boldsymbol{A}, 20) = 1.75 > 1.68 = W_{55,20}^{RR}(\boldsymbol{A}, 20).$$

Ubezpieczony stosując optymalną strategię nie tylko ma możliwość zwiększenia wysokości świadczenia wynikającego z umowy ubezpieczenia, ale także obniżenia sumy wpłacanych składek. Stosując optymalną strategię wskaźnik efektywności ubezpieczenia liczony na koniec okresu ubezpieczenia jest większy niż wskaźnik efektywności ubezpieczenia z wariantem RR.

3.3 Ubezpieczenie a lokata bankowa

3.3.1 Zastosowanie wskaźnika efektywności

Załóżmy, że osoba w wieku x posiada kapitał wysokości c i chce go ulokować na n lat, wpłacając pieniądze do banku lub wykupując ubezpieczenie na życie i dożycie ze składką jednorazową.

Przyjmijmy jak dotychczas, że u oznacza indeksację w firmie ubezpieczeniowej (u_i dla $i \in \{1, 2 \ldots n\}$). Dla odróżnienia stóp procentowych oferowanych przez firmę ubezpieczeniową i bank niech b_i będzie wysokością oprocentowania w i-tym roku trwania lokaty bankowej ($i \in \{0, 1, 2 \ldots n\}$). Ponadto $b_i \in [0, 1]$ i $u_i \in [0, 1]$ oraz zakłada się, że $b_0 = 0$.

Niech c_B oznacza kapitał wpłacony do banku, a n (liczbę lat) okres na jaki został on złożony. Załóżmy, że kapitał początkowy ulega rocznej kapitalizacji zgodnie z zasadą procentu składanego, stąd wysokość kapitału w k-tym roku trwania lokaty bankowej (gdzie $k \in \{1, 2 \ldots n, n+1\}$) jest równa:

$$L_k = c^B \prod_{i=0}^{k-1} (1 + b_i), \tag{3.3.2}$$

gdzie L_{n+1} oznacza kapitał zgromadzony po n latach inwestycji (por. M. Dobija & E. Smaga [16]).

Zakładając, że roczna stopa procentowa w banku jest stała i równa b ($b_i = b$ dla $i \in \{1, 2 ... n\}$) wzór (3.3.2) przyjmuje następującą postać:

$$L_k = c^B(1 + b)^{k-1}. \tag{3.3.3}$$

W celu porównania (pod względem finansowym) lokaty bankowej i ubezpieczenia na życie i dożycie ze składką jednorazową przyjmijmy, że $c^J = c^B = C$. Niech roczna stopa procentowa w banku w czasie trwania inwestycji będzie stała i równa b ($b_i = b$ dla $i \in \{1, 2, ..., n\}$). Analogicznie niech u oznacza indeksację w firmie ubezpieczeniowej ($u_i = u$ dla $i \in \{1, 2 ... n\}$) oraz po n latach ubezpieczenia wypłacona suma ubezpieczenia jest równa S_{n+1} (jak w Uwadze 2.4.2). W celu porównania zysków z ubezpieczenia w stosunku do zysków z lokaty terminowej w banku rozpatrzmy najpierw końcową sumę ubezpieczenia po n latach oraz wysokość zgromadzonego po n latach kapitału na koncie bankowym:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_1(1 + u)^n = \frac{C}{w_{x,n}}(1 + u)^n & (3.3.4) \\ L_{n+1} &= C(1 + b)^n. & (3.3.5) \end{aligned}$$

Prawdziwy jest następujący lemat.

Lemat 3.3.1 .

1. *Jeśli* $w_{x,n} \leq (\frac{1+u}{1+b})^n$, *to* $S_{n+1} \geq L_{n+1}$.
2. *Jeśli* $w_{x,n} \geq (\frac{1+u}{1+b})^n$, *to* $S_{n+1} \leq L_{n+1}$.

Dowód.

Dowód Lematu 3.3.1 otrzymujemy przez podstawienie w nierównościach: $S_{n+1} \geq L_{n+1}$ i $S_{n+1} \leq L_{n+1}$ za S_{n+1} wzoru (3.3.4) oraz za L_{n+1} wzoru (3.3.5).

□

Lemat 3.3.1 posiada praktyczną interpretację. Przy założeniu rocznych stóp procentowych i indeksacji odpowiednio b i u, znajomość wysokości wskaźnika taryfowego $w_{x,n}$ pozwala inwestorowi na podjęcie optymalnej decyzji. Jeśli $w_{x,n} \leq (\frac{1+u}{1+b})^n$, to większe korzyści po n latach przyniesie lokata w banku. W przeciwnym przypadku bardziej opłacalne jest przystąpienie do ubezpieczenia. Ponadto w przypadku, gdy $u = b$ ubezpieczenie jest zawsze korzystniejsze, gdyż $w_{x,n} \leq 1$.

Ocena efektywności długoterminowego przedsięwzięcia oparta na porównaniu tylko końcowych wielkości zgromadzonego kapitału nie jest wystarczająca. Okazuje się bowiem, iż w niektórych przypadkach mimo, że $S_{n+1} \leq L_{n+1}$, to średnia wysokość wypłaty w banku jest mniejsza niż w firmie ubezpieczeniowej (patrz Przykład 3.3.1). Związane jest to z ryzykiem śmierci człowieka w trakcie trwania przedsięwzięcia.

Zgodnie ze wzorem (2.4.19) wskaźnik efektywności ubezpieczenia w momencie wypłaty świadczenia jest postaci

$$W^J_{x,n}(u, K = k) = \frac{S_k}{C}. \tag{3.3.6}$$

Dla lokaty bankowej przy stałej stopie procentowej b wskaźnik efektywności lokaty bankowej $W^B_{x,n}(b, K = k)$ w momencie wypłaty k (analogicznie jak dla ubezpieczenia w Definicji 2.3.1) określony jest następującym wzorem:

$$W^B_{x,n}(b, K = k) = \frac{L_k}{C}. \tag{3.3.7}$$

Mianowniki we wzorach (3.3.6), (3.3.7) są takie same, zatem w celu porównania przeciętnej efektywności względem dalszego trwania życia, wystarczy porównać wartości oczekiwane (względem długości dalszego trwania życia) wypłaty świadczenia ubezpieczeniowego z wysokością kapitału zgromadzonego w banku.

Oczekiwaną wartość wypłaty $\mathbb{E}(S_K)$ z polisy ubezpieczeniowej określa się następująco:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_K) &= \sum_{k=1}^{n} S_k \ {}_{k-1|}q_x + S_{n+1} \ {}_n p_x && (3.3.8)\\ &= \sum_{k=1}^{n} S_1(1+u)^{k-1} \ {}_{k-1|}q_x + S_1(1+u)^n \ {}_n p_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_1(1+u)^{k} \ {}_{k|}q_x + S_1(1+u)^n \ {}_n p_x \\ &= \frac{c^J}{w_{x,n}}(\sum_{k=0}^{n-1}(1+u)^k \ {}_{k|}q_x + (1+u)^n \ {}_n p_x) && (3.3.9)\end{aligned}$$

Wielkość ta zależy od wieku inwestora x, okresu inwestycji n oraz od indeksacji u.

Podobnie w przypadku lokaty bankowej, oczekiwaną wartość wypłaty $\mathbb{E}(L_K)$ określić można w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_K) &= \sum_{k=1}^{n} L_k \ {}_{k-1|}q_{x+k} + L_{n+1} \ {}_n p_x && (3.3.10)\\ &= \sum_{k=1}^{n} c^B(1+b)^{k-1} \ {}_{k-1|}q_x + c^B(1+b)^n \ {}_n p_x \\ &= c^B(\sum_{k=0}^{n-1}(1+b)^k \ {}_{k|}q_x + (1+b)^n \ {}_n p_x). && (3.3.11)\end{aligned}$$

Uwaga 3.3.1 *Oczekiwana wartość wypłaty z polisy ubezpieczeniowej jest postaci*

$$\mathbb{E}(S_K) = S_1 \boldsymbol{I}^T \prod_{k=0}^{n} \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{D}, \qquad (3.3.12)$$

gdzie macierze $\boldsymbol{U}_k$ zdefiniowane są jak w Uwadze 2.4.1

Natomiast średnia wartość wypłaty z lokaty bankowej wyrażona jest wzorem

$$\mathbb{E}(L_K) = c^B \boldsymbol{I}^T \prod_{k=0}^{n} \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{D}, \qquad (3.3.13)$$

gdzie macierze rozmiaru $(n+1) \times (n+1)$ mają następującą postać

$$\boldsymbol{B}_k = diag\begin{cases} 1 & dla\ i < k \\ 1+b_k & dla\ i \geq k \end{cases} \quad dla \quad k = 1, 2, ...; \qquad (3.3.14)$$

natomiast

$$\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{I} \ dla \ k = 0.$$

W Przykładzie 3.3.1 przeprowadzono obliczenia, które pokazują, że ocena efektywności długoterminowego przedsięwzięcia finansowego oparta na porównaniu tylko końcowych wielkości zgromadzonego kapitału nie jest wystarczająca. Okazuje się bowiem, iż w tym przypadku mimo, że $S_{n+1} \leq L_{n+1}$, to średnia wysokość wypłaty w banku jest mniejsza niż w firmie ubezpieczeniowej

Przykład 3.3.1 *Osoba w wieku 50 lat ($x = 50$) posiada kapitał w wysokości 1000 ($C = 1000$) i chce go zainwestować na 20 lat ($n = 20$) zakładając lokatę bankową lub wykupując ubezpieczenie ze składką jednorazową.*

Tablica 3.1: Wysokość sumy ubezpieczenia, lokaty bankowej oraz dalszy rozkład trwania życia dla $x = 50$, $n = 20$ oraz $u = 0,3$ i $b = 0,339$.

k	Sk	Lk	$_{k-1\|}q_{50}$
1	1796	1000	0,007757
2	2334	1339	0,008247
3	3034	1793	0,008804
4	3945	2401	0,009451
5	5128	3215	0,010175
6	6667	4304	0,010944
7	8667	5763	0,011747
8	11267	7717	0,012582
9	14647	10333	0,013452
10	19041	13836	0,014343
11	24753	18527	0,015313
12	32179	24808	0,016316
13	41833	33217	0,017297
14	54383	44478	0,018233
15	70698	59556	0,019169
16	91907	79746	0,020127
17	119479	106780	0,021164
18	155323	142978	0,022312
19	201920	191448	0,023549
20	262496	256349	0,024842
dożycie	341245	343251	0,694176

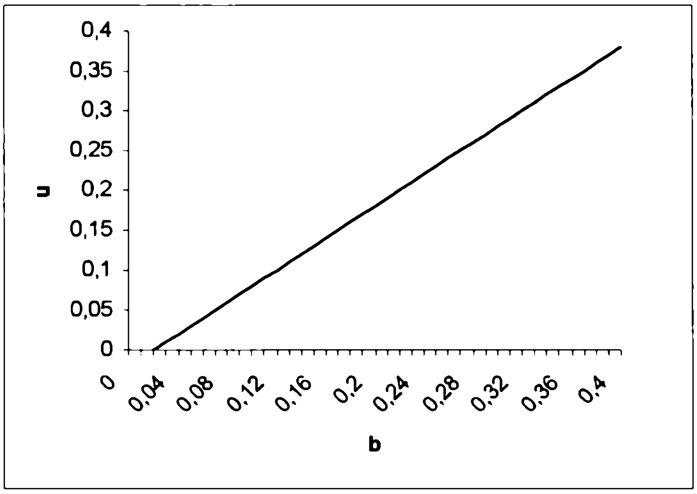
Źródło: Opracowanie własne

Tabela 3.1 pokazuje wysokość sumy ubezpieczenia i kapitału lokaty terminowej w każdym roku trwania przedsięwzięcia, przy założeniu, że $u = 0,3$ a $b = 0,339$. W ostatniej kolumnie przytoczono odpowiednio prawdopodobieństwa $_{k|}q_{50}$ dla $k \in \{0, 1, ..., 19\}$ oraz $_{20}p_{50}$. Zauważmy, że $w_{x,n} = 0.55693 > 0.553 = \left(\frac{1+u}{1+b}\right)^{20}$ skąd na podstawie Lematu 3.3.1 $S_{n+1} \leq L_{n+1}$, co potwierdza ostatni wiersz Tabeli 3.1 (druga i trzecia kolumna). Wydawałoby się zatem, że ubezpieczenie jest mniej opłacalne, niż lokata bankowa. Okazuje się jednak, że średnia wartość wypłaty w przypadku ubezpieczenia jest wyższa niż w banku, bowiem $\mathbb{E}(S_K) = 260914$, $\mathbb{E}(L_K) = 260063$, skąd $\mathbb{E}(S_K) \geq \mathbb{E}(L_K)$. Ponadto przykład ten wskazuje, że w przypadku długoterminowego przedsięwzięcia średnia wypłata jest dużo niższa niż kwota końcowa, gdyż prawdopodobieństwo śmierci przed końcem inwestycji jest istotne.

Zazwyczaj roczna stopa procentowa w banku nie jest równa rocznej indeksacji oferowanej przez firmę ubezpieczeniową. W Przykładzie 3.3.2 rozpatrzony został wpływ wysokości stóp procentowych na relację między wartością oczekiwaną wypłaty z lokaty bankowej i przeciętną wypłatą z polisy ubezpieczeniowej.

Przykład 3.3.2 *Niech $u, b \in [0; 0.4]$, ponadto inwestor ma trzydzieści lat ($x = 30$) i chce zainwestować 10000 ($C = 10000$) na okres pięciu lat ($n = 5$). Proponowana przez firmę ubezpieczeniową suma ubezpieczenia $S_1 = 11111$ została określona przy wskaźniku taryfowym $w_{30,5} = 0.89999$ (patrz [29]).*

Rysunek 3.1: Porównanie średniej wypłaty z ubezpieczenia i i średniej wypłaty z banku dla u, b mniejszych niż 0,4



Źródło: Opracowanie własne

Wykres na Rysunku 3.1 przedstawia te punkty (u, b) dla których $\mathbb{E}(S_K) = \mathbb{E}(L_K)$. Obszar nad linią zawiera te punkty, dla których $\mathbb{E}(S_K) > \mathbb{E}(L_K)$, natomiast obszar pod linią te punkty, dla których $\mathbb{E}(S_K) < \mathbb{E}(L_K)$. Jeżeli indeksacja u jest około dwóch punktów procentowych niższa niż oprocentowanie w banku b, to średnia wypłata z ubezpieczenia jest w przybliżeniu równa średniej wypłacie z banku.

3.3.2 Skutki finansowe zerwania warunków umowy

W przypadku lokaty terminowej wycofanie kapitału z banku w roku k-tym powoduje utratę odsetek przysługujących za ten rok. Inwestor otrzymuje zatem kwotę L_k. Inaczej jest w przypadku ubezpieczenia. Rezygnując z kontynuowania umowy ubezpieczenia zakład ubezpieczeniowy wypłaca ubezpieczonemu pieniężny ekwiwalent, popularnie zwany wykupem lub *wartością polisy*. Wysokość ekwiwalentu zależy przede wszystkim od wysokości części oszczędnościowej składki. Nie jest możliwa wypłata całego ekwiwalentu, ponieważ zakład ubezpieczeniowy odlicza jeszcze koszty zawarcia i obsługi ubezpieczenia oraz tak zwane koszty na ryzyko związane z prawdopodobieństwem śmierci ubezpieczonego.

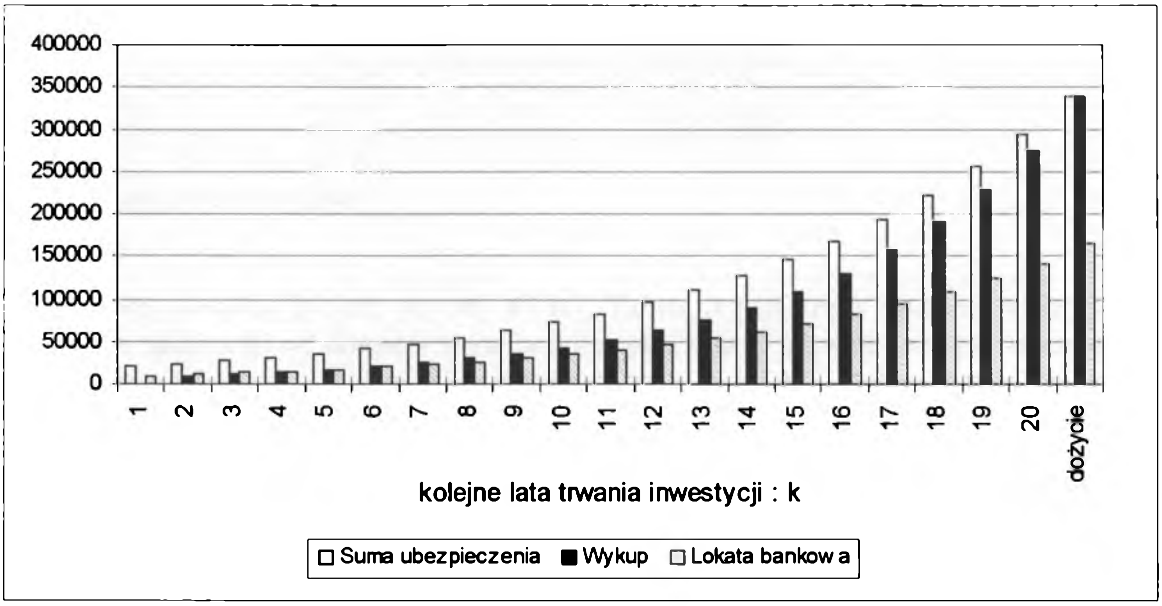
Wykup ubezpieczenia jest możliwy przeważnie dopiero po 2 lub 3 latach od chwili zawarcia umowy ubezpieczenia. Wiąże się to przede wszystkim z wysokimi kosztami (na przykład pierwszoroczna prowizja agentów) i niedostatecznym poziomem rezerwy matematycznej. W ciągu całego okresu ubezpieczenia wartość wykupu rośnie i zbliża się w końcu do pełnej sumy ubezpieczenia. Jedynie w ubezpieczeniu ze składką jednorazową przysługuje prawo wykupu polisy już w pierwszym roku trwania ubezpieczenia.

Kwota wykupu powinna być podana w polisie. W praktyce warunki ubezpieczenia wskazują jedynie ogólnie na sposób jej obliczania. Na przykład w ogólnych warunkach ubezpieczenia na życie i dożycie PZU Życie S.A. napisane jest: *Wartość wykupu oblicza się z części składek oprocentowanych zgodnie z planem technicznym ubezpieczeń. Pozostała część składek stanowi należność PZU ŻYCIE S.A. z tytułu ponoszenia odpowiedzialności na wypadek śmierci ubezpieczonego oraz przeznaczona jest na pokrycie kosztów obsługi ubezpieczenia.*

Wykup w k-tym roku (dalej oznaczana przez V_k) jest zatem częścią oszczędnościową składki brutto, która brała udział w podziale zysków firmy przez $k-1$ lat. Wzajemną zależność wielkości L_k i V_k ilustruje przedstawiony poniżej przykład.

Przykład 3.3.3 *Osoba w wieku 30 lat chce zainwestować 10000 ($c^J = c^B = C = 10000$) na okres 20 lat. Na podstawie taryf PZU Życie S.A.* $w_{30,20} = 0,48435$. *Zakłada się, że stopa zysku w każdym roku wynosi* 15% *(tzn.* $c = b = 0,15$*).*

Rysunek 3.2: Wysokość S_k, V_k i L_k dla $k = 1, 2, ...20$



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 3.2 ilustruje wysokości L_k, V_k i S_k w każdym roku inwestycji. Przez 5 pierwszych lat ewentualne wycofanie funduszów z banku jest korzystniejsze niż wykup ubezpieczenia. Sytuacja ta zmienia się w roku 5 i już do końca inwestycji relacja między V_k i L_k pozostaje bez zmian.

Rozpatrzmy relację między wysokociami L_k i V_k w zależności od wieku i długości okresu ubezpieczenia.

Tablica 3.2: Rok trwania inwestycji w którym wartość wykupu ubezpieczenia przewyższa po raz pierwszy wysokość zgromadzonego w banku kapitału.

x	$min\{k : V_k > L_k\}$	n od	n do
20	5	5	10
	6	11	29
	7	30	44
	8	45	50
30	5	5	10
	6	11	29
	7	30	45
40	5	5	8
	6	9	23
	7	25	35
50	5	5	
	6	6	16
	7	17	25
65	6	6	8
	7	9	10

Źródło: Opracowanie własne

Dla osób w wieku *20, 30, 40, 50, 65* lat, Tabela 3.2 ilustruje moment, w którym $L_k < V_k$ w zależności od długości trwania inwestycji n oraz od wieku wstępu inwestora x. Podobnie jak w Przykładzie 3.3.3 założono, że $u = b$ i jest stałe w czasie trwania inwestycji. Okazuje się, że im dłuższy okres ubezpieczenia, tym dłużej trzeba czekać, aby wartość wykupu przekroczyła wartość lokaty bankowej. Ponadto czas, po którym wartość wykupu przekroczy wartość lokaty bankowej nie zależy od wysokości u oraz b (ponieważ $u = b$ i jest stałe w czasie trwania inwestycji).

Rozdział 4

Model strumieni finansowych w ubezpieczeniu na życie i dożycie

4.1 Strumienie finansowe w ubezpieczeniu

W ocenie efektywności decyzji kapitałowych istotną rolę grają wysokości strumieni finansowych (przepływy pieniężne) powstałych w wyniku podjętych decyzji. Rachunek przepływów pieniężnych wykorzystywany jest do przeprowadzania oceny opłacalności określonego przedsięwzięcia inwestycyjnego. Na tej podstawie dokonywana jest analiza finansowa i oceniana jest opłacalność inwestycji. Przeprowadzanie takich analiz obejmuje przede wszystkim opracowanie zestawień strumieni pieniężnych (przepływów), w których podstawą jest określenie, dla danego momentu relacji między wpływami a wypływami. Istotnym elementem przy szacowaniu przewidywanych dochodów jak i wydatków w długoterminowych inwestycjach jest czynnik czasu. Dlatego też w odniesieniu do strumienia finansowego stosuje się dyskontowanie, które polega na znalezieniu wartości aktualnej przepływów pieniężnych przy znajomości ich wartości przyszłej.

Ubezpieczenie na życie i dożycie jest umową w wyniku której powstają przepływy pieniężne. Zarówno składka ubezpieczeniowa jak i świadczenie mogą być traktowane jako wypłaty lub wpłaty w zależności od tego, z punktu widzenia której strony umowy ubezpieczenia są rozpatrywane. Na przykład ubezpieczenie grupowe na życie i dożycie jest umową między firmą ubezpieczeniową (ubezpieczyciel), pracodawcą (ubezpieczający) i pracownikiem (ubezpieczony). Ubezpieczyciel, w zamian za przyjęte od ubezpieczającego składki (które z jego punktu widzenia są wpłatą), zobowiązuje się do wypłaty sumy ubezpieczenia, gdy umiera ubezpieczony, lub gdy dożywa określonego w polisie wieku. Ubezpieczający zobowiązuje się płacić składki (które z jego punktu widzenia są wypłatą) za ubezpieczonego, natomiast w zamian za to ma możliwość skorzystania z różnego rodzaju ulg. Natomiast ubezpieczony, zazwyczaj płaci podatek od składki ubezpieczeniowej (i jest to jego wypłatą). Ponadto w wyniku umowy ubezpieczenia otrzymuje on sumę ubezpieczenia (która jest dla niego wpłatą), jeśli dożyje wyznaczonego w umowie wieku. Wpłata następuje także w przypadku śmierci pracownika, a sumę ubezpieczenia otrzymuje uposażony wskazany przez ubezpieczonego pracownika. Szczegółowo problem ten został opisany i rozpatrzony w Rozdziale 5.

Ubezpieczenie na życie i dożycie związane jest przede wszystkim z dwoma rodzajami płatności dotyczących każdej ze stron umowy ubezpieczenia (skladki i świadczenia). Płatności te generują rozłożone w czasie przepływy pieniężne pomiędzy stronami umowy ubezpieczenia. Jednak z punktu widzenia wybranej strony umowy ubezpieczenia nie można dokładnie określić aktualnej wartości łącznych przepływów pieniężnych, gdyż ich wielkość zależy od rozkładu dalszego trwania życia ubezpieczonego oraz stopy procentowej (stała bądź zmienna). Stąd potrzeba liczenia wartości przeciętnej i wariancji łącznych zaktualizowanych przepływów pieniężnych.

4.2 Łączne przepływy pieniężne

W zależności od rozpatrywanej strony umowy ubezpieczenia przepływy pieniężne wynikające z założenia ubezpieczenia na życie i dożycie mogą przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Z punktu widzenia wybranej strony umowy ubezpieczenia przyjmują one wartości dodatnie, gdy są wpłatą, a wartości ujemne, gdy są wypłatą. Na przykład z punktu widzenia ubezpieczyciela składki przyjmują wartości dodatnie, gdyż są dla niego dochodem. Natomiast z punktu widzenia ubezpieczającego, składki tworzą strumień finansowy o ujemnych wartościach, gdyż są dla niego wydatkiem.

Niech $b_k(i)$ oznacza wysokość przepływu pieniężnego wynikającego z umowy ubezpieczenia na życie i dożycie, na początku roku i pod warunkiem, że ubezpieczony umrze w okresie $[k; k+1)$ dla $k, i = 0, 1, \ldots$.

Rozpatrzmy n letnie ubezpieczenie na życie i dożycie ze składką roczną płaconą z góry. Wielkość przeplywu pieniężnego $b_k(i)$ zależy przede wszystkim od momentu śmierci ubezpieczonego. W szczególności jeżeli ubezpieczony umrze w trakcie trwania ubezpieczenia $(k < n)$, to w zależności od momentu i, w którym obserwujemy przepływ, jego wielkość zależy od wielkości:

- składki ubezpieczeniowej jeżeli $i \leq k$,
- świadczenia wypłacanego po śmierci ubezpieczonego jeśli $i = k + 1$,

Jeżeli zaś $i > k + 1$, to $b_k(i) = 0$.

Jeśli ubezpieczony przeżyje n lat, to znaczy umrze dopiero po zakończeniu okresu ubezpieczenia $(k \geq n)$, to wielkość przepływu pieniężnego $b_k(i)$ zależy od wielkości:

- składki ubezpieczeniowej, gdy $i \leq n$;
- sumy ubezpieczenia wypłacanej na koniec okresu ubezpieczenia (dożycie), gdy $i = n + 1$;

Dla $i \geq n + 1$ przepływy pieniężne są równe zero, gdyż ubezpieczenie wygasło.

Tytułem ilustracji określmy $b_k(i)$ dla prostego przypadku n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie, w którym suma ubezpieczenia S i roczna składka c są stałe w całym okresie ubezpieczenia. Załóżmy przy tym, że ubezpieczony jest równocześnie ubezpieczającym oraz że w związku z ubezpieczeniem, nie uzyskuje dodatkowych dochodów (np. ulgi podatkowe), ani nie ponosi dodatkowych wydatków (np. ubezpieczenie społeczne).

Przepływy pieniężne $b_k(i)$ z punktu widzenia ubezpieczonego są określone następująco:

- gdy $k < n$ (tzn. ubezpieczony umrze w trakcie trwania ubezpieczenia), to wielkość $b_k(i)$ jest dana następującym wzorem

$$b_k(i) = \begin{cases} -c & dla \quad i \leq k, \\ S & dla \quad i = k+1, \\ 0 & dla \quad i > k+1, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

- gdy $k \geq n$ (tzn. ubezpieczony nie umrze w trakcie trwania ubezpieczenia) wielkość ta jest określona następująco

$$b_k(i) = \begin{cases} -c & dla \quad i \leq n, \\ S & dla \quad i = n+1, \\ 0 & dla \quad i > n+1. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Natomiast przepływy pieniężne w ubezpieczeniu $b_k(i)$ z punktu widzenia ubezpieczyciela określone są w postaci:

- gdy $k < n$, to

$$b_k(i) = \begin{cases} c & dla \quad i \leq k, \\ -S & dla \quad i = k+1, \\ 0 & dla \quad i > k+1, \end{cases}$$

- gdy $k \geq n$, to

$$b_k(i) = \begin{cases} c & dla \quad i \leq n, \\ -S & dla \quad i = n+1, \\ 0 & dla \quad i > n+1. \end{cases}$$

W poniższej definicji wprowadzone zostanie pojęcie określające łączne (sumaryczne) zobowiązania finansowe w ubezpieczeniu na życie i dożycie, które również jest różnie interpretowane w zależności od punktu widzenia strony umowy ubezpieczenia.

Definicja 4.2.1 *Funkcja łącznych przepływów pieniężnych do momentu śmierci ubezpieczonego w okresie $[k, k+1)$ jest określona następująco*

$$B_K(k) \quad = \quad \sum_{i=0}^{g} b_k(i) \quad dla \quad k = 0, 1, ..., \tag{4.2.3}$$

gdzie $g = k+1$, gdy $k < n$ oraz $g = n+1$ gdy $k \geq n$, natomiast $b_k(i)$ są to przepływy pieniężne, wynikające z umowy ubezpieczenia na życie i dożycie, na początku i-tego roku pod warunkiem, że ubezpieczony umrze w okresie $[k, k+1)$.

Zauważmy, że zgodnie z powyższą definicją wielkość $B_K(k)$ zależy od czasu życia ubezpieczonego, który jet losowy, tak więc B_K jest zmienną losową, której rozkład zależy od rozkładu zmiennej losowej K (określonego w Punkcie 1.2.1). Rozkład ten jest następujący

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(B_K = \sum_{i=0}^{k+1} b_k(i)\right) &= \mathbb{P}(K = k) = {}_{k|}q_x \quad dla \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \\ \mathbb{P}\left(B_K = \sum_{i=0}^{n+1} b_k(i)\right) &= \mathbb{P}(K \geq n) = {}_n p_x \quad dla \quad k = n, n+1, ... \end{aligned}$$

Wartość oczekiwaną łącznych przepływów pieniężnych określa więc następujący wzór:

$$\mathbb{E}(B_K) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{i=0}^{k+1} b_k(i) \right) {}_{k|}q_x \right] + \left(\sum_{k=0}^{n+1} b_k(i) \right) {}_n p_x. \tag{4.2.4}$$

Natomiast wariancja łącznych przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu wyraża się wzorem

$$\mathbb{D}^2(B_K) = \mathbb{E}(B_K^2) - \mathbb{E}^2(B_K),$$

gdzie

$$\mathbb{E}(B_K^2) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\sum_{i=0}^{k+1} b_k(i)\right)^2 {}_{k|}q_x\right] + \left(\sum_{k=0}^{n+1} b(n)\right)^2 {}_np_x. \tag{4.2.5}$$

Wartość oczekiwana B_K określa wartość przeciętnych łącznych przepływów pieniężnych, a ich zmienność mierzona jest przez wariancję B_K.

4.3 Zaktualizowane przepływy pieniężne

Przepływy pieniężne wynikające z umowy ubezpieczenia trwają zwykle przez długi okres czasu, stąd konieczne jest określenie ich aktualnej wartości w momencie zawarcia ubezpieczenia. Do tego celu wykorzystywana będzie funkcja zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych.

Definicja 4.3.1 *Funkcja zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych do momentu śmierci w okresie $[k; k+1)$ jest określona następująco:*

$$Z_K(k) = \sum_{i=0}^{g} z_k(i) \quad dla \quad k = 0, 1, \cdots, \tag{4.3.6}$$

gdzie $g = k+1$ gdy $k < n$ oraz $g = n+1$ gdy $k \geq n$. Wielkość $z_k(i)$ występująca w tym wzorze określona jest następująco:

$$z_k(i) = b_k(i) \cdot v(i),$$

$b_k(i)$ jest to przepływ pieniężny, wynikający z umowy ubezpieczenia na życie i dożycie, na początku i-tego roku pod warunkiem, że ubezpieczony umrze w okresie $[k; k+1)$, a $v(i)$ jest funkcją dyskontującą.

Rozkład zmiennej losowej Z_K (podobnie jak rozkład zmiennej losowej B_K) zależy od rozkładu zmiennej losowej K. Rozkład ten jest następujący:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_K = \sum_{i=0}^{k+1} z_k(i)\right) &= \mathbb{P}(K = k) = {}_{k|}q_x \quad dla \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \\
\mathbb{P}\left(Z_K = \sum_{i=0}^{n+1} z_k(i)\right) &= \mathbb{P}(K \geq n) = {}_np_x \quad dla \quad k = n, n+1, ...
\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej Z_K zależą od postaci funkcji dyskontującej, która może być stała przez cały okres ubezpieczenia lub też zmienna.

W przypadku gdy stopa procentowa u jest stała przez cały okres ubezpieczenia a kapitalizacja dokonywana jest na koniec każdego roku, to funkcja dyskontująca (współczynnik dyskontujący) jest postaci

$$v(i) = v^i = \left(\frac{1}{1+u}\right)^i. \tag{4.3.7}$$

Założenie, że stopa procentowa jest stała przez cały okres ubezpieczenia jest mało realistyczne, gdyż w rzeczywistości ulega ona ciągłym zmianom. Rozpatrzmy przypadek, gdy stopa procentowa zmienia się w trakcie trwania ubezpieczenia i kapitalizacja odbywa się w sposób ciągły. Wówczas wysokość stopy procentowej za okres od 0 do momentu t oznaczana będzie przez $Y(t)$. Załóżmy, że $Y(t)$ jest procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach. Proces stochastyczny $Y(t)$ nazywany jest *procesem stopy procentowej.* W pracy rozpatrywane są wielkości stóp procentowych w momentach $0, 1, 2, ..., n+1$ dlatego też zamiast t będziemy pisać $i, j, k = 0, 1, 2, ..., n+1$. Zgodnie ze wzorem (1.2.12), dla tak określonego procesu stopy procentowej współczynnik dyskontujący przyjmuje postać

$$v(i) = e^{-Y(i)}. \tag{4.3.8}$$

W celu uproszczenia wyrażeń określających pierwsze momenty zmiennej losowej Z_K (gdy stopa procentowa jest zmienna) wprowadźmy notację macierzową. Przyjmijmy, że $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{I}_k$ są to następujące wektory $n+1$ wymiarowe:

$$\boldsymbol{M} = (m_0, m_1, ..., m_n)^T,$$

gdzie $m_k = \mathbb{E}(\exp(-Y(k)),$

$$\boldsymbol{I}_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$$

przy czym jedynka występuje na k-tym miejscu.

Przyjmijmy ponadto, że $\boldsymbol{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=0}^n$ oznacza *macierz kowariancji* zmiennych losowych $\exp(-Y(i))$, której elementy określone są następująco:

$$r_{ij} = \mathbf{Cov}(\exp(-Y(i)), \exp(-Y(j))) \quad i, j = 0, 1, 2, ..., n.$$

Niech *macierz drugich momentów* będzie oznaczona przez $\boldsymbol{\Delta} = \{\delta_{ij}\}_{i,j=0}^n$, gdzie

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \mathbb{E}(\exp(-Y(i))\exp(-Y(j))) = \\ &= \mathbf{Cov}(\exp(-Y(i)), \exp(-Y(j))) + \mathbb{E}(\exp(-Y(i))\mathbb{E}(\exp(-Y(j)) \\ &= r_{ij} + m_i m_j. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Latwo sprawdzić, że macierze $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{\Delta}$ spełniają następująca tożsamość:

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T.$$

Ważną rolę będzie pełnić *macierz przepływów pieniężnych* $\boldsymbol{B}$, która zdefiniowana jest następująco

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_0(0) & b_1(0) & \cdots & b_{n-1}(0) & b_n(0) \\ b_0(1) & b_1(1) & \cdots & b_{n-1}(1) & b_n(1) \\ 0 & b_1(2) & \cdots & b_{n-1}(2) & b_n(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1}(n-1) & b_n(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1}(n) & b_n(n) \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że suma elementów w k-tej kolumnie jest równa $B_K(k)$. Ponadto pierwszych n kolumn macierzy $\boldsymbol{B}$ jest związane z przepływami pieniężnymi występującymi gdy ewentualna śmierć ubezpieczonego następuje w trakcie trwania ubezpieczenia. Ostatnia kolumna jest związana z wydatkami i dochodami strony umowy ubezpieczenia gdy ubezpieczony dożyje do końca okresu ubezpieczenia.

Uwaga 4.3.1 *Określone macierze można podzielić na trzy grupy. Pierwsza grupa składa się z macierzy $\boldsymbol{D}$ i związana jest z rozkładem umieralności ubezpieczonego (zależy od x). Druga związana jest z losowością stopy procentowej $Y(t)$ i należą do niej macierze $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\Delta}$, M. Ostatnią tworzy macierz $\boldsymbol{B}$, która zależy od aktualnie rozpatrywanej strony umowy ubezpieczenia oraz wariantu ubezpieczenia na życie i dożycie. Rozmiar wszystkich macierzy zależy od długości okresu ubezpieczenia.*

4.3.1 Momenty zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych

Momenty zmiennej losowej Z_K zależą od postaci funkcji dyskontującej.

W przypadku gdy funkcja dyskontująca jest stala w całym okresie ubezpieczenia i dana wzorem (4.3.7), to

$$z_k(i) = b_k(i)v^i = b_k(i)\left(\frac{1}{1+u}\right)^i .$$

Wtedy wartość oczekiwana zaktualizowanych łącznych przeplywów pieniężnych dana jest wzorem:

$$\mathbb{E}(Z_K) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\sum_{i=0}^{k+1} b_k(i)v^i\right)\ {}_{k|}q_x\right] + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k(i)v^i\right)\ {}_n p_x. \qquad (4.3.10)$$

Jeżeli $\mathbb{E}(Z_K) > 0$, to zawarcie umowy ubezpieczenia oznacza uzyskanie dochodu, którego przeciętna obecna wartość (na dzień zakupu ubezpieczenia) jest równa $\mathbb{E}(Z_K)$.

Jeśli $\mathbb{E}(Z_K) < 0$, to zawarcie ubezpieczenia oznacza przeciętny wydatek, którego zaktualizowana wartość jest równa $\mathbb{E}(Z_K)$ i jest wysokością funduszu jakim powinna dysponować strona umowy ubezpieczenia (w momencie zakupu ubezpieczenia), aby przy ustalonej z góry stopie procentowej u ($v = \frac{1}{1+u}$) mogła finansować n-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie.

Wariancja zmiennej losowej Z_K dana jest wzorem:

$$\mathbb{D}^2(Z_K) = \mathbb{E}(Z_K^2) - \mathbb{E}^2(Z_K),$$

gdzie

$$\mathbb{E}(Z_K^2) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\sum_{i=0}^{k+1} b_k(i)v^i\right)^2\ {}_{k|}q_x\right] + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k(i)v^i\right)^2\ {}_n p_x. \qquad (4.3.11)$$

W Punktach 5.2.3, 5.3.2 omówione zostały szczególne przypadki zaktualizowanej funkcji przepływów pieniężnych i jej momentów dla pracodawcy i pracownika w ubezpieczeniu grupowym na życie i dożycie.

Dla uproszczenia zapisu, gdy nie będzie to prowadziło do nieporozumień, używać będziemy skróconego zapisu $Z = Z_K$. Ponadto jeżeli dana jest grupa ubezpieczonych osób, to przez $Z_l = Z_{K_l}$, oznaczać będziemy zaktualizowaną funkcję łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczenia dla l-tej osoby.

W przypadku, gdy stopa procentowa jest zmienna w okresie ubezpieczenia a kapitalizacja dokonywana jest w sposób ciągły, określenie w ogólnym przypadku momentów zmiennej losowej Z_K jest prawie niemożliwe. Zatem dalsze rozważania prowadzone będą przy pewnych ograniczeniach zwanych dalej warunkami.

Warunki te są następujące (por. G.Parker [24]):

A1 zmienne losowe K_l (dla $i = 1, 2, ...$) są niezależne o jednakowych rozkładach,

A2 pod warunkiem, że znane są realizacje procesu stopy procentowej $Y(j)$ dla $j = 0, 1, 2, ..., n$, zmienne losowe Z_l są niezależne o jednakowym rozkładzie,

A3 zmienne losowe K_l ($l = 1, 2, ...$) oraz $Y(t)$ są niezależne.

Warunek **A1** oznacza, że długości trwania życia osób w grupie są niezależne. Zauważmy jednak, że zmienne losowe Z_l dla $l = 1, 2, ...$ nie są niezależne. Wynika to z faktu, iż są one odpowiednimi funkcjami $Y(j)$, gdzie $j = 0, 1, ..., n$. Natomiast jeżeli znamy wartości realizacji $Y(j)$ jakie przyjmuje proces stopy procentowej, to z warunku **A2** wynika, że zmienne losowe Z_l są niezależne o jednakowym rozkładzie. Ostatni warunek **A3** implikuje, to że wielkość stopy procentowej nie ma wplywu na dalsze trwanie życia osób w grupie.

W przypadku gdy funkcja dyskontująca dana jest wzorem (4.3.8) i założymy, że spelnione są warunki **A1, A2, A3**, to wtedy dwa pierwsze momenty zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych są następujące:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right) +_n p_x \left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right) \\
\mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right)^2 +_n p_x \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right)^2 \\
\mathbb{E}(Z_1 Z_2) &= \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_1}q_x {}_{k_2}q_x \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=0}^{k_1+1} b_k(j)\exp(-Y(j))\right) \times \left(\sum_{i=0}^{k_2+1} b_k(i)\exp(-Y(i))\right)\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} {}_k q_x {}_n p_x \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} {}_n p_x {}_k q_x \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\exp(-Y(j))\left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)\right) \\
&\quad +_n p_x^2 \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)^2 .
\end{aligned}$$

W poniższym twierdzeniu wyżej wymienione dwa pierwsze momenty zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych zostały zapisane w formie macierzowej.

Twierdzenie 4.3.1 *Jeśli warunki* **A1, A2, A3** *są spełnione, to*

$$\mathbb{E}(Z) = (\boldsymbol{BD})^T \boldsymbol{M} \tag{4.3.12}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_k \tag{4.3.13}$$

$$\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = (\boldsymbol{BD})^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{BD}. \tag{4.3.14}$$

Dowód.

W celu wykazania (4.3.12) wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right) \\
&\quad + {}_np_x \left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \left((\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_k)^T\boldsymbol{M}\right) +_n p_x \left((\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_n)^T\boldsymbol{M}\right) \\
&= (\boldsymbol{B}\boldsymbol{D})^T\boldsymbol{M}.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Wzór (4.3.13) wynika z następującego ciągu równości

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right)^2 \\
&\quad +{}_np_x\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\mathbb{E}(\exp(-Y(j))\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \left(\sum_{i,j=0}^{k+1} b_k(i)\mathbb{E}\left(\exp(-(Y(i)+Y(j)))\right)b_k(j)\right) \\
&\quad +{}_np_x \left(\sum_{i,j=0}^{n} b_k(i)\mathbb{E}\left(\exp(-(Y(i)+Y(j)))\right)b_k(j)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \left((\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_k)^T\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{I}_k^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_k +_n p_x\boldsymbol{I}_n^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{I}_k^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_k
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

To kończy dowód równości (4.3.13).

W celu udowodnienia równości (4.3.14) wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_1}q_x\, {}_{k_2}q_x \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=0}^{k_1+1} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)\times\right. \\
&\quad \left.\times\left(\sum_{i=0}^{k_2+1} b_k(i)\exp(-Y(i))\right)\right) \\
B &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_kq_x\, {}_np_x\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)\times\right.
\end{aligned}$$

$$
\times \left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j) \exp(-Y(j)) \right) \Bigg)
$$

$$
C = \sum_{k=0}^{n-1} {}_n p_{xk} q_x \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j) \exp(-Y(j)) \right.
$$

$$
\times \left. \left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j) \exp(-Y(j)) \right) \right)
$$

$$
D =_n p_x^2 \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j) \exp(-Y(j)) \right)^2 .
$$

Korzystając z powyższych oznaczeń mamy, że $\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = A + B + C + D$. Składnik A można przekształcić w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_1} q_{x\, k_2} q_x \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{k_1+1} b_k(j) \exp(-Y(j)) \right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(\sum_{i=0}^{k_2+1} b_k(i) \exp(-Y(i)) \right) \right) \\
&= \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_1} q_{x\, k_2} q_x \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{k_1+1} \sum_{i=0}^{k_2+1} b_k(j) \exp(-Y(j)) \exp(-Y(i)) b_k(i) \right) \\
&= \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_1} q_{x\, k_2} q_x \left(\sum_{j=0}^{k_1+1} \sum_{i=0}^{k_2+1} b_k(j) \mathbb{E} \left(\exp(-Y(j)) \exp(-Y(i)) \right) b_k(i) \right) \\
&= \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_1} q_{x\, k_2} q_x \left(\sum_{j=0}^{k_1+1} \sum_{i=0}^{k_2+1} b_k(j) \delta_{ji} b_k(i) \right) \\
&= \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_1} q_{x\, k_2} q_x \left(\boldsymbol{I}_{k_1}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I} k_2 \right) \\
&= \left(\sum_{k_1=0}^{n-1} {}_{k_1} q_x \boldsymbol{I}_{k_1}^T \right) \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \left(\sum_{k_2=0}^{n-1} {}_{k_2} q_x \boldsymbol{I}_{k_2}^T \right) \\
&= (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn} p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn} p_x). \qquad (4.3.17)
\end{aligned}
$$

Analogicznie

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_k q_{x\, n} p_x \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j) \exp(-Y(j)) \right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j) \exp(-Y(j)) \right) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_k q_{x\, n} p_x \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^{n} b_k(j) \exp(-Y(j)) \exp(-Y(i)) b_k(i) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_kq_x \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_{nn}p_x \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_kq_x \boldsymbol{I}_k^T\right) \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_{nn}p_x \\
&= (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_{nn}p_x, \qquad (4.3.18)
\end{aligned}
$$

W przypadku wyrazu C mamy:

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_np_{x\,k}q_x \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\exp(-Y(j))\right) \times \left(\sum_{j=0}^{k+1} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)\right) \\
&= (\boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn}p_x). \qquad (4.3.19)
\end{aligned}
$$

Natomiast D można zaś przekształcić do postaci

$$
\begin{aligned}
D &= {}_np_x^2 \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n} b_k(j)\exp(-Y(j))\right)^2 \\
&= (\boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_{nn}p_x). \qquad (4.3.20)
\end{aligned}
$$

Korzystając z (4.3.17), (4.3.18), (4.3.19) oraz (4.3.20)

$$
\begin{aligned}
otrzymujemy \mathbb{E}(Z_1Z_2) &= (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn}p_x) + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_{nn}p_x \\
&\quad + (\boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn}p_x) + (\boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_{nn}p_x) \\
&= (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{D} + (\boldsymbol{I}_{nn}p_x)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{D} \\
&= (\boldsymbol{B}\boldsymbol{D})^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{D}, \qquad (4.3.21)
\end{aligned}
$$

co kończy dowód twierdzenia.

□

Przedstawiając momenty w formie macierzowej udało się uzyskać faktoryzację, która jest użyteczna, gdyż składowe iloczynu macierzy mają dość jasną interpretację. A mianowicie macierz $\boldsymbol{D}$ określa rozkład długości trwania życia ubezpieczonego w okresie ubezpieczenia na życie i dożycie. Macierze $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Delta}$, i $\boldsymbol{R}$ charakteryzują parametry procesu stopy procentowej. Natomiast macierz B określa wysokości przepływów pieniężnych z punktu widzenia strony umowy ubezpieczenia.

Oprócz interpretacji forma macierzowa ułatwia obliczenia numeryczne przy kompleksowej analizie ubezpieczenia. Z otrzymanych wzorów wynika, że aby obliczyć typowy przedział zmienności zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych osobno dla każdej ze stron umowy ubezpieczenia, wystarczy jedynie raz wyznaczyć macierze $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Delta}$ i $\boldsymbol{R}$, a następnie dla każdej ze stron umowy ubezpieczenia (na podstawie wyznaczonej dla niej funkcji $b_k(i)$) określić macierz przepływów pieniężnych $\boldsymbol{B}$.

Ponadto forma macierzowa wzorów na momenty upraszcza przeprowadzone w następnym punkcie rozważania zmienności zaktualizowanych przepływów pieniężnych w przypadku ubezpieczenia grupowego.

4.3.2 Łączne zaktualizowane przepływy pieniężne dla grupy

Rozpatrzmy grupę N ubezpieczonych osób. Niech l-ta osoba w grupie ($l = 1, 2, ..., N$) będzie scharakteryzowana za pomocą następujących wielkości:

- x_l - wiek wstępu,
- K_l - zmienna losowa oznaczającą całkowitą liczbę lat do przeżycia,
- $\boldsymbol{D}_l$ - wektor rozkładu trwania życia,
- $\boldsymbol{B}_l$ - macierz przepływów pieniężnych w okresie ubezpieczenia.

Ponadto załóżmy, że okres ubezpieczenia każdej osoby w grupie jest taki sam i równy n tzn. $n_1 = n_2 = ... = n_N = n$.

Funkcja łącznych zaktualizowanych przepływów pieniężnych n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie całej grupy zdefiniowana jest następująco:

$$Z_{(N)} = \sum_{l=1}^{N} Z_l,$$

gdzie $Z_l = Z_{K_l}$, oznacza funkcję zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczenia dla l-tej osoby.

Twierdzenie 4.3.2 *Jeśli spełnione są warunki* **A1, A2, A3**, *to*

$$\mathbb{E}(Z_{(N)}) = \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l\right)^T \boldsymbol{M} \tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(Z_{(N)}) &= \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l\right)^T \boldsymbol{R} \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l\right) - \\ & \sum_{l=1}^{N} \left((\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{I}_k \right), \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

Dowód.

W celu wykazania (4.3.22) wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sum_{l=1}^{N} Z_l) &= \sum_{l=1}^{N} \mathbb{E}(Z_l) \\ &= \sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{M} \qquad (4.3.24) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{B}_l^T\right) \boldsymbol{M}, \\ &= \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l\right)^T \boldsymbol{M}, \end{aligned}$$

gdzie (4.3.24) wynika z Twierdzenia 4.3.1.

Korzystając z Twierdzenia 4.3.1, oraz z równości $\mathbb{E}(Z_l Z_s) = (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{D}_s$, której dowód jest analogiczny do dowodu momentu mieszanego w Twierdzeniu (4.3.1), równość (4.3.23) jest wynikiem następującego rozumowania:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(\sum_{l=1}^{N} Z_l) &= \mathbb{E}((\sum_{l=1}^{N} Z_l - \mathbb{E}(\sum_{l=1}^{N} Z_l))^2) \\
&= \sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} \mathbf{Cov}(Z_l, Z_s) \qquad (4.3.25)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $l \neq s$ zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(Z_l Z_s) &= \mathbf{E}(Z_l Z_s) - \mathbf{E}(Z_l)\mathbf{E}(Z_s) \\
&= (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{D}_s - (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{D}_s \\
&= (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{D}_s. \qquad (4.3.26)
\end{aligned}$$

Natomiast jeśli $l = s$, to kowariancję oblicza się następująco:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(Z_l Z_l) &= \mathbf{E}(Z_l^2) - \mathbf{E}^2(Z_l) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{I}_k - (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l \qquad (4.3.27)
\end{aligned}$$

Podstawiając (4.3.26) i (4.3.27) do (4.3.25) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(Z_{(N)}) &= \sum_{i\neq s} (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{D}_s \\
&\quad + \sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{I}_k - (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l \right) \\
&= \sum_{i\neq s} (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{D}_s \\
&\quad + \sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{I}_k - (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l \right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{N} (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l - \sum_{l=1}^{m} (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{N} ((\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{B}_s \boldsymbol{D}_s) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{I}_k - \sum_{l=1}^{N} (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l \\
&= \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l \right)^T \boldsymbol{R} \left(\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l \right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}_l^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}_l^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{I}_k - \sum_{l=1}^{N} (\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l)^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{D}_l
\end{aligned}$$

□

Rozpatrzmy pewien ważny przypadek szczególny, a mianowicie taki, gdy wszystkie osoby w grupie są w tym samym wieku i zawarły ubezpieczenie na ten sam okres czyli, $x_l = x$ oraz $n_l = n$. Oznacza to, że $\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}_l = \boldsymbol{D}$ dla każdego $l = 1, \ldots, N$. W przypadku takiej jednorodnej (ze względu na wiek wstępu i okres ubezpieczenia) grupy Twierdzenie 4.3.2 można sformułować w postaci następującego wniosku.

Wniosek 4.3.1 *Jeśli spełnione są warunki* **A1, A2, A3**, *to dla jednorodnej grupy* N *ubezpieczonych osób, prawdziwe są następujące równości:*

$$\mathbb{E}(Z_{(N)}) = N(\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{M} \tag{4.3.28}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Z_{(N)}) &= N^2(\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{RBD} \\ &\quad -N\left((\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{\Delta BD} - \sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{I}_k^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Delta B I}_k\right).\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Dowód.

Dowód (4.3.28) wynika z własności addytywności pierwszego momentu. W celu wykazania (4.3.29) wystarczy dokonać odpowiednich podstawień we wzorze (4.3.23) :

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Z_{(N)}) &= \left(\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{B}_l\boldsymbol{D}_l\right)^T\boldsymbol{R}\left(\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{B}_l\boldsymbol{D}_l\right) \\ &\quad +\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{D}_l^T\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{I}_k^T\boldsymbol{B}_l^T\boldsymbol{\Delta B}_l\boldsymbol{I}_k - \sum_{l=1}^{N}(\boldsymbol{B}_l\boldsymbol{D}_l)^T\boldsymbol{\Delta B}_l\boldsymbol{D}_l \\ &= (N\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{R}(N\boldsymbol{BD}) - N\left((\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{\Delta BD} - \sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{I}_k^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Delta BI}_k\right) \\ &= N^2(\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{RBD} - N\left((\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{\Delta BD} - \sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{I}_k^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Delta BI}_k\right).\end{aligned}$$

□

W analizie opłacalności zawarcia ubezpieczenia dla jednorodnej grupy istotne są: wartość oczekiwana i wariancja zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych przypadająca na jedną osobę. Okazuje się, że wraz ze wzrostem liczebności N jednorodnej grupy wariancja dąży do pewnej granicznej wartości.

Twierdzenie 4.3.3 *Jeśli spełnione są warunki* **A1, A2, A3**, *i* N *jest liczbą osób ubezpieczonych należących do jednorodnej (ze względu na wiek wstępu i okres ubezpieczenia) grupy, to*

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{l=1}^{N}Z_l}{N}\right) = (\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{M} \tag{4.3.30}$$

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{D}^2\left(\frac{\sum_{l=1}^{N}Z_l}{N}\right) = (\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{RBD}. \tag{4.3.31}$$

Dowód.

Równości (4.3.30) wynika z Wniosku 4.3.1 oraz własności wartości oczekiwanej. Ponieważ

$$\mathbb{D}^2\left(\frac{\sum_{l=1}^{N} Z_l}{N}\right) = \frac{1}{N}\mathbb{D}^2(Z_l) + \frac{(N-1)}{N}\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2), \tag{4.3.32}$$

to prawa strona równości (4.3.32) dąży do $\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2)$, gdy N dąży do nieskończoności. Korzystając z Twierdzenia 4.3.1 mamy, że $\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) = (\boldsymbol{BD})^T\boldsymbol{RBD}$.

□

4.4 Procesy stochastyczne modelujące stopę procentową

4.4.1 Wybrane procesy stopy procentowej

Problem matematycznego modelowania stopy procentowej $Y(t)$ za okres $[0, t]$ analizowany był przez wielu autorów. Jedną ze współczesnych koncepcji jest przyjęcie, że $Y(t)$ jest gaussowskim procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach (J.A. Beekman & C.P.Fuelling [4], [5] J. Garrido [18]) Jedną z klas rozpatrywanych modeli stanowią procesy o następującej postaci:

$$Y(t) = \sigma X(t) + \mu t, \tag{4.4.33}$$

gdzie $X(t)$ jest procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach takim, że $\mathbb{E}(X(t)) = 0$, ponadto $\mu > 0$ i $\sigma > 0$. Parametr σ jest nazywany zmiennością stopy procentowej.

Określone w Punkcie 4.3.1 macierze $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Delta}$ i $\boldsymbol{R}$ można przedstawić w postaci odpowiednich momentów związanych z procesem stopy procentowej $Y(t)$. Rozpatrzmy dwa przypadki modelu określonego wzorem (4.4.33), gdy $X(t)$ jest procesem Wienera $\{W(t) : t \geq 0\}$ oraz gdy $X(t)$ jest ułamkowym ruchem Browna $B_H(t)$.

W przypadku, gdy proces stopy procentowej jest modelowany przez proces Wienera, przyjmuje on następującą postać

$$Y(t) = \sigma W(t) + \mu t, \tag{4.4.34}$$

gdzie σ jest zmiennością stopy procentowej i dla każdego t spełnia równanie $\mathbb{D}^2(Y(t+1) - Y(t)) = \sigma^2$.

Twierdzenie 4.4.1 *Jeśli $Y(t) = \sigma W(t) + \mu t$, gdzie $\sigma > 0$ i $\mu > 0$, to elementy macierzy* $\mathrm{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ *określone są następująco:*

$$\begin{aligned}
m_k &= \exp(-\mu k + \sigma^2 k/2) \\
\delta_{jk} &= \exp(-\mu(j+k) + \sigma^2(j+k) - \sigma^2|j-k|/2) \\
r_{jk} &= \exp(-\mu(j+k) + \sigma^2(j+k)/2)(\exp(\sigma^2(j+k-|j-k|)/2) - 1).
\end{aligned}$$

gdzie $j, k = 0, 1, ..., n$.

Twierdzenia 4.4.1 udowodnione będzie przy pomocy następującego lematu.

Lemat 4.4.1 *Jeśli $Y(t)$ jest gaussowskim procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach takim, że $\mathbf{E}(Y(t)) = \mu t$ oraz $\mathbb{D}^2(Y(t)) = \sigma_Y^2(t)$, to elementy macierzy $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{R}$ określone są następująco:*

$$\begin{aligned} m_k &= \exp(-\mu k + \sigma_Y^2(k)/2) \\ \delta_{jk} &= \exp(-\mu(j+k) + \sigma_Y^2(k) + \sigma_Y^2(j) - \sigma_Y^2(|k-j|)/2) \\ r_{jk} &= \exp\left(-\mu(j+k) + \frac{\sigma_Y^2(k)+\sigma_Y^2(j)}{2}\right)\left(\exp\left(\frac{\sigma_Y^2(k)+\sigma_Y^2(j)-\sigma_Y^2(|k-j|)}{2}\right) - 1\right) \end{aligned} \tag{4.4.35}$$

dla $j, k = 0, 1, ..., n$.

Dowód.

Na mocy definicji macierzy $\boldsymbol{M}$ wiadomo, że

$$m_k = \mathbf{E}(\exp(-Y(k))) = \psi_{Y(k)}(i),$$

gdzie $\psi_{Y(k)}(i)$ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej $Y(k)$. Między innymi w podręczniku J. Bartoszewicza [2] sprawdzić można, że prawdziwy jest fakt mówiący o tym że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią m_X oraz wariancją σ_X^2, to

$$\psi(t) = \exp(itm_X - t^2\sigma_X^2/2). \tag{4.4.36}$$

Korzystając z (4.4.36) mamy, że

$$m_k = \exp(-\mu k + \sigma_Y^2(k)/2)$$

dla $k = 0, 1, ..., n$.

Elementy macierzy $\boldsymbol{\Delta}$ można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= \mathbf{E}(\exp(-Y(j))\exp(-Y(k))) = \\ &= \mathbf{E}(\exp(-(Y(j)+Y(k))) \\ &= \psi_{Y(j)+Y(k)}(i). \end{aligned}$$

Z własności addytywności wartości oczekiwanej wynika, że:

$$\mathbf{E}(Y(j) + Y(k)) = \mu(j+k). \tag{4.4.37}$$

W Lemacie 1.3.1 udowodniono, że

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(Y(j)+Y(k)) &= \mathbb{D}^2(Y(j)) + \mathbb{D}^2(Y(k)) + 2\mathbf{Cov}(Y(j), Y(k)) = \\ &= 2\sigma_y^2(j) + 2\sigma_y^2(k) - \sigma_y^2(|j-k|). \end{aligned} \tag{4.4.38}$$

Podstawiając (4.4.37) oraz (4.4.38) do (4.4.36) otrzymujemy

$$\delta_{jk} = \psi_{Y(j)+Y(k)}(i) = \exp(-\mu(j+k) + \sigma_Y^2(k) + \sigma_Y^2(j) - \sigma_Y^2(|k-j|)/2). \tag{4.4.39}$$

Na mocy wzorów (4.4.37) oraz (4.4.38) wyrazy macierzy $\boldsymbol{R}$ można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} r_{jk} &= \exp(-\mu(j+k) + \sigma_Y^2(k) + \sigma_Y^2(j) - \sigma_Y^2(|k-j|)/2) \\ &\quad - \exp(-\mu j + \sigma_Y^2(j)/2)\exp(-\mu k + \sigma_Y^2(k)/2) \\ &= \exp\left(-\mu(j+k) + \frac{\sigma_Y^2(k)+\sigma_Y^2(j)}{2}\right) \times \\ &\quad \times \left(\exp\left(\frac{\sigma_Y^2(k)+\sigma_Y^2(j)-\sigma_Y^2(|k-j|)}{2}\right) - 1\right). \end{aligned}$$

□

Dowód Twierdzenia 4.4.1.

Zauważmy, że $Y(t)$ dany wzorem (4.4.34) jest gaussowskim procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach takim, że

$$\mathbf{E}(Y(t)) = \mathbf{E}(\sigma W(t) + \mu t) = \mu t,$$

$$\mathbb{D}^2(Y(t)) = \mathbb{D}^2(\sigma W(t) + \mu t) = \sigma^2 t.$$

Zatem $Y(t)$ spelnia założenia Lematu 4.4.1 i w celu udowodnienia Twierdzenia 4.4.1 wystarczy we wzorach na wyrazy poszczególnych macierzy podstawić $\sigma_Y^2 = \sigma^2 t$.

□

Uogólnieniem modelu, w którym proces stopy procentowej $Y(t)$ wyrażony jest za pomocą procesu Wienera może być model dany przez

$$Y(t) = \sigma B_H(t) + \mu t, \tag{4.4.40}$$

gdzie $B_H(t)$ jest ułamkowym ruchem Browna oraz $\sigma > 0$ i $\mu > 0$. W przypadku, gdy $H = \frac{1}{2}$ model ten sprowadza się do modelu (4.4.34). Interesujący wydaje się być przypadek $H \geq \frac{1}{2}$, gdyż wówczas przyrosty procesu stochastycznego stopy procentowej są dodatnio skorelowane. Pociąga to za sobą własność, iż wysokie wartości stopy procentowej w jednym odcinku czasu zwiększają szansę pojawienia się wysokich wartości stopy procentowej w późniejszym odcinku czasu.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4.2 *Jeśli $Y(t) = \sigma B_H(t) + \mu t$, gdzie $\sigma > 0$ i $\mu > 0$ oraz $B_H(t)$ jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta H, to elementy macierzy $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ określone są następująco:*

$$\begin{aligned} m_k &= \exp(-\mu k + \sigma^2 k^{2H}/2) \\ \delta_{jk} &= \exp(-\mu(j+k) + \sigma^2(j^{2H} + k^{2H}) - \sigma^2|j-k|^{2H}/2) \\ r_{jk} &= \exp\left(-\mu(j+k) + \sigma^2(j^{2H} + k^{2H})/2\right)\left(\exp(\sigma^2(j^{2H} + k^{2H} - |j-k|^{2H})/2) - 1\right), \end{aligned}$$

gdzie $j, k = 0, 1, ..., n$.

Dowód Twierdzenia 4.4.2 jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.4.1.

□

Znany też jest nieco odmienny sposób modelowania procesu stopy procentowej. Mianowicie przyjmuje się, że dany jest dowolny stacjonarny proces gaussowskim $X(t)$ o wartości oczekiwanej $\mathbf{E}(X(t)) = \mu$ ($\mu > 0$) oraz funkcji kowariancji $\mathbf{Cov}(X(s+t), X(s)) = R(t)$ dla $s, t \geq 0$. Proces $X(t)$ nazywany jest *procesem intensywności stopy procentowej.* Natomiast proces stopy procentowej $Y(t)$ definiuje się wówczas w postaci całkowej:

$$Y(t) = \int_0^t X(s)ds.$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{\Delta}$ można wtedy określić za pomocą procesu intensywności stopy procentowej.

Lemat 4.4.2 *Jeśli $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, gdzie $X(s)$ jest stacjonarnym procesem gaussowskim o wartości oczekiwanej $\mathbf{E}(X(t)) = \mu > 0$ oraz funkcji kowariancji $\mathbf{Cov}(X(s+t), X(s)) = R(t)$ dla $s,t \geq 0$, to to elementy macierzy $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{R}$ określone są następująco*

$$
\begin{aligned}
m_k &= \exp(-\mu k + \int_0^k \int_0^s R(v)dvds) \\
\delta_{jk} &= \exp(-\mu(j+k) + 2\int_0^k \int_0^s R(v)dvds + 2\int_0^j \int_0^s R(v)dvds - \int_0^{|k-j|} \int_0^s R(v)dvds) \\
r_{jk} &= \exp\left(-\mu(j+k) + \int_0^j \int_0^s R(v)dvds + \int_0^k \int_0^s R(v)dvds\right) \times \\
&\quad \times \left(\exp\left(\int_0^j \int_0^s R(v)dvds + \int_0^k \int_0^s R(v)dvds - \int_0^{|k-j|} \int_0^s R(v)dvds\right) - 1\right)
\end{aligned}
$$

dla $j, k = 0, 1, ..., n$;

Dowód.

Dowód oparty jest na spostrzeżeniu, że

$$
\mathbb{D}^2(Y(t)) = 2\int_0^t \int_0^s R(v)dvds. \tag{4.4.41}
$$

Wzór (4.4.41) jest konsekwencją następującego ciągu przekształceń

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(Y(t)) &= \mathbb{D}^2\left(\int_0^t X(s)ds\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\int_0^t (X(s)-\mu)ds \int_0^t (X(s)-\mu)ds\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\int_0^t \int_0^t (X(s)-\mu)(X(v)-\mu)dvds\right) \\
&= \int_0^t \int_0^t \mathbf{E}((X(s)-\mu)(X(v)-\mu))dvds \\
&= \int_0^t \int_0^t \mathbf{Cov}(X(s), X(v))dvds \\
&= \int_0^t \int_0^t R(|s-v|)dvds \\
&= 2\int_0^t \int_0^s R(v)dvds.
\end{aligned}
$$

□

Do modelowania intensywności stopy procentowej $X(t)$ często wykorzystywany jest proces Ornsteina-Uhlenbecka. W takim przypadku $X(t)$ przyjmuje następującą postać:

$$
X(t) = \sigma U(t) + \mu,
$$

gdzie $U(t)$ jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka oraz $\sigma, \mu > 0$.

Proces stopy procentowej $Y(t)$ dany jest wówczas wzorem

$$
Y(t) = \int_0^t X(s)ds = \sigma \int_0^t U(s)ds + \mu t. \tag{4.4.42}
$$

Następujący lemat przedstawia własności momentów procesu stopy procentowej.

Lemat 4.4.3 *Jeśli $Y(t) = \sigma\int_0^t U(s)ds + \mu t$, gdzie $U(t)$ jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka o funkcji kowariancji $R(t) = \exp(-\alpha t)$ oraz $\alpha, \sigma, m > 0$, to*

1. *wartość oczekiwana $\mathbf{E}(Y(t)) = \mu t$,*
2. *wariancja $\mathbb{D}^2(Y(t)) = \frac{2\sigma^2}{\alpha}(\frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha} + t - \frac{1}{\alpha})$.*

Dowód.

Korzystając z addytywności wartości oczekiwanej możemy zapisać, że

$$\mathbf{E}(Y(t)) = \mathbf{E}(\int_0^t \sigma U(s)ds + \mu t) = \mu t.$$

Na mocy wzoru (4.4.41) wariancję procesu $Y(t)$ wyrazić można następująco

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(Y(t)) &= 2\int_0^t\int_0^s R(v)dvds \\
&= 2\int_0^t\int_0^s \exp(-\alpha v)dvds \\
&= \frac{2\sigma^2}{\alpha}\left(\frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha} + t - \frac{1}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 4.4.3 umożliwia podanie wzorów na elementy macierzy $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ w języku funkcji $R(t) = \exp(-\alpha t)$.

Twierdzenie 4.4.3 *Jeśli $Y(t) = \sigma\int_0^t U(s)ds + \mu t$, gdzie $\sigma > 0$ i $\mu > 0$ oraz $U(s)$ jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka z funkcją kowariancji $R(t) = \exp(-\alpha t)$, to elementy macierzy $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ są równe odpowiednio*

$$\begin{aligned}
m_k &= \exp\left(-\mu k + \frac{\sigma^2}{\alpha}\left(\frac{\exp(-\alpha k)}{\alpha} + k - \frac{1}{\alpha}\right)\right) \\
\delta_{jk} &= \exp\left(-\mu(j+k) + \frac{2\sigma^2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha k} + e^{-\alpha j} - e^{-\alpha|k-j|}/2\right) + k + j - \frac{|k-j|}{2} - \frac{3}{2\alpha}\right)\right) \\
r_{jk} &= \exp\left(-\mu(j+k) + \frac{\sigma^2}{\alpha}\left(\frac{\exp(-\alpha k) + \exp(-\alpha j)}{\alpha} + k + j - \frac{2}{\alpha}\right)\right) \times \\
&\times\left(\exp\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\left(\frac{\exp(-\alpha k) + \exp(-\alpha j) - \exp(-\alpha|k-j|)}{\alpha} + k + j - |k-j| - \frac{3}{\alpha}\right)\right) - 1\right),
\end{aligned}$$

gdzie $j, k = 0, 1, \ldots, n$.

Dowód.

Na podstawie Lematu 4.4.2 wyraz m_k macierzy $\boldsymbol{M}$. można zapisać w postaci następującej

$$m_k = \exp(-\mu k + \sigma^2\int_0^k\int_0^s R(v)dvds).$$

Korzystając z Lematu 4.4.3 mamy

$$m_k = \exp\left(-\mu k + \frac{\sigma^2}{\alpha}\left(\frac{\exp(-\alpha k)}{\alpha} + k - \frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

Analogiczne rozumowanie prowadzi do odpowiednich wzorów na δ_{jk} oraz r_{jk}.

□

4.4.2 Przykłady

Przedstawione w punkcie tym przykłady procesu stopy procentowej zastosowane będą w Rozdziale 5, gdzie zbadany zostanie wpływ wyboru modelu stopy procentowej na wartość oczekiwaną i wariancję funkcji zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych dla ubezpieczającego i ubezpieczonego.

Rozpatrzmy proces stopy procentowej $Y(t)$ taki, że

$$\mathbb{D}^2(Y(1)) = 0.0005, \tag{4.4.43}$$

$$\mathbb{E}(Y(1)) = 0.06. \tag{4.4.44}$$

Założenia te oznaczają, że średnia roczna stopa procentowa jest równa 6%, a zmienność stopy procentowej jest równa $\sqrt{5\%} = 2,236\%$.

Ponadto przyjmijmy, że maksymalny okres ubezpieczenia jest równy 45 lat (w dalszej części pracy rozpatrywane będzie między innymi ubezpieczenie dla osoby w wieku 20 lat z okresem ubezpieczenia do 65 roku życia).

Okazuje się, że w zależności od przyjętego modelu stopy procentowej macierze $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ mogą przyjmować istotnie różne wartości. W celu zobrazowania tego faktu rozpatrzmy następujące modele stopy procentowej.

Model pierwszy oparty jest na założeniu, że prces stopy procentowej jest postaci:

$$Y_1(t) = 0.02236W(t) + 0.06t,$$

gdzie $\{W(t) : t \geq 0\}$ jest procesem Wienera. Zauważmy, że $Y_1(t)$ spełnia warunki (4.4.43), (4.4.44). Ponadto na mocy Twierdzenia 4.4.1 elementy macierzy $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ są następujące:

$$\begin{aligned} m_k &= \exp(-0,05975k) \\ \delta_{jk} &= \exp(-0,0595(j+k) - 0,00025|j-k|) \\ r_{jk} &= \exp(-0,05975(j+k))(\exp(0,00025(j+k-|j-k|)) - 1). \end{aligned}$$

gdzie $j, k = 0, 1, ..., 45$.

Macierze $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ określone dla $Y_1(t) = 0,02236W(t) + 0,06t$ oznaczone będą przez $\mathbf{M_1}, \boldsymbol{\Delta_1}, \boldsymbol{R_1}$.

W drugim rozpatrywanym modelu zakładać będziemy, że $\sigma = 0,2236$, $\mu = 0,06$ oraz proces stopy procentowej modelowany jest przez ułamkowy ruch Browna $B_{0.9}(t)$ i jest postaci

$$Y_2(t) = 0.2236B_{0,9}(t) + 0.06t.$$

Zgodnie z Twierdzeniem 4.4.2 elementy macierzy $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$, oznaczone jako $\mathbf{M_2}, \boldsymbol{\Delta_2}, \boldsymbol{R_2}$, określone są następująco:

$$\begin{aligned} m_k &= \exp(-0,06k + 0,00025k^{1,8}) \\ \delta_{jk} &= \exp(-0,06(j+k) + 0,0005(j^{1,8} + k^{1,8}) - 0,00025|j-k|^{1,8}) \\ r_{jk} &= \exp(-0,06(j+k) + 0,00025(j^{1,8} + k^{1,8})) \\ &\quad \times \left(\exp\left(0,00025(j^{1,8} + k^{1,8} - |j-k|^{1,8}\right)\right) - 1\right). \end{aligned}$$

gdzie $j, k = 0, 1, ..., 45$.

Trzeci model określony jest wzorem $Y_3(t) = \sigma \int_0^t U(s)ds + \mu t$, gdzie $\{U(s), s \geq 0\}$ jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka z funkcją kowariancji $R(t) = exp(-0,1t)$. Natomiast $\mu = 0,06$ oraz σ jest tak dobrane, że spełniony jest warunek (4.4.43):

$$\mathbb{D}^2(Y_3(1)) = \mathbb{D}^2(\sigma \int_0^1 U(s)ds + \mu) = 0.0005\ . \tag{4.4.45}$$

Zgodnie z Lematem 4.4.3 równość (4.4.45) można napisać w postaci

$$\frac{2\sigma^2}{0,1}\left(\frac{1}{0,1}\exp -0,1+1-\frac{1}{0,1}\right)=0,0005$$

a stąd $\sigma^2 = 0,000517$. Zatem trzeci proces przyjmuje postać

$$Y_3(t) = 0.02274\int_0^t U(s)ds + 0.06t\ .$$

Z Twierdzenia 4.4.3 elementy macierzy $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ określone są następująco

$$\begin{aligned}
m_k &= \exp(-0,054834k + 0,0517\exp -0,1k - 0,0517)\\
\delta_{jk} &= \exp(-0,04966(j+k)\\
&\quad +0,1034\,(\exp -0,1j + \exp -0,1j + \exp -0,05|j-k|)\\
&\quad -0,00517|j-k| - 0,1551)\\
r_{jk} &= \exp(-0,05483(j+k) + 0,0517\,(\exp -0,1j + \exp -0,1j) - 0,1034)\\
&\quad \times(\exp(0,0517\,(\exp -0,1j + \exp -0,1j + \exp -0,1|j-k|)\\
&\quad +0,00517(j+k-|j-k|) - 0,1551) - 1).
\end{aligned}$$

gdzie $j,k = 0,1,...,45$.

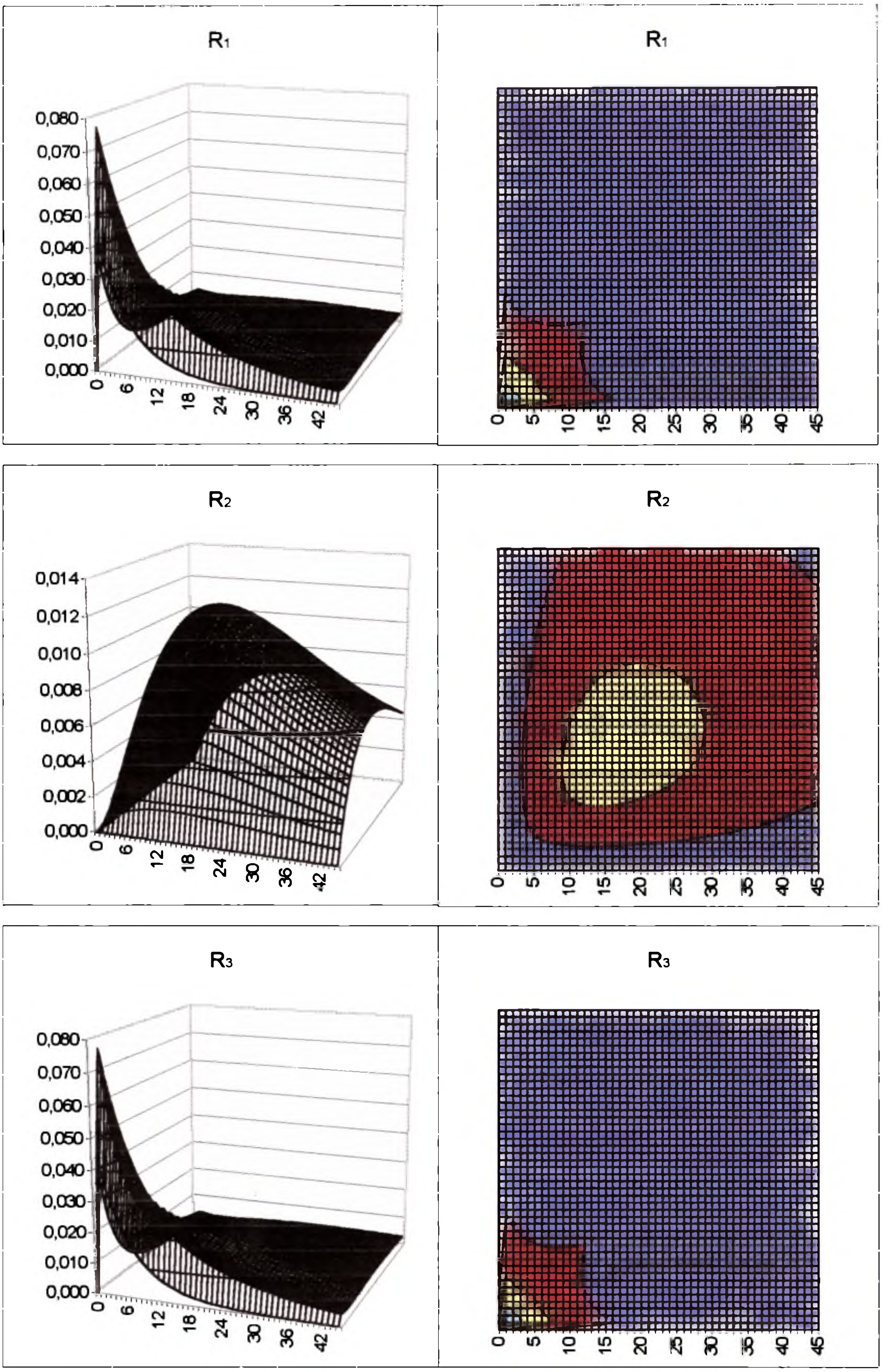
Macierze $\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{R}$ określone dla $Y_3(t) = 0,02274\int_0^t U(s)ds + 0,06t$ (gdzie funkcja kowariancji procesu $U(s)$ jest równa $R(t) = \exp(-0,1t)$) będą oznaczane przez $\mathbf{M_3}, \boldsymbol{\Delta_3}, \boldsymbol{R_3}$.

Ilustracją graficzną macierzy $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$, jest Rysunek 4.1 na którym zaobserwować można strukturę zależności (kowariancję) opisanych procesów.

Rysunek 4.2 jest ilustracją graficzną macierzy $\boldsymbol{\Delta}_1$, $\boldsymbol{\Delta}_2$, $\boldsymbol{\Delta}_3$. Różnice między macierzami drugich momentów są nieznaczne, gdyż parametr σ^2 jest mały. Wpływ tych różnic będzie widoczny w przykładach Paragrafu 5.2.4 i Paragrafu 5.3.3.

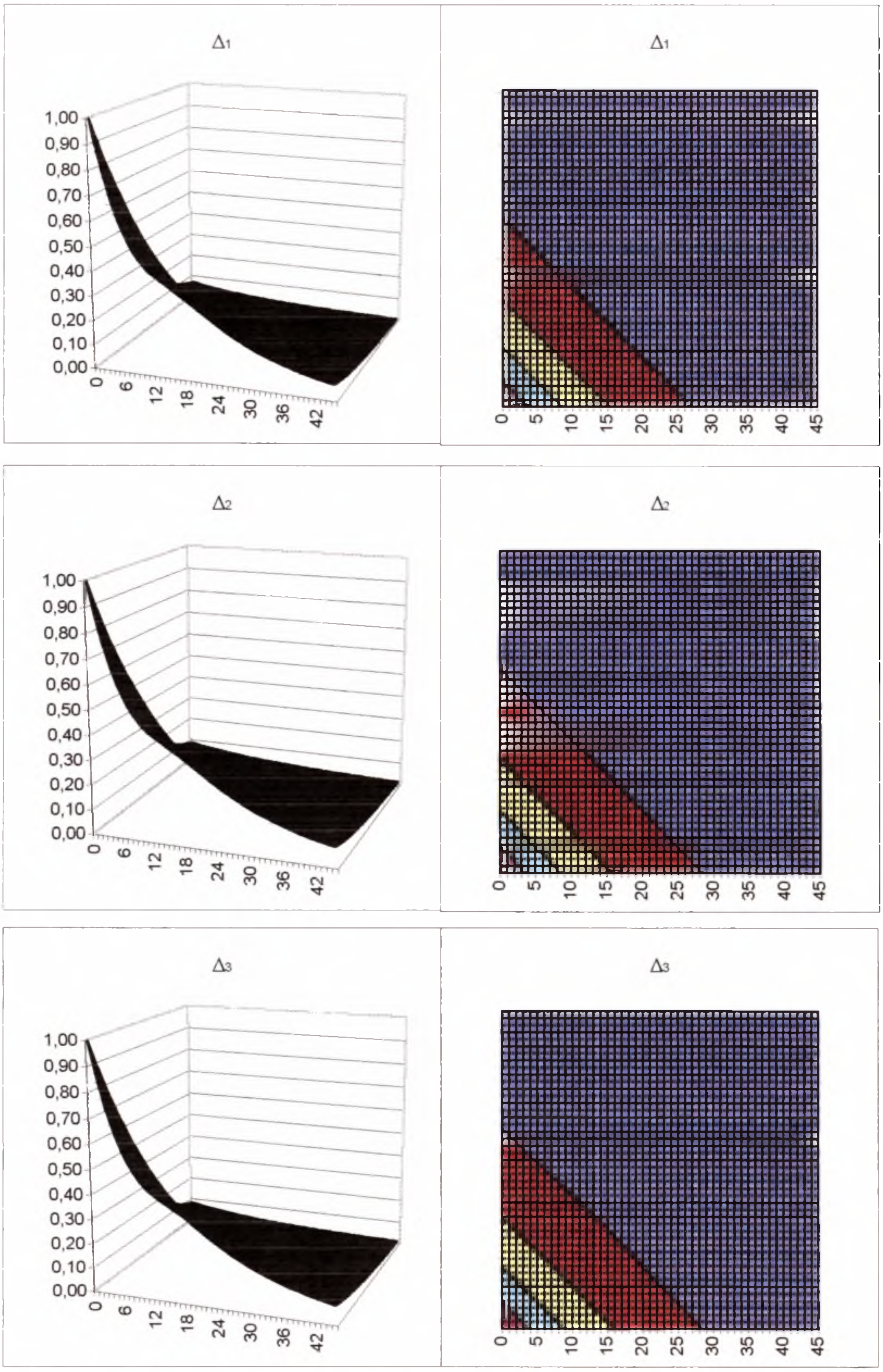
Na Rysunkach 4.1 i 4.2 obok wykresów trójwymiarowych umieszczone zostały konturowe wykresy powierzchniowe oglądane z góry (kolory reprezentują zakresy wartości).

Rysunek 4.1: Macierze kowariancji



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 4.2: Macierze drugich momentów



Źródło: Opracowanie własne

Rozdział 5

Przykłady zastosowań modelu strumieni finansowych w ubezpieczeniu grupowym

5.1 Zobowiązania i ulgi wynikające z zakupu ubezpieczenia grupowego

Wiek emerytalny to czas, w którym zazwyczaj dochód człowieka nie jest bezpośrednim wynikiem jego aktywności zawodowej. W tym okresie jego dochody najczęściej pochodzą z ubezpieczenia społecznego (emerytura), ubezpieczenia indywidualnego, różnych form oszczędzania i inwestycji, oraz pracowniczego programu emerytalnego. Podstawowym celem emerytury wynikającej ze składek na ubezpieczenie społeczne jest zapewnienie minimalnego, ale też i godziwego zabezpieczenia na starość. W celu podwyższenia standardu życia na emeryturze stosowane są zazwyczaj formy dobrowolnego zabezpieczenia emerytalnego, do których należą indywidualne ubezpieczenia oraz różnego rodzaju formy oszczędzania (np. lokaty bankowe, bony skarbowe) i inwestycje (np. fundusz powierniczy, akcje notowane i nie notowane na giełdzie). Poza emeryturą indywidualnymi formami oszczędzania oraz inwestowania coraz popularniejsze stają się grupowe formy zabezpieczenia finansowych skutków zakończenia okresu aktywności zawodowej nazywane *pracowniczymi programami emerytalnymi* [1]

Pracownicze programy emerytalne, organizowane przez pracodawców, mogą być prowadzone według jednej z czterech następujących form:

[1] Podstawę prawną tworzenia i funkcjonowania w Polsce *pracowniczych programów emerytalnych* stanowią ustawy o pracowniczych programach emerytalnych [35], funduszach inwestycyjnych [36], organizacji i funkcjonowaniu funduszy emerytalnych [37] oraz ustawa o działalności ubezpieczeniowej [31].

1. pracowniczy fundusz emerytalny,
2. umowa o wnoszeniu przez pracodawcę składek pracowników do funduszy inwestycyjnych (powierniczych),
3. umowa z zakładem ubezpieczeń o grupowym ubezpieczeniu pracowników na życie,
4. umowa o wnoszeniu przez pracodawcę składek pracowników do towarzystwa ubezpieczeń wzajemnych.

Ze względu na konieczność stworzenia w ramach zakładu pracy wydziału inwestycyjnego, pracowniczy fundusz emerytalny jest przewidziany dla dużych instytucji finansowych, koncernów czy korporacji. W ramach umowy o wnoszeniu składek do funduszy inwestycyjnych (powierniczych), pracodawca zobowiązuje się do odprowadzania określonej kwoty do wybranego przez pracowników, jednego lub kilku istniejących na rynku funduszy powierniczych lub inwestycyjnych. W przypadku 3 i 4 umowy mogą być zawierane tylko wtedy, gdy dotyczą: ubezpieczenia na życie z funduszem inwestycyjnym, ubezpieczenia wypadkowego, chorobowego jeśli jest uzupełnieniem ubezpieczenia na życie z funduszem inwestycyjnym, oraz ubezpieczenia na życie, o ile dotyczy ono dożycia oznaczonego w umowie wieku. Istotą ubezpieczeń w formie grupowej jest, w zamian za niską składkę, zapewnienie pokrycia wysokich wydatków powstałych w wyniku niespodziewanych zdarzeń takich jak śmierć, choroba, kalectwo. Ponadto, w odróżnieniu od indywidualnego ubezpieczenia, określenie klasy ryzyka w ubezpieczeniu grupowym oparte jest o stosunek pracy lub członkostwo w związku zawodowym. Ubezpieczyciel odstępuje tu od podziału ubezpieczonych np. na nie cierpiących i cierpiących na różnego rodzaju choroby, palących i nie palących lub pijących i nie pijących.

W dalszej części pracy rozpatrywane będą wyłącznie umowy grupowego ubezpieczenia pracowników na życie, w ramach wykupienia przez pracodawcę grupowego ubezpieczenia na życie i dożycie dla swoich pracowników. Do zalet takiego programu emerytalnego należą między innymi połączenie ubezpieczenia na życie z dodatkowymi formami zabezpieczenia przed niespodziewanymi wypadkami, chorobami czy niezdolnością do pracy, mogącymi wystąpić przed osiągnięciem wieku emerytalnego. Dodatkową zaletą jest wykorzystanie doświadczenia towarzystwa ubezpieczeniowego w dziedzinie ubezpieczeń i inwestowania składek oraz przeniesienie odpowiedzialności za inwestycje z zakładu pracy na ubezpieczyciela (co ma miejsce, kiedy zakład pracy zakłada pracowniczy fundusz emerytalny). Wadą tego rozwiązania mogą być opłaty związane z obsługą części ochronnej i części inwestycyjnej składki, które pobiera ubezpieczyciel. Ponadto pracodawca oraz pracownik nie mają wpływu na zarządzanie i strategię inwestycyjną zakładu ubezpieczeń.

Tworzenie pracowniczych programów emerytalnych nie jest obowiązkiem pracodawcy. Z trzech powodów mogą jednak one być atrakcyjną formą inwestowania. Po pierwsze zapewniając swoim pracownikom taki program pracodawca korzysta z ulgi finansowej, która polega na możliwości traktowania wydatków ponoszonych na realizację pracowniczego programu emerytalnego, jako kosztów uzyskania przychodu i odliczenia ich od podstawy opodatkowania. [2] Ponadto wpłaty na program emerytalny nie przekraczające pewnej ustalonej kwoty lub określonego procentowego udziału dochodu brutto pracownika (tzw. składki podstawowej) są zwolnione z placenia składek ZUS. Zatem pracodawca jak i pracownik nie odprowadzają składki na ubezpieczenie społeczne od kwoty przeznaczonej na składki do programu emerytalnego. [3] Trzeci powód związany jest z ewentualną śmiercią

[2] Na podstawie ustaw [32], [33]

[3] Podstawa prawna [39].

pracownika. Zakład pracy, który wykupił ubezpieczenie na życie i dożycie dla pracowników, może ograniczyć się do wypłaty rodzinie zmarłego pracownika, jedynie nadwyżki (jeśli istnieje) różnicy między odprawą pośmiertną a sumą ubezpieczenia. [4]

Zmniejszenie podstawy opodatkowania i nie płacenie składki ZUS od kwoty przeznaczonej przez pracodawcę na ubezpieczenie grupowe pracowników w znaczny sposób zmniejszają rzeczywistą wartość składek ubezpieczeniowych. Wysokość zysków wynikających z nie płacenia przez zakład odpraw pośmiertnych nie jest w sposób oczywisty i natychmiastowy do przewidzenia. Zawierając tego typu ubezpieczenie zakład pracy powinien wziąć pod uwagę co jest korzystniejsze czy nie zawieranie umowy ubezpieczenia i płacenie odpraw pośmiertnych, czy zawarcie umowy ubezpieczenia i traktowanie ewentualnego świadczenia z ubezpieczenia jako odprawę pośmiertną. Problem ten będzie przedmiotem rozważań w następnych paragrafach.

Pracowniczy program emerytalny to przede wszystkim układ między pracodawcą, a pracownikiem. Zazwyczaj pracodawca przedstawia załodze wybraną przez siebie firmę ubezpieczeniową oraz wstępne warunki programu. Pracownicy mogą, ale nie muszą zaakceptować wyboru pracodawcy. Wprowadzenie programu jest możliwe jeżeli przystępuje do niego określona liczba pracowników (w Polsce jest to co najmniej 50 procent załogi zakładu pracy).

Przystąpienie do programu emerytalnego w ramach grupowego ubezpieczenia na życie jest atrakcyjną formą inwestycji dla pracownika ponieważ do programu może przystąpić osoba, której nie stać na wykupienie polisy w komercyjnej firmie ubezpieczeniowej, ze względu na zbyt wysoką składkę ubezpieczeniową. Ponadto uczestnikiem programu może być osoba, która ze względu na stan zdrowia nie może uzyskać indywidualnego ubezpieczenia na życie. Zawsze pracownik ma możliwość zadeklarowania dodatkowej składki ze swojego opodatkowanego wynagrodzenia, lub jednorazowej wpłaty w formie akcji, papierów wartościowych, wpłaty transferowej z innego funduszu. Wartość składki podstawowej, nie jest wliczana w wynagrodzenie pracownika stanowiące podstawę ustalenia obowiązkowej składki na ubezpieczenie społeczne, a świadczenia uzyskiwane z programu emerytalnego nie są opodatkowane.

Należy jednak pamiętać, że mimo tego, że pracownik nie musi od składki podstawowej odprowadzać opłaty na ubezpieczenie społeczne, to stanowi ona jego wynagrodzenie, a zatem zwiększa podstawę opodatkowania pracownika. Ponadto w przypadku wykupienia przez pracodawcę ubezpieczenia grupowego na życie, istnieje możliwość, że pracodawca skorzysta z przysługującego prawa i w przypadku śmierci pracownika wypłaci rodzinie jedynie nadwyżkę (jeśli istnieje) wynikającą z różnicy między odprawą pośmiertną a sumą ubezpieczenia wypłacaną przez zakład ubezpieczeń. Zatem, wyrażając zgodę na tego typu ubezpieczenie, pracownik powinien wziąć pod uwagę co jest korzystniejsze: czy nie zawieranie umowy ubezpieczenia i otrzymanie odprawy pośmiertnej przez rodzinę w przypadku jego śmierci, czy zawarcie umowy ubezpieczenia co wiąże się z opłacaniem podatku dochodowego od składki ubezpieczeniowej, i traktowanie ewentualne świadczenia z ubezpieczenia jako odprawę pośmiertną a w przypadku dożycia wieku emerytalnego otrzymanie nie opodatkowanego świadczenia (w formie kapitału lub renty).

[4] Wydatki ponoszone przez podatnika (zakład pracy) pośrednio na rzecz pracowników, jeśli nie wynikały one z układu zbiorowego pracy lub innych aktów prawnych, uprawniają pracodawcę do nie wypłacania odprawy pośmiertnej, jeżeli jej wysokość nie przewyższa wypłacanej sumy ubezpieczenia. Podstawa prawna [30].

Wprowadzenie 1 kwietnia 1999 roku ustawy o pracowniczych programach emerytalnych spowodowało, że na rynku polskim funkcjonują grupowe ubezpieczenia na życie, których sytuacja prawna może być dwojakiego rodzaju. Jeżeli w zakładzie pracy istniał już plan ubezpieczenia grupowego, zawarty do 31 marca 1999 roku, to przedsiębiorstwo mogło kontynuować go na dotychczasowych zasadach (zgodnie z zasadą nie działania prawa wstecz) lub przekształcić w pracowniczy program emerytalny. Przed wprowadzeniem wspomnianej ustawy, pracodawca mógł wliczać w ciężar kosztów uzyskania przychodów składki na ubezpieczenie na życie, jeśli umowa ubezpieczenia wykluczała w ciągu 5 lat (licząc od końca roku kalendarzowego, w którym ją zawarto) wypłatę w przypadku dożycia lub wykupu. [5] Ponadto kwoty, do wysokości 7 % przeciętnych miesięcznych zarobków na osobę w danym zakładzie, wydatkowane na polisy ubezpieczeniowe były wyłączone z obciążenia na ZUS pod warunkiem, że do ubezpieczenia przystąpiło co najmniej 50 % załogi. [6]

Wprowadzenie reformy zmieniło zasady funkcjonowania grupowego ubezpieczenia na życie. Dotychczas wysokość składek zwolnionych z opłat na rzecz ubezpieczenia społecznego była kwotowo jednakowa dla wszystkich pracowników biorących udział w ubezpieczeniu grupowym. W pracowniczych programach emerytalnych maksymalna wysokość składki upoważniającej do stosowania ulg ZUS-owskich i podatkowych wynosi 7 % indywidualnego wynagrodzenia brutto.

W obu przypadkach pracownik odprowadza podatek dochodowy od opłacanych skladek. Według przepisów obowiązujących przed 1 kwietnia 1999 roku, składka była dodatkowym świadczeniem na rzecz pracownika i była opłacana ze środków własnych zakładu pracy. Oznaczało to, że przez cały okres trwania ubezpieczenia, pracodawca płacił składkę i był właścicielem polisy (a więc gromadzonego kapitału). W celu przekazania kapitału na rzecz pracownika zazwyczaj sporządzana była umowa cesji pomiędzy pracodawcą i pracownikiem. Po wejściu w życie reformy, sytuacja uległa zmianie. Właścicielem kapitałowej części jest od początku pracownik, gdyż chcąc finansować program emerytalny, pracodawca musi podwyższyć pracownikowi wynagrodzenie o wielkość składki, a następnie tę część przekazać w formie składki do pracowniczego programu emerytalnego. Zatem w rzeczywistości od strony finansowej pracownika w obu przypadkach nic się nie zmienia, choć uległy zmianie formalne zasady.

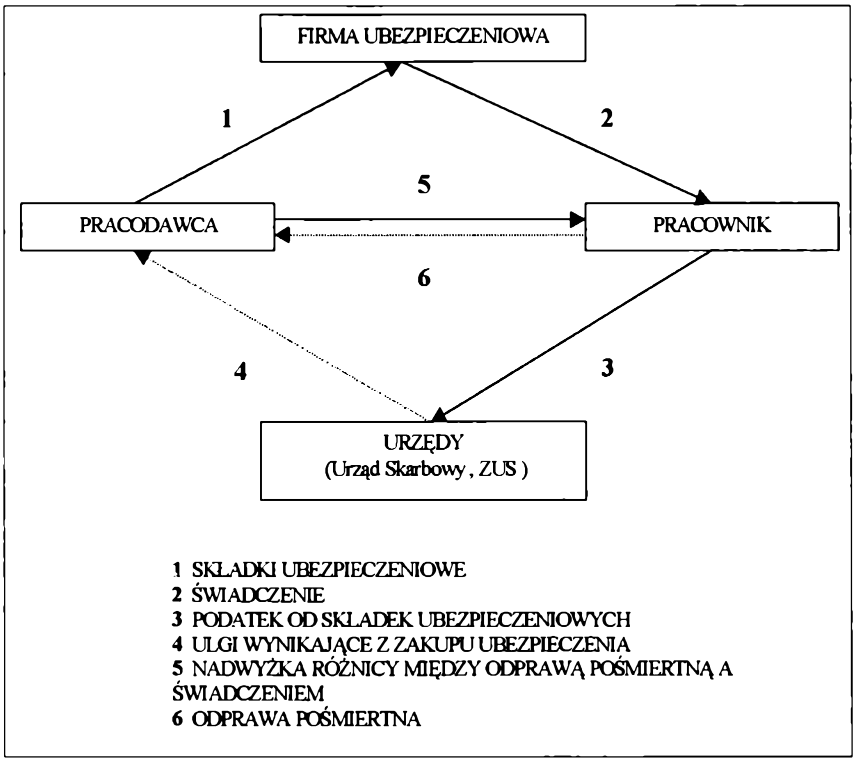
Ponadto nie zmieniła się zasada mówiąca o tym, że pracodawca jest zwolniony z obowiązku wypłacania rodzinie zmarłego pracownika odprawy pośmiertnej, jeżeli ubezpieczył życie swojego pracownika na sumę przynajmniej równą wysokości tej odprawy.

W obu przypadkach istotną rolą ubezpieczenia grupowego, wykupionego przez pracodawcę, jest element wyróżniający pracownika ubezpieczonego z ogółu, a także element motywacyjny dla wszystkich zatrudnionych. Zakład pracy nie tylko staje się atrakcyjnym pracodawcą, przyciągającym lepszych specjalistów, ale także posiadacz polisy - pracownik czuje się związany z firmą dzięki czemu ogranicza się rotacja kadry pracowniczej.

Szczegółowe informacje dotyczące systemu emerytalnego w Polsce można znaleźć między innymi w książkach K. Drewnowska, J. Altrych, N. Czerski [17] i A. Skoczyńska [26].

[5]Podstawa prawna [34].
[6]Podstawa prawna [39].

Rysunek 5.1: Schemat przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu grupowym, w którym ubezpieczającym jest pracodawca.



Źródło: Opracowanie własne

Jeżeli w zakładzie pracy istnieje ubezpieczenia grupowe na życie i dożycie opłacane przez pracodawcę, to (niezależnie kiedy je założono, przed czy po 1 kwietnia 1999 roku) z jego istnieniem związane są przepływy pieniężne, których schemat został przedstawiony na Rysunku 5.1. Przepływy na tym rysunku oznaczone są strzałkami, przy czym numerom 1,2,3,5 odpowiadają przepływy pieniężne, które są regulowane gotówką lub przelewem bankowym.

Natomiast przepływy pieniężne o numerach 4 i 6 nie są regulowane w formie pieniężnej lub przelewem bankowym. Wynikają one z faktu, że jedna ze stron zrzeka się określonych wpłat, które miała otrzymać od drugiej strony. I tak w przypadku przepływu numer 4 ZUS i Urząd Skarbowy zrzekają się stosownych opłat, jeżeli pracodawca opłaca składki za pracowników. W przypadku przepływu numer 6, pracownik rezygnuje z wypłacanej przez pracodawcę odprawy pośmiertnej, jeśli po jego śmierci osoba uposażona otrzyma świadczenie od ubezpieczyciela co najmniej równe odprawie pośmiertnej.

Przepływy pieniężne o numerach 1,3,4 są realizowane, gdy ubezpieczony żyje. Natomiast przepływy 2,5,6 są realizowane, po śmierci ubezpieczonego, zaś przepływ numer 2 zachodzi także gdy ubezpieczony dożywa końca okresu ubezpieczenia.

5.2 Analiza przepływów pieniężnych ubezpieczającego

5.2.1 Składka rzeczywista

Ubezpieczenie grupowe jest umową między firmą ubezpieczeniową, pracodawcą i pracownikiem. Wykupując ubezpieczenie na życie i dożycie dla swojego pracownika w wieku x, pracodawca zobowiązuje się do płacenia w jego imieniu składek przez cały okres ubezpieczenia (n lat). W Paragrafie 5.1 zostały opisane ulgi jakie przysługują pracodawcy wykupującemu grupowe ubezpieczenie w ramach pracowniczego programu emerytalnego. Poniżej zostaną one sformalizowane i określony będzie ich wpływ na wydatki ponoszone przez pracodawcę w związku z wykupieniem ubezpieczenia dla pracowników (por. [15]).

Niech I oznacza składkę podstawową tzn. maksymalną wielkość składki ubezpieczeniowej zwolnionej z opłat na ubezpieczenie społeczne. Ponadto niech $\mathcal{O}$ oznacza odprawę pośmiertną płaconą przez pracodawcę rodzinie pracownika, w przypadku jego śmierci. W wyniku wykupienia ubezpieczenia grupowego pracodawcy przysługują następujące ulgi:

1. jeżeli składka jest nie większa niż pewna wartość I, to jest ona zwolniona z opłaty na rzecz ubezpieczenia społecznego,
2. składka płacona przez pracodawcę stanowi dla zakładu pracy koszt uzyskania przychodu, zatem zmniejsza podstawę opodatkowania.,
3. po śmierci ubezpieczonego pracownika, pracodawca wypłaca jego rodzinie jedynie różnicę (jeśli jest dodatnia) między odprawą pośmiertną $\mathcal{O}$ i sumą ubezpieczenia.

Przyjmijmy, że c_k oznacza składkę roczną płaconą z góry na początku k-tego roku trwania ubezpieczenia pod warunkiem, że pracownik żyje. Ponieważ pracodawcy przysługują ulgi, to realna wysokość składki jest dla niego niższa. Niech c_k^r oznacza rzeczywistą składkę roczną płaconą z góry przez pracodawcę za pojedynczego pracownika na początku k-tego roku trwania ubezpieczenia (pod warunkiem, że pracownik żyje). Rzeczywista wysokość składki płaconej przez pracodawcę zależy od wielkości I oraz wysokości podatku dochodowego płaconego przez zakład pracy. Określona ona jest następująco:

$$c_k^r = \begin{cases} c_k(1 - \mathcal{Z}^{(p)}) & dla \quad c_k \leq I \\ (c_k + (c_k - I)\mathcal{Z})(1 - \mathcal{Z}^{(p)}) & dla \quad c_k > I, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

gdzie $\mathcal{Z}$ jest stopą składki na ubezpieczenie społeczne płaconą przez pracodawcę, a $\mathcal{Z}^{(p)}$ jest stopą podatku dochodowego określoną dla zakładu pracy.

Zakładamy, że $\mathcal{Z}^{(p)} \in [0,1)$ i $\mathcal{Z} \in [0,1)$. Ponadto są one stałe przez cały okres ubezpieczenia.

Dla każdego k składka c_k^r jest nie większa niż składka c_k. Niech funkcja $R(c_k)$ będzie określona następująco:

$$R(c_k) = c_k - c_k^r. \tag{5.2.2}$$

Korzystając ze wzoru (5.2.1) mamy, że

$$R(c_k) = \begin{cases} c_k\mathcal{Z}^{(p)} & dla \quad c_k \leq I \\ c_k(1 - (1+\mathcal{Z})(1 - \mathcal{Z}^{(p)})) + I(1 - \mathcal{Z}^{(p)})\mathcal{Z} & dla \quad c_k > I. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Zauważmy, że jeżeli cala składka, niezależnie od jej wysokości, jest zwolniona z opłat na rzecz ubezpieczenia społecznego ($I = \infty$) to wtedy $R(c_k) = c_k \mathcal{Z}^{(p)}$ dla każdego c_k. W przypadku, gdy od całej składki należy odprowadzić pełną kwotę na ubezpieczenie społeczne ($I = 0$), to funkcja $R(c_k)$ ma następującą postać $R(c_k) = c_k(1-(1+\mathcal{Z})(1-\mathcal{Z}^{(p)}))$.

Niech N oznacza liczbę pracowników objętych ubezpieczeniem grupowym na życie i dożycie. Ponadto niech

- P_l oznacza roczny dochód brutto l-tego pracownika, gdzie $l = 1, 2, 3, ...N$,
- $\bar{P} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} P_l$ oznacza średni roczny dochód brutto pracowników w zakładzie pracy.

W dalszych rozważaniach dotyczących poszczególnych pracowników, jeżeli nie będzie prowadzilo to do nieporozumień, to zamiast P_i będzie używana wielkość P.

W Polsce, w zależności od stażu pracy, odprawa pośmiertna $\mathcal{O}$ jest równa P, $3P$ lub $6P$. Maksymalna wartość składki na ubezpieczenie grupowe (zawarte przed reformą), która zwolniona jest z opłat na rzecz ZUS jest równa 7% średniego wynagrodzenia brutto w zakładzie pracy. Dlatego też $I = 0,07\bar{P}$ dla wszystkich ubezpieczeń grupowych zawartych przed 1 kwietnia 1999 roku. Natomiast dla wszystkich pracowniczych programów emerytalnych $I = 0,07P$. Ponadto aby pracodawca mógl skorzystać ze wszystkich ulg, jest zobowiązany do zawarcia ubezpieczenia na okres nie krótszy niż 5 lat. Dlatego też do ubezpieczenia w zakładzie pracy mogą przystąpić pracownicy w wieku pomiędzy 18 a 60 rokiem życia (wiek wstępu $x \in \{18, 19, \cdots, 60\}$), przy założeniu, że wiek emerytalny jest równy 65 lat. W Polsce wiek emerytalny kobiet jest równy 60 lat, a zatem do ubezpieczenia w zakładzie pracy mogą one przystąpić w wieku pomiędzy 18 a 55 rokiem życia (wiek wstępu $x \in \{18, 19, \cdots, 55\}$).

Sposób obliczenia rzeczywistej składki rocznej płaconej z góry przez pracodawcę za pojedynczego pracownika na początku roku pod warunkiem, że pracownik żyje podany został w poniższym przykładzie. Ponadto w przykładzie tym rozpatrzona została różnica między wartością składki, a składką rzeczywistą.

Przykład 5.2.1 *Załóżmy, że składka roczna za ubezpieczenie przyjmuje maksymalną wartość równą 250 ($c \in [0, 250]$), średnie wynagrodzenie brutto pracownika w zakładzie jest równe 1000 ($\bar{P} = 1000$). Ponadto niech stopa podatku dochodowego płaconego przez zakład pracy będzie równa 35% ($\mathcal{Z}^{(p)} = 0,35$). Natomiast stopa na ubezpieczenie społeczne będzie równa 22,5% ($\mathcal{Z} = 0,225$) oraz $I = 0,07\bar{P}$.*

Korzystając ze wzoru (5.2.3) funkcję $R(c)$ można wyrazić następującym wzorem:

$$R(c) = \begin{cases} 0,35c & dla \quad c \leq 70 \\ 0,21c + 10,24 & dla \quad c > 70 \end{cases}$$

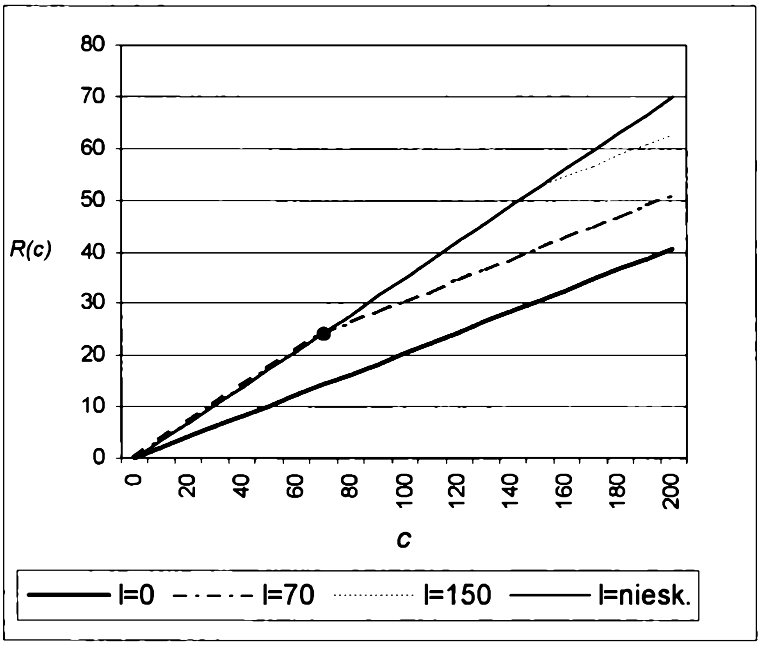
Ponieważ $I = 0,07 \cdot 1000 = 70$, to dla $c \leq 70$ rzeczywista składka jest równa 65% jej pierwotnej wartości. Natomiast, gdy $c > 70$, to rzeczywista składka jest równa 79% jej wartości minus 10,24.

W Tablicy 5.1 zostały zamieszczone wybrane wartości funkcji $R(c)$. Zauważmy, że obliczenia przeprowadzone w przypadku, gdy $P = 1000$ oraz $I = 0,07P$ dają identyczne wyniki.

Tablica 5.1: Różnica między składką c i składką rzeczywistą c^r.

c	c^r	$R(c)$
10	*6,50*	*3,50*
20	*13,00*	*7,00*
30	*19,50*	*10,50*
40	*26,00*	*14,00*
50	*32,50*	*17,50*
60	*39,00*	*21,00*
70	**45,50**	**24,50**
80	*53,46*	*26,54*
90	*61,43*	*28,58*
100	*69,39*	*30,61*
110	*77,35*	*32,65*
120	*85,31*	*34,69*
130	*93,28*	*36,73*
140	*101,24*	*38,76*

Rysunek 5.2: Różnica między składką roczną płaconą z góry za ubezpieczenie, a składką rzeczywistą dla wybranych wielkości I.



Źródło: Opracowanie własne

Na Rysunku 5.2 przedstawiona funkcja $R(c)$ dla początkowych wielkości c przyjmuje takie same wartości jak w przypadku gdy, cała składka jest zwolniona z opłat na rzecz ZUS, po czym w punkcie $c = I$ zmienia kąt nachylenia i dalej jej wartości tworzą prostą równoległą do przypadku, gdy cała składka nie podlega takim zwolnieniom i pracodawca jest *zobowiązany odprowadzić składkę na ubezpieczenie społeczne od całej kwoty przeznaczonej na ubezpieczenie grupowe pracownika. Symbolem • została zaznaczona różnica między roczną składką, a składką rzeczywistą dla $c = I = 70$. Jest to punkt, w którym krzywa określająca różnicę między składką, a jej rzeczywistym kosztem zmienia kąt nachylenia i dalej jest równoległa do przypadku, gdy $I = 0$. W celu dokładniejszej ilustracji, dodatkowo na wykresie została zaznaczona krzywa dla $I = 0,15 \cdot 1000 = 150$.*

Na Rysunku 5.2 przedstawione zostały między innymi skrajne przypadki: gdy cała składka (niezależnie od jej wysokości) jest zwolniona z opłat na rzecz ZUS ($R(c)$ dla $I = \infty$) oraz gdy składka nie podlega takim zwolnieniom i pracodawca jest zobowiązany odprowadzić składkę na ubezpieczenie społeczne od całej kwoty przeznaczonej na ubezpieczenie grupowe pracownika ($R(c)$ dla $I = 0$).

5.2.2 Łączne przepływy pieniężne

Rozważmy ubezpieczenie na życie i dożycie wykupione przez pracodawcę dla pracowników. Określmy łączne przepływy pieniężne wynikające z umowy ubezpieczenia z punktu widzenia pracodawcy.

W przypadku śmierci ubezpieczonego pracownika w okresie $[k, k+1)$, firma ubezpieczeniowa wypłaca uposażonym wysokość sumy ubezpieczenia S_{k+1}, a pracodawca jest zobowiązany do wypłacenia rodzinie zmarłego pracownika jedynie różnicy (jeśli jest dodatnia) między odprawą pośmiertną $\mathcal{O}$ i sumą ubezpieczenia S_{k+1}. Zatem wykupując ubezpieczenie dla swojego pracownika, pracodawca powinien wziąć pod uwagę nie tylko wpłacane składki, ale także (w razie śmierci pracownika) wypłatę ewentualnej nadwyżki wynikającej z różnicy pomiędzy odprawą pośmiertną i aktualną (w momencie śmierci) sumą ubezpieczenia. Ponadto pracodawca nie płaci rodzinie zmarłego pracownika odprawy pośmiertnej, która w takim momencie w części lub całkowicie rekompensuje pracodawcy poniesione wydatki na ubezpieczenie pracownika. Dla $k < n$ przepływy pieniężne $b_k(i)$ z punktu widzenia pracodawcy określone są następująco:

$$\begin{aligned} b_k(i) &= \begin{cases} -c_i^r & dla \quad i \le k, \\ \mathcal{O} - max\{0, \mathcal{O} - S_{k+1}\} & dla \quad i = k+1, \\ 0 & dla \quad i > k+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -c_i^r & dla \quad i \le k, \\ min\{\mathcal{O}, S_{k+1}\} & dla \quad i = k+1, \\ 0 & dla \quad i > k+1 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Natomiast dla $k \ge n$ funkcja $b_k(i)$ wyraża się wzorem:

$$b_k(i) = \begin{cases} -c_i^r & dla \quad i < n, \\ 0 & dla \quad i \ge n \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Jeżeli przepływy pieniężne są określone wzorami (5.2.4) i (5.2.5), to na podstawie Definicji 4.2.1, *funkcja łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego* przyjmuje następującą postać:

$$B_K(k) = \begin{cases} min\{\mathcal{O}, S_{k+1}\} - \sum_{i=0}^{k} c_i^r & dla \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ -\sum_{i=0}^{n-1} c_i^r & dla \quad k = n, n+1, \cdots. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

Przeciętna wartość przepływów pieniężnych określona dla pracodawcy z tytułu wykupienia ubezpieczenia dla pracownika w wieku x, jest równa:

$$\mathbb{E}(B_K) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(min\{\mathcal{O}, S_{K+1}\} - \sum_{i=0}^{k} c_i^r \right) {}_{k|}q_x \right] - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^r \, {}_n p_x. \tag{5.2.7}$$

Jeżeli $\mathbb{E}(B_K) < 0$, to wykupienie ubezpieczenia oznacza, że pracodawca na ubezpieczenie pracownika wyda średnio kwotę równą $\mathbb{E}(B_K)$ (odprawa pośmiertna jest niższa niż przeciętne wydatki pracodawcy na ubezpieczenie). W przeciwnym przypadku (gdy $\mathbb{E}(B_K) > 0$) wykupienie ubezpieczenia oznacza przeciętny dochód pracodawcy w wysokości $\mathbb{E}(B_K)$ (wysokość odprawy pośmiertnej przewyższa przeciętne wydatki pracodawcy na ubezpieczenie). Gdy zachodzi $\mathbb{E}(B_K) = 0$, to przeciętne wydatki pracodawcy nie ulegną zmianie i będą takie same niezależnie od tego, czy wykupi on ubezpieczenie dla pracowników, czy też nie wykupi.

Przykład 5.2.2 *Rozpatrzmy grupę pracowników w wieku od 18 do 60 lat. Załóżmy, że średni roczny dochód brutto w zakładzie pracy jest równy 12000 ($\bar{P} = 12000$). Ponadto stopa podatku dochodowego w przedsiębiorstwie jest równa 40% ($\mathcal{Z}^{(p)} = 0,4$), natomiast stopa składki na ubezpieczenie społeczne 22,5% ($\mathcal{Z} = 0,225$).*

Niech dla wszystkich pracowników $\mathcal{O} = 6 \cdot P$ oraz $I = 0,07 \cdot \bar{P}$. Zatem dla każdego pracownika, wysokość składki rocznej zwolnionej z opłat na rzecz ZUS jest równa 840 ($0,07 \cdot 12000 = 840$).

Załóżmy, że pracodawca postanowił przeznaczać rocznie na ubezpieczenie każdego pracownika kwotę w wysokości 840 do momentu przejścia pracownika na emeryturę. Wobec tego rzeczywista składka za ubezpieczenie pojedynczego pracownika jest równa:

$$c^r = 840(1 - 0,4) = 504$$

i nie zależy od jego wieku x ani okresu ubezpieczenia $n = 65 - x$, co oznacza, że $c_k^r = c^r$ dla każdego $k \in \{0, 1, ..., 65 - x\}$.

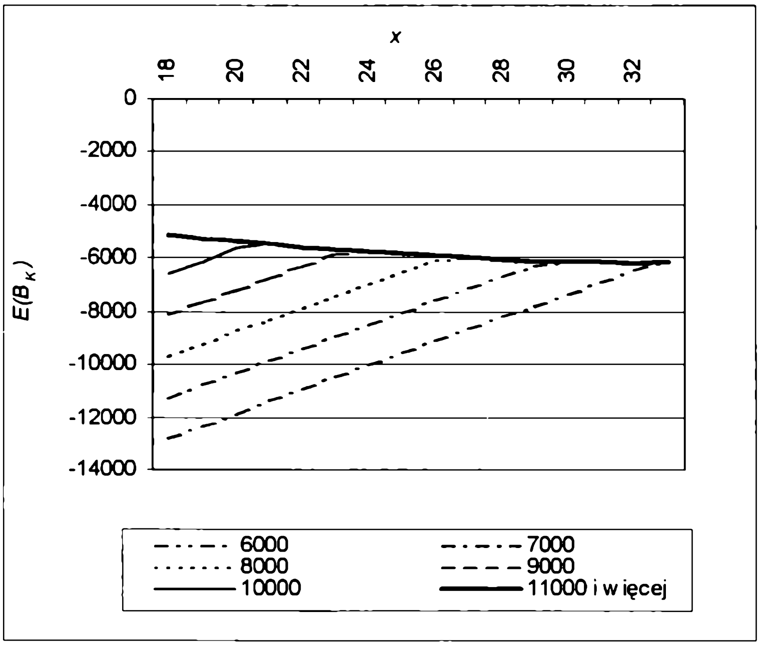
Tablica 5.2: Wskaźniki taryfowe dla wybranych x i $n = 65 - x$.

x	$w_{x,65-x}$	x	$w_{x,65-x}$
18	*0,01284*	*28*	*0,01885*
19	*0,01328*	*29*	*0,01972*
20	*0,01375*	*30*	*0,02065*
21	*0,01424*	*31*	*0,02165*
22	*0,01478*	*32*	*0,02273*
23	*0,01535*	*33*	*0,02380*
24	*0,01595*	*40*	*0,03485*
25	*0,01660*	*50*	*0,06903*
26	*0,01730*	*60*	*0,23150*
27	*0,01805*		

Wysokości sum ubezpieczenia dla każdego pracownika zostały wyznaczone w oparciu o taryfy ubezpieczeniowe PZU Życie S.A. [29] i zakłada się, że są one stałe przez cały okres ubezpieczenia. W Tablicy 5.2 zostały przytoczone wskaźniki taryfowe dla wybranych wieków wstępu.

Prawdopodobieństwa ${}_kp_x$ oraz ${}_{k/}q_x$ zostały obliczone przy użyciu Polskich Tablic Trwania Życia Ogółem z lat 1990-1991.

Rysunek 5.3: Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego w zależności od wieku wstępu ubezpieczonego i jego wynagrodzenia brutto.



Źródło: Opracowanie własne

Na Rysunku 5.3 wykres '11000 i więcej' ilustruje te ubezpieczenia, w których wartość sumy ubezpieczenia jest co najwyżej równa odprawie pośmiertnej ($O \geq S$). Pozostałe wykresy pokazują przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego, gdy pracownicy zarabiają odpowiednio ($P =$) 6000, 7000, 8000, 9000, 10000.

Dla pracowników, którzy przekroczyli 33 rok życia, wysokość składki zaproponowana przez pracodawcę została ustalona na takim poziomie, że niezależnie od wysokości zarobków, przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego pozostają niezmienne. Poza tym dla pracowników w wieku 33 *do* 60 *lat im pracownik starszy tym, przeciętne wydatki pracodawcy na ubezpieczenie są niższe, co jest widoczne na Rysunku 5.5.*

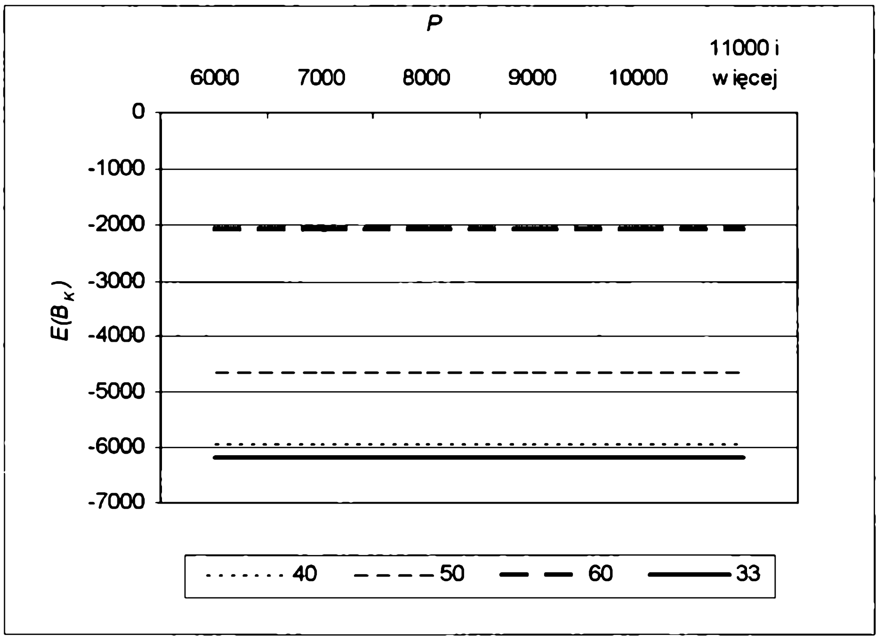
Dla pracowników w wieku od 18 do 32 lat przeciętne wydatki pracodawcy na ubezpieczenie są funkcją niemalejącą względem wysokości wynagrodzenia brutto, czego ilustracją jest Rysunek 5.5. W tej grupie wiekowej, im osoba starsza tym $\mathbb{E}(B_K)$ osiąga stały poziom dla niższego P. Ponadto dla $P \geq 11000$ zachodzi następujący łańcuch nierówności:

$$\mathbb{E}(B(K(18))) < \mathbb{E}(B(K(19))) < ... < \mathbb{E}(B(K(32)))$$

i jest on odwrotny niż w przypadku pracowników powyżej 33 roku życia.

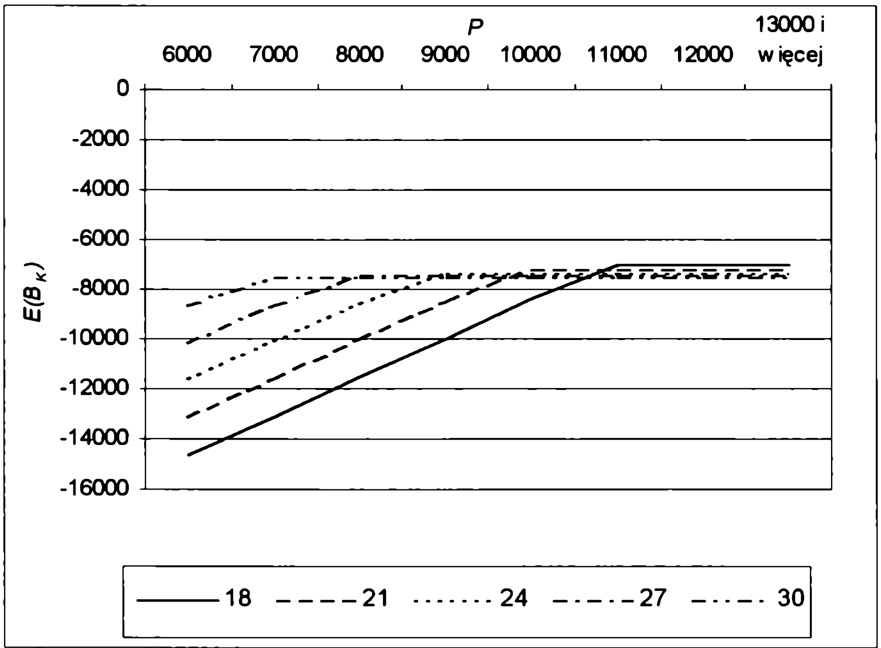
Podsumowując, niezależnie od wieku pracownika i jego zarobków, zawarcie ubezpieczenia jest związane z dodatkowym wydatkiem ponoszonym przez zakład pracy. Ponadto pracodawca powinien szczegółowo analizować składkę dla młodych pracowników, zarabiających poniżej średniej w zakładzie pracy, gdyż ze względu na niski wskaźnik taryfowy (młody wiek i długi okres ubezpieczenia) i stosunkowo małe zarobki, zazwyczaj suma ubezpieczenia znacznie przekracza wysokość odprawy pośmiertnej. Powoduje to, że przeciętne wydatki pracodawcy są wysokie, a w razie śmierci pracownika wysokość odprawy pośmiertnej jest przeważnie dużo niższa niż suma składek wpłacona przez pracodawcę.

Rysunek 5.4: Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego w zależności od wynagrodzenia brutto pracowników w wieku co najmniej 33 lat.



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.5: Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego w zależności od wynagrodzenia brutto pracowników w wieku co najwyżej 33 lat.



Źródło: Opracowanie własne

5.2.3 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy stałej stopie dyskontowej

Przepływy pieniężne wynikające z umowy ubezpieczenia trwają zwykle przez długi okres, stąd wskazane jest dla pracodawcy określenie zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu z jego punktu widzenia.

Przy założeniu, że współczynnik dyskontujący $v(k)$ jest stały przez cały okres ubezpieczenia, *zaktualizowane łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego* można określić korzystając z Definicji 4.3.1. Przyjmując, że przepływy pieniężne określone są wzorami (5.2.4) i (5.2.5) mamy, że

$$Z_K(k) = \begin{cases} min\{\mathcal{O}, S_{k+1}\}v^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} c_i^r v^i & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ - \sum_{i=0}^{n-1} c_i^r v^i & dla \quad K = n, n+1, ... \end{cases}$$

Zaktualizowana wartość średnich łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego, który wykupił ubezpieczenie dla pracownika w wieku x, wyraża się wzorem:

$$\mathbb{E}(Z_K) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[min\{\mathcal{O}, S_{k+1}\}v^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} c_i^r v^i)) \ {}_{k/}q_x \right] - \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k^r v^k \right) {}_n p_x. \quad (5.2.8)$$

Jeżeli $\mathbb{E}(Z_K) < 0$ wtedy zaktualizowane przeciętne wydatki pracodawcy związane z wykupieniem ubezpieczenia dla pracownika są większe niż aktualna wartość wypłaconej w razie śmierci odprawy pośmiertnej. Zatem $\mathbb{E}(Z_K)$ jest wysokością funduszu jakim powinien dysponować (w momencie zakupu ubezpieczenia) zakład pracy, aby przy ustalonej z góry stopie z inwestycji i ($v = \frac{1}{1+i}$) mógł opłacać n-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla pracownika w wieku x. W przeciwnym przypadku (gdy $\mathbb{E}(Z_K) > 0$) wykupienie ubezpieczenia spowoduje przeciętny dochód pracodawcy i $\mathbb{E}(Z_K)$ jest zaktualizowaną (na dzień zakupu ubezpieczenia) wartością przyszłych dochodów pracodawcy. Gdy zachodzi $\mathbb{E}(Z_K) = 0$, to zaktualizowana wartość przeciętnych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy nie ulegnie zmianie i będzie taka sama niezależnie od tego, czy wykupi on ubezpieczenie dla pracowników, czy też nie wykupi.

Poniżej rozpatrzony zostanie szczególny przypadek ubezpieczenia grupowego. Zakłada się, że pracodawca wykupił, dla pracownika w wieku x, n-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie ze stałą składką i stałą sumą ubezpieczenia ($c_k = c$ oraz $S_k = S$ dla każdego k). Ponadto niech suma ubezpieczenia jest równa odprawie pośmiertnej ($S = \mathcal{O}$).

Zakładamy, że stopa z inwestycji, jaką może osiągnąć zakład pracy, równa i jest stała przez cały okres ubezpieczenia. Wobec tego współczynnik dyskontujący $v = \frac{1}{1+i}$ także jest stały podczas trwania ubezpieczenia.

Jeśli $Z = Z^{(p)} = 0$ to zaktualizowana funkcja łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego, wyrażona jest następującym wzorem:

$$Z_K(k) = \begin{cases} Sv^{k+1} - c\sum_{i=0}^{k} v^i & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ -c\sum_{i=0}^{n-1} v^i & dla \quad k = n, n+1, ... \end{cases} \quad (5.2.9)$$

Ponieważ $\sum_{i=0}^{k} v^i = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$ (por. Punkt 1.2.2), to funkcja (5.2.9) jest postaci:

$$Z_K(k) = \begin{cases} -c\ddot{a}_{\overline{k+1}|} + Sv^{k+1} & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ -c\ddot{a}_{\overline{n}|} & dla \quad k = n, n+1, ... \end{cases}.$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z_K wyrażona jest wzorem:

$$\mathbb{E}(Z_K) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-c\ddot{a}_{\overline{k+1}|} + Sv^{k+1} \right) {}_{k|}q_x - c\ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x \quad (5.2.10)$$

Po przekształceniu równanie (5.2.10) jest postaci:

$$\mathbb{E}(Z_K) = -c\left(\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x\right) + S\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x. \tag{5.2.11}$$

Podstawiając do (5.2.11) wzory (1.2.6) i (1.2.5) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_K) &= -c\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + SA_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}\\ &= -w_{x,n}S\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + SA_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}\\ &= -S\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\left(w_{x,n} - \frac{A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)\\ &= -S\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\left(w_{x,n} - P_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}\right),\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

gdzie $P_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$ jest roczną składką netto n-letniego ubezpieczenia na życie z sumą ubezpieczenia 1. Znak $\mathbb{E}(Z_K)$ zależy od znaku czynnika $w_{x,n} - P_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$, który jest różnicą między roczną składką brutto n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie i roczną składką netto n-letniego ubezpieczenia na życie. Ponieważ $P_{x:\overline{n}|} = P_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$, więc omawiana różnica jest równa wysokości rocznej składki netto n-letniego ubezpieczenia na dożycie wraz z kosztami rocznymi n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie i jest większa od zera, a stąd wynika, że $\mathbb{E}(Z_K) < 0$. Przeciętną wartość zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego można w tym wypadku zinterpretować jako wielkość funduszu netto potrzebnego do wypłaty n-letniej renty płatnej z góry w wysokości rocznej składki netto n-letniego ubezpieczenia na dożycie wraz z kosztami rocznymi n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia S. Taki wynik jest intuicyjnie oczywisty, gdyż wydatkiem pracodawcy jest przede wszystkim ta część składki ubezpieczenia, która związana jest z wypłatą pracownikowi dożycia. Natomiast pozostała część składki, związana z wypłatą w razie śmierci pracownika, jest rekompensowana przez to, że pracodawca nie wyplaca odprawy pośmiertnej. Zakładając, że $Z = Z^{(p)} = 0$, pracodawca zawsze ponosi przeciętne wydatki na ubezpieczenia, których wartość obecna (przy znanej stopie dyskontowej d) jest równa $\mathbb{E}(Z_K)$.

Wzięcie pod uwagę wszystkich możliwych ulg, z jakich może skorzystać pracodawca zakładając ubezpieczenie dla swoich pracowników, związane jest ze zmianą we wzorze na $\mathbb{E}(Z_K)$ jedynie współczynnika taryfowego. W szczególności zamiast $w_{x,n}$ wystarczy podstawić rzeczywisty współczynnik taryfowy $w^r_{x,n}$ dany następującym wzorem:

$$w^r_{x,n} = \begin{cases} w_{x,n}(1 - \mathcal{Z}^{(p)}) & dla \quad w_{x,n} \leq I \\ (w_{x,n} + (w_{x,n} - I)\mathcal{Z})(1 - \mathcal{Z}^{(p)}) & dla \quad w_{x,n} > I. \end{cases}$$

Wówczas $\mathbb{E}(Z_K) = -S\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\left(w^r_{x,n} - P_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}\right)$. Z punktu widzenia pracodawcy ubezpieczenie na życie i dożycie wykupione przez niego dla pracownika, jest rodzajem ubezpieczenia terminowego na życie. Jeśli pracownik umrze, to wówczas pracodawca nie płaci odprawy pośmiertnej (można przyjąć, że firma ubezpieczeniowa wypłaca odprawę pośmiertną pracodawcy, a on w ramach własnych zobowiązań przekazuje ją pracownikowi). Natomiast jeśli pracownik dożyje wyznaczonego wieku, to pracodawca nic nie otrzymuje, choć firma ubezpieczeniowa jest zobowiązana do wypłaty sumy ubezpieczenia pracownikowi. Skladki na rzecz tej wypłaty są głównym wydatkiem pracodawcy, który może być zmniejszony dzięki ulgom związanym z podatkiem i składką na ubezpieczenie społeczne.

Rozważając możliwość wykupienia ubezpieczenia grupowego, pracodawca powinien wziąć pod uwagę także ryzyko zmiany przeciętnych zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych. Jednym z narzędzi statystyki służącym do estymacji wartości funkcji Z_K jest wyznaczenie *typowego obszaru zmienności* (tzw. przedziału jednosigmowego), który jest postaci

$$(\mathbb{E}(Z_K) - \sqrt{\mathbb{D}^2(Z_K)}; \mathbb{E}(Z_K) + \sqrt{\mathbb{D}^2(Z_K)}).$$

Od rozpiętości i znaku końców typowego obszaru zmienności zaktualizowanyh łącznych przepływów pieniężnych zależy precyzja i wielkość przewidywanych dochodów lub wydatków związanych z zakupieniem polisy ubezpieczeniowej. Im rozpiętość przedziału jednosigmowego mniejsza, tym precyzyjniej można określić przewidywane wydatki bądź dochody. Ponadto, im większe wartości dodatnie przyjmują końce przedziału, tym należy spodziewać się, że wykupienie ubezpieczenia przyniesie większe dochody. Odwrotnie, im niższe wartości ujemne przyjmują końce przedziału, tym należy spodziewać się, że wydatki związane z ubezpieczeniem będą większe.

5.2.4 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy zmiennej stopie dyskontowej

Wyznaczmy momenty zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy, przy założeniu, że stopa procentowa jest zmienna a kapitalizacja odbywa się w sposób ciągły.

Załóżmy, że pracodawca wykupił dla pracownika w wieku x ubezpieczenie do wieku 65 lat (zatem $n = 65 - x$). Obliczenia zostaną dokonane dla pracowników w wieku od 20 do 60 lat ($x = 20, 21, ..., 60$). Załóżmy, że ubezpieczenie na życie i dożycie przez cały okres ubezpieczenia ma stałą składkę c i stałą sumę ubezpieczenia równą $S = 1$. Zatem analizowane będą wydatki pracodawcy w odniesieniu do jednostkowej sumy ubezpieczenia. Niech odprawa pośmiertna także będzie równa 1 ($\mathcal{O} = 1$). Ponadto załóżmy, że cała składka jest zwolniona z opłat ZUS, natomiast stopa podatku dla zakładu pracy jest równa 30% ($Z^{(p)} = 0,3$).

Tablica 5.3: Rzeczywiste składki ubezpieczeniowe płacone przez pracodawcę za pracowników przystępujących do ubezpieczenia w wieku 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 lat.

x	20	25	30	35	40	45	50	55	60
n	45	40	35	30	25	20	15	10	5
$w_{x,n} = c$	0,0138	0,0166	0,0207	0,0264	0,0349	0,0476	0,0690	0,1121	0,2315
c^r	0,0096	0,0116	0,0145	0,0185	0,0244	0,0333	0,0483	0,0785	0,1621

Wskaźniki taryfowe zostały wyznaczone na podstawie taryf PZU Życie S.A. [29]. Tablica 5.3 zawiera wskaźniki taryfowe, wysokości składek ubezpieczeniowych oraz składek rzeczywistych dla wybranych wielkości x.

Rozkłady trwania życia wszystkich pracowników (wektory $\boldsymbol{D}$) zostały wyznaczone w oparciu o Polskie Tablice Trwania Życia Ogółem 1990-1991 i zamieszczone w Dodatku C.

Po uwzględnieniu, że $c_k^r = c^r$ i $S_k = \mathcal{O} = 1$ dla każdego $k = 0, 1, \ldots n-1$, funkcja łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy (wzór (5.2.6)) przyjmuje postać:

$$B_K(k) = \begin{cases} 1-(k+1)c^r & dla \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ -nc^r & dla \quad k = n, n+1, \cdots. \end{cases}$$

Na tej podstawie, macierz $\boldsymbol{B}$ określona jest następująco:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -c^r & -c^r & \cdots & -c^r & -c^r \\ 1 & -c^r & \cdots & -c^r & -c^r \\ 0 & 1 & \cdots & -c^r & -c^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c^r & -c^r \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W celu obliczenia wartości oczekiwanej i wariancji zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy niezbędne jest wyznaczenie macierzy $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{\Delta}$. Rozpatrzmy trzy procesy stopy procentowej:

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= 0.02236W(t) + 0.06t, \\ Y_2(t) &= 0.2236B_{0,9}(t) + 0.06t, \\ Y_3(t) &= 0,02274 \int_0^t U(s)ds + 0,06t. \end{aligned}$$

Procesy $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $Y_3(t)$ analizowane były w Punkcie 4.4.2, gdzie dla każdego z nich zostały określone macierze $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{\Delta}$.

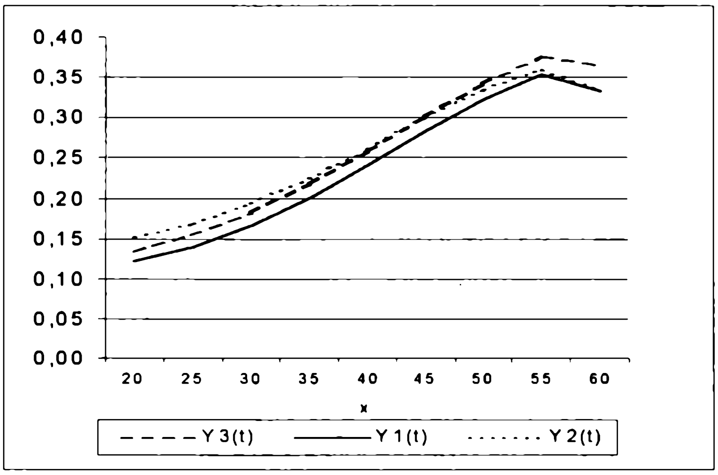
Tablica 5.4: Wartość obecna przeciętnych łącznych przepływów ubezpieczającego pracodawcy za ubezpieczenia pracowników w wieku 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 lat (okres ubezpieczenia do wieku 65 lat).

x	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$Y_1(t)$	-0,1062	-0,1221	-0,1433	-0,1723	-0,2120	-0,2670	-0,3474	-0,4647	-0,6162
$Y_2(t)$	-0,1070	-0,1231	-0,1445	-0,1739	-0,2139	-0,2689	-0,3491	-0,4659	-0,6165
$Y_3(t)$	-0,1050	-0,1206	-0,1415	-0,1700	-0,2091	-0,2626	-0,3403	-0,4529	-0,5982

W Tablicy 5.4 zostały przedstawione zaktualizowane średnie łączne przepływy pieniężne pracodawcy dla wybranych pracowników, policzone w zależności od postaci $Y(t)$. We wszystkich przypadkach wraz z wiekiem pracownika rosną wydatki ponoszone przez pracodawcę za ubezpieczenie pracownika.

Wielkość odchylenia standardowego jest związana nie tylko z wiekiem ubezpieczonego ale także z tym jak duża jest jednorodna grupa przystępująca do ubezpieczenia. Poniższe dwa rysunki są ilustracją graficzną odchylenia standardowego zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego pracodawcy w zależności od wieku wstępu x i wielkości jednorodnej grupy ubezpieczonych pracowników N (odpowiednio dla indywidualnego ubezpieczenia oraz bardzo dużej grupy pracowników w tym samym wieku ($N \to \infty$)). W obu przypadkach obliczeń dokonano dla stopy procentowej modelowanej przez odpowiednio procesy $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $Y_3(t)$.

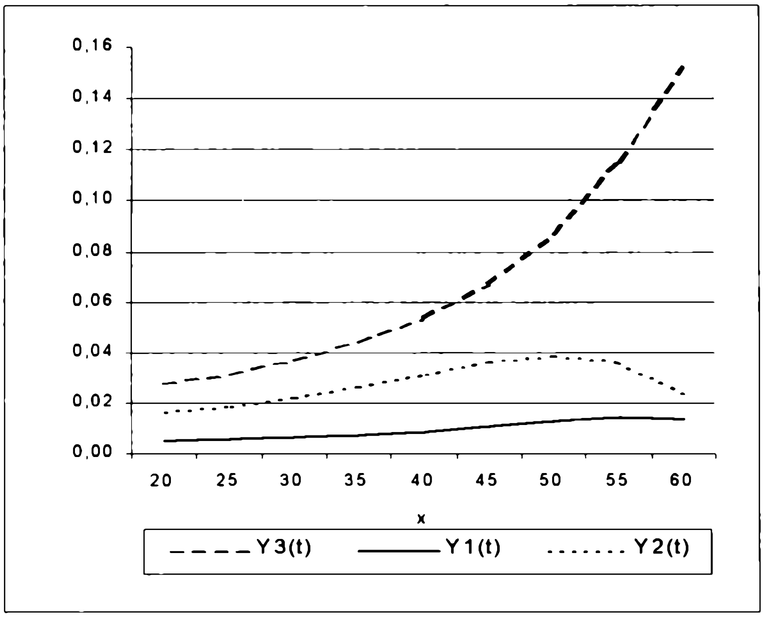
Rysunek 5.6: Odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego dla $N = 1$.



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.6 jest ilustracją graficzną odchylenia standardowego zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy w przypadku gdy $N = 1$. Odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy jest najmniejsze, gdy proces stopy procentowej modelowany jest przez proces Wienera. Natomiast dla osób, które przystąpiły do ubezpieczenia przed 40-tym rokiem życia, największe odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy następuje gdy proces stopy procentowej modelowany jest przez ułamkowy ruch Browna. Dla osób, które przystępując do ubezpieczenia są w wieku powyżej 40 lat, odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy jest największe gdy proces stopy procentowej modelowany jest przez proces Ornsteina-Uhlenbecka. Mimo, że procesy $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $Y_3(t)$ zostały dobrane tak, że średnia roczna stopa procentowa każdego z nich jest równa 6%, a zmienność procesu jest równa $2,236\%$, to różnice między wielkościami odchylenia standardowego zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy są istotne. Na przykład dla osoby, która przystąpiła do ubezpieczenia w wieku 20 lat, odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy liczone dla procesu $Y_1(t)$ jest równe $0,1211$, a dla procesu $Y_2(t)$ wynosi $0,1517$. Oznacza to, że odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy, w którym proces stopy procentowej jest modelowany przez ułamkowy ruch Browna, jest wyższe o 25% od odchylenia standardowego zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy liczonego dla procesu stopy procentowej modelowanego przez proces Wienera.

Rysunek 5.7: Odchylenia standardowego zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego przypadające na jednego pracownika w grupie dla $N \to \infty$.



Źródło: Opracowanie własne

Na Rysunku 5.7 zostało pokazane, że w przypadku $N \to \infty$, niezależnie od wieku pracownika przystępującego do ubezpieczenia, najwyższe odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy obliczone zostało dla procesu stopy procentowej modelowanego przez proces Ornsteina-Uhlenbecka. Natomiast najniższe odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy zostało określone w przypadku gdy stopa procentowa modelowana jest przez proces Wienera. Ponadto w przypadku gdy proces Ornsteina-Uhlenbecka modeluje proces stopy procentowej im starsza osoba przystępuje do ubezpieczenia, tym odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy jest większe.

Zauważmy, że graniczne (dla $N \to \infty$) odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy przypadających na jednego pracownika jest istotnie mniejsze niż w przypadku pracownika pojedynczego.

5.3 Analiza przepływów pieniężnych ubezpieczonego

5.3.1 Łączne przepływy pieniężne

Rozpatrzmy ubezpieczenie grupowe z punktu widzenia pracownika. Od składki podstawowej (tzn. co najwyżej równej I) nie musi on odprowadzać składki na ubezpieczenie społeczne. Jednak stanowi ona jego wynagrodzenie, a zatem zwiększa podstawę opodatkowania. Zatem rzeczywista składka pracownika dana jest wzorem:

$$c_k^r = \begin{cases} c_k \mathcal{Z}^{(u)} & dla \quad c_k \le I \\ (c_k + (c_k - I)\mathcal{Z})\mathcal{Z}^{(u)} & dla \quad c_k > I \end{cases} \tag{5.3.13}$$

gdzie $\mathcal{Z}^{(u)} \in [0,1)$ jest stopą podatku dochodowego pracownika i jest stała przez cały okres ubezpieczenia.

Jeżeli pracownik chciałby wykupić ubezpieczenie indywidualne w tym samym towarzystwie ubezpieczeniowym, musiałby zapłacić w roku k-tym trwania ubezpieczenia składkę większą o kwotę $R(c_k)$ która określona jest wzorem

$$R(c_k) = \begin{cases} c_k(1 - \mathcal{Z}^{(u)}) & dla \quad c_k \le I \\ c_k(1 - (1 - \mathcal{Z})\mathcal{Z}^{(u)}) + I\mathcal{Z}^{(u)}\mathcal{Z} & dla \quad c_k > I \end{cases}.$$

Decydując się na przystąpienie do grupowego ubezpieczenia na życie, pracownik powinien pamiętać o tym, że istnieje możliwość, iż pracodawca skorzysta z przysługującego mu prawa i w przypadku śmierci pracownika wypłaci rodzinie jedynie nadwyżkę (jeśli istnieje) wynikającą z różnicy między odprawą pośmiertną a sumą ubezpieczenia wypłacaną przez zakład ubezpieczeń.

Wyrażając zgodę na tego typu ubezpieczenie, pracownik powinien wziąć pod uwagę co jest korzystniejsze: zawarcie umowy ubezpieczenia co wiąże się z opłacaniem podatku dochodowego od składki ubezpieczeniowej, i traktowanie ewentualnych świadczeń z ubezpieczenia jako odprawę pośmiertną, a w przypadku dożycia wieku emerytalnego otrzymanie nie opodatkowanego świadczenia (w formie kapitału lub renty), czy raczej nie zawieranie umowy ubezpieczenia i otrzymanie odprawy pośmiertnej przez rodzinę w przypadku jego śmierci.

Dla $k < n$ przepływy pieniężne $b_k(i)$ z punktu widzenia pracownika są postaci:

$$b_k(i) = \begin{cases} -c_i^r & dla \quad i \le k, \\ \max\{0, \mathcal{O} - S_{k+1}\} + S_{k+1} - \mathcal{O} & dla \quad i = k+1, \\ 0 & dla \quad i > k+1 \end{cases} \tag{5.3.14}$$

$$= \begin{cases} -c_i^r & dla \quad i \le k, \\ \max\{0, S_{k+1} - \mathcal{O}\} & dla \quad i = k+1, \\ 0 & dla \quad i > k+1 \end{cases} \tag{5.3.15}$$

Natomiast dla $k \ge n$, funkcja $b_k(i)$ określona jest następująco

$$b_k(i) = \begin{cases} -c_i^r & dla \quad i < n, \\ S_n & dla \quad i = n \\ 0 & dla \quad i > n \end{cases} \tag{5.3.16}$$

Jeżeli przepływy pieniężne są określone wzorami (5.3.15) i (5.3.16), to na podstawie Definicji 4.2.1, *funkcja łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczonego* przyjmuje następującą postać:

$$B_K(k) = \begin{cases} \min\{0, S_{k+1} - \mathcal{O}\} - \sum_{i=0}^{k} c_i^r & dla \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ S_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i^r & dla \quad k = n, n+1, \ldots. \end{cases}$$

Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczonego pracownika wynikające z ubezpieczenia wykupionego przez pracodawcę, wyraża formuła:

$$\mathbb{E}(B_K) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(-\sum_{i=0}^{k} c_i^r + max\{0; S_{k+1} - \mathcal{O}\} \right) {}_{k/}q_x \right] + \left(S_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^r \right) {}_n p_x.$$

Jeżeli $\mathbb{E}(B_K) < 0$, to przeciętne wydatki pracownika związane z wykupieniem ubezpieczenia są większe niż wypłacona w razie śmierci odprawa pośmiertna (lub suma ubezpieczenia po dożyciu), co jest związane z dodatkowym wydatkowaniem przez pracownika średniej kwoty w wysokości $\mathbb{E}(B_K)$. W przeciwnym przypadku (gdy $\mathbb{E}(B_K) > 0$) wykupienie ubezpieczenia oznacza dla pracownika przeciętny dochód w wysokości $\mathbb{E}(B_K)$. Gdy $\mathbb{E}(B_K) = 0$, to przeciętnie wykupienie ubezpieczenia przez pracodawcę nie ma wpływu na stan finansów pracownika.

Podobnie jak dla pracodawcy, dla pracownika także istnieje pewne ryzyko odchylnia łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczenia od ich średniej wartości. Miarą takiego odchylenia jest wariancja, która wyraża się wzorem

$$\mathbb{D}^2(B_K) = \mathbb{E}(B_K^2) - \mathbb{E}^2(B_K),$$

gdzie

$$\mathbb{E}(B_K^2) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(-\sum_{i=0}^{k} c_i^r + max\{0; S_{k+1} - \mathcal{O}\}\right)^2 {}_{k/}q_x\right] + (S_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^r)^2_n p_x.$$

Przykład 5.3.1 *Dla danych z Przykładu 5.2.2 wyznaczmy przeciętne łączne przepływy pieniężne pracownika w ubezpieczeniu wykupionym przez pracodawcę.*

Niech stopa podatku dochodowego pracownika jest równa 19% *(*$\mathcal{Z}^{(u)} = 0,19$*), natomiast stopa składki na ubezpieczenie społeczne* 22,5% *(*$\mathcal{Z} = 0,225$*) oraz* $I = 0,07 \cdot \bar{P}$.

W wyniku wykupienia ubezpieczenia przez pracodawcę, pracownik jest zobowiązany do zapłacenia co roku podatku w wysokości

$$c^r = 840 \cdot 0,19 = 159,6\ .$$

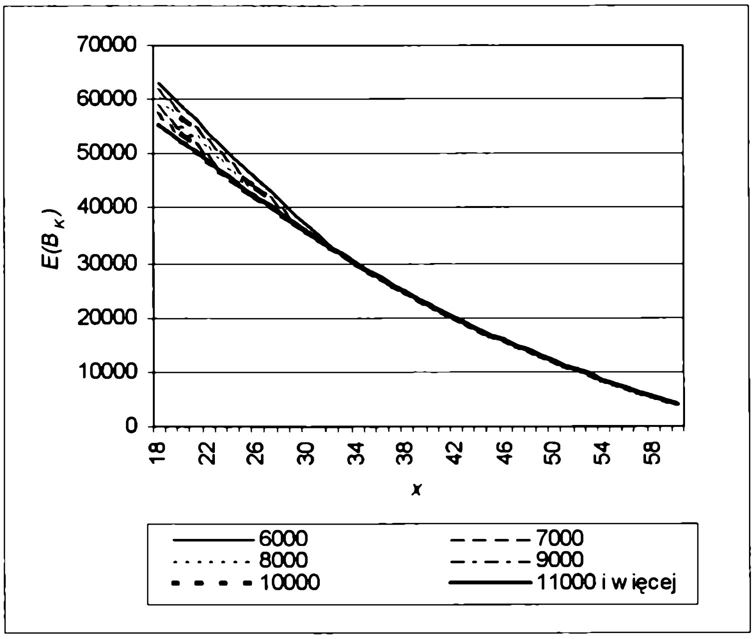
Wielkość ta nie zależy od jego wieku x *ani okresu ubezpieczenia* $n = 65 - x$. *Zatem* $c_k^r = c^r$ *dla każdego* $k \in \{0, 1, ..., 65 - x\}$.

Na Rysunku 5.8, wykres '11000 i więcej' ilustruje te ubezpieczenia, w których wartość sumy ubezpieczenia jest co najwyżej równa odprawie pośmiertnej ($\mathcal{O} \geq S$*). Pozostałe krzywe pokazują średnie dochody ubezpieczonego, gdy zarabia on odpowiednio (P =) 6000, 7000, 8000, 9000, 10000. Rysunek 5.9, przedstawia przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczonego w zależności od wynagrodzenia brutto. Dla pracowników, którzy przekroczyli 33 rok życia, wysokość składki zaproponowana przez pracodawcę została ustalona na takim poziomie, że niezależnie od wysokości zarobków, średnie dochody wynikające z wykupienia ubezpieczenia pozostają niezmienne. Im pracownik jest starszy, tym przeciętne dochody są niższe.*

Dla pracowników w wieku od 18 do 32 lat przeciętne dochody maleją wraz ze wzrostem zarobków. W tej grupie wiekowej, im osoba starsza, tym $\mathbb{E}(B_K)$ *osiąga stały poziom dla niższego* P.

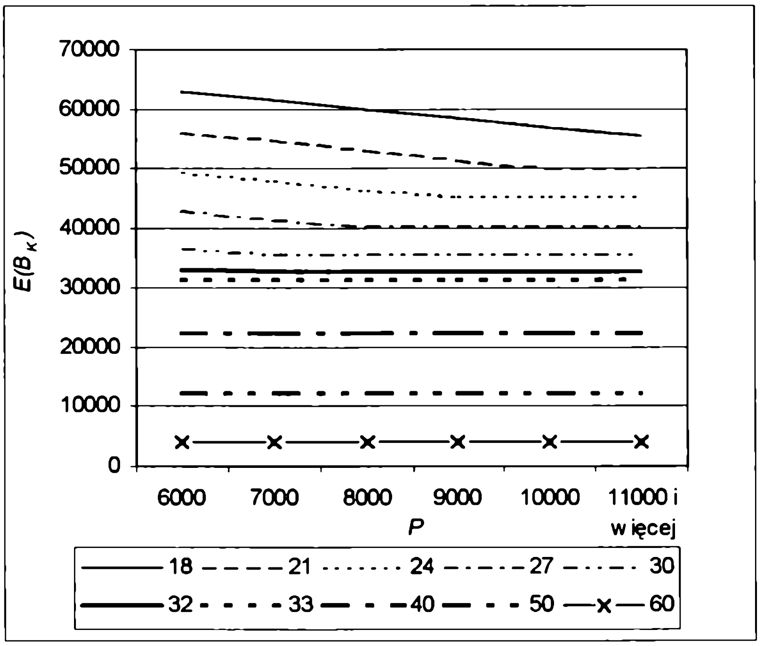
Podsumowując, niezależnie od wieku pracownika i jego zarobków, zawarcie ubezpieczenia jest korzystne dla pracownika, gdyż oznacza dla niego dodatkowe dochody w czasie trwania ubezpieczenia. Ponadto przeciętne wydatki pracodawcy (Przykład 5.2.2) są (niezależnie od wieku i zarobków pracownika) zawsze dużo niższe niż wartość dochodów jakie osiąga ubezpieczony pracownik.

Rysunek 5.8: Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczonego w zależności od wieku wstępu.



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.9: Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczonego w zależności od wynagrodzenia brutto



Źródło: Opracowanie własne

5.3.2 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy stałej stopie dyskontowej

Z punktu widzenia ubezpieczonego pracownika rozpatrzmy grupowe ubezpieczenie przy założeniu, że współczynnik dyskontujący jest stały w całym okresie ubezpieczenia. *Zaktualizowane łączne przepływy pieniężne ubezpieczonego* możemy wyznaczyć z Definicji 4.3.1 uwzględniając, że przepływy pieniężne ubezpieczonego określone są wzorami (5.3.15) i (5.3.16). Przyjmują one następującą postać:

$$Z_K(k) = \begin{cases} -\sum_{i=0}^{k} c_i^r v^i + max\{0; S_{k+1} - \mathcal{O}\} v^{k+1} & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ -\sum_{i=0}^{n-1} c_i^r v^i + S_n v^n & dla \quad k = n, n+1, ... \end{cases}$$

Wówczas przeciętne zaktualizowane łączne przepływy pieniężne wyrażone są następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_K) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(-\sum_{i=0}^{k} c_i^r v^i + max\{0; S_{k+1} - \mathcal{O}\} v^{k+1} \right) {}_{k|}q_x \right] \\ &+ \left(-\sum_{i=0}^{n-1} c_i^r v^i + S_n v^n \right) {}_n p_x. \end{aligned}$$

Jeżeli $\mathbb{E}(Z_K) > 0$ to $\mathbb{E}(Z_K)$ jest aktualną (w momencie zakupu ubezpieczenia) wartością przeciętnych przyszłych dochodów pracownika wynikających z założeni ubezpieczenia. W przeciwnym przypadku, (gdy $\mathbb{E}(Z_K) < 0$) $\mathbb{E}(Z_K)$ jest zaktualizowaną (na dzień zakupu ubezpieczenia) wartością przeciętnych przyszłych wydatków poniesionych przez pracownika w wyniku zakupienia ubezpieczenia przez pracodawcę.

Poniżej rozpatrzony zostanie szczególny przypadek ubezpieczenia polegający na wykupieniu przez pracodawcę, dla pracownika w wieku x, n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie ze stałą składką i stałą sumą ubezpieczenia. ($c_k = c$ oraz $S_k = S$ dla każdego k). Załóżmy, że suma ubezpieczenia jest równa odprawie pośmiertnej ($S = \mathcal{O}$) oraz współczynnik dyskontujący v jest stały podczas trwania ubezpieczenia.

Jeśli $Z = 0$ i $Z^{(u)} = 1$, (co oznacza, że $c^r = c$), to funkcja łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczonego, wyrażona jest następującym wzorem:

$$Z_K(k) = \begin{cases} -\sum_{i=0}^{k} c v^i & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ -\sum_{i=0}^{n-1} c v^i + S v^n & dla \quad k = n, n+1, ... \end{cases}$$

Korzystając ze wzoru (1.2.4) otrzymujemy, że $Z_K(k)$ jest następującej postaci:

$$Z_K(k) = \begin{cases} c\ddot{a}_{\overline{k+1}|} & dla \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ c\ddot{a}_{\overline{n}|} - S v^n & dla \quad k = n, n+1, ... \end{cases}.$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z_K jest wyznaczana w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_K) &= -c\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + S v^n {}_n p_x \\ &= -w_{x,n} S \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + S A_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}} \\ &= -S\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \left(w_{x,n} - P_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}} \right), \end{aligned} \qquad (5.3.17)$$

gdzie $P_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}}$ i $A_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}}$ są odpowiednio roczną i jednorazową składką netto n-letniego ubezpieczenia na dożycie z sumą ubezpieczenia 1. Znak $\mathbb{E}(Z_K)$ zależy od znaku czynnika $w_{x,n} - P_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}}$, który jest różnicą między roczną składką brutto n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie i składką netto n-letniego ubezpieczenia na dożycie. Zatem omawiana różnica jest równa sumie rocznej składki n letniego ubezpieczenia na życie i wartości rocznych kosztów n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie.

Zauważmy, że założenia $Z = 0$ i $Z^{(u)} = 1$ w rzeczywistości nie są nigdy spełnione, gdyż oznaczałoby to, że pracownik sam opłaca ubezpieczenie i jeszcze dodatkowo rodzina w razie jego śmierci, nie otrzymuje odprawy pośmiertnej. Rozpatrzmy zatem przypadek, w którym $Z > 0$ i $Z^{(u)} < 1$, co oznacza, że uwzględnione mogą być wszystkie możliwe ulgi, wynikających z założenia przez pracodawcę ubezpieczenia dla pracowników. Przy tych założeniach wyznaczenie $\mathbb{E}(Z_K)$ jest związane ze zmianą we wzorze (5.3.17) jedynie współczynnika taryfowego na $w^r_{x,n}$, gdzie

$$w^r_{x,n} = \begin{cases} w_{x,n}\mathcal{Z}^{(u)} & dla \quad w_{x,n} \leq I \\ (w_{x,n} + (w_{x,n} - I)\mathcal{Z})\mathcal{Z}^{(u)} & dla \quad w_{x,n} > I. \end{cases}$$

Ubezpieczenie na życie i dożycie wykupione przez pracodawcę, z punktu widzenia pracownika przynosi mu dochód, jeżeli tylko $w^r_{x,n} < P_{\underset{x:\overline{n|}}{1}}$, co oznacza, że ulgi związane z ubezpieczeniem grupowym muszą być większe niż suma rocznych kosztów ubezpieczenia na życie i dożycie pobieranych przez firmę ubezpieczeniową oraz rocznej składki netto na n-letnie ubezpieczenie na życie.

5.3.3 Zaktualizowane przepływy pieniężne przy zmiennej stopie dyskontowej

Rozpatrzmy ubezpieczenie grupowe opisane w Punkcie 5.2.4 z punktu widzenia pracownika.

Wyznaczmy wartość oczekiwaną i wariancję zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych w przypadku pracownika w wieku x, któremu pracodawca wykupił ubezpieczenie na życie i dożycie do wieku 65 lat (czyli $n = 65 - x$). Obliczenia zostaną dokonane dla pracowników w wieku od 20 do 60 lat ($x = 20, 21, ..., 60$). Zakłada się, że ubezpieczenie na życie i dożycie przez cały okres ubezpieczenia ma stałą składkę ($c_k = c$ dla każdego k) i stałą sumę ubezpieczenia równą 1 ($S_k = 1$ dla każdego k). Niech odprawa pośmiertna także będzie równa 1 ($\mathcal{O} = 1 = S_k$). Ponadto cała składka jest zwolniona z opłat ZUS, natomiast stopa podatku dla pracownika jest równa 19% ($\mathcal{Z}^{(u)} = 0,19$) i jest stała przez cały okres umowy ubezpieczenia.

Tablica 5.5: Podatek od składki ubezpieczeniowej płaconej przez pracodawcę za pracowników przystępujących do ubezpieczenia w wieku 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 lat.

x	20	25	30	35	40	45	50	55	60
n	45	40	35	30	25	20	15	10	5
$w_{x,n} = c$	0,0138	0,0166	0,0207	0,0264	0,0349	0,0476	0,0690	0,1121	0,2315
c^r	0,0026	0,0032	0,0039	0,0050	0,0066	0,0090	0,0131	0,0213	0,0440

Tablica 5.5 zawiera wskaźniki taryfowe (których wysokość jest równa składce jaką musiałby zapłacić pracownik, gdyby sam chciał wykupić ubezpieczenie), wartość podatku od składek ubezpieczeniowych (czyli c^r) dla wybranych pracowników w wieku x.

Rozkłady trwania życia wszystkich pracowników (wektory $\boldsymbol{D}$) zostały wyznaczone w oparciu o Polskie Tablice Trwania Życia Ogółem 1990-1991.

Po uwzględnieniu, że $c_k^r = c^r$ i $S_{k+1} = \mathcal{O} = 1$ dla każdego $k = 0, 1, ...n-1$, funkcja $B_K(k)$ dla pracownika dana jest w postaci:

$$B_K(k) = \begin{cases} -(k+1)c^r & dla \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ 1 - nc^r & dla \quad k = n, n+1, \cdots. \end{cases}.$$

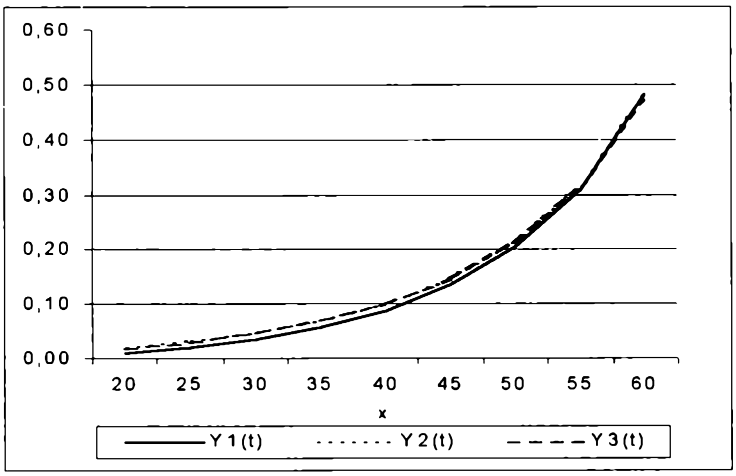
Na tej podstawie, macierz $\boldsymbol{B}$ przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -c^r & -c^r & \cdots & -c^r & -c^r \\ 0 & -c^r & \cdots & -c^r & -c^r \\ 0 & 0 & \cdots & -c^r & -c^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c^r & -c^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierze związane z intensywnością stopy procentowej $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{\Delta}$ zostały wyznaczone dla odpowiednich procesów $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $Y_3(t)$ określonych w Punkcie 4.4.2.

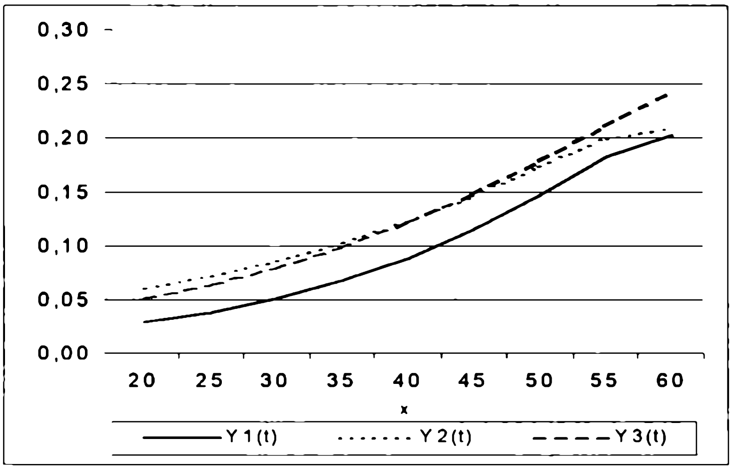
Zaktualizowana wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej Z_K (określonej dla pracownika) zostały obliczone w zależności od postaci $Y(t)$.

Rysunek 5.10: Wartość oczekiwana zaktualizowanych przepływów pieniężnych pracownika w zależności od wieku wstępu i modelu procesu stopy procentowej.



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.11: Odchylenie standardowe zaktualizowanych przepływów pieniężnych pracownika w zależności od wieku wstępu i modelu procesu stopy procentowej.



Źródło: Opracowanie własne

Na Rysunku 5.10 obserwujemy, że we wszystkich przypadkach $\mathbb{E}(Z_K) > 0$, zatem pracownik przeciętnie nie ponosi wydatków w wyniku wykupienia ubezpieczenia przez pracodawcę, ale osiąga dochód. Ponadto, im pracownik jest starszy, tym uzyskuje większe przeciętne dochody z ubezpieczenia. Ponadto na Rysunku 5.11 widać, że niezależnie od procesu modelującego stopę procentową, wraz ze wzrostem wieku wstępu rośnie odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracownika.

Poniżej rozpatrzmy, na przykładzie liczbowym, wpływ wieku przystąpienia do ubezpieczenia na zaktualizowane łączne przepływy pieniężne pracownika oraz ich zmienność.

Niech dane będzie ubezpieczenie grupowe na życie i dożycie, w którym pracodawca płaci składki za pracowników. Wyznaczmy typowy obszar zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych dla pracowników w wieku 18, 30, 40, 50 lat, którym pracodawca wykupił ubezpieczenie na okres 10 lat. Załóżmy, że przez cały okres ubezpieczenia składka i suma ubezpieczenia są stałe. Obliczenia będą prowadzone dla jednostkowej sumy ubezpieczenia ($S_k = 1$ dla każdego $k = 1, ..., 10$), przy założeniu, że wysokość odprawy pośmiertnej jest równa 1 ($\mathcal{O} = 1$). Ponadto cała składka jest zwolniona z opłat ZUS, a stopa podatku dochodowego dla pracownika jest równa 19% ($\mathcal{Z}^{(u)} = 0,19$) i jest stała przez cały okres umowy ubezpieczenia. Wskaźniki taryfowe zostały wyznaczone na podstawie taryf PZU Życie S.A. (por. [29]).

Tablica 5.6: Podatek od składki ubezpieczeniowej płaconej przez pracodawcę za pracowników przystępujących do 10-cio letniego ubezpieczenia na życie i dożycie w wieku 18, 30, 40, 50, 60 lat.

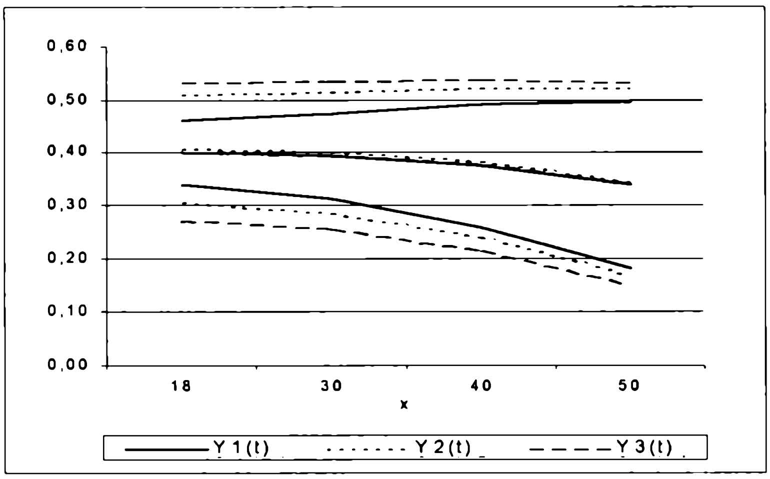
x	18	30	40	50
$w_{x,n} = c$	0,098830	0,099240	0,101570	0,107190
c^r	0,018778	0,018856	0,019298	0,020366

Tablica 5.6 zawiera wskaźniki taryfowe i wartości podatku od składek ubezpieczeniowych dla $x = 18, 30, 40, 50$ oraz $n = 10$.

Rozkłady trwania życia (wektory $\boldsymbol{D}$) zostały wyznaczone w oparciu o Polskie Tablice Trwania Życia Ogółem 1990-1991.

Macierze $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{\Delta}$ zostały określone tak jak powyżej dla trzech procesów stopy procentowej.

Rysunek 5.12: Typowy obszar zmienności zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracownika w zależności od rodzaju intensywności stopy procentowej



Źródło: Opracowanie własne

Na Rysunku 5.12 każdemu procesowi stopy procentowej odpowiadają trzy krzywe. Górna krzywa ilustruje prawy koniec typowego obszaru zmienności $(\mathbf{E}(Z) + \sqrt{\mathbb{D}^2(Z)})$, a środkowa krzywa wartość oczekiwaną łącznych zaktualizowanych przepływów pieniężnych $(\mathbf{E}(Z))$. Natomiast dolna krzywa ilustruje lewy koniec typowego obszaru zmienności $(\mathbf{E}(Z) - \sqrt{\mathbb{D}^2(Z)})$.

Niezależnie od postaci procesu $Y(t)$, im pracownik starszy, tym typowy przedział jednosigmowy zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych jest dłuższy. Największe zróżnicowanie zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych występuje, gdy proces stopy procentowej modelowany jest przez proces Ornsteina-Uhlenbecka $(Y_3(t))$, a najmniejsze, gdy proces stopy procentowej modelowany jest przez ułamkowy ruch Browna $(Y_1(t))$.

5.4 Różnica pomiędzy podwyżką płac, a ubezpieczeniem na życie i dożycie

5.4.1 Pracodawca

Zgodnie z zasadami finansowania ubezpieczeń grupowych, środki pieniężne przeznaczone przez pracodawcę na ubezpieczenie życiowe pracowników muszą pochodzić z innego źródła niż pula wynagrodzeń pracowników wynikająca ze stosunku pracy. Dlatego też pracodawca gospodarując wolnymi środkami może zamiast na ubezpieczenie pracowników, przeznaczyć je bezpośrednio na podwyżki. Celem paragrafu jest analiza tego problemu i odpowiedź na pytanie, co jest korzystniejsze (w ciągu n lat), wykupienie ubezpieczenia dla pracownika, czy przeznaczenie na podwyżkę wynagrodzenia kwoty równej składce ubezpieczeniowej.

Niech c_k oznacza kwotę, którą pracodawca przeznacza dla pracownika na początku k-tego roku, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Korzystając z funkcji przepływów pieniężnych pracodawcy określonej wzorami (5.2.4) i (5.2.5), macierz przepływów pieniężnych przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{B}_u = \begin{pmatrix} -c_0^r & -c_0^r & \cdots & -c_0^r & -c_0^r \\ min\{\mathcal{O}; S_1\} & -c_1^r & \cdots & -c_1^r & -c_1^r \\ 0 & min\{\mathcal{O}; S_2\} & \cdots & -c_2^r & -c_2^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1}^r & -c_{n-1}^r \\ 0 & 0 & \cdots & min\{\mathcal{O}; S_n\} & 0 \end{pmatrix}.$$

Załóżmy, że jeżeli pracodawca postanowił wypłacić pracownikowi podwyżkę, to zobowiązuje się on do wypłaty na początku k-tego roku kwoty c_k (takiej samej jak składka ubezpieczeniowa), pod warunkiem, że pracownik żyje. Ponadto w momencie śmierci pracownika, pracodawca wypłaca dodatkowo odprawę pośmiertną $\mathcal{O}$. Funkcja łącznych przepływów pieniężnych pracodawcy przyjmuje w tym przypadku postać:

$$B_K^p(k) = \begin{cases} -\sum_{i=0}^{k} c_i - \mathcal{O} & dla \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ -\sum_{i=0}^{n-1} c_i & dla \quad k = n, n+1, \cdots. \end{cases}$$

W oparciu o funkcję $B_K^p(k)$ wprowadźmy macierz przepływów pieniężnych pracodawcy $\boldsymbol{B}_p$, przy założeniu, że w k-tym roku przeznacza on kwotę c_k na podwyżkę dla pracownika:

$$\boldsymbol{B}_p = \begin{pmatrix} -c_0 & -c_0 & \cdots & -c_0 & -c_0 \\ \mathcal{O} & -c_1 & \cdots & -c_1 & -c_1 \\ 0 & \mathcal{O} & \cdots & -c_2 & -c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{O} & 0 \end{pmatrix}.$$

W celu porównania obydwu sytuacji określmy następująca różnicę macierzy:

$$\boldsymbol{B}_u - \boldsymbol{B}_p = \begin{pmatrix} c_0 - c_0^r & c_0 - c_0^r & \cdots & c_0 - c_0^r & c_0 - c_0^r \\ min\{0; S_1 - \mathcal{O}\} & c_1 - c_1^r & \cdots & c_1 - c_1^r & c_1 - c_1^r \\ 0 & min\{0; S_2 - \mathcal{O}\} & \cdots & c_2 - c_2^r & c_2 - c_2^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} - c_{n-1}^r & c_{n-1} - c_{n-1}^r \\ 0 & 0 & \cdots & min\{0; S_n - \mathcal{O}\} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R(c_0) & R(c_0) & \cdots & R(c_0) & R(c_0) \\ min\{0; S_1 - \mathcal{O}\} & R(c_1) & \cdots & R(c_1) & R(c_1) \\ 0 & min\{0; S_2 - \mathcal{O}\} & \cdots & R(c_2) & R(c_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & R(c_{n-1}) & R(c_{n-1}) \\ 0 & 0 & \cdots & min\{0; S_n - \mathcal{O}\} & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie funkcja $R(c_k)$ jest wyrażona wzorem (5.2.3). Zauważmy, że dla każdego k składka c_k^r jest nie większa niż składka c_k. Ponadto $min\{0; S_k - \mathcal{O}\} \leq 0$. Wynika stąd, że wszystkie wyrazy macierzy $\boldsymbol{B}_u - \boldsymbol{B}_p$ są nieujemne. Oznacza to, że przyznanie podwyżki dla pracowników jest związane z większymi wydatkami poniesionymi w przyszłości przez pracodawcę, niż wykupienie przez niego ubezpieczenia grupowego na życie i dożycie.

Ubezpieczenie pracownika (zamiast przyznanie mu podwyżki) oznacza dla pracodawcy zaktualizowany przeciętny dochód o wartości równej $\boldsymbol{D}^T(\boldsymbol{B}_u - \boldsymbol{B}_p)^T\boldsymbol{M}$. Taką kwotę musiałby posiadać pracodawca, w momencie zawierania ubezpieczenia, aby po dodaniu zdyskontowanych wydatków na ubezpieczenie otrzymać pełną kwotę potrzebną do wypłacenia podwyżki pracownikowi w ciągu n lat.

5.4.2 Pracownik

Z punktu widzenia pracownika rozwiązanie problemu, określonego w Punkcie 5.4.1, nie prowadzi do tak jednoznacznych wniosków jak w przypadku pracodawcy.

Funkcja łącznych przepływów pieniężnych pracownika przy zakupie ubezpieczenia przez pracodawcę dana jest wzorem (5.3.17). Na jej podstawie wprowadźmy macierz łącznych przepływów pieniężnych pracownika $\hat{\boldsymbol{B}}_u$ w przypadku wykupienia przez pracodawcę ubezpieczenia na życie i dożycie, która zgodnie ze wzorami (5.3.14) i (5.3.15), określona jest następująco

$$\hat{\boldsymbol{B}}_u = \begin{pmatrix} -c_0^r & -c_0^r & \cdots & -c_0^r & -c_0^r \\ max\{0; S_1 - \mathcal{O}\} & -c_1^r & \cdots & c_1^r & -c_1^r \\ 0 & max\{0; S_2 - \mathcal{O}\} & \cdots & -c_2^r & -c_2^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1}^r & -c_{n-1}^r \\ 0 & 0 & \cdots & max\{0; S_n - \mathcal{O}\} & S_n \end{pmatrix},$$

gdzie c_k^r określone jest wzorem (5.3.13).

W przypadku, gdy pracodawca postanowi wypłacić pracownikowi podwyżkę, pracownik otrzymuje na początku k-tego roku kwotę c_k (taką samą jak składka ubezpieczeniowa). Ponadto w momencie śmierci pracownika, pracodawca wypłaca dodatkowo odprawę pośmiertną $\mathcal{O}$. Wynika stąd, że funkcja łącznych przepływów pieniężnych pracownika przyjmuje postać:

$$\hat{B}_{K}^{p}(k) = \begin{cases} -\left(\sum_{i=0}^{k} c_i(1-Z)(1-Z^{(u)}) + \mathcal{O}\right) & dla \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ -\sum_{i=0}^{n-1} c_i(1-Z)(1-Z^{(u)}) & dla \quad k = n, n+1, \cdots. \end{cases}$$

Dla tak określonej funkcji $\hat{B}_{K}^{p}(k)$ wprowadźmy macierz $\hat{\boldsymbol{B}}_p$, która będzie macierzą łącznych przepływów pieniężnych pracownika w przypadku podwyżki wynagrodzenia:

$$\hat{\boldsymbol{B}}_p = \begin{pmatrix} c_0(1-Z)(1-Z^{(u)}) & \cdots & c_0(1-Z)(1-Z^{(u)}) & c_0(1-Z)(1-Z^{(u)}) \\ \mathcal{O} & \cdots & c_1(1-Z)(1-Z^{(u)}) & c_1(1-Z)(1-Z^{(u)}) \\ 0 & \cdots & c_2(1-Z)(1-Z^{(u)}) & c_2(1-Z)(1-Z^{(u)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & c_{n-1}(1-Z)(1-Z^{(u)}) & c_{n-1}(1-Z)(1-Z^{(u)}) \\ 0 & \cdots & \mathcal{O} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że wszystkie wyrazy macierzy są nieujemne.

W analizie porównawczej obydwu powyższych sytuacji wykorzystywać będziemy różnicę macierzy:

$$\hat{\boldsymbol{B}}_u - \hat{\boldsymbol{B}}_p = \begin{pmatrix} -\hat{c}_0 & -\hat{c}_0 & \cdots & -\hat{c}_0 & -\hat{c}_0 \\ -min\{\mathcal{O}; 2\mathcal{O} - S_1\} & -\hat{c}_1 & \cdots & -\hat{c}_1 & -\hat{c}_1 \\ 0 & -min\{\mathcal{O}; 2\mathcal{O} - S_2\} & \cdots & -\hat{c}_2 & -\hat{c}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\hat{c}_{n-1} & -\hat{c}_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -min\{\mathcal{O}; 2\mathcal{O} - S_n\} & S_n \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\hat{c}_k = \begin{cases} c_k(1 - Z(1 - Z^{(u)})) & dla \quad c_k \leq I \\ -c_k(Z(2Z^{(u)} - 1) + 1) + IZZ^{(u)} & dla \quad c_k > I. \end{cases}$$

Wyrazy macierzy $\hat{\boldsymbol{B}}_u - \hat{\boldsymbol{B}}_p$ mogą przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Dlatego nie można jednoznacznie powiedzieć co jest korzystniejsze dla pracownika. Dopiero po wyliczeniu zaktualizowanej przeciętnej różnicy między podwyżką i ubezpieczeniem $\boldsymbol{D}^T(\hat{\boldsymbol{B}}_u - \hat{\boldsymbol{B}}_p)^T\boldsymbol{M}$ pracownik może dokonać wyboru. Jeżeli $\boldsymbol{D}^T(\hat{\boldsymbol{B}}_u - \hat{\boldsymbol{B}}_p)^T\boldsymbol{M} < 0$, to podwyżka przyniesie pracownikowi większy przeciętny dochód niż ewentualnie ubezpieczenie (ponieważ wyrazy macierzy $\hat{\boldsymbol{B}}_p$ są nieujemne). W przypadku, gdy $\boldsymbol{D}^T(\hat{\boldsymbol{B}}_u - \hat{\boldsymbol{B}}_p)^T\boldsymbol{M} > 0$ przeciętnie pracownik osiągnie większe korzyści finansowe, jeśli pracodawca wykupi ubezpieczenie grupowe. Wynika to z faktu, że $\boldsymbol{D}^T\hat{\boldsymbol{B}}_u^T\boldsymbol{M} > \boldsymbol{D}^T\hat{\boldsymbol{B}}_p^T\boldsymbol{M} > 0$.

5.5 Analiza wysokości przeciętnego świadczenia

W pracy analiza ubezpieczenia na życie i dożycie koncentruje się na rozpatrywaniu inwestycyjnego aspektu ubezpieczenia od strony ubezpieczonego i ubezpieczającego. W oparciu o model strumieni finansowych można dokonać oceny finansowej ubezpieczenia także z punktu widzenia ubezpieczyciela. Dla firmy ubezpieczeniowej szczególnie ważna jest ocena wysokości przyszłego świadczenia, które będzie musiała wypłacić z tytułu sprzedanego ubezpieczenia. Problem ten jest istotny, gdyż zgodnie ze stosowaną przez ubezpieczycieli *zasadą równoważności* składka netto jest równa wartości oczekiwanej przyszłych świadczeń wynikających z umowy ubezpieczenia. Ponadto w celu określenia *dodatku bezpieczeństwa* czyli części składki przeznaczonej na pokrycie ryzyka śmierci ubezpieczonego przed końcem okresu ubezpieczenia, niezbędna jest znajomość wariancji wysokości przyszlego świadczenia. Problem określenia przeciętnej wartości świadczenia i jej zmienności byl analizowany przez wielu autorów. Między innymi w 1994 roku G. Parker [24] badał zdyskontowaną wartość świadczenia, które musi wypłacić ubezpieczyciel w ubezpieczeniu na życie i dożycie. Rozpatrywał on ubezpieczenie, w którym intensywność stopy procentowej jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka, a czas trwania życia ubezpieczonego jest losowy. W szczególności analizował on portfel N ubezpieczeń na życie i dożycie takich, że wszyscy ubezpieczeni w grupie byli w wieku x, a ubezpieczenia były zawarte na okres n lat.

Niech b_{k+1} będzie wysokością świadczenia płaconego w momencie $k+1$ $(k \leq n-1)$, jeżeli śmierć ubezpieczonego nastąpiła między momentem k i momentem $k+1$. Ponadto niech e_n oznacza wysokość świadczenia płatnego przez ubezpieczyciela w momencie n, czyli w przypadku, gdy ubezpieczony dożyje końca okresu ubezpieczenia. Niech K_l oznacza zmienną losową określającą przyszły czas trwania życia l-tego ubezpieczonego.

Przy powyższych oznaczeniach zaktualizowana funkcja łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczyciela (obecna wartość świadczenia wypłacanego przez ubezpieczyciela) dla l-tego ubezpieczonego jest równa

$$Z_l = Z_{K_l}(k) = \begin{cases} b_{k+1}\exp(-Y(k+1)) & dla \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ e_n \exp(-Y(n)) & dla \quad k = n, n+1, \cdots, \end{cases}$$

gdzie $Y(k) = \int_0^k X(s)ds$ oraz $X(s)$ jest intensywnością stopy procentowej.

Przy założeniach **A1, A2, A3** momenty zaktualizowanej funkcji łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczyciela określone są następująco (por. G. Parker [24]):

$$\mathbb{E}(Z_l) = \sum_{k_l=0}^{n-1} {}_{k_l|}q_x b_{k_l+1} \mathbb{E}(\exp(-Y(k_l+1)) + {}_n p_x e_n \mathbb{E}(exp(-Y(n)) \tag{5.5.18}$$

$$\mathbb{E}(Z_l^2) = \sum_{k_l=0}^{n-1} {}_{k_l|}q_x b_{k_l+1}^2 \mathbb{E}(\exp(-2Y(k_l+1)) + {}_n p_x e_n^2 \mathbb{E}(exp(-2Y(n)) \tag{5.5.19}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_l Z_s) &= \sum_{k_l=0}^{n-1}\sum_{k_s=0}^{n-1} {}_{k_l|}q_x \; {}_{k_s|}q_x b_{k_l+1} b_{k_s+1} \mathbb{E}(\exp(-Y(k_l+1) - Y(k_s+1)) \\ &+ 2\sum_{k=0}^{n-1} {}_n p_x {}_{k|}q_x b_{k+1} e_n \mathbb{E}(\exp(-Y(k+1) - Y(n)) \\ &+ ({}_n p_x)^2 e_n^2 \mathbb{E}(exp(-2Y(n)). \end{aligned} \tag{5.5.20}$$

Okazuje się, że dość rozbudowane wzory (5.5.18), (5.5.19), (5.5.20) przedstawić można za pomocą zwięzłej struktury macierzowej, gdzie każda występująca we wzorach macierz posiada ściśle określoną interpretację. Wystarczy zauważyć, że przy powyższych oznaczeniach macierz łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczyciela $\boldsymbol{B}$ jest taka sama dla wszystkich ubezpieczonych w grupie i przyjmuje postać

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & e_n \end{pmatrix}.$$

Korzystając z Twierdzenia 4.3.1 wzory (5.5.18), (5.5.19) i (5.5.20) przybierają postać:

$$\mathbb{E}(Z_l) = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{M} \tag{5.5.21}$$

$$\mathbb{E}(Z_l^2) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{I}_k^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_k \tag{5.5.22}$$

$$\mathbb{E}(Z_l Z_s) = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \boldsymbol{D}. \tag{5.5.23}$$

Standardowe obliczenia faktycznie pokazują równoważność wzorów (5.5.18), (5.5.19), (5.5.20) oraz odpowiednio wzorów (5.5.21), (5.5.22), (5.5.23).

Rozpatrując grupę N jednakowych n-letnich ubezpieczeń na życie i dożycie interesującym dla ubezpieczyciela jest średni zaktualizowany koszt (wartość obecna przeciętnego świadczenia jakie musi wypłacić ubezpieczyciel) przypadający na jednego ubezpieczonego, a zatem zmienna losowa postaci:

$$\frac{1}{N}Z_{(N)} = \frac{\sum_{l=1}^{N} Z(K_l)}{N}.$$

Zakładając, że spełnione są warunki **A1, A2, A3** wartość oczekiwaną średniego zaktualizowanego kosztu przypadającego na jednego ubezpieczonego, wyraża się następującym wzorem:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}Z_{(N)}\right) = \mathbb{E}(Z_l), \tag{5.5.24}$$

Natomiast wariancja zmiennej losowej $\frac{1}{N}Z_{(N)}$ przyjmuje postać

$$\mathbb{D}^2\left(\frac{1}{N}Z_{(N)}\right) = \frac{(N-1)}{N}\mathbb{E}(Z_l Z_s) + \frac{1}{N}\mathbb{E}(Z_l^2) - \mathbb{E}^2(Z_l). \tag{5.5.25}$$

Ponadto dla bardzo dużej grupy prawdziwa jest następująca równość:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{D}^2\left(\frac{1}{N}Z_{(N)}\right) = \mathbb{E}(Z_l Z_s) - \mathbb{E}^2(Z_l). \tag{5.5.26}$$

Korzystając z Twierdzenia 4.3.3, można wykazać, że

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}Z_{(N)}\right) = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{M} \tag{5.5.27}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{D}^2\left(\frac{1}{N}Z_{(N)}\right) = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}. \tag{5.5.28}$$

Przedstawione wzory na momenty zmiennych losowych Z_l i $\frac{1}{N}Z_{(N)}$ są szczególnymi przypadkami Twierdzenia 4.3.1 oraz Wniosku 4.3.1 dla macierzy przepływów pieniężnych, w której pominięte zostały przepływy pieniężne związane ze składką ubezpieczeniową.

Powyższe zastosowanie rezultatów przedstawionych w Rozdziale 4 wskazują na ogólność i łatwe adaptowanie wypracowanych metod do problemów związanych z liczeniem momentów zmiennych losowych określonych dla wybranej strony umowy ubezpieczenia na życie i dożycie.

Dodatek A

Podstawowe pojęcia

Dodatek ten poświęcony jest podstawowym pojęciom związanym z ubezpieczeniami na życie. Ze względu na obszerność niektórych pojęć zostały one przedstawione w świetle ubezpieczenia na życie i dożycie, które są zasadniczym punktem zainteresowań w pracy.

Indeksacja (*ang. rate of profit*) - określana przez ubezpieczyciela (najczęściej w procentach) stopa zysku jaka przysługuje danemu rodzajowi ubezpieczenia. Odnosi się ona do podwyższenia sumy ubezpieczenia lub/i składek.

Okres ubezpieczenia (*ang. period of insurance*) - liczba lat na jakie zostało zawarte ubezpieczenie.

Polisa ubezpieczeniowa (*ang. policy of insurance*) - dokument wydawany przez ubezpieczyciela w celu potwierdzenia zawarcia umowy ubezpieczenia.

Składka brutto (*ang. insurance premium*) - jest to suma pieniężna, którą ubezpieczający jest zobowiązany zapłacić ubezpieczycielowi za udzieloną przez niego ochronę (sumę ubezpieczenia). Składka brutto składa się z trzech części:

Składka netto (*ang. net premium*) - wyznaczana jest z **zasady równoważności** (*ang. equivalence principle*), zgodnie z którą składka netto jest równa wartości oczekiwanej przyszłych świadczeń wynikających z umowy ubezpieczenia. Inaczej składa netto nazywana jest częścią oszczędnościową składki brutto.

Dodatek bezpieczeństwa, dodatek na ryzyko (*ang. equivalence principle, loading for contingencies*) - jest to część składki przeznaczona na pokrycie ryzyka związanego z niekorzystnymi odchyleniami w przebiegu zdarzeń losowych. W przepadku ubezpieczenia na życie i dożycie ryzyko jest związane ze śmiercią ubezpieczonego przed końcem okresu ubezpieczenia.

Koszty administracyjno - akwizycyjne (*ang. administration - acquisition costs*) - koszty administracyjne ubezpieczyciela, ewentualnie zysku i dodatku na prewencję oraz wynagrodzenia akwizycyjne agentów ubezpieczeniowych i koszty inkasa składki itp.

Suma ubezpieczenia (*ang. insurance money*) - wysokość przyszłego świadczenia, jaką zobowiązuje się wypłacić ubezpieczyciel na wypadek śmierci osoby ubezpieczonej albo w razie dożycia przez osobę ubezpieczoną umówionego wieku.

Świadczenie, wypłata ubezpieczenia (*ang. indemnity*) - według przepisów kodeksu cywilnego jest to zobowiązanie wynikające z zawartej umowy ubezpieczenia, które polega na wypłacie umówionej kwoty pieniężnej w razie zajścia przewidzianego w umowie wypadku.

Ubezpieczenie bezskładkowe - ubezpieczenie ze zredukowaną sumą ubezpieczenia, w którym ubezpieczający przestał opłacać składki.

Ubezpieczenie dodatkowe (*ang. supplementary insurance*) - ubezpieczenie uzupełniające podstawowy zakres ochrony ubezpieczeniowej np. utratę zdrowia, zdolności do pracy, czy śmierć na skutek nieszczęśliwego wypadku.

Ubezpieczenie na życie (*ang. life insurance*) - umowa ubezpieczenia, której przedmiotem jest życie osoby ubezpieczonej.

Ubezpieczający (*ang. policyholder*) - osoba, która we własnym imieniu zawarła umowę ubezpieczenia i zobowiązana jest do zaplacenia składki ubezpieczeniowej. Może być to umowa ubezpieczenia na życie osoby trzeciej lub na życie ubezpieczającego (w tym ostatnim przypadku ubezpieczający jest jednocześnie ubezpieczonym).

Ubezpieczony (*ang. insured*) - osoba, której życie, zdrowie lub zdolność do pracy są przedmiotem ubezpieczenia.

Ubezpieczyciel (*ang. insurer*) - według ustawy o działalności ubezpieczeniowej jest to podmiot prowadzący, za zezwoleniem organu państwowego, działalność ubezpieczeniową w formie spółki akcyjnej albo w formie towarzystwa ubezpieczeń wzajemnych.

Uposażony, uprawniony (*ang. entitled, endowd person*) - osoba imiennie wskazana w polisie ubezpieczeniowej lub okaziciel polisy uprawniony do otrzymania określonej sumy ubezpieczenia na wypadek śmierci ubezpieczonego.

Umowa ubezpieczenia (*ang. insurance contract*) - według kodeksu cywilnego przez umowę ubezpieczenia zakład ubezpieczeń zobowiązuje się spełnić określone świadczenie w razie zajścia przewidzianego w umowie wypadku, a ubezpieczający zobowiązuje się zapłacić skladkę.

Wartość odstąpienia, wykup - kwota wypłacana ubezpieczonemu w razie rezygnacji z ubezpieczenia.

Wartość polisy, wartość ubezpieczenia (*ang. insurance value*) - wspólna wartość składek i świadczeń w przyszłości liczona na początku okresu ubezpieczenia (czyli ich zdyskontowana wartość).

Wiek wstępu (*ang. age at entry*) - wiek osoby przystępującej do ubezpieczenia na życie określany w latach, stanowiących różnicę między początkiem roku kalendarzowego, w którym zawierana jest umowa ubezpieczenia, a rokiem urodzenia osoby ubezpieczonej.

Wskaźnik taryfowy (*ang. premium rate*) - ustalany przez ubezpieczyciela, jest wielkością jaką ubezpieczający płaci za jednostkę sumy ubezpieczenia.

Dodatek B

Oznaczenia

Oznaczenia ważniejszych wielkości analizowanych w pracy doktorskiej, wraz z numerami Punktów lub Paragrafów gdzie wystąpiły po raz pierwszy.

Podstawowe oznaczenia

x - wiek wstępu, 1.2.3,

n - długość okresu ubezpieczenia, 1.2.3,

$w_{x,n}$ - wskaźnik taryfowy, 2.2.1,

k - kolejne lata trwania ubezpieczenia 1.2.3 .

Suma i składka ubezpieczeniowa

S - początkowa (lub stała w ciągu całego okresy ubezpieczenia) suma ubezpieczenia, 2.2.1,

S_k - suma ubezpieczenia w roku k-tym, 1.2.3,

c - pierwsza (lub stała w ciągu całego okresy ubezpieczenia) składka roczna płacona z góry, 2.2.1,

c_k - składka roczna płacona na początku k-tego roku trwania ubezpieczenia, 5.2.1,

c_k^r - rzeczywista składka roczna płacona z góry na początku k-tego roku trwania ubezpieczenia, 5.2.1.

c_{sk} - suma składek płaconych przez pierwsze k lat trwania ubezpieczenia, 2.2.1,

^{J} - indeks górny oznaczający, że opisana wielkość dotyczy wariantu ubezpieczenia ze składką jednorazową płaconą z góry, 2.4,

^{RR} - indeks górny oznaczający, że opisana wielkość dotyczy wariantu ubezpieczenia z rosnącą sumą ubezpieczenia i składką, 2.2.1,

^{RS} - indeks górny oznaczający, że opisana wielkość dotyczy wariantu ubezpieczenia z rosnącą sumą ubezpieczenia i stałą składką, 2.2.2,

$W_{x,n}(U, K = k)$ - wskaźnik efektywności ubezpieczenia, 2.3.1.

Trwanie życia

$K(x)$ - zmienna losowa określająca całkowitą liczbę lat do do przeżycia osoby w wieku x, 1.2.4,

${}_{k|}q_x$ - prawdopodobieństwo, że człowiek w wieku x umrze między rokiem $x+k$ a $x+k+1$, 1.2.4,

${}_kp_x$ - prawdopodobieństwo, że człowiek w wieku x przeżyje co najmniej k lat, 1.2.4,

$\boldsymbol{D}$ - wektor rozkładu trwania życia człowieka w wieku x w przeciągu n lat, 1.2.4.

Procesy stochastyczne

$\{X(t) : t \in T\}$ - proces stochastyczny, 1.4.1,

$\{W(t) : t \geq 0\}$ - ruch Browna (proces Wienera), 1.4.2,

$\{B_H(t) : t \geq 0\}$ - ułamkowy ruch Browna, 1.4.2,

$\{U(t) : t \geq 0\}$ - proces Ornsteina-Uhlenbecka, 1.4.2.

Stopa procentowa i inflacja

u - stopa procentowa (indeksacja w ubezpieczeniu), 1.3.1,

u_k - stopa udziału w zysku ubezpieczonego (indeksacja) w roku k-tym, 1.3.1,

$\boldsymbol{U}$ - macierz stóp zysku w całym okresie ubezpieczenia, 2.2.1,

i_k - stopa inflacji w roku k-tym, 1.3.2,

a_k - stopa realnego wzrostu w roku k-tym (stopa procentowa z uwzględnieniem inflacji), 1.3.2,

$\boldsymbol{A}$ - macierz realnych stóp procentowych w całym okresie ubezpieczenia, 2.2.2,

$X(s)$ - intensywność stopy procentowej w chwili $s > 0$, 4.5.1,

$Y(t)$ - proces stopy procentowej za okres $[0, t]$, 4.5.1,

m - średnia roczna stopa procentowa, 4.6.5,

σ - zmienność stopy procentowej, 4.6.5,

$v(t)$ - funkcja dyskontująca, 1.2.5,

stała, kapitalizacja roczna - $v(k) = (1+u)^{-k}$, 1.3.1,

zmienna, kapitalizacja ciągła - $v(t) = \exp(Y(t))$, 1.3.1,

$\boldsymbol{R}$ - macierz kowariancji zmiennych losowych $\exp(-Y(t))$, 4.5.1,

$\boldsymbol{\Delta}$ - macierz drugich momentów zmiennych losowych $\exp(-Y(t))$, 4.5.1,

$\boldsymbol{M}$ -macierz wartości oczekiwanych zmiennych losowych $\exp(-Y(t))$, 4.5.1.

Strumienie finansowe w ubezpieczeniu

$b_k(i)$ - wysokość przepływu pieniężnego wynikającego z umowy ubezpieczenia, na początku roku i pod warunkiem, że ubezpieczony umrze w okresie $[k; k+1)$, 4.2,

$B_K(k)$ - funkcja łącznych przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu do momentu śmierci ubezpieczonego w okresie $[k; k+1)$, 4.2,

$\boldsymbol{B}$ - macierz przepływów pieniężnych, 4.5.1,

$z_k(i)$ - wysokość zaktualizowanego przepływu pieniężnego wynikającego z umowy ubezpieczenia, na początku roku i pod warunkiem, że ubezpieczony umrze w okresie $[k; k+1)$, 4.3,

$Z_K(k)$ - funkcja zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu do momentu śmierci ubezpieczonego w okresie $[k; k+1)$, 4.3.

Ubezpieczenie grupowe

$\mathcal{Z}$ - stopa skladki na ubezpieczenie społeczne, 5.2.1,

$\mathcal{Z}^{(p)}$ - stopa podatku dochodowego placonego przez pracodawcę, 5.2.1,

$\mathcal{Z}^{(u)}$ - stopa podatku dochodowego placonego przez pracownika, 5.3.1,

I - składka podstawowa (maksymalna wielkość składki ubezpieczeniowej zwolniona z opłat na ubezpieczenie społeczne), 5.2.1,

$\mathcal{O}$ - odprawa pośmiertna, 5.2.1,

N - liczba pracowników ubezpieczonych w grupie, 4.5.1,

l - l-ta osoba w grupie, 4.5.1,

P_l - roczny dochód brutto l-tego pracownika, 5.2.1,

$\bar{P}$ -średni roczny dochód brutto pracowników, 5.2.1,

x_l - wiek wstępu l-tej osoby w grupie, 4.5.1,

K_l - zmienna losowa określająca całkowitą liczbę lat do do przeżycia l-tej osoby w grupie, 4.5.1,

D_l - wektor rozkładu trwania życia l-tej osoby w grupie, 4.5.1,

B_l - macierz przepływów pieniężnych dla ubezpieczenia l-tej osoby w grupie, 4.5.1,

Z_l - funkcja zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu l-tej ubezpieczonej osoby w grupie, 4.5.1,

$Z_{(N)}$ - funkcja łącznych zaktualizowanych przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu całej grupy, 4.3.2,

Dodatek C

Rozkłady trwania życia

Tablice rozkładów trwania życia (wektory $\boldsymbol{D}$) dla osób w wieku $x = 18, 19, ..., 60$ na okres $n = 65 - x$ lat zostały wyznaczone w oparciu o Polskie Tablice Trwania Życia Ogółem 1990-1991.

	x - wiek wstępu												
k	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	0,000750	0,000400	0,000930	0,001030	0,001090	0,001110	0,001110	0,001100	0,001100	0,001130	0,001200	0,001290	0,001390
2	0,000400	0,000930	0,001029	0,001089	0,001109	0,001109	0,001099	0,001099	0,001129	0,001199	0,001288	0,001388	0,001508
3	0,000929	0,001029	0,001088	0,001108	0,001108	0,001098	0,001098	0,001128	0,001197	0,001287	0,001387	0,001506	0,001635
4	0,001028	0,001087	0,001107	0,001106	0,001096	0,001096	0,001126	0,001196	0,001286	0,001385	0,001504	0,001633	0,001772
5	0,001087	0,001106	0,001105	0,001095	0,001095	0,001125	0,001195	0,001284	0,001383	0,001503	0,001631	0,001770	0,001928
6	0,001105	0,001105	0,001094	0,001094	0,001124	0,001193	0,001283	0,001382	0,001501	0,001629	0,001768	0,001925	0,002103
7	0,001104	0,001094	0,001093	0,001123	0,001192	0,001281	0,001380	0,001499	0,001628	0,001766	0,001923	0,002100	0,002296
8	0,001093	0,001093	0,001122	0,001191	0,001280	0,001379	0,001498	0,001626	0,001764	0,001921	0,002097	0,002293	0,002518
9	0,001092	0,001121	0,001190	0,001279	0,001377	0,001496	0,001624	0,001762	0,001919	0,002095	0,002290	0,002515	0,002748
10	0,001120	0,001189	0,001277	0,001376	0,001494	0,001622	0,001760	0,001917	0,002093	0,002288	0,002512	0,002744	0,003005
11	0,001188	0,001277	0,001375	0,001493	0,001620	0,001758	0,001915	0,002090	0,002285	0,002509	0,002741	0,003001	0,003280
12	0,001276	0,001374	0,001491	0,001619	0,001756	0,001912	0,002088	0,002283	0,002506	0,002738	0,002998	0,003276	0,003581
13	0,001373	0,001491	0,001617	0,001754	0,001910	0,002086	0,002280	0,002503	0,002735	0,002994	0,003272	0,003577	0,003909
14	0,001490	0,001617	0,001752	0,001908	0,002083	0,002278	0,002500	0,002732	0,002991	0,003268	0,003572	0,003903	0,004290
15	0,001615	0,001752	0,001907	0,002081	0,002275	0,002498	0,002729	0,002988	0,003265	0,003568	0,003899	0,004284	0,004695
16	0,001750	0,001906	0,002079	0,002273	0,002495	0,002726	0,002985	0,003261	0,003565	0,003894	0,004279	0,004689	0,005142
17	0,001904	0,002079	0,002271	0,002492	0,002723	0,002981	0,003257	0,003561	0,003890	0,004274	0,004683	0,005136	0,005601
18	0,002077	0,002270	0,002490	0,002720	0,002978	0,003254	0,003557	0,003886	0,004270	0,004678	0,005129	0,005594	0,006033
19	0,002268	0,002489	0,002718	0,002975	0,003250	0,003553	0,003882	0,004265	0,004673	0,005124	0,005587	0,006026	0,006438
20	0,002487	0,002716	0,002972	0,003247	0,003549	0,003877	0,004260	0,004668	0,005118	0,005581	0,006018	0,006430	0,006815
21	0,002714	0,002971	0,003244	0,003545	0,003873	0,004255	0,004663	0,005112	0,005575	0,006011	0,006422	0,006806	0,007212
22	0,002969	0,003243	0,003542	0,003869	0,004251	0,004657	0,005107	0,005569	0,006005	0,006415	0,006798	0,007202	0,007663
23	0,003240	0,003540	0,003865	0,004246	0,004652	0,005101	0,005563	0,005998	0,006408	0,006791	0,007194	0,007653	0,008185
24	0,003538	0,003864	0,004243	0,004648	0,005095	0,005556	0,005992	0,006401	0,006783	0,007186	0,007644	0,008174	0,008782
25	0,003861	0,004241	0,004643	0,005090	0,005550	0,005985	0,006393	0,006776	0,007178	0,007635	0,008164	0,008771	0,009451
26	0,004238	0,004641	0,005086	0,005545	0,005978	0,006386	0,006768	0,007170	0,007627	0,008155	0,008760	0,009439	0,010168
27	0,004638	0,005083	0,005540	0,005972	0,006379	0,006761	0,007162	0,007618	0,008146	0,008750	0,009427	0,010155	0,010886
28	0,005080	0,005537	0,005967	0,006373	0,006753	0,007154	0,007610	0,008137	0,008741	0,009417	0,010143	0,010872	0,011695
29	0,005533	0,005964	0,006367	0,006746	0,007146	0,007602	0,008128	0,008731	0,009406	0,010131	0,010859	0,011680	0,012504
30	0,005960	0,006364	0,006740	0,007139	0,007593	0,008119	0,008721	0,009396	0,010120	0,010846	0,011666	0,012488	0,013333
31	0,006360	0,006737	0,007132	0,007585	0,008110	0,008712	0,009385	0,010109	0,010835	0,011653	0,012473	0,013315	0,014225
32	0,006732	0,007129	0,007578	0,008102	0,008702	0,009375	0,010098	0,010823	0,011640	0,012459	0,013299	0,014206	0,015163
33	0,007124	0,007575	0,008094	0,008693	0,009365	0,010087	0,010811	0,011627	0,012445	0,013284	0,014189	0,015143	0,016073
34	0,007570	0,008091	0,008685	0,009355	0,010076	0,010799	0,011615	0,012431	0,013270	0,014173	0,015125	0,016052	0,016950
35	0,008085	0,008682	0,009346	0,010065	0,010787	0,011602	0,012418	0,013255	0,014158	0,015108	0,016033	0,016928	0,017810
36	0,008675	0,009343	0,010056	0,010776	0,011589	0,012404	0,013240	0,014142	0,015091	0,016015	0,016907	0,017787	
37	0,009336	0,010052	0,010766	0,011577	0,012390	0,013226	0,014126	0,015075	0,015997	0,016888	0,017766		
38	0,010044	0,010761	0,011566	0,012378	0,013211	0,014111	0,015058	0,015980	0,016870	0,017746			
39	0,010753	0,011562	0,012366	0,013198	0,014095	0,015041	0,015962	0,016851	0,017726				
40	0,011553	0,012361	0,013185	0,014081	0,015025	0,015944	0,016832	0,017707					
41	0,012352	0,013180	0,014068	0,015010	0,015927	0,016814	0,017687						
42	0,013170	0,014062	0,014996	0,015910	0,016795	0,017668							
43	0,014052	0,014990	0,015896	0,016778	0,017648								
44	0,014978	0,015889	0,016762	0,017630									
45	0,015877	0,016756	0,017614										
46	0,016743	0,017607											
47	0,017593												
dożycie	0,740094	0,740649	0,740946	0,741636	0,742400	0,743211	0,744036	0,744863	0,745684	0,746505	0,747349	0,748247	0,749214

	x - wiek wstępu									
k	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
1	0,001510	0,001640	0,001780	0,001940	0,002120	0,002320	0,002550	0,002790	0,003060	0,003350
2	0,001638	0,001777	0,001937	0,002116	0,002315	0,002544	0,002783	0,003052	0,003340	0,003658
3	0,001774	0,001933	0,002112	0,002311	0,002539	0,002777	0,003044	0,003331	0,003647	0,003992
4	0,001931	0,002109	0,002307	0,002534	0,002771	0,003037	0,003322	0,003636	0,003980	0,004381
5	0,002106	0,002303	0,002529	0,002765	0,003030	0,003314	0,003627	0,003969	0,004368	0,004795
6	0,002299	0,002525	0,002760	0,003024	0,003307	0,003619	0,003959	0,004356	0,004781	0,005252
7	0,002521	0,002756	0,003019	0,003301	0,003611	0,003949	0,004345	0,004767	0,005236	0,005721
8	0,002752	0,003014	0,003295	0,003604	0,003941	0,004335	0,004755	0,005221	0,005703	0,006162
9	0,003010	0,003290	0,003598	0,003933	0,004325	0,004744	0,005208	0,005688	0,006143	0,006575
10	0,003285	0,003592	0,003926	0,004317	0,004734	0,005196	0,005673	0,006126	0,006555	0,006961
11	0,003586	0,003920	0,004309	0,004725	0,005185	0,005660	0,006110	0,006537	0,006939	0,007366
12	0,003914	0,004302	0,004716	0,005175	0,005648	0,006096	0,006520	0,006920	0,007343	0,007827
13	0,004296	0,004709	0,005166	0,005637	0,006083	0,006505	0,006902	0,007323	0,007803	0,008359
14	0,004702	0,005157	0,005627	0,006072	0,006491	0,006886	0,007304	0,007781	0,008334	0,008969
15	0,005149	0,005618	0,006061	0,006479	0,006872	0,007287	0,007761	0,008310	0,008942	0,009653
16	0,005609	0,006051	0,006467	0,006859	0,007272	0,007743	0,008289	0,008917	0,009623	0,010385
17	0,006042	0,006457	0,006846	0,007257	0,007727	0,008270	0,008894	0,009596	0,010354	0,011118
18	0,006447	0,006835	0,007245	0,007712	0,008252	0,008874	0,009572	0,010325	0,011084	0,011945
19	0,006825	0,007233	0,007698	0,008236	0,008855	0,009549	0,010298	0,011053	0,011909	0,012771
20	0,007222	0,007685	0,008222	0,008838	0,009529	0,010274	0,011025	0,011875	0,012732	0,013617
21	0,007674	0,008208	0,008822	0,009511	0,010253	0,010999	0,011845	0,012696	0,013576	0,014528
22	0,008196	0,008807	0,009494	0,010233	0,010976	0,011818	0,012664	0,013538	0,014484	0,015487
23	0,008794	0,009478	0,010215	0,010955	0,011792	0,012635	0,013503	0,014444	0,015439	0,016416
24	0,009464	0,010198	0,010935	0,011770	0,012608	0,013472	0,014407	0,015396	0,016366	0,017311
25	0,010182	0,010917	0,011749	0,012583	0,013443	0,014373	0,015357	0,016320	0,017258	0,018191
26	0,010901	0,011729	0,012561	0,013417	0,014343	0,015321	0,016279	0,017210	0,018135	
27	0,011712	0,012540	0,013393	0,014315	0,015289	0,016241	0,017166	0,018084		
28	0,012521	0,013371	0,014290	0,015259	0,016206	0,017127	0,018038			
29	0,013351	0,014266	0,015232	0,016175	0,017090	0,017996				
30	0,014245	0,015207	0,016146	0,017057	0,017958					
31	0,015184	0,016120	0,017027	0,017923						
32	0,016095	0,016999	0,017891							
33	0,016973	0,017862								
34	0,017835									
35										
36										
37										
38										
39										
40										
41										
42										
43										
44										
45										
46										
47										
dożycie	0,750257	0,751391	0,752626	0,753968	0,755433	0,757038	0,758799	0,760739	0,762867	0,765209

	x - wiek wstępu									
k	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,003670	0,004020	0,004430	0,004870	0,005360	0,005870	0,006360	0,006830	0,007280	0,007760
2	0,004005	0,004412	0,004849	0,005334	0,005839	0,006323	0,006787	0,007231	0,007704	0,008246
3	0,004396	0,004829	0,005310	0,005810	0,006289	0,006747	0,007185	0,007651	0,008186	0,008807
4	0,004811	0,005289	0,005785	0,006258	0,006711	0,007142	0,007603	0,008130	0,008743	0,009450
5	0,005270	0,005761	0,006231	0,006678	0,007104	0,007558	0,008078	0,008683	0,009381	0,010170
6	0,005740	0,006206	0,006649	0,007070	0,007517	0,008031	0,008628	0,009317	0,010096	0,010942
7	0,006183	0,006622	0,007038	0,007481	0,007988	0,008577	0,009258	0,010027	0,010862	0,011714
8	0,006598	0,007010	0,007448	0,007949	0,008531	0,009203	0,009963	0,010788	0,011629	0,012585
9	0,006984	0,007418	0,007914	0,008490	0,009154	0,009904	0,010719	0,011549	0,012493	0,013455
10	0,007390	0,007882	0,008452	0,009110	0,009851	0,010656	0,011476	0,012408	0,013357	0,014347
11	0,007853	0,008418	0,009069	0,009803	0,010599	0,011408	0,012329	0,013266	0,014242	0,015307
12	0,008387	0,009033	0,009760	0,010548	0,011347	0,012257	0,013182	0,014145	0,015195	0,016316
13	0,009000	0,009721	0,010501	0,011292	0,012191	0,013104	0,014055	0,015092	0,016197	0,017296
14	0,009685	0,010459	0,011242	0,012132	0,013034	0,013973	0,014996	0,016087	0,017170	0,018239
15	0,010420	0,011197	0,012078	0,012971	0,013898	0,014908	0,015985	0,017052	0,018106	0,019165
16	0,011156	0,012029	0,012913	0,013830	0,014828	0,015891	0,016944	0,017982	0,019026	
17	0,011985	0,012861	0,013769	0,014755	0,015806	0,016844	0,017868	0,018896		
18	0,012814	0,013713	0,014690	0,015729	0,016754	0,017763	0,018775			
19	0,013663	0,014631	0,015659	0,016673	0,017668	0,018665				
20	0,014577	0,015596	0,016599	0,017582	0,018565					
21	0,015539	0,016532	0,017504	0,018475						
22	0,016471	0,017434	0,018393							
23	0,017370	0,018319								
24	0,018252									
25										
26										
27										
28										
29										
30										
31										
32										
33										
34										
35										
36										
37										
38										
39										
40										
41										
42										
43										
44										
45										
46										
47										
dożycie	0,767781	0,770609	0,773720	0,777163	0,780966	0,785175	0,789811	0,794867	0,800333	0,806203

	x - wiek wstępu									
k	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
1	0,008310	0,008950	0,009690	0,010530	0,011450	0,012400	0,013490	0,014620	0,015820	0,017150
2	0,008876	0,009604	0,010428	0,011330	0,012259	0,013323	0,014423	0,015589	0,016879	0,018281
3	0,009524	0,010335	0,011220	0,012129	0,013170	0,014244	0,015378	0,016632	0,017992	0,019378
4	0,010249	0,011120	0,012012	0,013031	0,014081	0,015188	0,016408	0,017729	0,019072	0,020435
5	0,011027	0,011904	0,012905	0,013933	0,015014	0,016204	0,017490	0,018793	0,020112	0,021473
6	0,011805	0,012790	0,013798	0,014856	0,016019	0,017273	0,018539	0,019818	0,021133	
7	0,012683	0,013674	0,014712	0,015850	0,017075	0,018309	0,019550	0,020824		
8	0,013560	0,014580	0,015696	0,016895	0,018100	0,019308	0,020543			
9	0,014459	0,015556	0,016731	0,017909	0,019087	0,020288				
10	0,015427	0,016582	0,017736	0,018886	0,020056					
11	0,016444	0,017577	0,018703	0,019845						
12	0,017431	0,018535	0,019653							
13	0,018381	0,019477								
14	0,019315									
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										
27										
28										
29										
30										
31										
32										
33										
34										
35										
36										
37										
38										
39										
40										
41										
42										
43										
44										
45										
46										
47										
dożycie	0,812508	0,819317	0,826716	0,834806	0,843690	0,853463	0,864179	0,875996	0,888993	0,903283

Spis rysunków

1.1 Schemat konstrukcji ubezpieczenia na życie i dożycie. 13
1.2 Klasyfikacja ubezpieczeń ze względu na sposób dopisywania zysku do sumy ubezpieczenia 14
1.3 Klasyfikacja ubezpieczeń ze względu na rodzaj składek. 16

2.1 Efektywność a wiek wstępu 37
2.2 Efektywność a indeksacja dla wariantu RR 39
2.3 Efektywność a indeksacja dla wariantu RS 40
2.4 Efektywność a długość okresu ubezpieczenia 41
2.5 Efektywność a czas trwania ubezpieczenia z wariantu RR 42
2.6 Efektywność a czas trwania ubezpieczenia dla wariantu RS 43

3.1 Porównanie średniej wypłaty z ubezpieczenia i i średniej wypłaty z banku dla u, b mniejszych niż $0,4$ 55
3.2 Wysokość S_k, V_k i L_k dla $k = 1, 2, ...20$ 57

4.1 Macierze kowariancji 82
4.2 Macierze drugich momentów 83

5.1 Schemat przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu grupowym, w którym ubezpieczającym jest pracodawca. 90
5.2 Różnica między składką roczną płaconą z góry za ubezpieczenie, a składką rzeczywistą dla wybranych wielkości I. 94
5.3 Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego w zależności od wieku wstępu ubezpieczonego i jego wynagrodzenia brutto. 98
5.4 Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego w zależności od wynagrodzenia brutto pracowników w wieku co najmniej 33 lat. 100
5.5 Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczającego w zależności od wynagrodzenia brutto pracowników w wieku co najwyżej 33 lat. 100
5.6 Odchylenie standardowe zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego dla $N = 1$. 106
5.7 Odchylenia standardowego zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych ubezpieczającego przypadające na jednego pracownika w grupie dla $N \to \infty$. 107
5.8 Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczonego w zależności od wieku wstępu. 111
5.9 Przeciętne łączne przepływy pieniężne ubezpieczonego w zależności od wynagrodzenia brutto 111
5.10 Wartość oczekiwana zaktualizowanych przepływów pieniężnych pracownika w zależności od wieku wstępu i modelu procesu stopy procentowej. 115

5.11 Odchylenie standardowe zaktualizowanych przepływów pieniężnych pracownika w zależności od wieku wstępu i modelu procesu stopy procentowej. . . 116
5.12 Typowy obszar zmienności zaktualizowanych łącznych przepływów pieniężnych pracownika w zależności od rodzaju intensywności stopy procentowej 117

Spis tablic

3.1 Wysokość sumy ubezpieczenia, lokaty bankowej oraz dalszy rozkład trwania życia dla $x = 50$, $n = 20$ oraz $u = 0,3$ i $b = 0,339$. 54
3.2 Rok trwania inwestycji w którym wartość wykupu ubezpieczenia przewyższa po raz pierwszy wysokość zgromadzonego w banku kapitału. 58

5.1 Różnica między składką c i składką rzeczywistą c^r. 94
5.2 Wskaźniki taryfowe dla wybranych x i $n = 65 - x$. 96
5.3 Rzeczywiste składki ubezpieczeniowe płacone przez pracodawcę za pracowników przystępujących do ubezpieczenia w wieku 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 lat. 104
5.4 Wartość obecna przeciętnych łącznych przepływów ubezpieczającego pracodawcy za ubezpieczenia pracowników w wieku 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 lat (okres ubezpieczenia do wieku 65 lat). 105
5.5 Podatek od składki ubezpieczeniowej płaconej przez pracodawcę za pracowników przystępujących do ubezpieczenia w wieku 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 lat. 114
5.6 Podatek od składki ubezpieczeniowej płaconej przez pracodawcę za pracowników przystępujących do 10-cio letniego ubezpieczenia na życie i dożycie w wieku 18, 30, 40, 50, 60 lat. 116

Literatura

[1] Banasiński, A.(1955) Matematyka ubezpieczeniowa, *Polskie Wydawnictwo Gospodarcze*, Warszawa.

[2] Bartoszewicz, J. (1983) Wykłady ze statystyki matematycznej. *Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego.*

[3] Bartoszewski, Z., Kwapisz, M., (1998) Wstęp do Matematyki Finansowej. *Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Bydgoszczy*

[4] Beekman, J.A., Fuelling C.P.(1990) Interest and mortality randomness in some annuities. *Inaurance: Mathematics and Economics*, 1990, **9**, 185-196.

[5] Beekman, J.A., Fuelling C.P.(1993) One Approach to Dual Randomness in Life Insurance. *Scand. Actuarial Journal*, 1993, **2**, 173-182.

[6] Berman, S.M., (1985) An asymptotic formula for the distribution of the maximum of Gaussian process with stationary increments. *Journal of Applied Probability*, 1985, **22**, 454-460.

[7] Billingsley, P., (1987) Prawdopodobieństwo i miara. *Wydawnictwo PWN*, Warszawa.

[8] Bolesławiecki L. *Budowa tablic trwania życia* GUS,Seria: Studia i prace statystyczne nr 47, Warszawa, 1973.

[9] Bowers N.L., Gerber H.U., Hichmann J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1986) Actuarial Mathematics. *Illinois: Society of Actuaries.*

[10] Chiang C.L. *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics* Nowy Jork, 1968

[11] Dębicka, J. (1997) Index of Effectivness for Endowment Insurance *Operations Research Proceedings 1997, (Selected Papers of the Symposium on Operations Research(SOR'97)), Springer-Verlag*, 371-375.

[12] Dębicka, J. (1997) Analiza porównawcza ubezpieczenia na życie i dożycie ze składką jednorazową z lokatą bankową, *XXXIII Konferencja Statystyków, Ekonometryków, Matematyków Polski Południowej (materiały konferencyjne)*, 34-45.

[13] Dębicka, J. (1998) Inwestycyjny aspekt ubezpieczenia na życie i dożycie, *Badania Operacyjne i Decyzje*, **2**, 13-27.

[14] Dębicka, J. (1998) Strategia wyboru formy dopisywania zysku, która maksymalizuje sumę ubezpieczenia w ubezpieczeniu na życie i dożycie, *zeszyt PN pt. Ekonometria*, **3**, 68-80.

[15] Dębicka, J. (1999) Some financial aspects of collective endowment insurance, *International Seminar Mathematics, statistics and Informatics in Economy 1999*, Liptowsky Trnovec (Slovakia) (materiał y konferencyjne) - przyjęte do druku.

[16] Dobija, M. Smaga, E. (1995) Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej, *Wydawnictwo Naukowe PWN*, Warszawa-Kraków.

[17] Drewnowska K., Altrych J., Czerski N. (1999) Nowe emerytury w I, II, III filarze bez tajemnic. *Wydawca: ŠeZaM Špółka Cywilna*, Warszawa.

[18] Garrido, J. (1988) Diffusion premiums for claim severities subject to inflation, *Inaurance: Mathematics and Economics*, 1988, **7**, 123-129.

[19] Indan F. (1967) *Metoda kohort w zastosowaniu do tablic umieralności* WSR, Olsztyn.

[20] Mandelbrot, B.B., Van Ness, J.W. (1968) Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*, **10**, 422-437.

[21] Matloka, M.,(1997) Matematyka w ubezpieczeniach na życie. *Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej*, Poznań.

[22] Ostasiewicz S., Ronka-Chmielowiec W. (1994) Metody statystyki ubezpieczeniowej. *AE im. Oskara Langego*, Wrocław.

[23] Ostasiewicz W. (praca zbiorowa) (1999) Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych, *AE im. Oskara Langego*, Wrocław.

[24] Parker, G. (1994) Stochastic Analysis of Portfolio of Endowment Insurance Policies. *Scand. Actuarial Journal*, 1994, **2**, 119-130.

[25] Samorodnitsky, G. & Taqqu, M.S. (1994) *Stable non-Gaussian random processes.* Chapman and Hall, New York.

[26] Skoczyńska A. (1999) Nowa emerytura: lepsza czy inna? *Wydawnictwo K.E.LIBER*, Warszawa.

[27] Stroiński, E. (1996) Ubezpieczenie na życie, *Wyższa Szkoła Ubezpieczeń i Bankowości*, Warszawa.

[28] Wentzell, A.D. (1980) Wykłady z teorii procesów stochastycznych, *PWN*, Warszawa.

[29] PZU Życie S.A. (1994) Zbiór taryf okresowych za jednostkowe ubezpieczenia na życie, *Warszawa.*

ŹRÓDŁA PRAWNE

[30] Kodeks Pracy, art. 93 paragraf 7.

[31] Ustawa z dnia 28 lipca 1990 roku o działalności ubezpieczeniowej (Dz.U. Nr 50, poz. 344 z późniejszymi zmianami).

[32] Ustawa z dnia 15 lutego 1992 roku o podatku dochodowym od osób prawnych (Dz.U. Nr 21, poz. 86 z późniejszymi zmianami).

[33] Ustawa z dnia 2 grudnia 1994 roku o zmianie niektórych ustaw regulujących zasady opodatkowania oraz niektórych innych ustaw (Dz.U. Nr 5, poz. 25).

[34] Ustawa z 1996 roku (Dz.U. Nr 137 poz.639 art 16, p.1 poz.59)

[35] Ustawa z dnia 22 sierpnia 1997 roku o pracowniczych programach emerytalnych (Dz.U. Nr 139, poz. 932 z późniejszymi zmianami Dz.U. 1998 rok Nr 98 poz. 10, Nr 162. poz.1118).

[36] Ustawa z dnia 28 sierpnia 1997 roku o funduszach inwestycyjnych (Dz.U. Nr 139, poz. 933).

[37] Ustawa z dnia 28 sierpnia 1997 roku o organizowaniu i funkcjonowaniu funduszy emerytalnych (Dz.U. Nr 139/97, poz. 934).

[38] Zarządzeniem ministra finansów z dnia 19 października 1994 roku w sprawie określenia środków zaliczanych do środków własnych, sposobu wyliczenia i wysokości marginesu wypłacalności oraz minimalnej wysokości kapitału gwarancyjnego dla każdego rodzaju ubezpieczeń oraz dla działalności reasekuracyjnej. (DZ.U. Nr 115, poz. 553)

[39] Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 25 lutego 1997 roku zmieniające rozporządzenie (z dnia 29 stycznia 1990 roku) w sprawie wysokości i opodatkowania wymiaru składek na ubezpieczenie społeczne, zgłaszania do ubezpieczenia społecznego oraz rozliczania składek i świadczeń z ubezpieczenia społecznego (DZ.U. Nr 20, poz. 107).