Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 37
Ekonometria 23 2009

Aleksandra Iwanicka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WPŁYW ZEWNĘTRZNYCH CZYNNIKÓW RYZYKA NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO RUINY W NIESKOŃCZONYM HORYZONCIE CZASOWYM W WIELOKLASOWYM MODELU RYZYKA

Streszczenie: W pracy omówiony został model ryzyka dla *n* klas ubezpieczeń, w których procesy zliczające szkody są zależnymi procesami Poissona. Zależność pomiędzy procesami zliczającymi szkody jest wynikiem działania zewnętrznych czynników ryzyka na różne klasy ubezpieczeń, takich jak klęski żywiołowe, które mogą powodować różnego rodzaju szkody. Model ten można przekształcić do klasycznego modelu ryzyka. Na wybranych przykładach numerycznych badany jest wpływ zewnętrznych czynników na prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym w modelu ryzyka dla ustalonej liczby klas ubezpieczeń.

Słowa kluczowe: model Poissona, skorelowane sumy zagregowanych szkód, rozkład fazowy, prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym.

1. Wstęp

W pracy omówiono model ryzyka dla *n* klas ubezpieczeń, w których liczby zgłaszanych szkód zależą od siebie oraz szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona [Ambagaspitiya 1998]. Zależność pomiędzy liczbą pojawiających się szkód jest wynikiem działania zewnętrznych czynników ryzyka, m.in. takich jak klęski żywiołowe, które mogą jednocześnie powodować szkody w różnych klasach ubezpieczeń [Guo i in. 2002; 2006]. Model ten można sprowadzić do klasycznego modelu ryzyka o takim samym rozkładzie [Ambagaspitiya 1998]. W klasycznym modelu ryzyka istnieje wiele metod wyznaczania i aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny [Ostasiewicz 2000; Otto 2004; Otto 2004; Rolski i in. 1998; Ronka-Chmielowiec 2000]. Praca ma na celu zbadanie wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka, co jest przedstawione na wybranych przykładach numerycznych. Analizę zależności przeprowadzono w dwuklasowym i czteroklasowym modelu ryzyka przy założeniu wykładniczych rozkładów szkód.

Na początku omówimy model ryzyka dla n klas ubezpieczeń [Ambagaspitiya 1998]. Niech $\{X_{ij}\}_{j\in N}$ będzie ciągiem kolejnych niezależnych wielkości szkód w i-tej klasie ubezpieczeń o jednakowych rozkładach z funkcją gęstości f_{X_i}, funkcją tworzącą momenty M_{X_i} oraz średnią μ_{X_i}. Ponadto wielkości szkód z dowolnej klasy ubezpieczeń są niezależne od wielkości szkód z każdej innej klasy ubezpieczeń. Wielkość szkód zagregowanych do momentu t włącznie w i-tej klasie ubezpieczeń zapisujemy jako:

$$S_i(t) = \sum_{i=1}^{N_i(t)} X_{ij} , \tag{1}$$

gdzie $\{N_i(t)\}_{t\geq 0}$ jest procesem zliczającym szkody w klasie i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Niech $\{N_i(t)\}_{t\geq 0}$ będzie jednorodnym procesem Poissona dla każdego i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ponadto niech wszystkie procesy zliczające szkody będą niezależne od wielkości pojawiających się szkód. Oznaczmy $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \ldots & N_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Załóżmy, że elementy **N** związane są ze sobą w następujący sposób:

$$\mathbf{N} = \mathbf{AM}, \tag{2}$$

gdzie elementy M_j wektora kolumnowego $\mathbf{M} = \left[M_j \right]_{k\times 1}$ są niezależnymi jednorodnymi procesami Poissona z intensywnościami λ_j. Elementy macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n\times k}$ mogą przyjmować wartości zero lub jeden, ponieważ w przeciwnym razie procesy zliczające szkody N_i nie byłyby jednorodnymi procesami Poissona. Każdy proces M_j jest procesem zliczającym szkody, związanym z działaniem różnych czynników ryzyka. Sumę zagregowanych szkód do chwili t włącznie z n klas ubezpieczeń zapisujemy jako:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i(t) . \tag{3}$$

Proces ryzyka dla n klas ubezpieczeń definiujemy w następujący sposób:

$$R(t) = u + ct - S(t) , \tag{4}$$

gdzie u jest kapitałem początkowym, a c jest intensywnością napływu składki taką, że ct jest zgromadzonym dochodem ze składki do chwili t włącznie z n klas ubezpieczeń. Proces ryzyka w chwili t w uproszczeniu można interpretować jako stan portfela dla n klas ubezpieczeń w chwili t. Przez ruinę będziemy rozumieć przyjęcie przez proces $R(t)$ po raz pierwszy wartości mniejszej od zera. Zakładamy, że c jest dodatnią stałą wartością. Ponadto, aby zapewnić wypłacalność ubezpieczyciela (tj. aby z prawdopodobieństwem równym jeden nie nastąpiła ruina w skończonym czasie), o stałej c będziemy zakładać, że jest wartością większą od wartości oczekiwanej sumy zagregowanych roszczeń z n klas ubezpieczeń w jednej jednostce czasu. Model ryzyka (4) dla jednej klasy ubezpieczeń nazywamy klasycznym modelem ryzyka.

W celu zdefiniowania prawdopodobieństwa ruiny, wprowadzimy najpierw pojęcie momentu ruiny w następujący sposób:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}.$$

Wówczas prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym definiujemy następująco:

$$\Psi(u) = P\left(\tau < \infty \middle| R(0) = u\right) = P\left(R(t) < 0 \text{ dla pewnego } t \geq 0 \middle| R(0) = u\right),\ u \geq 0 \qquad (5)$$

2. Przekształcenie wieloklasowego modelu ryzyka do klasycznego modelu ryzyka

Korzystając z postaci (2) wektora kolumnowego $\mathbf{N}$, można pokazać, że suma zagregowanych roszczeń z n klas ubezpieczeń do chwili t włącznie ma taki sam rozkład jak suma zagregowanych roszczeń z jednej klasy ubezpieczeń do chwili t włącznie [Ambagaspitiya 1998]. W tym celu wyznaczymy funkcję tworzącą momenty dla sumy zagregowanych szkód w n klasach ubezpieczeń w dowolnej ustalonej chwili t [Ambagaspitiya 1998]. Najpierw zdefiniujmy funkcję tworzącą momenty dla wektora kolumnowego $\mathbf{N}$ jako:

$$M_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = E\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(N_i z_i)\right] = E\left[\exp\left(\mathbf{N}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{z}\right)\right],$$

gdzie $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Stosując postać (2) wektora kolumnowego $\mathbf{N}$, otrzymujemy:

$$M_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = E\left[\exp\left(\mathbf{N}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{z}\right)\right].$$

Następnie korzystając z niezależności elementów wektora kolumnowego $\mathbf{M}$, dostajemy:

$$M_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^{k} m_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} z_j\right),$$

gdzie m_i jest funkcją tworzącą momenty i-tego elementu wektora kolumnowego $\mathbf{M}$. Ponieważ i-ty element wektora kolumnowego $\mathbf{M}$ w ustalonej chwili czasu t ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_i t$ oraz funkcję tworzącą momenty postaci:

$m_i(z)=\exp\left(\lambda_i t\left(\exp(z)-1\right)\right)$, więc funkcję tworzącą momenty dla wektora kolumnowego **N** można zapisać w postaci:

$$M_{\mathbf{N}}(\mathbf{z})\exp\left[\sum_{i=1}^{k}\lambda_i t\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ji}z_i\right)-1\right\}\right]. \tag{6}$$

Następnie wyprowadźmy funkcję tworzącą momenty dla $\mathbf{S}=\left[S_1\ S_2\ \ldots\ S_n\right]^{\mathrm{T}}$ którą definiujemy w następujący sposób:

$$M_{\mathbf{S}}(\mathbf{z})=E\left[\prod_{i=}^{n}\exp\left(S_i z_i\right)\right]=E\left[E\left[\prod_{i=}^{n}\exp\left(S_i z_i\right)\middle|\mathbf{N}\right]\right].$$

Ponieważ wielkości szkód są niezależne od siebie, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}M_{\mathbf{S}}(\mathbf{z})&=E\left[\prod_{i=1}^{n}\left[M_{X_i}\left(z_i\right)\right]^{N_i}\right]=\\&=M_{\mathbf{N}}\left(\log\left(M_{X_1}\left(z_1\right)\right),\log\left(M_{X_2}\left(z_2\right)\right),\ldots,\log\left(M_{X_n}\left(z_n\right)\right)\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Wyznaczymy teraz funkcję tworzącą momenty dla S (por. wzór (3)):

$$M_S(\mathbf{z})=E\left[\exp\left(z\sum_{i=1}^{n}S_i\right)\right]=E\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(zS_i\right)\right]=M_{\mathbf{S}}(z\mathbf{1}),$$

gdzie **1** jest n-elementowym wektorem kolumnowym zwierającym tylko wartości równe jeden. Korzystając z końcowej postaci w (7) funkcji tworzącej momenty dla **S**, dostajemy:

$$M_S(z)=M_{\mathbf{N}}\left(\log\left(M_{X_1}(z)\right),\log\left(M_{X_2}(z)\right),\ldots,\log\left(M_{X_n}(z)\right)\right). \tag{8}$$

Stosując postać (6) funkcji tworzącej momenty dla wektora kolumnowego **N**, otrzymujemy następującą postać funkcji tworzącej momenty dla S:

$$M_S(z)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i t\left(\prod_{j=1}^{n}\left(M_{X_j}(z)\right)^{a_{ji}}-1\right)\right\}. \tag{9}$$

Z postaci (9) funkcji tworzącej momenty dla S można wywnioskować, że rozkład sumy zagregowanych szkód S z n klas ubezpieczeń do dowolnej ustalonej chwili t włącznie jest taki jak rozkład sumy zagregowanych szkód do chwili t włącznie w klasycznym modelu ryzyka, w którym proces zliczający szkody jest procesem Poissona $N(t)$ z intensywnością $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, a wielkości szkód mają rozkład następującej postaci:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(f_{X_1}^{*(a_{1i})} \cdot f_{X_2}^{*(a_{2i})} \cdot \ldots \cdot f_{X_n}^{*(a_{ni})} \right)(x), \tag{10}$$

gdzie: $f_{X_j}^{*(a_{ji})}$ jest a_{ji} splotem gęstości f_{X_i} oraz $f_{X_i}^{*(0)} \equiv 1$.

W przypadku, gdy wielkości szkód w klasycznym modelu ryzyka mają ciągły rozkład fazowy, wówczas można wyznaczyć dokładne prawdopodobieństwo ruiny [Rolski i in. 1998]. Załóżmy, że wielkości szkód w klasycznym modelu ryzyka mają ciągły rozkład fazowy $PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{B})$, tj. mają gęstość postaci: $f(t) = \boldsymbol{\alpha} \exp(t\mathbf{B})\left(-\mathbf{B}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$, gdzie $\mathbf{e} = [1\ 1\ \ldots\ 1]_{1\times l}$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \ldots\ \ \alpha_l]$ jest wektorem wierszowym o nieujemnych elementach takich, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l = 1$. Ponadto $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{l\times l}$ jest nieosobliwą macierzą taką, że wszystkie elementy leżące poza jej główną przekątną są nieujemne, wszystkie elementy na głównej przekątnej są niedodatnie, ponadto sumy elementów w każdym wierszu są niedodatnie i chociaż w jednym wierszu suma elementów jest ujemna. Wówczas prawdopodobieństwo ruiny zdefiniowane w (5) w zależności od kapitału początkowego u zadane jest funkcją postaci (por. [Rolski i in. 1998]):

$$\Psi(u) = p\boldsymbol{\alpha}^s \exp\left(u\left(\mathbf{B} + p\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^s\right)\right)\mathbf{e}^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

w której $\boldsymbol{\alpha}^s = -\mu^{-1}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}^{-1}$, $p = \dfrac{\lambda\mu}{c}$, gdzie μ jest wartością oczekiwaną wielkości szkody oraz λ jest intensywnością w procesie zliczającym szkody.

3. Oddziaływanie zewnętrznych czynników ryzyka w dwuklasowym modelu ryzyka

Przeprowadzimy analizę wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w modelu ryzyka dla dwóch klas ubezpieczeń, zakładając wykładnicze rozkłady szkód.

Na początku wprowadźmy model ryzyka dla dwóch klas ubezpieczeń, na które działają zewnętrzne czynniki ryzyka. Niech w każdej osobno klasie ubezpieczeń powodowane będą szkody przez czynniki ryzyka właściwe tylko dla danej klasy ubezpieczeń. W i-tej klasie ubezpieczeń czynniki ryzyka właściwe tylko dla tej klasy powodują pojawianie się szkód zgodnie z procesem Poissona M_i o intensywności λ_i ($i = 1, 2$). Ponadto na obie klasy ubezpieczeń działają zewnętrzne czynniki ryzyka wspólne dla obu klas, które powodują pojawianie się dodatkowo szkód w jednej i drugiej klasie zgodnie z procesem Poissona M_3 o intensywności λ_3. Zatem w pierwszej klasie ubezpieczeń proces zliczający szkody jest procesem Poissona postaci $N_1 = M_1 + M_3$ z intensywnością $\lambda_1 + \lambda_3$, a w drugiej klasie ubezpieczeń jest procesem Poissona postaci $N_2 = M_2 + M_3$ z intensywnością $\lambda_2 + \lambda_3$. Wektor kolumnowy $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$ można zapisać następująco:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} M_1 + M_3 \\ M_2 + M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ jest macierzą } \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$$

oraz $\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$ jest wektorem kolumnowym $\mathbf{M} = \left[M_j\right]_{3\times 1}$ we wzorze (2). Proces ryzyka (4) przyjmuje postać:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{M_1(t)+M_3(t)} X_{1j} + \sum_{j=1}^{M_2(t)+M_3(t)} X_{2j},$$

którą można sprowadzić do następującego klasycznego procesu ryzyka:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \tag{12}$$

w którym proces zliczający szkody $N(t)$ jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Ponadto X_j w modelu (12) to wielkości szkód niezależne od siebie oraz od $N(t)$, które mają ten sam rozkład o gęstości (10) przyjmującej następującą postać:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left(f_{X_1}^{*(a_{1i})} \cdot f_{X_2}^{*(a_{2i})} \right)(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} f_{X_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} f_{X_2}(x) + \frac{\lambda_3}{\lambda}\left(f_{X_1} \cdot f_{X_2} \right)(x),$$

gdzie f_{X_i} to gęstość rozkładu wielkości szkód w i-tej klasie ubezpieczeń ($i = 1, 2$). Przy założeniu, że wielkości szkód w i-tej klasie ubezpieczeń mają rozkład wykładniczy z parametrem β_i, tj. $f_{X_i}(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_i \exp(-\beta_i x)$ dla $i = 1, 2$, funkcję gęstości można sprowadzić do następującej postaci:

$$f_X(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_1\exp(-\beta_1 x) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_2\exp(-\beta_2 x) +$$
$$-+\frac{\lambda_3}{\lambda}\cdot\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_1\exp(-\beta_1 x) + \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_2\exp(-\beta_2 x)\right). \tag{13}$$

Gęstość (13) jest gęstością rozkładu fazowego, ponieważ rodzina rozkładów wykładniczych należy do rodziny rozkładów fazowych, splot dwóch rozkładów fazowych jest nadal rozkładem fazowym oraz mieszanka wypukła rozkładów fazowych jest również rozkładem fazowym [Rolski 1998]. Ze wzoru (11) można wyznaczyć dokładne prawdopodobieństwo ruiny we wprowadzonym modelu ryzyka.

Na wybranych przykładach numerycznych sprawdzimy wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny we wprowadzonym dwuklasowym modelu ryzyka. Przyjmijmy, że $\beta_1 = 0{,}5$, $\beta_2 = 2$ oraz $c = 4{,}75$.

Przypadek 1. Niech $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 1{,}5$ oraz $\lambda_3 = 1$. Wówczas gęstość wielkości szkód (13) upraszcza się do postaci:

$$f_X(x) = 0{,}6111\cdot\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)0{,}5\exp\left(-0{,}5x\right) + 0{,}3889\cdot\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)2\exp\left(-2x\right),$$

która jest gęstością rozkładu fazowego $PH(\alpha, \mathbf{B})$ z parametrami $\alpha = [0{,}6111 \quad 0{,}3889]$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Następnie wyznaczając ze wzoru (11) prawdopodobieństwo ruiny w zależności od kapitału początkowego u, otrzymujemy następującą funkcję:

$$\Psi_1(u) = 0{,}0083\exp(-1{,}8103u) + 0{,}8865\exp(-0{,}0581u). \tag{14}$$

Przypadek 2. Niech $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 0{,}5$. Zauważmy, że intensywności pojawiania się szkód w obu klasach są nadal takie same, tj. w pierwszej klasie intensywności wynosi $\lambda_1 + \lambda_3 = 1{,}5$, a w drugiej klasie wynosi $\lambda_2 + \lambda_3 = 2{,}5$, ale zmniejszyła się siła działania zewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy. Wyznaczając gęstość (13), otrzymujemy funkcję:

$$f_X(x) = 0{,}4762\cdot\mathbf{1}_{(0,\,\infty)}(x)0{,}5\exp(-0{,}5x) + 0{,}5238\cdot\mathbf{1}_{(0,\,\infty)}(x)2\exp(-2x),$$

która jest gęstością rozkładu fazowego $PH(\alpha, \mathbf{B})$ z parametrami $\alpha = [0{,}4762 \quad 0{,}5238]$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Wówczas prawdopodobieństwo ruiny w zależności od kapitału początkowego u wyznaczone za pomocą wzoru (11) przyjmuje postać funkcji:

$$\Psi_2(u) = 0{,}0135\exp(-1{,}7013u) + 0{,}8812\exp(-0{,}0619u). \tag{15}$$

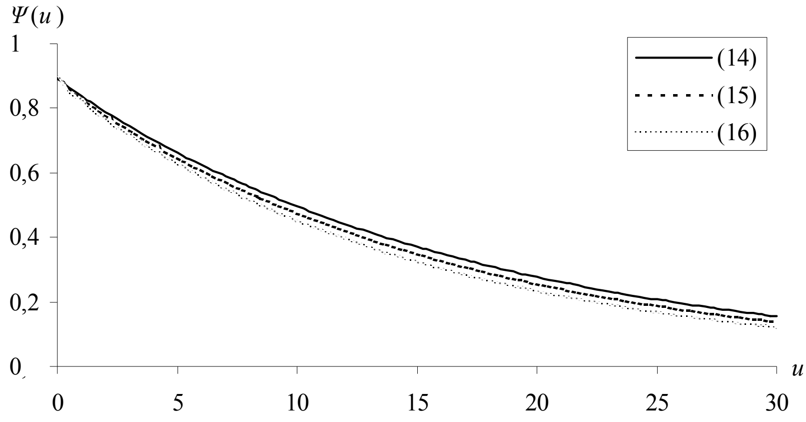
Wyznaczmy teraz prawdopodobieństwo ruiny w modelu ryzyka dla dwóch klas ubezpieczeń, na które nie działają zewnętrzne czynniki ryzyka. Załóżmy, że wielkości szkód w każdej klasie mają nadal takie same rozkłady wykładnicze, tj. w pierwszej klasie mają rozkład wykładniczy z parametrem $\beta_1 = 0{,}5$, a w drugiej mają rozkład wykładniczy z parametrem $\beta_2 = 2$. Ponieważ na obie klasy ubezpieczeń nie mają wpływu zewnętrzne czynniki ryzyka, dlatego w pierwszej klasie ryzyka proces zliczający szkody jest procesem Poissona postaci $N_1 = M_1$ z intensywnością λ_1 oraz w drugiej klasie ryzyka proces zliczający szkody jest procesem Poissona postaci $N_2 = M_2$ z intensywnością λ_2. N_1 nie zależy od N_2.

Przypadek 3. Niech $\lambda_1 = 1{,}5$, $\lambda_2 = 2{,}5$, tzn. intensywności napływu szkód w poszczególnych klasach ubezpieczeń są takie same jak w przypadkach 1 i 2. Przyjęty dwuklasowy model ryzyka, w którym nie ma oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń, można sprowadzić do klasycznego modelu ryzyka z procesem zliczającym szkody będącym procesem Poissona $N(t)$ z intensywnością $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ oraz niezależnymi wielkościami szkód o rozkładzie z funkcją gęstości (10) przyjmującą postać:

$$f_X(x) = 0{,}375 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 0{,}5 \exp(-0{,}5x) + 0{,}625 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 2\exp(-2x),$$

która jest gęstością rozkładu fazowego $PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{B})$ z parametrami $\boldsymbol{\alpha} = [0{,}375 \quad 0{,}625]$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Przyjmijmy dalej, że $c = 4{,}75$. Prawdopodobieństwa ruiny w zależności od kapitału początkowego u wyznaczone za pomocą (11) można zapisać w postaci funkcji:

$$\Psi_3(u) = 0{,}0193 \exp(-1{,}5918u) + 0{,}8754 \exp(-0{,}0661u). \tag{16}$$



Rys. 1. Wykresy funkcji prawdopodobieństwa ruiny (14), (15), (16)

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 1 przedstawiono wykresy funkcji prawdopodobieństw ruiny (14), (15) i (16) w zależności od kapitału początkowego u. Można zauważyć, że dla dowolnie ustalonej dodatniej wartości kapitału początkowego u wartość prawdopodobieństwa ruiny wzrasta w miarę zwiększania się wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ubezpieczeń.

4. Oddziaływanie zewnętrznych czynników ryzyka w czteroklasowym modelu ryzyka

Przeprowadzimy teraz analizę wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w modelu ryzyka dla czterech klas ubezpieczeń przy założeniu wykładniczych rozkładów szkód.

Na początku wprowadźmy model ryzyka dla czterech klas ubezpieczeń, na które działają zewnętrzne czynniki ryzyka. Niech w każdej klasie ubezpieczeń powodowane są szkody przez czynniki ryzyka właściwe tylko dla danej klasy ubezpieczeń. W i-tej klasie ubezpieczeń czynniki ryzyka właściwe tylko dla tej klasy powodują pojawianie się szkód zgodnie z procesem Poissona M_i o intensywności λ_i. Ponadto na pierwszą i drugą klasę ryzyka działają zewnętrzne czynniki ryzyka wspólne dla obu klas, które powodują pojawianie się dodatkowo szkód w tych klasach zgodnie z procesem Poissona M_5 o intensywności λ_5, natomiast na klasy drugą, trzecią i czwartą działają inne zewnętrzne czynniki ryzyka wspólne dla tych trzech klas, które powodują pojawianie się dodatkowo szkód w tych klasach zgodnie z procesem Poissona M_6 o intensywności λ_6. Wektor kolumnowy $\mathbf{N}$ można zapisać zgodnie ze wzorem (2), tj. $\mathbf{N} = \mathbf{AM} = \left[a_{ij}\right]_{4\times 6}\left[M_j\right]_{6\times 1}$:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} M_1 + M_5 \\ M_2 + M_5 + M_6 \\ M_3 + M_6 \\ M_4 + M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix}.$$

Proces ryzyka (4) przyjmuje tutaj postać:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{M_1(t)+M_2(t)} X_{1j} + \sum_{j=1}^{M_2(t)+M_5(t)+M_6(t)} X_{2j} + \sum_{j=1}^{M_3(t)+M_6(t)} X_{3j} + \sum_{j=1}^{M_4(t)+M_6(t)} X_{4j}.$$

Model ten można przekształcić do klasycznego procesu ryzyka:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \tag{17}$$

w którym proces zliczający szkody $N(t)$ jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6$. Ponadto X_j to wielkości szkód niezależne od siebie oraz od $N(t)$, które mają ten sam rozkład o gęstości (10) przyjmującej następującą postać:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\left(f_{X_1}^{*(a_{1i})} \cdot f_{X_2}^{*(a_{2i})} \cdot f_{X_3}^{*(a_{3i})} \cdot f_{X_4}^{*(a_{4i})}\right)(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} f_{X_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} f_{X_2}(x) + \\ + \frac{\lambda_3}{\lambda} f_{X_3}(x) + \frac{\lambda_4}{\lambda} f_{X_4}(x) + \frac{\lambda_5}{\lambda}\left(f_{X_1} \cdot f_{X_2}\right)(x) + \frac{\lambda_6}{\lambda}\left(f_{X_2} \cdot f_{X_3} \cdot f_{X_4}\right)(x),$$

gdzie f_{X_i} to gęstość rozkładu wielkości szkód w i-tej klasie ubezpieczeń ($i = 1, 2, 3, 4$). Załóżmy, że wielkości szkód w i-tej klasie ubezpieczeń mają rozkład wykładniczy z parametrem β_i, tj. $f_{X_i}(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_i \exp(-\beta_i x)$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Wówczas:

$$\begin{aligned} f_{X_i}(x) = {} & \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_1 \exp(-\beta_1 x) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_2 \exp(-\beta_2 x) + \\ & + \frac{\lambda_3}{\lambda}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_3 \exp(-\beta_3 x) + \frac{\lambda_6}{\lambda}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\beta_4 \exp(-\beta_4 x) + \\ & + \frac{\lambda_5}{\lambda}\left(\frac{\beta_2\beta_1 \exp(-\beta_1 x)}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\beta_1\beta_2 \exp(-\beta_2 x)}{\beta_1 - \beta_2}\right)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) + \\ & + \frac{\lambda_6}{\lambda}\left(\frac{\beta_3\beta_4\beta_2 \exp(-\beta_2 x)}{(\beta_3 - \beta_2)(\beta_4 - \beta_2)} + \frac{\beta_2\beta_4\beta_3 \exp(-\beta_3 x)}{(\beta_2 - \beta_3)(\beta_4 - \beta_3)} + \frac{\beta_2\beta_3\beta_4 \exp(-\beta_4 x)}{(\beta_2 - \beta_4)(\beta_3 - \beta_4)}\right)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Tak jak we wprowadzonym dwuklasowym modelu ryzyka w punkcie 3, można zauważyć, że f_X zadana w (18) jest gęstością zmiennej losowej o rozkładzie fazowym, dlatego można wyznaczyć dokładną wartość prawdopodobieństwa ruiny w modelu ryzyka (17).

Przeprowadźmy teraz analizę wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na wielkość prawdopodobieństwa ruiny we wprowadzonym czteroklasowym modelu ryzyka dla zadanych wartości parametrów. Przyjmijmy, że $\beta_1 = 0{,}5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 1{,}5$, $\beta_4 = 2$ oraz $c = 9$.

Przypadek 1. Niech $\lambda_1 = 1{,}5$, $\lambda_2 = 0{,}5$, $\lambda_3 = 1{,}75$, $\lambda_4 = 0{,}75$, $\lambda_5 = 0{,}8$ oraz $\lambda_6 = 0{,}2$. Gęstość wielkości szkód (18) przyjmuje postaci funkcji:

$$f_X(x) = 0{,}5636 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)0{,}5\exp(-0{,}5x) + 0{,}1636 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\exp(-x) + \\ + 0{,}0273 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)1{,}5\exp(-1{,}5x) + 0{,}2455 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)2\exp(-2x),$$

która jest gęstością rozkładu fazowego $PH(\alpha, \mathbf{B})$ z parametrami:

$$\alpha = [0{,}5636 \;\; 0{,}1636 \;\; 0{,}0273 \;\; 0{,}2455] \text{ oraz } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$ Ze wzoru (11) otrzymujemy następującą funkcję prawdopodobieństwa ruiny w zależności od kapitału początkowego u:

$$\Psi_1(u) = 0{,}0049\exp(-1{,}8929u) + 0{,}0009\exp(-1{,}4868u) + 0{,}0047\exp(-0{,}9381u) + \\ + 0{,}8645\exp(-0{,}071u). \quad (19)$$

Przypadek 2. Niech $\lambda_1 = 1{,}9$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1{,}85$, $\lambda_4 = 0{,}85$, $\lambda_5 = 0{,}4$ oraz $\lambda_6 = 0{,}1$, tzn. w każdej klasie proces zliczający szkody jest nadal procesem Poissona z tą samą intensywnością jak w pierwszym przypadku, jednak uległ zmniejszeniu wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na wszystkie klasy ubezpieczeń, tj. zmniejszyły się intensywności λ_5 oraz λ_6 procesów zliczających szkody, które odpowiadają tym czynnikom ryzyka. Wyznaczając gęstość (18), otrzymujemy funkcję:

$$f_X(x) = 0{,}4486 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 0{,}5\exp(-0{,}5x) + 0{,}1967 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\exp(-x) + \\ + 0{,}1721 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 1{,}5\exp(-1{,}5x) + 0{,}185 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 2\exp(-2x),$$

która jest gęstością rozkładu fazowego $PH(\alpha, \mathbf{B})$ z parametrami:

$$\alpha = [0{,}4426 \;\; 0{,}1967 \;\; 0{,}1721 \;\; 0{,}1885] \text{ oraz } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru (11), otrzymujemy funkcję prawdopodobieństwa ruiny w zależności od kapitału początkowego u w postaci:

$$\Psi_2(u) = 0{,}00298\exp(-1{,}9217u) + 0{,}0047\exp(-1{,}4182u) + 0{,}00789\exp(-0{,}9064u) + \\ + 0{,}8595\exp(-0{,}0759u). \quad (20)$$

Wyznaczmy teraz prawdopodobieństwo ruiny w modelu ryzyka dla czterech klas ubezpieczeń, na które nie działają zewnętrzne czynniki ryzyka. Nadal przyjmować będziemy, że $c = 9$ oraz wielkości szkód w kolejnych klasach mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio: $\beta_1 = 0{,}5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 1{,}5$, $\beta_4 = 2$. Ponieważ na klasy ubezpieczeń nie działają zewnętrzne czynniki ryzyka, więc w i-tej klasie ryzyka proces zliczający szkody jest procesem Poissona postaci $N_i = M_i$ z intensywnością λ_i i wszystkie procesy N_i są niezależne od siebie.

Przypadek 3. Niech w każdej klasie procesy zliczające wszystkie szkody mają takie same intensywności jak w przypadkach 1 i 2, tj. niech $\lambda_1 = 2{,}3$, $\lambda_2 = 1{,}5$,

$\lambda_3 = 1{,}95$, $\lambda_4 = 0{,}95$. Wprowadzony czteroklasowy model ryzyka, w którym przyjęto, że nie ma oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy, można przekształcić do klasycznego modelu ryzyka z procesem zliczającym szkody będącym procesem Poissona z intensywnością $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ oraz z niezależnymi wielkościami szkód o tym samym rozkładzie z funkcją gęstości (10) przyjmującą postać:

$$f_X(x) = 0{,}3428 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 0{,}5 \exp(-0{,}5x) + 0{,}2239 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \exp(-x) + \\ + 0{,}291 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 1{,}5 \exp(-1{,}5x) + 0{,}1418 \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 2 \exp(-2x),$$

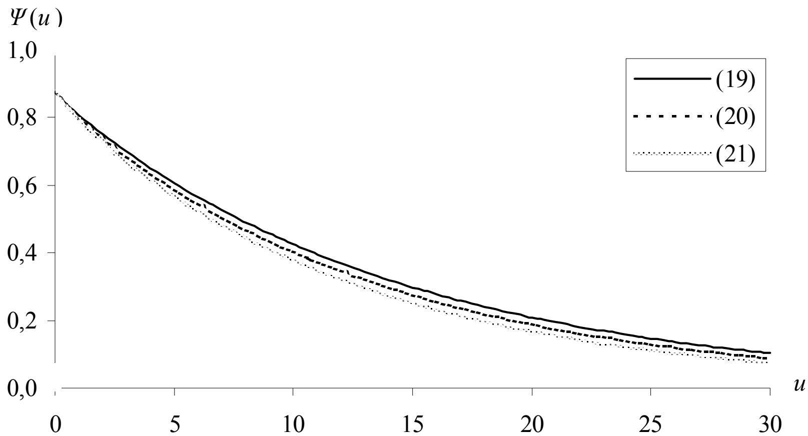
która jest gęstością rozkładu fazowego $PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{B})$ z parametrami:

$$\boldsymbol{\alpha} = [0{,}3428 \quad 0{,}2239 \quad 0{,}2910 \quad 0{,}1418] \text{ oraz } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Prawdopodobieństwo ruiny w zależności od kapitału początkowego u wyznaczone ze wzoru (11) przyjmuje postać funkcji:

$$\Psi_3(u) = 0{,}0019 \exp(-1{,}9427u) + 0{,}0068 \exp(-1{,}3636u) + 0{,}01197 \exp(-0{,}8675u) + \\ + 0{,}8543 \exp(-0{,}0816u). \qquad (21)$$

Na rysunku 2 zostały przedstawione wykresy funkcji prawdopodobieństw ruiny: (19), (20) i (21) w zależności od kapitału początkowego u. Podobnie jak na rysunku 1 można zauważyć, że dla dowolnie ustalonej dodatniej wartości kapitału początkowego u wartość prawdopodobieństwa ruiny wzrasta w miarę zwiększenia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń.



Rys. 2. Wykresy funkcji prawdopodobieństwa ruiny (19), (20) i (21)

Źródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

W pracy omówiony został model ryzyka dla kilku klas ubezpieczeń, w których procesy zliczające szkody są zależnymi procesami Poissona. Zależność między procesami zaliczającymi szkody jest wynikiem działania zewnętrznych czynników ryzyka na różne klasy ubezpieczeń, które powodują w tych klasach dodatkowe liczebności szkód zgodnie z jednorodnymi procesami Poissona. Model ten został sprowadzony do klasycznego modelu ryzyka [Ambagaspitiya 1998]. Następnie na wybranych przykładach numerycznych analizowany był wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na wielkość prawdopodobieństwa ruiny w modelach ryzyka dla ustalonej liczby klas przy założeniu wykładniczych rozkładów szkód. Można było zaobserwować wzrost wielkości prawdopodobieństwa ruiny w miarę zwiększenia siły działania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń. Można przeprowadzać podobne analizy wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w innych modelach ryzyka, np. w modelu ryzyka dla kilku klas ubezpieczeń, w których zewnętrzne czynniki ryzyka powodują pojawianie się szkód zgodnie z procesem Erlanga [Guo i in. 2002]. Można też przyjąć dwuwymiarowy model ryzyka dla dwóch klas ubezpieczeń, na które, tak jak w tej pracy, mają wpływ zewnętrzne czynniki ryzyka powodujące pojawianie się szkód w obu klasach zgodnie z procesem Poissona, ale przez ruinę rozumieć spadek procesu ryzyka po raz pierwszy poniżej zera w co najmniej jednej klasie ubezpieczeń [Guo i in. 2002].

Literatura

Ambagaspitiya R.S., *On the distribution of a sum of correlated aggregate claims*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1998 nr 23, s.15-19.

Guo J., Wu X., Yuen K.C., *On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2002 nr 31, s. 205-214.

Guo J., Wu X., Yuen K.C., *On the first time of ruin in the bivariate compound Poissona model*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2006 nr 38, s. 298-308.

Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, AE, Wrocław 2000.

Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe. Część I. Teoria ryzyka*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugles J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, 1998.

Ronka-Chmielowiec W. (red.), *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach*, AE, Wrocław 2000.

AN IMPACT OF SOME OUTSIDE RISK FACTORS ON THE INFINITE-TIME RUIN PROBABILITY FOR RISK MODEL WITH *N* CLASSES OF BUSINESS

Summary: This paper discusses a risk model with *n* classes of insurance business. In this model, the claim number processes are correlated Poisson processes. The correlation between the claim number processes is due to some outside risk factors like natural disasters, which may cause different kinds of insurance claims. The model can be converted to a classical risk model. On some numerical examples the author investigates the impact of these outside risk factors which cause various claims in different classes of business on the infinite-time ruin probability.