

**Marcin Łupiński**

Uniwersytet Warszawski, Narodowy Bank Polski

---

## KONSTRUKCJA SPEKTRALNEGO OSCYLATORA MACD DLA WYBRANYCH CEN AKCJI BANKÓW NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE

---

**Streszczenie:** Celem artykułu jest prezentacja spektralnej wersji oscylatora MACD zbudowanego z wykorzystaniem analizy spektralnej oraz metod filtracji szeregów czasowych traktowanych jako realizacje procesów stochastycznych. W części teoretycznej pracy przedstawione zostały własności filtru Christiano–Fitzgeralda, stanowiącego przybliżenie filtru idealnego, który zastosowany został do konstrukcji wskaźnika MACD w domenie częstotliwości. Opracowany wskaźnik był używany do prognozowania punktów zmiany tendencji wybranych cen akcji banków notowanych na GPW w Warszawie. Jakość prognoz uzyskanych za pomocą spektralnej wersji oscylatora MACD została porównana z prognozami uzyskanymi na podstawie standardowej wersji tego rodzaju indykatora. Otrzymane wyniki pozwalają stwierdzić, że spektralna wersja MACD pozwala na uzyskanie bardziej adekwatnych prognoz od wersji używanej dotychczas w analizie technicznej.

**Słowa kluczowe:** analiza spektralna, filtry spektralne, punkty zmiany tendencji.

### 1. Wstęp

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie procesu konstrukcji i operacyjnego wykorzystania spektralnego wariantu oscylatora MACD (*Moving Average Convergence Divergence*), stanowiącego pomocnicze narzędzie w procesie prognozowania punktów zmiany tendencji aktywów notowanych na GPW w Warszawie. W stosunku do pierwotnej wersji oscylatora zastosowano tu istotną modyfikację: różnica wykładniczych średnich ruchomych średnio- i krótkookresowych zastąpiona została wynikami filtracji danych wejściowych uzyskanymi na podstawie liniowego, niesymetrycznego, środkowoprzepustowego filtru spektralnego opracowanego przez Christiano i Fitzgeralda [1999], będącego optymalnym przybliżeniem filtru idealnego. Parametry tego filtru, niezbędne do wyliczenia operacyjnego wskaźnika spektralnego MACD, ustalone zostały na podstawie analizy funkcji gęstości spektralnej wspomnianych danych wejściowych. Podejście takie zapewnia możliwość modelowego opisanego własności uzyskanego oscylatora, pozwala także na uzyskanie większej elastyczności dzięki dopasowaniu parametrów filtrowania do własności spektralnych szeregu poddawanego transformacji. Mając na uwadze przeanalizowaną

literaturę tematu, można stwierdzić, że w niniejszej pracy po raz pierwszy opisano zastosowanie tak skonstruowanego wskaźnika do prognozowania zmian tendencji wyceny aktywów notowanych na GPW. Hipoteza badawcza definiująca ramy przeprowadzonych prac brzmi w następujący sposób: spektralny oscylator MACD pozwala na prognozowanie punktów zmiany tendencji z większą trafnością, niż ma to miejsce w przypadku wskaźnika tradycyjnego, dzięki odwołaniu do modelu matematycznego liniowego, niesymetrycznego, środkowoprzepustowego filtra pozwalającego na uwzględnienie własności cyklicznych szeregów czasowych, na bazie których jest on budowany.

Aparat matematyczny zastosowany do konstrukcji przedmiotowego oscylatora spektralnego obejmuje dwa podstawowe zakresy zagadnień: analizę spektralną procesów stochastycznych oraz teorię optymalnego filtrowania. Zarys obu zagadnień zostanie przedstawiony w drugiej sekcji niniejszej pracy. Następnie zaprezentowane zostaną własności przekształceń używanych do obliczenia standardowego oscylatora MACD i towarzyszącej mu linii sygnałnej oraz ich odpowiedników spektralnych. W sekcji tej przedstawiony zostanie także ogólny algorytm konstrukcji spektralnego odpowiednika MACD i linii sygnałnej. Część czwarta poświęcona jest opisowi danych finansowych użytych do oceny jakości prognozowania zaproponowanego wskaźnika. Część kolejna stanowi prezentację procesu konstrukcji spektralnego wskaźnika MACD dla konkretnych szeregów cen akcji, w sekcji tej przedstawiono również ocenę możliwości operacyjnego wykorzystania utworzonego oscylatora do prognozowania punktów zmiany tendencji cen akcji wybranych banków notowanych na GPW. W ostatniej części pracy zawarto konkluzje.

## 2. Metodologia zastosowana w badaniu

### 2.1. Analiza spektralna

Celem analizy spektralnej jest ustalenie zbioru częstotliwości odpowiedzialnych za zmienność badanego szeregu czasowego (rozumianego jako realizacja procesu stochastycznego). Wkład poszczególnych częstotliwości w siłę wahań szeregu ustalany jest dwójako: na podstawie periodogramu bądź też na bazie estymatora gęstości widmowej procesu, charakteryzującego ilość energii przenoszonej przez proces w ramach jego oscylacji z określoną częstotliwością. Poniżej przedstawione zostaną pokrótce obie podstawowe metody analizy spektralnej.

Niech dany będzie proces stochastyczny  $X_t = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ , stacjonarny w szerszym sensie. Zgodnie z reprezentacją Cramera proces ten może być przedstawiony w postaci:

$$X_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(\omega_k) \cos(\omega_k t) + \beta(\omega_k) \sin(\omega_k t)], \quad (1)$$

Gdzie  $\mu$  jest wartością oczekiwaną procesu  $X_t$ ,  $\alpha(\omega_k)$  i  $\beta(\omega_k)$  są procesami stochastycznymi obserwowanymi w domenie częstotliwości, dla których  $E[\alpha(\omega_k)] = 0$ ,

$E[\beta(\omega_k)] = 0$ ,  $D^2[\alpha(\omega_k)] = D^2[\beta(\omega_k)] = a_k$ , natomiast  $\omega_n$  oznacza częstotliwość kątową (pulsację) mierzona w radianach. Na potrzeby naszej analizy przyjmuje się, że  $\omega_k \in [-\pi, \pi]$ . Reprezentacja ta wyraża wyjściowy proces  $X_t$  jako nieskończoną ważoną sumę ortogonalnych funkcji okresowych  $\cos(\omega_k t)$  i  $\sin(\omega_k t)$ .

W przypadku obserwacji procesu stochastycznego charakteryzującego się skończoną długością próby ( $N$ ) opisana reprezentacja ma postać przybliżoną. Określana jest ona formułą:

$$x_t = \bar{x} + \sum_{k=0}^{N/2} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)], \quad (2)$$

gdzie  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t$ ,  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N/2$ .

Parametry  $a_k, b_k$  opisujące wkład danej częstotliwości  $\omega_k$  w wahania obserwowanego szeregu czasowego i jednocześnie miarę korelacji kosinusoidy/sinusoidy z obserwowanymi danymi obliczane są zgodnie z formułami:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \cos(\omega_k t), \quad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \sin(\omega_k t). \quad (4)$$

Siła tego wkładu mierzona jest za pomocą kwadratu współczynników  $a_k$  i  $b_k$ , wykres syntetycznej miary  $a^2_k + b^2_k$  przyporządkowanej odpowiednim częstotliwościom  $\omega_k$  nazywany jest periodogramem.

Dla danego procesu stochastycznego można również badać w domenie częstotliwości jego funkcję autokowariancji. W przypadku, gdy proces ten jest stacjonarny w szerszym sensie, jedynym argumentem tej funkcji jest przesunięcie w czasie  $\tau$ .

$$R_\tau = \text{cov}(X_t, X_{t-\tau}) = E[(X_t - \mu)((X_{t-\tau} - \mu))]. \quad (5)$$

Gdy suma sekwencji wartości bezwzględnych autokowariancji procesu  $R_\tau = \{r_\tau\}_{\tau=0}^\infty$  jest skończona, na jej podstawie może zostać obliczona tzw. funkcja gęstości spektralnej procesu  $X_t(\varphi(\omega))$ . Dla procesów dyskretnych funkcja ta może zostać obliczona za pomocą dyskretnej transformaty Fouriera (DTF):

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_\tau e^{-i\omega\tau}. \quad (6)$$

Jako kombinacja liniowa elementów sekwencji  $\{r_\tau\}_{\tau=0}^\infty$  zawiera ona te same informacje, które są dostępne w przypadku funkcji autokowariancji, z tym że w przypadku funkcji gęstości spektralnej reprezentowane są one w domenie częstotliwości.

Obszar pod wykresem funkcji gęstości spektralnej, obliczany dla zakresu  $[-\pi, \pi]$ , może być interpretowany jako wariancja wyjściowego procesu  $X_t$

$$\text{var}(X_t) = r_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) d\omega. \quad (7)$$

Jeśli się weźmie pod uwagę, że dla procesów rzeczywistych  $\varphi(\omega)$  jest symetryczna względem 0, formuła (7) może zostać zapisana w uproszczonej postaci:

$$r_0 = 2 \int_0^\pi \varphi(\omega) d\omega. \quad (8)$$

Próbując dokonać interpretacji powyższego wzoru, możemy stwierdzić, że funkcja gęstości spektralnej określa rozkład wielkości wariancji procesu w zależności od częstotliwości wahań notowanych w jego przypadku. Proces obliczania gęstości spektralnej może być więc traktowany jako dekompozycja wariancji na składowe związane z poszczególnymi częstotliwościami oscylacji.

Autokowariancja procesu o indeksie  $\tau$  może być „odzyskana” z funkcji gęstości spektralnej za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera:

$$r_\tau = \int_{-\pi}^\pi \varphi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (9)$$

W przypadku posiadania obserwacji procesu stochastycznego możliwe jest wyłącznie obliczenie estymatora funkcji gęstości spektralnej. Estymator ten wykorzystuje oszacowanie funkcji autokowariancji procesu (5) dane wzorem:

$$\bar{r}_\tau = \frac{1}{N-\tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} (X_t - \bar{x})(X_{t-\tau} - \bar{x}). \quad (10)$$

Liczony jest on dla skończonej ilości parametrów  $\tau = -N + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1$ :

$$\bar{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} \bar{r}_\tau e^{-i\omega\tau}. \quad (11)$$

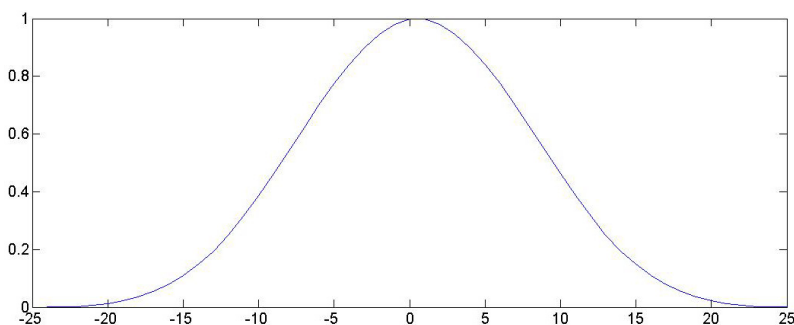
Biorąc pod uwagę dwa powyższe fakty, można stwierdzić, że choć estymator funkcji gęstości spektralnej jest nieobciążony, nie jest on jednak estymatorem zgodnym. W związku z tym stosuje się nieparametryczne metody estymacji funkcji gęstości spektralnej dążące do zapewnienia jego zgodności i minimalizacji wariancji. Klasyczna procedura estymacji nieparametrycznej została opracowana przez Tukeya. Postuluje ona „ważenie” poszczególnych wartości autokowariancji  $\bar{r}_\tau$  pewnymi wartościami, które są symetryczne względem  $\tau = 0$  i maleją proporcjonalnie do wartości  $\tau$ .

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} a_\tau \bar{r}_\tau e^{-i\omega\tau}. \quad (12)$$

Co więcej, powyżej pewnej wartości  $M$  ( $M \leq \tau$ ) wartości wag są zazwyczaj równe zero. Sekwencja wartości wag przyporządkowana poszczególnym wartościom  $\tau$  nazywana jest oknem. W literaturze znanych jest wiele postaci okien: najbardziej znane to okno prostokątne, trójkątne, Tukeya-Hanninga, Bartletta oraz Parzena. Dobór rodzaju okna, jak i jego długości ( $M$ ) uznawane jest za czynność ekspercką, opartą na przekonaniu osoby badającej charakterystykę szeregu dotyczącym przybliżonego przebiegu funkcji gęstości spektralnej. Użycie okna prowadzi bowiem do występowania dwóch efektów: utraty rozdzielczości (możliwości obserwowania zjawisk zachodzących częściej niż co  $1/M$ ), który to efekt zależy od długości sekwencji wag oraz wyciekania energii procesu, czyli przepływu gęstości spektralnej z częstotliwości istotnych na nieistotne, co z kolei jest pochodną kształtu okna. Biorąc pod uwagę charakter badanych szeregów czasowych cen akcji, użyto okno Parzena, o relatywnie

dużej długości, wygładzające spektrum w sposób łagodny, pozwalające na analizę badanych szeregów z dużą częstotliwością. Postać użytego okna jest następująca:

$$a_\tau = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{\tau}{M}\right)^2 + 6\left(\frac{|\tau|}{M}\right)^3 & \text{dla } 0 \leq |\tau| \leq M/2 \\ 2\left(1 - \left(1 - \frac{|\tau|}{M}\right)^3\right) & \text{dla } M/2 < |\tau| \leq M \end{cases} \quad (13)$$



Rys. 1. Okno Parzena ( $M = 50$ )

Źródło: opracowanie własne.

## 2.2. Filtrowanie szeregów czasowych

Procedura filtrowania procesu stochastycznego polega na transformacji elementów tego procesu zgodnie ze ściśle określonym algorytmem opisanym przez zbiór formuł matematycznych. Algorytm ten może mieć charakter liniowy bądź nieliniowy, stacjonarny bądź niestacjonarny, obejmować skończony lub nieskończony, symetryczny bądź niesymetryczny zestaw składników procesu stochastycznego oraz opierać się na rekursji lub zakładać jej brak. Znaczenie poszczególnych cech algorytmu filtrowania wyjaśnione zostanie w dalszej części opracowania.

Filtr  $H$  transformuje elementy wejściowego procesu stochastycznego  $X_t = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  do postaci wyjściowej sekwencji składającej się na proces  $Y_t = \{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ :

$$Y_t = H(X_t). \quad (14)$$

Jeśli wynikiem filtrowania kombinacji liniowej procesów jest kombinacja liniowa przefiltrowanych wartości tychże elementów:

$$H(aX_t^1 + bX_t^2) = aH(X_t^1) + bH(X_t^2), \quad (15)$$

filtr taki nazywany jest filtrem liniowym. Stacjonarność filtru zakłada przemienność operacji filtrowania i przesuwania w czasie jego elementów:

$$L^k(H(X_t)) = H(L^k(X_t)), \quad (16)$$

gdzie  $L^k$  jest operatorem opóźnienia o  $k$  okresów. W przypadku filtru liniowego stacjonarność jest równoważna stałości parametrów filtru w czasie. Z kolei skończoność filtru (skończona pamięć) oznacza uzależnienie jego wartości wyjściowych od ustalonej liczby elementów procesu wejściowego:

$$y_t = h(x_{t-l}, x_{t-l+1}, \dots, x_t, \dots, x_{t+k-1}, x_{t+k}), \quad (17)$$

gdzie  $k$  i  $l$  są określonymi liczbami całkowitymi. Filtr tego rodzaju nazywany jest również filtrem prostym. Jeśli konstruowany jest filtr symetryczny, to zachodzi równość wartości parametrów  $k$  i  $l$ .

Rekursywność filtrowania zakłada wykorzystanie w procesie obliczania wartości filtru dla okresu  $t$  jego  $l$  poprzednich wartości

$$y_t = h(y_{t-1}, \dots, y_{t-l}, x_{t-1}, x_{t-1+1}, \dots, x_t, \dots, x_{t+k-1}, x_{t+k}). \quad (18)$$

W naszych rozważaniach będziemy się zajmować filtrami posiadającymi jednocześnie następujący zestaw cech: liniowość, niestacjonarność, skończoność, brak symetrii oraz rekursji. Filtry takie mogą być przedstawione w postaci:

$$y_t = \sum_{j=-k}^l a_j x_{t-j} \quad (19)$$

bądź prościej:

$$y_t = C(L)x_t, \quad (20)$$

gdzie  $C(L)$  jest wielomianem operatora opóźnienia.

W dalszej części opracowania zdefiniowane zostanie pojęcie filtru idealnego, a następnie określone zostaną trzy podstawowe rodzaje filtrów idealnych charakteryzujące się własnościami przenoszenia częstotliwości przydatnymi w procesie konstruowania spektralnego oscylatora MACD.

### 2.2.1. Filtr idealny

Filtr idealny zachowuje w ramach procesu wyjściowego w niezmienionej formie wahania o wartościach częstotliwości należących do określonego zbioru, eliminując jednocześnie całkowicie wahania odpowiadające wartościom częstotliwości spoza tego zbioru. W jaki sposób określić, które częstotliwości mają być przez idealny filtr przepuszczone, a które eliminowane? Udzielając odpowiedzi na to pytanie, oprzemy się na analizie nieskończonego, liniowego, idealnego filtru stosowanego do dyskretnego procesu stochastycznego. W takim przypadku elementy wyjściowego procesu stochastycznego mogą być zapisane jako suma splotowa elementów procesu wejściowego oraz procesu reprezentującego wagi filtru  $h_j$ :

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j x_{t-j}. \quad (21)$$

Z właściwości splotu wiadomo, że jego transformata jest iloczynem transformat splatanych procesów. W związku z tym reprezentacja procesu  $Y_t$  w dziedzinie częstotliwości wyglądać będzie następująco:

$$\hat{Y}_t(\omega) = \hat{H}(\omega)\hat{Y}_t(\omega), \quad (22)$$

gdzie  $\hat{H}(\omega)$  jest transformatą Fouriera procesu reprezentującego filtrowanie. Funkcja ta jest określana w literaturze mianem funkcji transmitancji. Jeśli więc chcemy „wytłumić” określone częstotliwości, wystarczy przypisać tym częstotliwościom wartość funkcji transmitancji równą 0, definiując ją jednocześnie dla pozostałych wartości na poziomie 1. Dążąc do uzyskania procesu wyjściowego  $Y_t$  o odpowiedniej charakterystyce, nakładamy więc restrykcje na spektralną reprezentację odpowiadającego mu procesu filtrującego. Restrykcje te mogą zostać przeniesione do domeny czasowej, gdzie odbywa się rzeczywiste filtrowanie, poprzez zastosowanie odwrotnej transformaty Fourierowskiej do funkcji transmitancji określonej dla poszczególnych  $\omega$ . W ten sposób wyznaczone zostają wagi  $h_j$  liniowego nieskończonego filtra idealnego, dla którego przeprowadziliśmy nasze rozważania.

W celu dokładnego określenia własności filtra na bazie funkcji transmitancji liczone są dwie miary, określające odpowiednio zniekształcenie amplitudy oraz przesunięcie w fazie obserwacji filtrowanego procesu charakteryzujących się określonymi częstotliwościami. Miary te to charakterystyka amplitudowa liczona jako moduł transmitancji ( $|\hat{H}(\omega)|$ ) oraz charakterystyka fazowa określana przez argument (ką) tejże funkcji ( $Arg(\hat{H}(\omega))$ ).

Wartości wag liniowego nieskończonego filtra idealnego  $H$  mogą być interpretowane jeszcze w inny sposób. Przyjmijmy, że jesteśmy w stanie określić dodatkową funkcję, tzw. zaburzenie impulsowe (reprezentujące jednostkowy szok w chwili czasu  $j$ ) w zależności od numeru indeksu  $j$ :

$$I(j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 0 \\ 0 & \text{dla } j \neq 0 \end{cases}. \quad (23)$$

W takim wypadku każda z wag  $h_j$  może być interpretowana jako funkcja odpowiedzi filtra  $H$  na zdefiniowane powyżej zaburzenie jednostkowe:

$$h_j = H(I(j)). \quad (24)$$

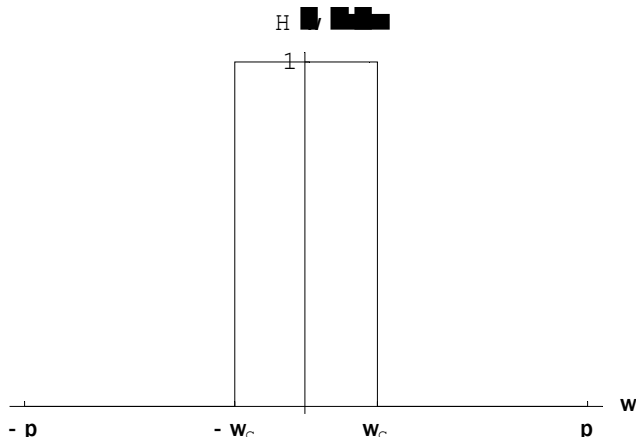
Formuła (24) znana jest w literaturze pod nazwą odpowiedzi impulsowej filtra  $H$ .

Po zdefiniowaniu konstrukcji filtra idealnego możemy określić trzy podstawowe warianty tego filtra, charakteryzujące się odpowiednimi własnościami przenoszenia funkcji częstotliwości. Pierwszy wariant to filtr dolnoprzepustowy (*low-pass*), eliminujący z wyjściowego procesu stochastycznego częstotliwości wyższe od częstotliwości granicznej  $\omega_c$ . Transmitancja tego filtra określona jest wzorem:

$$\hat{H}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{dla } |\omega| > \omega_c \end{cases}. \quad (25)$$

Jednocześnie odwrotna transformata Fouriera funkcji transmitancji, czyli odpowiedź impulsowa tego filtru, może być obliczona zgodnie z formułą:

$$h_j = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_c j)}{\pi j} & \text{dla } j \neq 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} & \text{dla } j = 0 \end{cases} . \quad (26)$$



**Rys. 2.** Wykres funkcji transmitancji idealnego filtra dolnoprzepustowego

Źródło: opracowanie własne.

Analogicznie definiowany jest filtr górnoprzepustowy (*high-pass*), przepuszczający wysokie częstotliwości, począwszy od  $\omega_g$ . Transmitancja tego filtra określona jest wzorem:

$$\hat{H}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\omega| \geq \omega_g \\ 0 & \text{dla } |\omega| < \omega_g \end{cases} . \quad (27)$$

Odpowiedź impulsowa ma bardziej skomplikowaną postać, niż miało to miejsce w przypadku poprzednika:

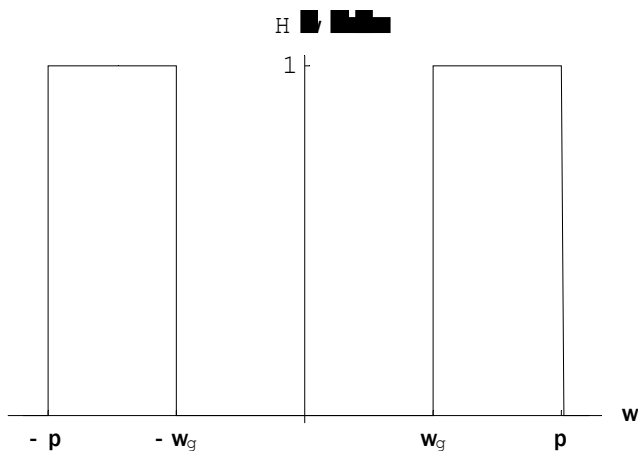
$$h_j = \begin{cases} \delta(j) - \frac{\sin(\omega_g j)}{\pi j} & \text{dla } j \neq 0 \\ \infty & \text{dla } j = 0 \end{cases} , \quad (28)$$

gdzie  $\delta(j)$  jest dystrybucją delty Diraca.

Trzeci wariant, najistotniejszy z punktu widzenia niniejszej analizy, to filtr środkowoprzepustowy (*band-pass*), zachowujący wahania o częstotliwości z zakresu  $[\omega_a, \omega_b]$ . Związana z nim funkcja transmitancji ma postać:

$$\hat{H}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b \\ 0 & \text{wp. p.} \end{cases} . \quad (29)$$





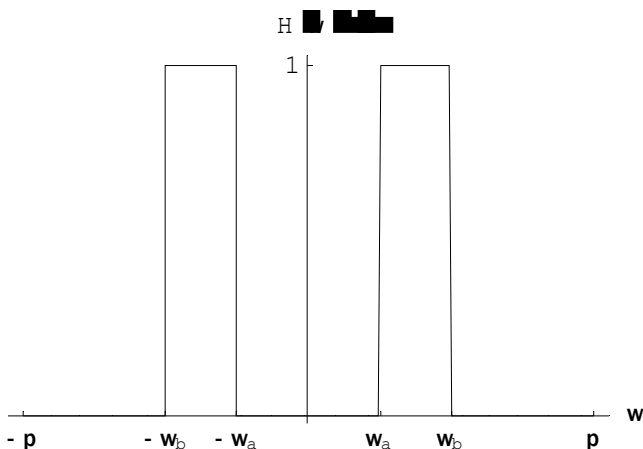
**Rys. 3.** Wykres funkcji transmitancji idealnego filtra górnoprzepustowego

Źródło: opracowanie własne.

Z kolei odpowiedź impulsowa dana jest wzorem:

$$h_j = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_b j) - \sin(\omega_a j)}{\pi i} & \text{dla } i \neq 0 \\ \frac{\omega_b - \omega_a}{\pi} & \text{dla } i = 0 \end{cases}, \quad (30)$$

który może być łatwo wyprowadzony po zinterpretowaniu filtra środkowoprzepustowego jako złożenia dwóch filtrów dolnoprzepustowych o częstotliwościach odcięcia odpowiednio  $\omega_b$  i  $\omega_a$ .



**Rys. 4.** Wykres funkcji transmitancji idealnego filtra środkowoprzepustowego

Źródło: opracowanie własne.

### 2.2.2. Optymalna aproksymacja filtru idealnego

Zgodnie z formułą podaną w punkcie 2.2.1 filtr idealny realizowany jest jako nieskończona suma iloczynów wag tego filtru oraz elementów filtrowanego procesu stochastycznego. W rzeczywistości filtr taki nie jest możliwy do realizacji ze względu na posiadanie przez badacza skończonej ilości obserwacji szeregu czasowego. Potrzebne jest więc optymalne przybliżenie filtru idealnego, pozwalające na jego operacyjne wykorzystanie.

Jedną z metod uzyskania takiego przybliżenia jest zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do znalezienia minimum sumy kwadratów odchyłeń wyjścia filtru idealnego  $y_t$  i filtru przybliżającego  $\bar{y}_t$ .

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}_t) \rightarrow \min. \quad (31)$$

Inna metoda obejmuje minimalizację odchyłeń reprezentacji filtru zapisanej dziedzinie częstotliwości:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{H}(\omega) - \hat{B}(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \min, \quad (32)$$

gdzie  $\hat{H}(\omega)$ ,  $\hat{B}(\omega)$  są odpowiednio funkcjami transmitancji filtru idealnego i aproksymującego.

Wprowadzenie formuły na optymalną aproksymację filtru idealnego dokonamy dla filtru liniowego. Jest on dany standardowym wzorem:

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j x_{t-j}. \quad (33)$$

Rozwiązaniem naszego problemu jest filtr liniowy o skończonej pamięci:

$$\bar{y}_t = \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j}, \quad (34)$$

spełniający kryterium najlepszego przybliżenia przyjmujące postać minimalizacji kwadratu błędu odchyłeń:

$$\|y_t - \bar{y}_t\|^2 = \min_{B_j} \|y_t - \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j}\|^2. \quad (35)$$

Gdy mamy do czynienia z procesami stochastycznym, kwadrat normy różnicy tychże procesów wyznacza się za pomocą wartości oczekiwanej:

$$\|y_t - \bar{y}_t\|^2 = E[(y_t - \bar{y}_t)^2]. \quad (36)$$

Jak zostało to pokazane w pracach [Gichman, Skorochod 1968; Wentzell 1980], procesy  $y_t$ ,  $\bar{y}_t$ , i  $y_t - \bar{y}_t$  zapisane odpowiednio jako kombinacja liniowa (33), (34) i kombinacja liniowa poprzednich dwóch kombinacji stanowią przestrzeń Hilberta. Procesowi (wektorowi) w takiej przestrzeni może być przyporządkowana norma,

a co za tym idzie również iloczyn skalarny. W przestrzeni Hilberta możliwe jest również wybranie ortonormalnej bazy, tj. zbioru wektorów składającego się ze wzajemnie do siebie prostopadłych elementów ( $e_i$ ), posiadających normę równą 1. Poszukując najlepszego przybliżenia procesu  $Y_t$  rozpiętego na nieskończonej bazie, możemy się oprzeć na twierdzeniu o rzucie ortogonalnym. Twierdzenie to mówi, że proces tego rodzaju może zostać optymalnie przedstawiony poprzez kombinację liniową elementów skończonej bazy za pomocą prostopadłego rzutu na podprzestrzeń rozpiętą przez tę skończoną bazę. Wnioskiem z tego nieco zawilego stwierdzenia jest po prostu równość współczynników stojących przy odpowiednich elementach bazy  $x_{t-j}$ :

$$B_j = \begin{cases} h_j & \text{dla } j = -k, \dots, 0, \dots, l \\ 0 & \text{wp. p.} \end{cases} \quad (37)$$

Wyprowadźmy tę zależność w sposób formalny. Wyrażenie (35) może zostać zapisane jako kwadrat normy w przestrzeni Hilberta w postaci iloczynu skalarnego:

$$\|y_t - \bar{y}_t\|^2 = \langle y_t - \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j}, y_t - \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j} \rangle = \langle y_t, y_t \rangle - \quad (38)$$

$$2\langle y_t, \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j} \rangle + \langle \sum_{i=-k}^l B_i x_{t-i}, \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j} \rangle.$$

Poszukując  $B_s$  minimalizujących powyższą formułę, obliczamy jej pochodną względem tych zmiennych i przyrównujemy ją do 0:

$$-2\langle y_t, x_{t-s} \rangle + \langle x_{t-s}, \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j} \rangle + \langle \sum_{j=-k}^l B_j x_{t-j}, x_{t-s} \rangle = 0. \quad (39)$$

Druga pochodna (38) równa jest:

$$2\langle x_{t-s}, x_{t-s} \rangle > 0, \quad (40)$$

w związku z czym mamy do czynienia z minimum.

Biorąc pod uwagę warunek (39), mamy więc  $k + l + 1$  równań (wartości  $s$ ), z których każde ma postać:

$$\sum_{j=-k}^l B_j \langle x_{t-j}, x_{t-s} \rangle = \langle y_t, x_{t-s} \rangle. \quad (41)$$

Jak wynika z powyższego, wartości  $B_j$  zależą od  $y_t$ ,  $x_t$  a także od doboru wartości parametrów  $k$  i  $l$ . Jeśli  $x_t$  tworzą ortonormalną bazę, obliczenie wartości  $B_j$  może zostać znacznie uproszczone. Otóż w takim wypadku  $\langle x_{t-j}, x_{t-s} \rangle = 1$  dla  $j = s$  oraz  $\langle x_{t-j}, x_{t-s} \rangle = 0$  w przeciwnym wypadku. Prawa strona równania (37) upraszcza się wtedy do  $B_j$ , z kolei lewa przyjmuje postać:

$$\langle y_t, x_{t-s} \rangle = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j x_{t-j}, x_{t-s} \rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \langle x_{t-j}, x_{t-s} \rangle = h_j, \quad (42)$$

co jest tożsame z formułą (37).

Jeśli natomiast  $x_t$  nie tworzą ortonormalnej bazy, ich układ opisany równaniami (41) również posiada unikalne rozwiązanie pod warunkiem, że  $\det\langle x_{t-j}, x_{t-s} \rangle \neq 0$ .

W rozwiązaniach praktycznych procedura optymalizacji jest często rozszerzana poprzez nałożenie dodatkowych warunków ograniczających na zbiór rozwiązań  $B_j$ . Dwa podstawowe z nich to warunek symetrii ( $B_{-j} = B_j$ ) oraz warunek sumowania współczynników  $B_j$  do 0. Drugi z przedstawionych warunków jest o tyle ważny, że zapobiega występowaniu zjawiska samowzbudzenia filtru polegającego na „dodawaniu” do przefiltrowanych danych wahań cyklicznych o określonej częstotliwości, które to wahania nie występowały w danych źródłowych. Stosując ten warunek w procesie optymalizacji, otrzymujemy zmodyfikowaną formułę na współczynniki optymalnego przybliżenia filtru idealnego:

$$B_j = \begin{cases} h_j & \text{dla } j = -k + 1, \dots, 0, \dots, l - 1 \\ \frac{h_0}{2} - \sum_{s=0}^{-k+1} h_s & \text{dla } j = -k \\ \frac{h_0}{2} - \sum_{s=0}^{l-1} h_s & \text{dla } j = l \end{cases} \quad (43)$$

### 2.2.3. Przybliżenie filtru idealnego – filtr Christiano–Fitzgeralda

Christiano i Fitzgerald zaproponowali pewne przybliżenie idealnego filtru środkowoprzepustowego poprzez filtr asymetryczny o zmiennych wagach, który pozwala na wykorzystanie w procesie filtrowania najświeższych danych posiadanych przez badacza. Ta ostatnia cecha jest niezwykle istotna w procesie analizowania danych w czasie rzeczywistym, w związku z czym właśnie filtr Christiano–Fitzgeralda został użyty do konstrukcji spektralnej wersji oscylatora MACD wykorzystywanego do prognozowania punktów zmiany tendencji na bazie zachowania tego wskaźnika na końcu próby. Należy jednak wspomnieć o istotnej wadzie takiego rozwiązania. Mowa tu o problemie wynikającym z asymetrii filtru, prowadzącym do generowania przez niego przesunięcia w fazie danych przefiltrowanych w stosunku do danych źródłowych. Problem ten utrudnia analizę rozłożenia w czasie oraz stopnia korelacji poszczególnych komponentów cyklicznych przefiltrowanego szeregu czasowego.

Wprowadzenie filtru Christiano–Fitzgeralda przedstawia się w następujący sposób. Przyjmijmy, że poszukujemy filtru liniowego o postaci:

$$\bar{y}_t = \sum_{j=-k}^l B_j^{l,k} x_{t-j}, \quad (44)$$

gdzie  $k$  i  $l$  są liczbami naturalnymi zmieniającymi się wraz z indeksem wyjściowego szeregu czasowego:  $k = T-t$ ,  $l = t-l$ . Przy tak ustalonych parametrach  $\bar{y}_t$  konstruowany jest na podstawie wszystkich posiadanych obserwacji  $x_{t-j}$  ( $t-j = 1 \dots T$ ). W takim przypadku kryterium optymalizacyjne prowadzące do uzyskania optymalnego przy-

bliżenia filtru idealnego ma bardziej skomplikowaną postać, niż zostało to opisane w punkcie 2.2.3. Kryterium to powinno uwzględniać warunkowanie  $\bar{y}_t$  przez wszystkie posiadane obserwacje źródłowego szeregu czasowego  $x_t$

$$E[y_t - \bar{y}_t | x] \rightarrow \min, \quad (45)$$

gdzie  $E[\bar{y}_t | x]$  oznacza warunkową wartość oczekiwaną dla  $x = [x_1, \dots, x_T]$ . Kryterium to może być zapisane w domenie częstotliwości jako:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{H}(\omega) - \hat{B}^{l,k}(\omega)|^2 f_x(\omega) d\omega \rightarrow \min, \quad (46)$$

gdzie  $f_x(\omega)$  jest dyskretną transformatą Fouriera ciągu obserwacji  $x$ . Minimalna wartość (46) zapewniona jest dla  $\hat{H}(\omega) = \hat{B}^{l,k}(\omega)$ , a w rezultacie dla  $h_j = B_j^{l,k}$ . Jednak ze względu na asymetrię tak określonego filtra jego wagi nie sumują się do 0.

$$\sum_{j=-k}^l B_j^{l,k} \neq 0. \quad (47)$$

Christiano i Fitzgerald zaproponowali przyjęcie następującego algorytmu obliczania wag filtra, który pozwala na eliminację powyższej ułomności:

1) dla środkowych wag  $j = l-1, \dots, -k+1$  przyjęcie wartości wynikających z optymalnej filtracji  $B_j^{l,k} = h_j$ ,

2) dla wag skrajnych przyjęcie wartości (poprzez dodanie odpowiednich wyrażeń), które „symulowałyby” symetrię filtru:

$$\sum_{j=-k}^l B_j^{l,k} = \sum_{j=-T+1}^{T-1} h_j, \quad (48)$$

a co za tym idzie również sumowanie się wszystkich wag filtra do 0, czyli:

$$B_l^{l,k} = \sum_{j=l}^{T-1} h_j \text{ dla } l = 1 \dots T-1 \quad (49)$$

dla „najmłodszej” wagi,

$$B_{-k}^{l,k} = \sum_{j=k}^{T-1} h_j \text{ dla } k = T-1, \dots, 0 \quad (50)$$

dla wagi „najstarszej”.

Zastosowanie algorytmu Christiano–Fitzgeralda powoduje, że formuła na uzyskanie każdego  $\bar{y}_t$  jest inna, np.:

$$\bar{y}_1 = B_0^{0,T-1} x_1 + B_{-1}^{0,T-1} x_2 + B_{-2}^{0,T-1} x_3 + \dots + B_{-T+1}^{0,T-1} x_T \quad (51)$$

oraz

$$\bar{y}_T = B_{T-1}^{T-1,0} x_1 + B_{T-2}^{T-1,0} x_2 + B_{T-3}^{T-1,0} x_3 + \dots + B_0^{T-1,0} x_T . \quad (52)$$

### 3. Porównanie własności tradycyjnego oraz spektralnego oscylatora MACD

Standardowy oscylator MACD obliczany jest jako różnica wykładniczych średnich ruchomych, z których jedna (przeważnie 26-okresowa) wyznacza średniookresowy trend wyceny walorów, a druga określa trendu krótkookresowy (średnia 12-okresowa).

$$MACD_t^{26,12} = \frac{\sum_{j=0}^{25} a^j x_{t-j}}{\sum_{j=0}^{25} a^j} - \frac{\sum_{j=0}^{12} a^j x_{t-j}}{\sum_{j=0}^{12} a^j} , \quad (53)$$

gdzie  $a$  jest współczynnikiem o wartości  $|a| < 1$ .

W celu wyznaczenia punktów zmiany tendencji cen aktywów wyznaczana jest dodatkowo linia sygnałna będąca 9-okresową średnią wykładniczą opisaną w poprzedniej różnicy

$$SYGMACD_t^{26,12} = \frac{\sum_{j=0}^9 a^j MACD_{t-j}}{\sum_{j=0}^{25} a^j} . \quad (54)$$

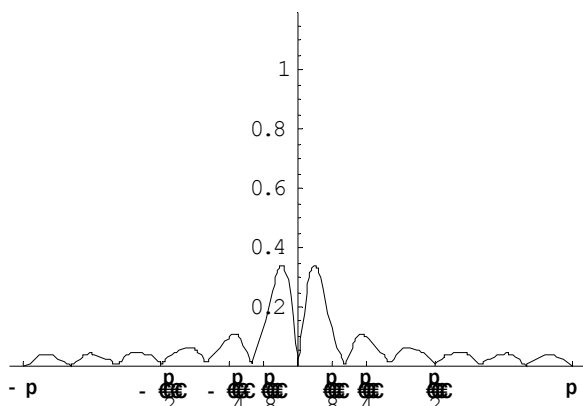
Lokalne maksimum przewidywane jest w sytuacji, gdy wskaźnik MACD przecina krzywą sygnałną „od góry”, czyli przyjmuje wartości większe od wartości określanych przez linię sygnałną w lewostronnym otoczeniu punktu przecięcia i wartości mniejsze w prawostronnym otoczeniu tego punktu. Na występowanie lokalnego minimum w przyszłości wskazuje z kolei przecięcie linii sygnałowej przez oscylator MACD „od góry”.

Przyjrzyjmy się własnościom standardowego oscylatora MACD oraz towarzyszącej mu linii sygnałnej w dziedzinie częstotliwości. Proces obliczania obu wskaźników może być postrzegany jako zastosowanie do zmiennych wejściowych liniowego, asymetrycznego i stacjonarnego filtru. Przy takiej interpretacji możliwe jest zastosowanie miar transformacji danych wejściowych w dziedzinie częstotliwości: charakterystyki amplitudowej oraz charakterystyki fazowej liczonych na bazie funkcji transmitancji.

W przypadku oscylatora MACD charakterystyka funkcji transmitancji dana jest wzorem:

$$\hat{H}(\omega) = (1 - a) \left[ \frac{(1 - a^{26} e^{-26i\omega})}{(1 - a^{26})(1 - e^{-i\omega})} - \frac{(1 - a^{12} e^{-12i\omega})}{(1 - a^{12})(1 - e^{-i\omega})} \right] . \quad (55)$$

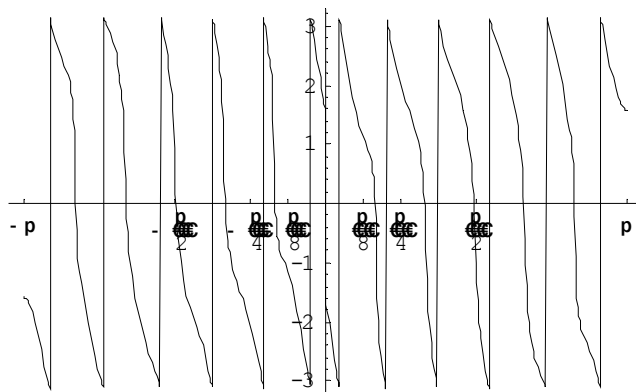
Wykres modułu transmitancji, czyli charakterystyki amplitudowej, przedstawiony jest na rys. 5.



**Rys. 5.** Wykres charakterystyki amplitudowej filtra wykorzystywanego do liczenia standardowego MACD,  $a = 0,9$

Źródło: opracowanie własne.

Rozkład charakterystyki fazowej ma z kolei postać:



**Rys. 6.** Wykres charakterystyki fazowej filtra wykorzystywanego do liczenia standardowego MACD,  $a = 0,9$

Źródło: opracowanie własne.

Analizując rys. 5 i 6, można stwierdzić, że filtr stosowany przy liczeniu MACD tłumi wahania o okresie mniejszym niż 16 sesji i większym niż 180 sesji, przesuwając jednocześnie znacznie w fazie dane o „przepuszczonych” częstotliwościach.

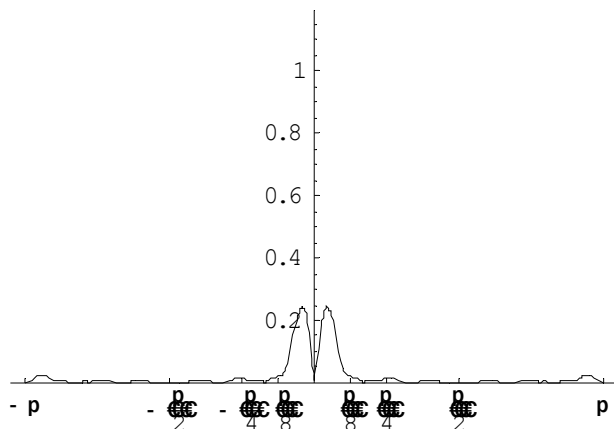
Transmitancja linii sygnałnej oscylatora MACD dana jest formułą:

$$\hat{H}(\omega) = \frac{(1 - a) \sum_{j=0}^9 a^j e^{-j i \omega} \hat{H}(\omega, j)}{1 - a^9} \quad (56)$$

przy  $\hat{H}(\omega, j)$  zdefiniowanym jako:

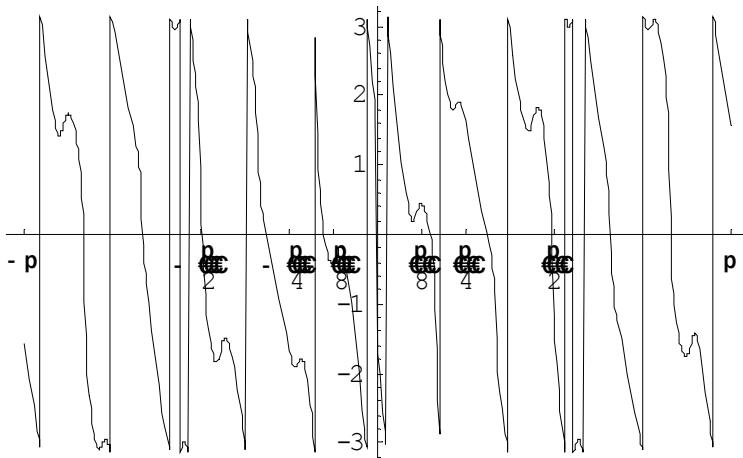
$$\hat{H}(\omega, j) = (1 - a)e^{-j\omega} \left[ \frac{(1 - a^{26}e^{-26i\omega})}{(1 - a^{26})(1 - e^{-i\omega})} - \frac{(1 - a^{12}e^{-12i\omega})}{(1 - a^{12})(1 - e^{-i\omega})} \right]. \quad (57)$$

Odpowiadające jej funkcje charakterystyki amplitudowej oraz fazowej przedstawiają się jak na rys. 7.



**Rys. 7.** Wykres charakterystyki amplitudowej filtra wykorzystywanego do liczenia linii sygnałnej standardowego MACD,  $a = 0,9$

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 8.** Wykres charakterystyki fazowej filtra wykorzystywanego do liczenia linii sygnałnej standardowego MACD,  $a = 0,9$

Źródło: opracowanie własne.

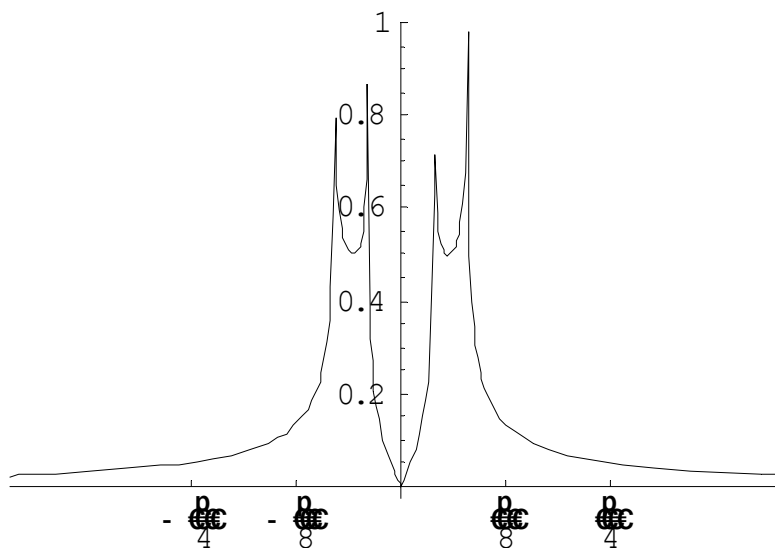


Analizując wykresy na rys. 7 i 8, można zauważyć, że generalnie filtr linii sygnałnej w sposób bardziej zdecydowany „tłumi” częstotliwości szeregu wejściowego, eliminuje część wysokich częstotliwości pozostawianych przez MACD. Jednocześnie, podobnie jak sam oscylator, przesuwają w fazie dane o „przepuszczanych” częstotliwościach.

Do stworzenia spektralnej wersji oscylatora MACD użyty został wyprowadzony w punkcie 2.2.3 filtr Christiano–Fitzgeralda. Jako optymalne przybliżenie idealnego filtra środkowoprzepustowego powinien on „przepuszczać” częstotliwości z zakresu podanego przez wartości graniczne. Funkcja transmitancji tego filtra nie ma ustalonej postaci, lecz zależy od indeksu obserwacji, dla której filtr jest konstruowany, i łącznej ilości obserwacji filtrowanego szeregu. Jej postać wyliczona dla ostatniej obserwacji szeregu składającego się z 4000 elementów (co odpowiada charakterystyce polskich danych giełdowych), przy założeniu filtrowania cykli o długości od 50 do 25 sesji, dana jest formułą:

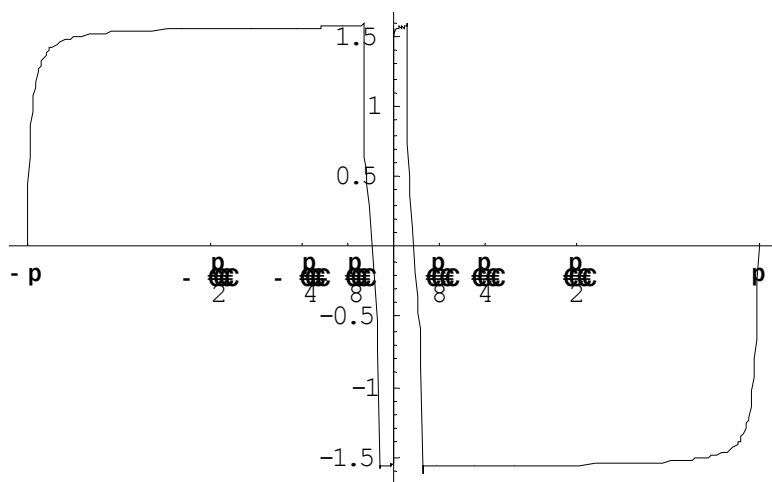
$$\hat{H}(\omega) = (1 + e^{-ij\pi}) \sum_{j=1}^{3999} \frac{\sin(\frac{2\pi}{25} * j) - \sin(\frac{\pi}{25} * j)}{\pi * j} + \frac{3}{25}. \quad (58)$$

Wyznaczone na podstawie powyższego równania charakterystyki amplitudowa i fazowa mogą zostać przedstawione jak na rys. 9



**Rys. 9.** Wykres charakterystyki amplitudowej filtra Christiano–Fitzgeralda dla  $T = 4000$  i częstotliwości granicznych odpowiadających 50 i 25 sesjom

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 10.** Wykres charakterystyki fazowej filtru Christiano–Fitzgeralda dla  $T = 4000$  i częstotliwości granicznych odpowiadających 50 i 25 sesjom

Źródło: opracowanie własne.

Jak wynika z rys. 9, filtr Christiano–Fitzgeralda daje jedynie zgrubne przybliżenie idealnego filtru środkowoprzepustowego. Rysunek 10 wskazuje dodatkowo na silne przesunięcie w fazie danych o przefiltrowanych częstotliwościach.

Pomysł na utworzenie spektralnej wersji oscylatora MACD przedstawia się następująco: każdy z badanych szeregów czasowych akcji, po usunięciu długookresowego trendu, poddany został analizie spektralnej. Na podstawie obliczonego estymatora funkcji gęstości spektralnej ustalone zostały dominujące częstotliwości średnio- i krótkookresowe. Spektralny odpowiednik oscylatora MACD został obliczony jako wynik filtrowania wejściowego szeregu czasowego filtrem Christiano–Fitzgeralda z częstotliwościami granicznymi ustalonymi w ten sposób, aby „przepuścić” częstotliwości odpowiedzialne za wahania krótkookresowe.

$$SpektMACD_t = CF(T_{SpektMACDa}, T_{SpektMACDb}), \quad (59)$$

gdzie  $T_{SpektMACDa}$ ,  $T_{SpektMACDb}$  są odpowiednio ilościami okresów odpowiadających wahaniom o częstotliwości nieco wyższej oraz nieco niższej od częstotliwości odpowiedzialnych za wahania krótkookresowe. Z kolei linia sygnałna obliczana jest jako wynik filtrowania pierwotnego szeregu filtrem Christiano–Fitzgeralda zachowującym dominujące częstotliwości średniookresowe:

$$SpektSYGMACD_t = CF(T_{SpektSYGMACDa}, T_{SpektSYGMACDb}), \quad (60)$$

gdzie  $T_{SpektSYGMACDa}$ ,  $T_{SpektSYGMACDb}$  są stosownymi częstotliwościami granicznymi. Podobnie jak w przypadku standardowej analizy oscylatora MACD, lokalne maksimum spodziewane było po stwierdzeniu przecięcia wskaźnika

$SpektSYGMACD_t$  przez  $SpektMACD_t$  „od góry”, lokalne minimum przy przecięciu  $SpektSYGMACD_t$  przez  $SpektMACD_t$  „od dołu”.

#### 4. Dane użyte w badaniu

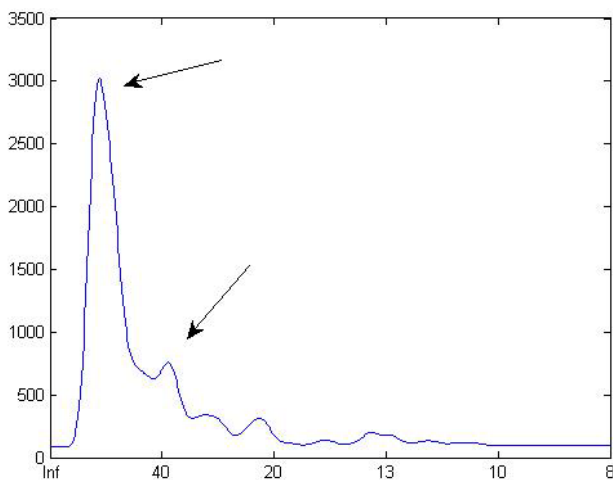
Ocena przydatności operacyjnego zastosowania spektralnego oscylatora MACD do prognozowania punktów zmiany tendencji dokonana została na czterech dziennych szeregach cen zamknięcia akcji banków notowanych na GPW w Warszawie: BRE, BZW WBK, PEKAO oraz BOŚ, na próbach o zakresie czasowym odpowiednio od 1992-10-06, 1993-06-22, 1998-06-30, 1997-02-03 do 2009-08-18. Analizie poddane zostały poziomy cen akcji, stosowane bowiem często w analizie danych finansowych logarytmiczne stopy zwrotu charakteryzowały się zbyt dużą zmiennością uniemożliwiająca dokonanie jednoznacznego prognozowania lokalnych ekstremów na kilka okresów do przodu. Dla każdego z szeregów czasowych wyznaczone zostały cztery lokalne maksima i minima, które prognozowane były równolegle przy użyciu standardowego oscylatora MACD i jego wariantu spektralnego. Przykładowo dla akcji BRE wybrano następujące daty odpowiadające wartościom maksymalnym: 1997-02-13, 2000-03-24, 2002-03-08 i 2007-10-17 oraz odpowiednio daty odpowiadające lokalnym minimom: 1997-11-28, 1998-10-09, 2001-07-16 i 2009-03-03. Zestawienie podsumowujące jakość prognoz uzyskanych za pomocą dwóch opisanych oscylatorów znajduje się w kolejnym punkcie.

#### 5. Konstrukcja spektralnej wersji oscylatora MACD oraz ocena jakości prognoz punktów zmiany tendencji uzyskanych na jego podstawie

Jak opisano wcześniej, konstrukcja spektralnego odpowiednika oscylatora MACD rozpoczyna się od zbadania własności cyklicznych badanego szeregu czasowego. Własności te określane są na podstawie przebiegu funkcji gęstości spektralnej wyestymowanej za pomocą metody Tukeya przy użyciu „wygładzającego” okna Parzena o długości równej ok. 1/6 długości szeregu poddawanego badaniu. Aby zapewnić stacjonarność badanych szeregów czasowych, co jest niezbędne do późniejszego właściwego interpretowania wyników analizy spektralnej, przed obliczeniem estymatora wariancji/kowariancji usunięty został długookresowy trend. Postać czterech funkcji gęstości spektralnych dla kolejnych czterech szeregów cen akcji, odpowiednio: BRE, BZW WBK, PEKAO i BOŚ, przedstawiona została na kolejnych rysunkach (rys. 11-14).

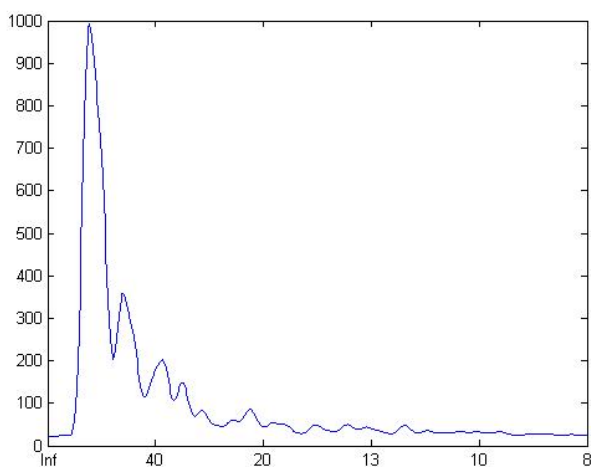
Analiza poszczególnych wykresów pozwala na identyfikację dominujących długości cykli determinujących przebieg zmienności odpowiadających im szeregów czasowych. Dla wszystkich cen akcji banków istotna składowa zmienności pochodzi z wahań średniookresowych o długości ok. 130 sesji, czyli prawie pół roku. Wahania krótkookresowe pozwalają na większe zróżnicowanie charakterystyki zmiany bada-

nych cen. Krótkookresowa zmienność akcji BOŚ generowana jest przez cykle o długości 35 sesji, w przypadku szeregu akcji BRE i PEKAO dominują wahania o długości ok. 38 sesji, z kolei akcje BZW WBK posiadają dominującą składową spektralną o długości ok. 56 sesji. Na podstawie opisanych powyżej informacji określone zostały wartości graniczne częstotliwości spektralnego filtra Christiano–Fitzgeralda używanego do obliczenia spektralnego wskaźnika MACD oraz linii sygnałnej.



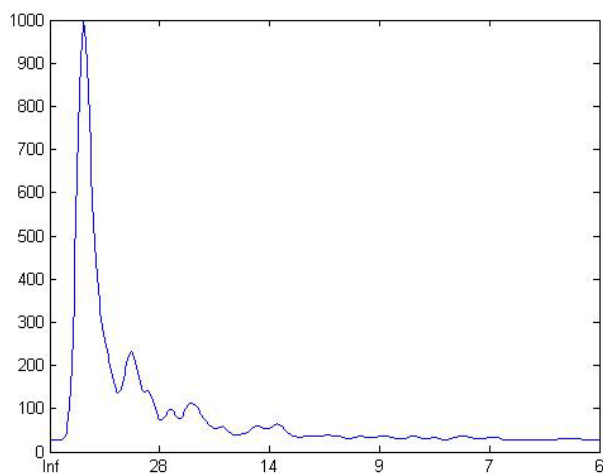
**Rys. 11.** Wykres estymatora gęstości spektralnej akcji BRE (na osi rzędnych liczba okresów)

Źródło: opracowanie własne.



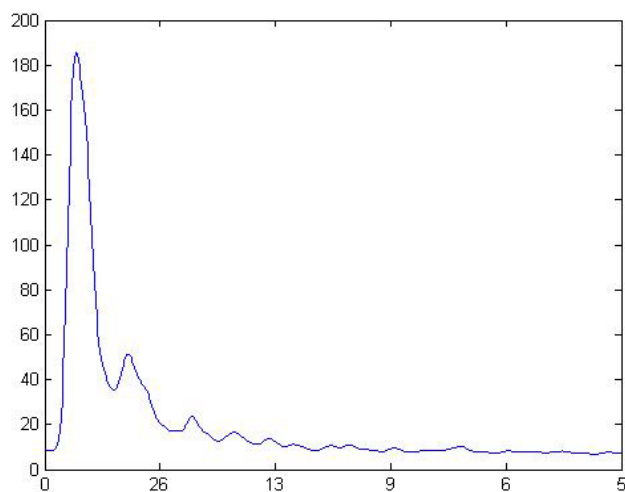
**Rys. 12.** Wykres estymatora gęstości spektralnej akcji BZW WBK

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 13.** Wykres estymatora gęstości spektralnej akcji PEKAO

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 14.** Wykres estymatora gęstości spektralnej akcji BOŚ

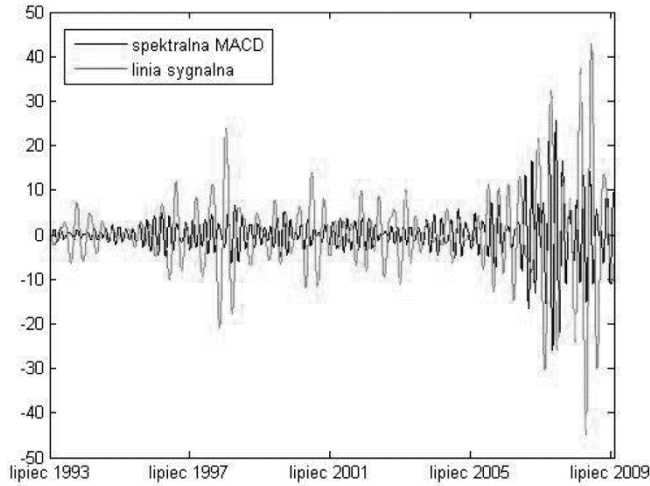
Źródło: opracowanie własne.

Na przykład w przypadku akcji BRE ustalone zostały następujące parametry:

$$\text{SpektMACD}_t^{BRE} = CF(40, 60), \quad (61)$$

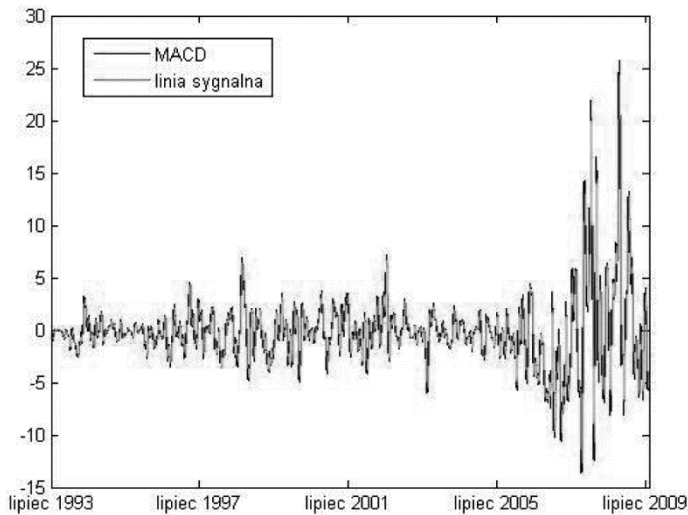
$$\text{SpektSYGMACD}_t^{BRE} = CF(60,130). \quad (62)$$

Wyznaczony na ich podstawie oscylator i jego linia sygnałna przedstawia się następująco:



**Rys. 15.** Wykres spektralnej wersji oscylatora MACD i stowarzyszonej z nim linii spektralnej, cena akcji BRE

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 16.** Wykres tradycyjnego MACD i stowarzyszonej z nim linii spektralnej, cena akcji BRE

Źródło: opracowanie własne.

Oczywiście dla każdego z szeregu cen akcji obliczony został również tradycyjny wskaźnik MACD oraz odpowiadająca mu okresowa średnia wykładnicza. Ich przebieg dla walorów BRE został przedstawiony na rys. 16.

Wskaźniki MACD w wariacie tradycyjnym i spektralnym, obliczone dla cen akcji poszczególnych banków, poddane zostały ocenie przydatności operacyjnej w procesie przewidywania punktów zmiany tendencji (lokalnych maksimum i minimum). Wyniki zestawiono w tab. 1.

**Tabela 1.** Zdolność do przewidywania punktów zmiany tendencji wskaźników spektralnego MACD i MACD standardowego (1 oznacza poprawnie zdiagnozowany punkt lokalnego maksimum lub minimum)

Akcje/numer	Spektralne MACD		Standardowe MACD	
	Lok. maksimum	Lok. minimum	Lok. maksimum	Lok. minimum
BRE				
I	1	1	1	0
II	0	1	1	0
II	1	1	1	1
IV	1	1	1	1
BZW WBK				
I	1	1	1	1
II	1	1	1	1
III	1	1	1	1
IV	1	1	1	0
PEKAO				1
I	1	1	1	1
II	1	1	1	1
III	0	1	1	1
IV	1	1	1	1
BOŚ				
I	0	1	1	1
II	1	1	1	1
III	1	1	1	1
IV	1	1	1	0
łącznie ilość 1	13	16	16	12

Źródło: opracowanie własne.

Przegląd tab. 1 pozwala na stwierdzenie, że wskaźnik spektralnego MACD prognozuje punkty zmiany tendencji ze skutecznością bliską 82%. Podobną, choć nieco niższą skutecznością może się wykazać standardowy oscylator MACD. Ciekawą prawidłowością jest trafniejsze wykrywanie lokalnych maksimum przez wskaźnik standardowy, podczas gdy wyższość wskaźnika spektralnego ujawnia się w progno-

zowaniu lokalnych minimów. W związku z powyższym sugerowane jest używanie spektralnego oscylatora MACD jako narzędzia pomocniczego w procesie identyfikacji lokalnych ekstremów w parze ze wskaźnikiem tradycyjnym.

## 6. Konkluzje

Celem niniejszej pracy było przedstawienie sposobu konstrukcji spektralnej wersji oscylatora MACD i związanej z nim linii sygnałnej oraz zbadanie możliwości zastosowania zbudowanych w ten sposób wskaźników do operacyjnego przewidywania punktów zmiany tendencji wybranych cen akcji banków notowanych na GPW. Zbudowany wskaźnik spektralny, w przeciwieństwie do wskaźnika tradycyjnego, ma silne oparcie w teorii analizy spektralnej i optymalnego filtrowania. Teorie te zostały przedstawione na potrzeby niniejszego opracowania w zarysie umożliwiającym zrozumienie przekształceń prowadzących do wyprowadzenia matematycznego modelu liniowego, asymetrycznego filtra środkowoprzepustowego Christiano–Fitzgeralda, użytego bezpośrednio do obliczania poszczególnych obserwacji spektralnej wersji wskaźnika MACD. Ze względu na sposób konstrukcji wskaźnik spektralny może zostać uznany za narzędzie elastyczne, pozwalające na dopasowanie sposobu przetwarzania danych wejściowych do własności cyklicznych tychże danych.

Rezultaty analizy operacyjnej przydatności spektralnego wskaźnika w procesie prognozowania lokalnych minimów i maksimów cen nie pozwalają na jednoznaczną pozytywną weryfikację hipotezy badawczej zakładającej przewagę jakości prognoz uzyskiwanych na jego podstawie nad prognozami uzyskanymi w przypadku wskaźnika tradycyjnego. Globalne własności prognostyczne spektralnego MACD są wprawdzie nieco lepsze od własności konkurencyjnego wskaźnika standardowego, jednak w rozbiciu na przewidywanie lokalnych maksimów i minimów cen wskaźnik standardowy okazuje się bardziej adekwatny do postawionego przed nim zadania w przypadku pierwszego rodzaju lokalnych ekstremów. Ze względu na stwierdzony stan rzeczy autor opracowania rekomenduje więc równoległe wykorzystanie obu wskaźników w procesie wykrywania punktów zmiany tendencji cen walorów notowanych na GPW w Warszawie.

## Literatura

- Baxter M., King R.G., *Measuring business cycles, Approximate band-pass filters for economic time series*, NBER Working Paper 1995, no. 5022.
- Christiano L.J., Fitzgerald T.J., *The band pass filter*, NBER Working Paper 1999, no. 7257.
- Czyżycki T., *Analiza matematycznych podstaw metod usuwania długookresowego trendu z szeregów czasowych przy pomocy filtrów spektralnych Baxtera–Kinga i Christiano–Fitzgeralda oraz praktyczne zastosowanie tychże metod do dekompozycji grupy polskich danych makroekonomicznych*, NBP, Warszawa 2009.
- Enders W., *Applied econometric time series*, Wiley Series in Probability and Statistics 2000.



- Gajek L., Kałuszka M., *Wnioskowanie statystyczne, Modele i metody*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2000.
- Gichman I.I., Skorochod A.W., *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968.
- Hamilton J.D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1994.
- Kowal P., *Optimal filtering*, <http://econpapers.repec.org/software/wpawuwppr/0507001.htm>, 2005.
- Lipcer R.S., Szirajew A.N., *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1981.
- Lutkepohl H., *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin 2005.
- Mohr M., *A trend-cycle(-season) filter*, European Central Bank, Working Paper Series, no. 499, July 2005.
- Pedersen T.M., *Alternative linear and non-linear detrending techniques: A comparative analysis based on euro-zone data*, [w:] *Papers and proceedings or the third Eurostat colloquium on modern tools for business cycle analysis*, Luxembourg 2004.
- Szabatin J., *Podstawy teorii sygnałów*, WKiŁ, Warszawa 2000.
- Wentzell A.D., *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1980.
- Wośko Z., *Czy filtry liniowe są przydatnym narzędziem badania koniunktury?*, *Analiza spektralna na przykładzie ankietowych wskaźników koniunktury*, Wydawnictwo AE w Katowicach, materiały z XIV Konferencji Naukowej Młodych Ekonomistów, Ustroń, 25-26 września 2008.

## CONSTRUCTION OF SPECTRAL MACD OSCILLATOR FOR SELECTED POLISH BANKS' STOCK PRICES

**Summary:** The goal of this article is to present spectral version of MACD oscillator built with the help of spectral analysis and filtration methods applied to time series interpreted as realizations of stochastic processes. Theoretical part of the work is devoted to the description of Christiano–Fitzgerald filter, which was applied to frequency domain MACD construction as one of the best approximations of optimal filter. The prepared indicator was used to forecast turning points of selected Polish banks' stock prices noted at Warsaw Stock Exchange. The quality of forecasts computed with use of spectral version of MACD were also compared with forecast gained with its standard version. Achieved results allow to state that spectral MACD performs better than its version used up to now in technical analysis of financial time series.

**Keywords:** spectral analysis, spectral filters, turnings points.