

STUDIA I MONOGRAFIE  
AKADEMII WYCHOWANIA FIZYCZNEGO WE WROCŁAWIU

NR 87

Adam Siemieński

ODWROTNE ZADANIE  
OPTYMALIZACJI  
DLA WSPÓLDZIAŁAJĄCYCH  
MIĘŚNI SZKIELETOWYCH



Wrocław 2007

KOMITET WYDAWNICZY

Tadeusz Bober (przewodniczący), Bogusława Idzik (sekretarz),  
Gabriel Łasiński, Alicja Rutkowska-Kucharska, Jan Szczegieliński,  
Edward Wlazło, Zdzisława Wrzosek, Marek Zatoń

RECENZENCI

Roman Ger  
Ryszard Maroński  
Wladimir Zatsiorsky

REDAKTOR I KOREKTOR

Irena Szymaniec

PROJEKT OKŁADKI

Agnieszka Nyklas

REDAKTOR TECHNICZNY

Jerzy Kucharczyk

© Copyright by Wydawnictwo AWF Wrocław, 2007

ISSN 0239-6009  
ISBN 978-83-89156-71-6

Wydawnictwo Akademii Wychowania Fizycznego we Wrocławiu  
51-684 Wrocław, ul. Adama Mickiewicza 98  
Wydanie I. Druk: Fabryka Druku Sp. z o.o.

# Spis treści

|  |    |
|--|----|
| Wstęp.....   | 5  |
| 1. Optymalizacja z ograniczeniami liniowymi a równanie funkcyjne Schrödera.....                                | 9  |
| 1.1. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji z wykorzystaniem formuły Koenigsa.....                       | 17 |
| 1.2. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji z wykorzystaniem rozwinięcia w szereg potęgowy.....          | 22 |
| 2. Przybliżone rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji ....   | 26 |
| 3. Ścisłe rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji .....   | 32 |
| 3.1. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji dla liniowego współdziałania mięśni .....                    | 32 |
| 3.2. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji dla współdziałania mięśni realizującego minimum zmęczenia .. | 36 |
| 4. Podsumowanie i wnioski.....   | 42 |
| Bibliografia.....  | 44 |
| Spis rycin.....  | 47 |
| Summary.....   | 48 |
| List of figures.....   | 51 |
| Skorowidz rzeczowy.....  | 52 |

## Wstęp

Złożoność problemu sterowania ruchami organizmów żywych wynika między innymi z tego, że zasady mechaniki klasycznej nie wystarczają do wyznaczenia przebiegu ruchu tych organizmów. Przejawia się to jako swoboda wyboru trajektorii łączącej stan początkowy i końcowy, ale również jako swoboda wyboru różnych wzorców współdziałania mięśni prowadzących do tych samych wartości wypadkowych momentów siły w stawach. Jednak mimo tej swobody trajektorie wielu ruchów i towarzyszące im wzorce współdziałania mięśni cechują się dużą powtarzalnością (np. w lokomocji), co przypisuje się pewnym zasadom sterowania przyjmującym zwykle postać zasad minimum.

Dlatego też naturalnym narzędziem matematycznym formułowania i rozwiązywania zagadnień sterowania ruchem jest rachunek wariacyjny i teoria sterowania optymalnego. Metody wywodzące się z tych dziedzin opierają się na definicji pewnej funkcji zmiennych sterowania (zwanej *funkcją kosztu* lub *funkcją celu*) i mają za zadanie poszukiwanie takich wartości (lub przebiegów w zagadnieniach dynamicznych) tych zmiennych, które są zgodne z założonymi ograniczeniami i jednocześnie minimalizują tę funkcję kosztu. Tak sformułowane zadanie matematyczne często ma jednoznaczne rozwiązanie, co odpowiada właśnie redukcji wspomnianej wcześniej swobody wyboru do faktycznie obserwowanych trajektorii i wzorców współdziałania mięśni.

Najważniejszym elementem każdego problemu sterowania ruchem, rozumianego jako zadanie teorii sterowania optymalnego, jest właśnie wspomniana definicja funkcji kosztu, a klasyczne zadanie optymalizacji polega na wyprowadzeniu z postaci funkcji kosztu formuł określających te wartości zmiennych sterowania, które ją minimalizują. W przypadku układów biologicznych – w odróżnieniu od tych spotykanych w technice – dodatkową trudnością jest jednak wybór właściwej postaci funkcji kosztu. Częścią projektu każdego urządzenia technicznego jest jasno sprecyzowany cel jego działania i dlatego wybór funkcji kosztu w zagadnieniu sterowania takim urządzeniem jest konsekwencją tego celu. Jeśli zaś chodzi o układy biologiczne, to możemy się jedynie domyślać, jaki jest sens ich działania, i dlatego wybór konkretnej funkcji kosztu w zagadnieniu sterowania ruchem organizmu żywego pozostaje z natury rzeczy arbitralny. W tym kontekście naturalne wydaje się pytanie, czy na podstawie znajomości

rozwiązań zagadnienia optymalizacyjnego można zrekonstruować postać funkcji kosztu, wokół której takie zadanie zostało sformułowane (np. [3]). To odwrotne zadanie optymalizacji (w przeciwieństwie do klasycznego, czyli prostego zadania optymalizacji) jest jednym z tzw. *zagadnień odwrotnych* (*inverse problems*), których klasycznym przykładem jest wnioskowanie o wewnętrznej strukturze Ziemi na podstawie pomiarów rozpraszania fal sejsmicznych czy też nieinwazyjne uzyskiwanie informacji o cechach organów wewnętrznych na podstawie pomiarów odbicia i pochłaniania fal ultradźwiękowych. W odwrotnym zadaniu optymalizacji, związanym z zagadnieniem sterowania ruchem, chodzi o odpowiedź na następujące pytanie [3]:

Jeśli obserwowana trajektoria ruchu (lub wzorzec współdziałania mięśni) jest optymalna, to jaki jest sens tej optymalności, czyli co jest optymalizowane, a więc jaka jest postać funkcji kosztu?

Dotychczas odwrotne zadanie optymalizacji, zarówno w biomechanice, jak i w innych dziedzinach, było rozwiązywane jedynie pośrednio na jeden z dwóch sposobów: bądź poprzez postulowanie konkretnej postaci funkcji kosztu i porównywanie konsekwencji takiego założenia z obserwowanymi przejawami optymalizacji [29], bądź poprzez założenie pewnej ogólnej postaci funkcji kosztu zależnej od kilku parametrów (np. funkcja kwadratowa) i następnie wyznaczenie takich wartości parametrów, aby wynik minimalizacji funkcji kosztu zawierającej te parametry był możliwie bliski obserwowanym przejawom optymalizacji [2]. W tym drugim przypadku rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji zostaje więc sprowadzone do rozwiązania odpowiedniego, związanego z nim, klasycznego (prostego) zadania optymalizacji. Wadą obu tych sposobów rozwiązywania odwrotnego zadania optymalizacji jest to, że pozwalają one jedynie sprawdzić, jak dobrym kandydatem na poszukiwaną funkcję kosztu jest bądź zaproponowana jej konkretna postać (podejście pierwsze), bądź pewna klasa funkcji (podejście drugie). Za pomocą tych sposobów nie można zidentyfikować funkcji kosztu, nie czyniąc wcześniej bardzo zawężających założeń o jej kształcie.

W tej pracy przedstawiamy propozycję nowego podejścia do odwrotnego zadania optymalizacji. Opiera się ono na spostrzeżeniu, że pewne zagadnienia optymalizacyjne z liniowymi ograniczeniami prowadzą do relacji między funkcją kosztu a rozwiązaniami danego problemu optymalizacyjnego, a relację tę można zapisać w postaci równania funkcyjnego Schrödera ([17]–[19]). Dzięki temu oba zadania optymalizacyjne, pro-

ste i odwrotne, znajdują swoje odpowiedniki w postaci zadań dotyczących tego równania. W szczególności, znając rozwiązanie pewnego problemu optymalizacyjnego i rozwiązując odpowiednie równanie funkcyjne Schrödera, można zrekonstruować w sposób ścisły funkcję kosztu, która jest minimalizowana.

Dostrzeżony związek między teorią optymalizacji a teorią iteracyjnych równań funkcyjnych umożliwia identyfikację funkcji kosztu odpowiadającej danemu zadaniu optymalizacyjnemu. Dzięki zastosowaniu go do analizy biomechanicznego problemu współdziałania mięśni szkieletowych uzyskano następujące nowe wyniki:

1. Rozwiązano w sposób bezpośredni i ścisły odwrotne zadanie optymalizacji i pokazano, że wszystkie rozwiązania prostego zadania optymalizacji można otrzymać jako iteracje o ciągłym indeksie z jednego wybranego rozwiązania.

2. Dowiedziono, że jedynymi funkcjami kosztu prowadzącymi do liniowego z punktem stałym w zerze współdziałania mięśni są funkcje potęgowe (kryterium Crowninshielda i Branda [6]).

3. Dowiedziono, że jedynymi funkcjami kosztu prowadzącymi do liniowego z punktem stałym powyżej zera współdziałania mięśni są funkcje będące potęgami funkcji używanej do opisu kinetyki Michaelisa–Menten [27].

4. Dowiedziono, że jedynymi funkcjami kosztu prowadzącymi do liniowego bez punktu stałego współdziałania mięśni są funkcje eksponencjalne (odniesienie do klasycznej pracy Hatzego i Buysa [13]).

5. Skonstruowano addytywnie separowalną, jednorodną funkcję kosztu określającą współdziałanie mięśni zgodne z wymaganiem minimum zmęczenia [8].

Praca zawiera propozycję metody rozwiązania ważnego, dotychczas nierozwiązanego problemu biomechaniki, polegającego na określeniu postaci kryterium optymalizacyjnego odpowiedzialnego za obserwowane wzorce współdziałania mięśni szkieletowych. Dla takiego zadania przyjęła się nazwa *odwrotne zadanie optymalizacji*, która odróżnia je od tzw. *prostego zadania optymalizacji*, rozważanego w biomechanice w związku ze statyczną niewyznaczalnością łańcuchów biokinematycznych. Podczas gdy w prostym zadaniu optymalizacji chodzi o wyznaczenie takiego podziału wypadkowego momentu siły w stawie na udziały pochodzące od poszczególnych mięśni, który byłby zgodny z wymaganiem minimalizowania pewnej założonej funkcji kosztu, to odwrotne zadanie optymalizacji

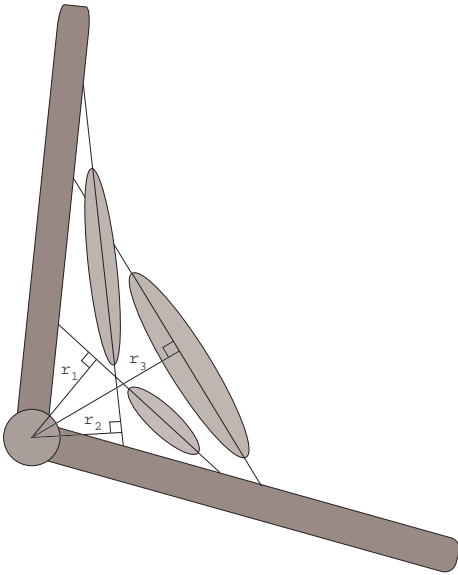
stawia sobie właśnie za cel znalezienie postaci takiej funkcji kosztu, czyli określenie, czym kieruje się ośrodkowy układ nerwowy, pobudzając w taki, a nie inny sposób mięśnie współpracujące przy generowaniu wypadkowego momentu siły w stawie.

Proponowana w pracy metoda rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji – zasygnalizowana wcześniej w [25] i [26] – opiera się na spostrzeżeniu, że matematyczna metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange’a, zwykle stosowana w przypadku optymalizacji warunkowej, prowadzi do pewnego równania funkcyjnego sformułowanego po raz pierwszy przez Ernsta Schrödera [22]. Interpretowane w kontekście biomechanicznym równanie to wiąże ze sobą dwie funkcje: jedną opisującą wzorzec współdziałania mięśni i drugą będącą pochodną funkcji kosztu rozważanego problemu optymalizacyjnego. W zależności od tego, którą z nich przyjmiemy za funkcję znaną, a którą za niewiadomą, równanie to może stanowić bazę dla rozwiązania prostego bądź odwrotnego zadania optymalizacji. Kontynuując interpretację w duchu współczesnej biomechaniki klasycznych prac Schrödera [22], można powiedzieć, że traktował on jako niewiadomą funkcję opisującą wzorzec współdziałania mięśni, czyli był w tym sensie prekursorem współczesnych biomechaników, którzy postulują bądź wręcz zgadują funkcję kosztu i na jej podstawie wnioskują o współdziałaniu mięśni. Podobnie jak Schröder, współcześni biomechanicy nie potrafią jednak rozwiązać problemu odwrotnego. W dziedzinie teorii równań funkcyjnych ten ważny krok uczynił dopiero kilkanaście lat później Gabriel Koenigs [16] i właśnie na jego rozważaniach poświęconych równaniu Schrödera opiera się prezentowana w tej pracy metoda rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji.

# 1

## Optymalizacja z ograniczeniami liniowymi a równanie funkcyjne Schrödera

Rozważmy staw o jednym obrotowym stopniu swobody obsługiwany przez  $n$  mięśni jednostawowych (przykład dla  $n = 3$  przedstawiony jest na ryc. 1.1).



Rycina 1.1  
Staw o jednym obrotowym stopniu swobody obsługiwany przez trzy mięśnie jednostawowe

Każdy z mięśni daje wkład do wypadkowego momentu siły  $M$  zgodnie z równaniem

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^N r_i \cdot F_i = M,$$

gdzie  $F_i$  oznacza siłę rozwijaną przez  $i$ -ty mięsień,  $r_i$  zaś ramię siły  $i$ -tego mięśnia względem osi stawu, przy czym danej wartości wypadkowego momentu siły może odpowiadać wiele zestawów wartości rozwijanych sił  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ . Mimo tej dowolności (w mechanice mówi się o statycznej niewyznaczalności układu z ryc. 1.1) wyboru sił rozwijanych przez



poszczególne mięśnie, realizujących dany moment wypadkowy, faktycznie obserwowane (np. za pomocą elektromiografii) współdziałanie mięśni zawiera pewne powtarzalne wzorce. Wierzy się, że wynikają one z tego, że ośrodkowy układ nerwowy – sterując aktywnością poszczególnych mięśni – działa zgodnie z pewną *zasadą minimum*, tzn. tak dobiera aktywności mięśni, aby uzyskać potrzebną wartość wypadkowego momentu siły najmniejszym kosztem. Prowadzi to do sformułowania zagadnienia współdziałania mięśni szkieletowych w postaci następującego *zadania optymalizacji warunkowej*: należy znaleźć taki zestaw sił mięśniowych  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ , który pewną funkcję kosztu  $K(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$  minimalizuje, a jednocześnie spełnia warunek równowagi wyrażony równaniem (1.1). Co do postaci funkcji kosztu  $K$ , to sensownym wydaje się założenie o jej addytywności (addytywnej separowalności), jednorodności oraz monotoniczności względem każdej ze zmiennych z osobna. Addytywność wiąże się z wyobrażeniem o koszcie jako sumie przyczynków wynikających z aktywności pojedynczych mięśni, czyli jako o wielkości, która po ewentualnym uwzględnieniu działania dodatkowych mięśni zmienia się po prostu przez dodanie jej wartości wynikającej z aktywności tych dodanych mięśni. Jednorodność ma uwzględniać fakt, że mięśnie – mimo różnic wielkości, przekroju i składu – są zbudowane z tej samej tkanki, a wspomniane różnice mogą być wyrażone za pomocą odpowiednich stałych skalujących w definicji funkcji  $K$ . Monotoniczność wreszcie względem każdej ze zmiennych z osobna odpowiada naturalnemu oczekiwaniu, że koszt podtrzymywania aktywności mięśnia powinien rosnać wraz z wartością rozwijanej siły. Uwzględnienie tych założeń (oraz kilku innych dotyczących regularności funkcji  $K$ , określonych dalej) i wprowadzenie zmiennych

$$x_i = \frac{F_i}{F_{i,\max}},$$

gdzie  $F_{i,\max}$  jest maksymalną siłą, którą może rozwinąć  $i$ -ty mięsień, prowadzi do *funkcji kosztu* o postaci

$$(1.2) \quad K(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(x_i),$$

gdzie  $x_i$  są zmiennymi rzeczywistymi ( $0 \leq x_i \leq 1$ ),  $a_i$  – stałymi dodatnimi,  $f$  zaś jest rosnącą i wypukłą analityczną funkcją rzeczywistą określoną na przedziale  $[0, 1]$ . Zauważmy, że funkcja kosztu (1.2) jest naturalnym

uogólnieniem stosowanych obecnie w biomechanice tzw. *potęgowych funkcji kosztu*

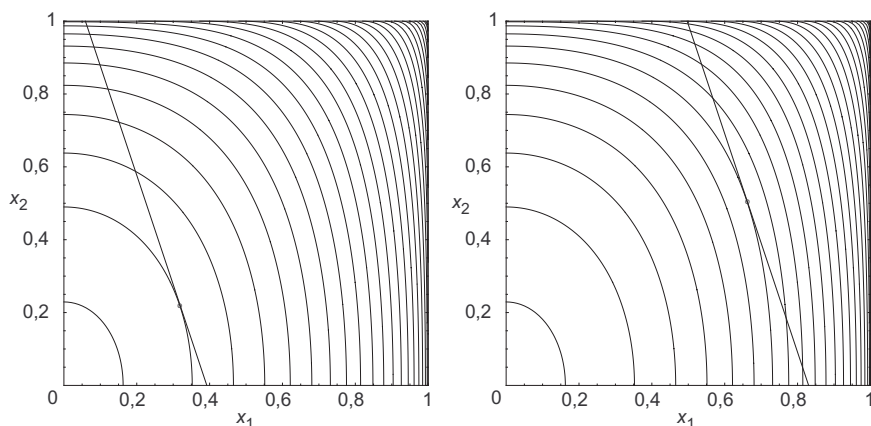
$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i^p,$$

gdzie  $p > 1$ .

Dla nowych zmiennych równanie (1.1) przyjmuje postać

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i = M,$$

gdzie  $b_i$  są stałymi dodatnimi. Rozważane w kontekście współdziałania mięśni zadanie optymalizacji warunkowej polega więc teraz na poszukiwaniu takich  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , które spełniają równanie (1.4) i minimalizują funkcję kosztu (1.2). Liczby  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  odpowiadają punktowi styczności hiperpłaszczyzny wyznaczonej przez równanie (1.4) z jedną z hiperpowierzchni stałej wartości funkcji kosztu. Ilustracja dla przypadku  $n = 2$  znajduje się na ryc. 1.2. W ten sposób rodzina hiperpłaszczyzn,

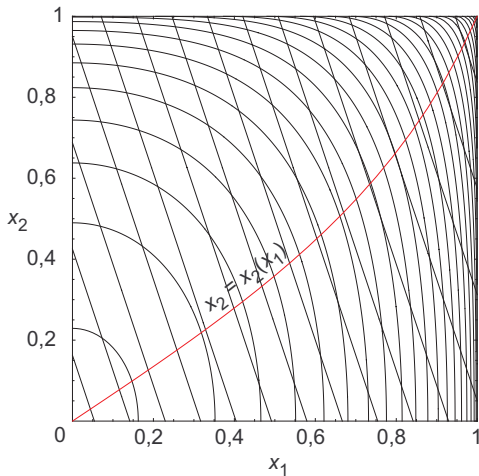


Rycina 1.2

Punkt styczności prostej stałego momentu siły  $b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 = M$  z jedną z krzywych stałego kosztu  $K(x_1, x_2) = \text{const}$  dla dwóch różnych wartości  $M$

indeksowana parametrem  $M$  z równania (1.4), poprzez ich punkty styczności z hiperpowierzchniami stałego kosztu definiuje funkcje

$$x_j = x_j(x_i).$$



Rycina 1.3

Rodzina prostych stałego momentu siły (indeksowana wartością tego momentu) wraz z rodziną krzywych stałego kosztu (indeksowaną wartością tego kosztu) definiują poprzez swoje punkty styczności funkcję  $x_2 = x_2(x_1)$

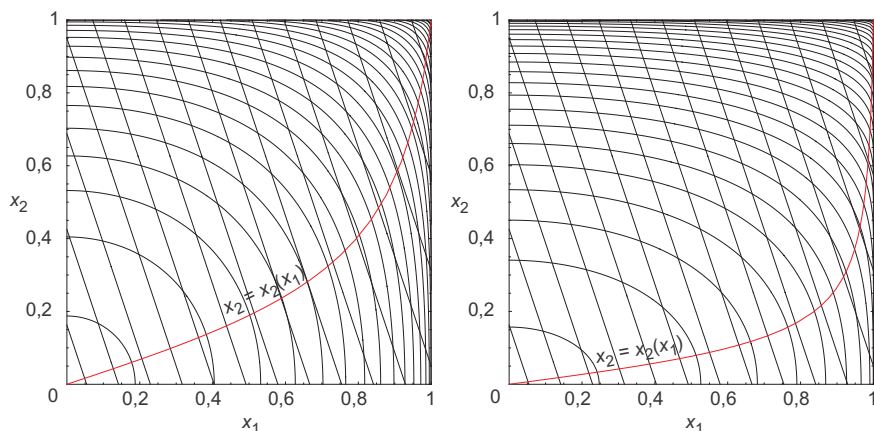
Ryc. 1.3 ilustruje to w przypadku  $n = 2$ . Funkcja kosztu określa zatem postać wszystkich funkcji  $x_j = x_j(x_i)$ , a funkcje kosztu mające różne rodziny hiperpłaszczyzny stałego kosztu generują różne funkcje  $x_j = x_j(x_i)$ . Dla  $n = 2$  ilustruje to ryc. 1.4.

Zadanie polegające na znalezieniu funkcji  $x_j = x_j(x_i)$  na podstawie funkcji kosztu  $K$  będziemy nazywać *prostym zadaniem optymalizacji*. Przy naszych założeniach ma ono jednoznaczne rozwiązanie. W kontekście biomechaniki rozwiązanie tego zadania pozwala znaleźć siły rozwijane przez mięśnie (ryc. 1.1), gdy znany jest wypadkowy moment siły w stawie  $M$  oraz postać funkcji kosztu  $K$ .

Zadanie odwrotne, zmierzające do zrekonstruowania postaci funkcji kosztu  $K$  na podstawie obrazu współdziałania mięśni, czyli funkcji  $x_j = x_j(x_i)$ , będziemy nazywać *odwrotnym zadaniem optymalizacji*. Nie ma ono jednoznacznego rozwiązania, ponieważ np. dwie funkcje kosztu różniące się o stałą addytywną bądź multiplikatywną prowadzą do takiego samego obrazu współdziałania, a ogólniej: funkcje kosztu generujące taką samą rodzinę hiperpłaszczyzny stałego kosztu prowadzą do takiego samego obrazu współdziałania.

W dalszych częściach pracy postaramy się uzasadnić tezę, że dla rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji, czyli dla odtworzenia funkcji kosztu (1.2) z opisaną dokładnością, wystarczy znać funkcję  $x_j = x_j(x_i)$  dla jednej tylko pary  $i, j$  ( $i \neq j$ ).

Aby się o tym przekonać, przeprowadzimy szczegółowo rozumowanie, które zostało naszkicowane na ryc. 1.2, 1.3 i 1.4.



Rycina 1.4  
 Funkcja kosztu określa funkcję  $x_2 = x_2(x_1)$

Zadanie optymalizacji warunkowej funkcji kosztu (1.2) przy warunku (1.4) można rozwiązać *metodą nieoznaczonych mnożników Lagrange'a*. Polega ona na tym, że zamiast poszukiwać minimum funkcji (1.2) przy warunku (1.4) szuka się minimum, lecz już bez żadnego dodatkowego warunku, tzw. powiększonej funkcji kosztu zależnej od  $n + 1$  zmiennych  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda$ , a więc minimum funkcji

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(x_i) + \lambda \cdot \left( M - \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i \right),$$

gdzie zmienna  $\lambda$  nazywa się *nieoznaczonym mnożnikiem Lagrange'a*.

Warunkiem koniecznym dla minimalizowania wielkości (1.5) przez liczby  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda$  jest zerowanie się pochodnych cząstkowych wyrażenia (1.5) po każdej ze zmiennych. Prowadzi to do  $n + 1$  równań, czyli warunku (1.4) oraz układu  $n$  równań

$$(1.6) \quad a_i \cdot f'(x_i) = \lambda \cdot b_i$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , w których mnożnik  $\lambda$  jest taki sam dla każdego  $i$ . Wybierając zatem dowolne  $i, j$  ( $i \neq j$ ), otrzymamy układ dwóch równań

$$(1.7) \quad \begin{aligned} a_i \cdot f'(x_i) &= \lambda \cdot b_i, \\ a_j \cdot f'(x_j) &= \lambda \cdot b_j, \end{aligned}$$

z którego po wyeliminowaniu nieoznaczonego mnożnika Lagrange'a  $\lambda$  dostaniemy

$$(1.8) \quad f'(x_j) = \frac{a_i \cdot b_j}{a_j \cdot b_i} f'(x_i).$$

Jak sugeruje ryc. 1.3,  $x_j$  jest funkcją  $x_i$ , równanie (1.8) można więc zapisać w postaci

$$(1.9) \quad f'(x_j(x_i)) = \frac{a_i \cdot b_j}{a_j \cdot b_i} f'(x_i).$$

Równanie (1.9) możemy zatem interpretować jako równanie funkcyjne zawierające tylko jedną zmienną  $x_i$  i dwie funkcje tej zmiennej:  $f'(x_i)$  oraz  $x_j = x_j(x_i)$ .

Aby łatwiej zidentyfikować równanie (1.9), doprowadźmy je do standardowej postaci, wprowadzając oznaczenia

$$x = x_i, \quad g(x) = f'(x), \quad s_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{a_j \cdot b_i}, \quad h_{ij}(x_i) = x_j(x_i).$$

Zależność (1.9) przyjmie wtedy formę

$$(1.10) \quad g(h_{ij}(x)) = s_{ij} \cdot g(x),$$

w której można rozpoznać *równanie funkcyjne Schrödera* ([22], [17]–[19]), wiążące ze sobą dwie funkcje: funkcję  $g$  będącą pochodną funkcji  $f$  użytej w definicji funkcji kosztu (1.2) oraz funkcję  $h_{ij}$  przedstawiającą zależność funkcyjną między względnymi siłami (tzn. odniesionymi do siły maksymalnej) dwóch spośród  $n$  mięśni o indeksach  $i, j$ , zaangażowanych w generowanie momentu siły  $M$ .

Niektóre relacje między funkcjami  $h_{ij}$  wynikają wprost z ich definicji, na przykład

$$h_{ij} = h_{ji}^{-1},$$

gdzie  $h_{ji}^{-1}$  oznacza funkcję odwrotną do  $h_{ji}$ , inne zaś wiążą się z faktem, że wszystkie te funkcje są rozwiązaniami tego samego prostego zadania minimalizacji funkcji kosztu (1.2) przy warunku (1.4). Ponieważ, jak pokazują relacje (1.5)–(1.10), to zadanie optymalizacji warunkowej może być sprowadzone do pewnego problemu związanego z równaniem funkcyjnym Schrödera, więc wspólną cechą wszystkich funkcji  $h_{ij}$  staje się również ich

związek poprzez to równanie z jedną funkcją  $g$ , będącą pochodną funkcji  $f$  użytej w definicji funkcji kosztu (1.2).

Warto zbadać konsekwencje tego związku. Otóż z założeń poczynionych wcześniej wynika, że funkcja  $g$  jest odwracalna, można więc napisać

$$(1.11) \quad h_{ij}(x) = g^{-1}(s_{ij} \cdot g(x)).$$

Funkcja  $h_{ij}$  jest zatem jednoznacznie określona przez funkcję  $g$ , a więc i  $f$ , a przeto i  $K$  z równania (1.2). Ponadto, złożenie dwóch takich funkcji, np.  $h_{ij}$  i  $h_{kl}$ , określonych przez równanie (1.11) mnożnikami  $s_{ij}$  i  $s_{kl}$ , jest również funkcją określoną przez (1.11), a odpowiednim mnożnikiem jest w takim przypadku liczba  $s_{ij} \cdot s_{kl}$ . Ten ostatni fakt wynika z równości

$$(1.12) \quad \begin{aligned} h_{ij}(h_{kl}(x)) &= g^{-1}(s_{ij} \cdot g(h_{kl}(x))) = \\ &= g^{-1}(s_{ij} \cdot g(g^{-1}(s_{kl} \cdot g(x)))) = \\ &= g^{-1}(s_{ij} \cdot s_{kl} \cdot g(x)), \end{aligned}$$

z której też wnioskujemy, że wszystkie funkcje  $h_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) mogą być otrzymane jako tzw. ciągłe iteracje (iteracje o ciągłym indeksie) z jednej z nich, czyli że należą one do ciągłej grupy iteracji generowanej przez jedną z nich. Ten fakt jest oczywisty w przypadku potęgowych funkcji kosztu, czyli takich jak (1.3), rozważanych w tym kontekście od czasu opublikowania pracy Crowninshilda i Branda [6]. Dla takich bowiem funkcji kosztu otrzymuje się liniowe współdziałanie mięśni, czyli funkcje  $h_{ij}$  o postaci

$$h_{ij}(x) = c_{ij} \cdot x,$$

gdzie  $c_{ij}$  nie zależą od  $x$ . Jednak w przypadku dowolnej funkcji kosztu  $K$  określonej przez równość (1.2) i spełniającej poczynione wcześniej założenia fakt ten jest mniej oczywisty i przez to bardziej interesujący.

To spostrzeżenie wymaga jednak komentarza, który wiąże się z pewnym milcząco przyjętym tu założeniem. Rzecz mianowicie w tym, że powyższy wniosek, dotyczący przynależności wszystkich funkcji  $h_{ij}$  do jednej ciągłej grupy iteracji, jest prawomocny, jeśli we wszystkich równaniach postaci (1.11) chodzi dokładnie o tę samą funkcję  $g$ , mimo że funkcje  $h_{ij}$  i mnożniki  $s_{ij}$  są na ogół różne dla różnych par  $i, j$ . Problem dotyczy zatem kwestii jednoznaczności rozwiązania równania funkcyjnego

Schrödera (1.10), rozumianego jako równanie zawierające jedną znaną funkcję  $h_{ij}$ , jeden znany mnożnik  $s_{ij}$  i jedną funkcję poszukiwaną  $g$ .

Przypomnijmy tu główne fakty dotyczące rozwiązań równania funkcyjnego Schrödera. Otóż zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązań tego równania zostało najpierw [16] rozstrzygnięte przy pewnych szczególnych założeniach dotyczących funkcji  $h_{ij}$ . Zgodnie z nimi funkcja  $h_{ij}$  (jak i funkcja  $g$ ) jest analityczną funkcją zespoloną zmiennej zespolonej. Ponadto funkcja  $h_{ij}$  ma punkt stały należący do jej dziedziny, tzn. dla pewnego  $x$

$$h_{ij}(x) = x,$$

przy czym dla uproszczenia rozważań zwykle umieszcza się ten punkt w zerze,

$$h_{ij}(0) = 0,$$

a jej pochodna w tym punkcie spełnia nierówność

$$0 < h'_{ij}(0) < 1,$$

co oznacza, że jest to dla funkcji  $h_{ij}$  tzw. punkt stały przyciągający, ale nie nadprzyciągający, jak byłoby w przypadku gdy

$$h'_{ij}(0) = 0,$$

ani obojętny, jak byłoby w przypadku gdy

$$h'_{ij}(0) = 1.$$

Wyniki dotyczące istnienia, jednoznaczności i zachowania rozwiązań równania Schrödera przy tych założeniach należą do najbardziej klasycznych związanych z tym równaniem; od nich właściwie rozpoczyna się cała historia teorii iteracji i dynamiki nieliniowej [10].

## 1.1. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji z wykorzystaniem formuły Koenigsa

Najważniejsze twierdzenie o analitycznych rozwiązaniach równania Schrödera (1.10) udowodnił matematyk francuski Gabriel Koenigs [16, 18, 19] i dlatego równanie to bywa niekiedy nazywane *równaniem Schrödera–Koenigsa* [28] lub nawet *równaniem Koenigsa* [12]. Samo twierdzenie zaś kojarzone jest już wyłącznie z nazwiskiem Gabriela Koenigsa. Stwierdza ono, że w równaniu

$$(1.13) \quad g(h(x)) = s \cdot g(x)$$

funkcja  $g$  jest określona z dokładnością do potęgowania o wykładniku naturalnym i mnożenia przez stałą i że jego podstawowe rozwiązanie można skonstruować w pewnym otoczeniu punktu stałego jako granicę ciągu kolejnych iteracji funkcji  $h$ , normowanych przez potęgi jej pochodnej w punkcie stałym:

$$(1.14) \quad g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_m(x)}{h'(0)^m}.$$

Symbol  $h_m(x)$  w (1.14) należy rozumieć jako  $m$ -tą iterację funkcji  $h$ , tzn. że

$$h_0(x) = x, \quad h_1(x) = h(x), \quad h_{n+1}(x) = h(h_n(x))$$

dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

Dość łatwo można się przekonać, że funkcja określona przez formułę (1.14), gdzie kolejne iteracje są dzielone przez kolejne potęgi pewnej liczby, powinna spełniać równanie Schrödera. Rozważmy bowiem

$$(1.15) \quad g_n(x) = \frac{h_n(x)}{s^n}.$$

Dla każdej liczby naturalnej możemy napisać

$$(1.16) \quad g_n(h(x)) = \frac{h_n(h(x))}{s^n} = \frac{h_{n+1}(x)}{s^n} = s \cdot \frac{h_{n+1}(x)}{s^{n+1}} = s \cdot g_{n+1}(x).$$

Ciągi funkcyjne  $g_n(x)$  i  $g_{n+1}(x)$  różnią się tylko pierwszym wyrazem, więc zbieżność jednego z nich pociąga za sobą zbieżność drugiego. Co więcej, jeśli są zbieżne, to ich granice są sobie równe. Tak więc na podstawie (1.16)



możemy stwierdzić, że granica wyrażenia (1.15), jeśli istnieje i jest skończona, definiuje funkcję spełniającą równanie Schrödera (1.13). Problem jednak w tym, że wprawdzie formalnie granica wyrażenia (1.15) spełnia równanie (1.13), to jednak jej istnienie i skończoność zapewnione są tylko przy bardzo szczególnej wartości czynnika normującego  $s$ . Koenigs [16] udowodnił, że dla istnienia i skończoności tej granicy konieczne jest, aby

$$(1.17) \quad s = h'(0).$$

Widać więc, że rozwiązanie podstawowe (1.14) równania Schrödera (1.13) odpowiada mnożnikowi  $s$  w (1.13) równemu pochodnej funkcji  $h$  w punkcie stałym:

$$(1.18) \quad g(h(x)) = h'(0) \cdot g(x).$$

Rozwiązanie równania (1.13) z mnożnikiem  $s$  niespełniającym (1.17) może być otrzymane z rozwiązania podstawowego (1.14) przez potęgowanie:

$$(1.19) \quad g(x) = g_{\text{podst}}(x)^p,$$

gdzie  $g_{\text{podst}}(x)$  jest zdefiniowane przez (1.14), a wykładnik potęgi  $p$  jest dany wzorem

$$(1.20) \quad p = \frac{\log(s)}{\log(h'(0))},$$

gdzie  $\log$  oznacza funkcję logarytmiczną o niesprecyzowanej (ale jednakowej w liczniku i mianowniku) podstawie; może to być np. logarytm naturalny bądź dziesiętny. Jednoczesna zmiana podstawy w liczniku i mianowniku nie zmienia wartości ilorazu (1.20), gdyż sprowadza się do mnożenia licznika i mianownika przez tę samą liczbę.

W tym miejscu konieczny wydaje się krótki komentarz o zasadności formuł (1.19) i (1.20). Otóż w oryginalnym sformułowaniu Koenigsa [16] rzecz dotyczy rozwiązań równania Schrödera (1.13), które są funkcjami (zmienną zespoloną o wartościach zespolonych) holomorficznymi lub meromorficznymi w pewnym otoczeniu punktu stałego funkcji  $h$ . Każde takie rozwiązanie różni się jedynie czynnikiem multiplikatywnym od funkcji  $g_{\text{podst}}$ , określonej przez granicę (1.14), podniesionej do pewnej potęgi całkowitej dodatniej lub ujemnej ([16], s. 17, twierdzenie IV). Potęga

dodatnia odpowiada rozwiązaniu holomorficznemu, potęga ujemna – meromorficznemu. Można więc powiedzieć, że równanie (1.13) ma niezerowe rozwiązania wśród funkcji holomorficznycy bądź meromorficznycy w otoczeniu punktu stałego tej funkcji jedynie wtedy, gdy  $s$  w (1.13) jest równe pochodnej funkcji  $h$  w punkcie stałym, podniesionej do pewnej całkowitej potęgi, lub – równoważnie – gdy (1.20) jest liczbą całkowitą dodatnią albo ujemną.

Wydaje się, że nieistnienie niezerowych rozwiązań równania (1.13) dla niecałkowitych mnożników  $s$  wynika z poszukiwania ich jedynie wśród funkcji holomorficznycy bądź meromorficznycy. Tymczasem w zastosowaniu opisywanym w tej pracy, zgodnie z założeniami przyjętymi wcześniej, zarówno funkcja  $h$ , jak i poszukiwane rozwiązanie równania Schrödera  $g$  są analitycznymi funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej, dla nich więc trudności wprowadzane przez podnoszenie do niecałkowitej potęgi, takie jak pojawienie się niejednoznaczności funkcji, nie mają znaczenia. Dlatego też można się spodziewać, że przy braku ograniczeń przyjętych przez Koenigsa i poszukiwaniu rozwiązań równania (1.13) wśród analitycznych funkcji rzeczywistycy określonych na przedziale  $(0, 1)$  rozwiązanie takie (jedyne z dokładnością do mnożenia przez liczbę) znajdzie się dla każdej rzeczywistej wartości  $s$ , a zatem wykładnik  $p$  w formułach (1.19) i (1.20) będzie mógł przyjmować dowolne wartości rzeczywiste, nie tylko całkowite jak u Koenigsa [16].

Aby ocenić ewentualne trudności, które mogłyby wyniknąć z niecałkowitej potęgi  $p$  w (1.19) i (1.20), przeprowadźmy następujące rozumowanie.

Ponieważ dla funkcji  $g_{\text{podst}}(x)$  określonej za pomocą (1.14) mamy

$$(1.21) \quad g_{\text{podst}}(0) = 0, \quad g'_{\text{podst}}(0) = 1,$$

można ją więc przedstawić w postaci

$$(1.22) \quad g_{\text{podst}}(x) = x \cdot q(x),$$

gdzie  $q(x)$  jest pewną analityczną funkcją rzeczywistą spełniającą warunek  $q(0) = 1$ . Wtedy mamy też

$$(1.23) \quad g_{\text{podst}}(x)^p = x^p \cdot q(x)^p,$$

ale ponieważ  $q(x)$  jest dodatnie dla wszystkich  $x$  z pewnego dostatecznie małego otoczenia zera, więc ewentualne problemy z analitycznością funkcji  $g(x)$  w (1.19) – mogące pojawić się w przypadku niecałkowitych potęg

$p$  – dotyczą jedynie czynnika  $x^p$  i punktu  $x = 0$ ; dla dostatecznie małej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  funkcja  $g(x)$  w (1.19) jest analityczna w przedziale  $(0, a)$ .

Wracając do wątku opuszczonego po sformułowaniu równania (1.20), można powiedzieć, że najprostszym sposobem zapewnienia, aby wszystkie funkcje  $h_{ij}$  określone przez (1.11) należały do tej samej grupy iteracji, jest sprawienie, żeby rozwiązaniem każdego z równań (1.10) było rozwiązanie podstawowe. Aby jednak tak się stało, konieczna jest równość

$$s_{ij} = h'_{ij}(0)$$

dla każdej pary  $i, j$ . Można to osiągnąć, dobierając odpowiednio stałe  $a_i, a_j$  w (1.2) i (1.9). Tą drogą otrzymuje się zarazem najbardziej regularne zachowanie się funkcji  $g(x)$  w okolicy jej punktu stałego, z definicji (1.14) wynikają bowiem równości (1.21), czyli  $g(x)$  zachowuje się w okolicy zera podobnie do  $x$ . Ten ostatni warunek nie jest oczywiście spełniony, gdy nie jest spełniona równość (1.17). Aby się o tym przekonać, zróżniczkujmy względem  $x$  obie strony równania (1.13). Możemy to zrobić w każdym punkcie  $x$  należącym do przedziału otwartego  $(0, a)$ , gdzie  $a$  jest dostatecznie małą dodatnią liczbą rzeczywistą, ponieważ w tym przedziale zarówno funkcja  $h(x)$ , jak i funkcja  $g(x)$  są analityczne, o czym przekonał się rozpatrując rozkład (1.23). W rezultacie otrzymujemy

$$(1.24) \quad g'(h(x)) \cdot h'(x) = s \cdot g'(x).$$

Sprawdźmy teraz, czy można pogodzić zachowanie się funkcji  $g(x)$  w okolicy zera podobnie do  $x$ , czyli istnienie skończonej pochodnej  $g'(0)$ , z niespełnianiem równości (1.17). W tym celu załóżmy, że (1.17) nie jest spełnione i pochodna  $g'(0)$  istnieje i jest skończona, tzn.

$$0 < g'(0) < \infty.$$

Przy tych założeniach możliwe jest wykonanie w (1.24) przejścia granicznego  $x \rightarrow 0$ , co wobec faktu, iż zero jest punktem stałym funkcji  $h$ , prowadzi do wniosku, że

$$(1.25) \quad g'(0) \cdot h'(0) = s \cdot g'(0).$$

Równość (1.25) można obustronnie podzielić przez  $g'(0)$ , co prowadzi do (1.17) – niezgodnie z przyjętym założeniem. Oznacza to, że gdy nie

jest spełniona równość (1.17), funkcja  $g(x)$ , będąca analitycznym w przedziale  $(0, a)$  rozwiązaniem równania Schrödera (1.13), nie może mieć dla  $x = 0$  skończonej pochodnej. Faktycznie, przyjrzenie się rozkładowi (1.23) prowadzi do wniosku, że  $g(x)$  zachowuje się w okolicy zera jak  $x^p$ , więc dla  $p > 1$  mamy  $g'(0) = 0$ , a dla  $p < 1$  otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \infty.$$

Widzimy więc, że dobierając odpowiednio stałe  $a_i$  w (1.2) i (1.9), możemy uważać rozwiązanie podstawowe (1.14) równania (1.10) za rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji związanego z wyrażeniami (1.2) i (1.4) w tym sensie, że wyrażenie (1.14) określa, z dokładnością do stałej multiplikatywnej, pochodną funkcji  $f$  zawartej w (1.2). Samą więc funkcję  $f$  można znaleźć przez całkowanie funkcji  $g$  zdefiniowanej przez (1.14), przy czym naturalnym wyborem dla addytywnej stałej całkowania wydaje się wartość zero, ponieważ powinna ona odpowiadać kosztowi  $K$  przy zerowej sile rozwijanej przez mięsień. Zatem najbardziej regularne, jeśli chodzi o zachowanie się w okolicy punktu stałego (zera), rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji – rozumiane jako określenie funkcji  $f$  w definicji funkcji kosztu (1.2) – otrzymujemy w postaci

$$(1.26) \quad f(x) = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n(y)}{h'(0)^n} dy.$$

Ponieważ rozwiązanie podstawowe (1.14) równania Schrödera (1.13) zachowuje się w okolicy zera podobnie do  $x$ , więc (1.26) jako całka z (1.14) zachowuje się w okolicy zera podobnie do  $\frac{1}{2}x^2$ .

W tym miejscu warto się zastanowić, czy zawsze możliwe jest dobranie stałych  $a_i$  w (1.2) i (1.9) tak, aby spełniona była równość

$$s_{ij} = h'_{ij}(0)$$

dla każdej pary  $i, j$ . Sprawdźmy, ile jest niezależnych funkcji  $h_{ij}$ . Przy liczbie współdziałających mięśni  $n$  liczba funkcji  $h_{ij}$  wynosi  $n^2$ . Spośród nich musimy wykluczyć  $n$  funkcji tożsamościowych  $h_{ii}$ , a z pozostałych  $n^2 - n$  wziąć tylko połowę, bo mamy tu do czynienia z parami funkcji wzajemnie odwrotnych i w każdej takiej parze tylko jedna funkcja spełnia warunek

$$0 < h'_{ij}(0) < 1.$$

Otrzymujemy zatem

$$(1.27) \quad \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

niezależnych funkcji  $h_{ij}$ , dla których musimy tak dobrać mnożniki

$$s_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{a_j \cdot b_i}$$

w równaniach (1.10), aby spełnione były równości

$$s_{ij} = h'_{ij}(0).$$

Dysponując  $n$  stałymi  $a_i$  w (1.2), możemy uzyskać  $n - 1$  niezależnych stałych  $s_{ij}$  w (1.10). Widać więc, że dla  $n = 2$  współdziałających mięśni, rozwiązując odwrotne zadanie optymalizacji, można zawsze tak dobrać stałe w definicji funkcji kosztu (1.2), że uzyska się jednorodną funkcję kosztu. Już jednak dla  $n = 3$  i większej liczby współdziałających mięśni nie można w ogólności spełnić wszystkich warunków  $s_{ij} = h'_{ij}(0)$  i dlatego w takich sytuacjach poszukiwana funkcja kosztu na ogół nie będzie mogła być jednorodna.

## 1.2. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji z wykorzystaniem rozwinięcia w szereg potęgowy

Proponowana w tej pracy metoda rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji polega na sprowadzeniu go do problemu rozwiązania równania funkcyjnego Schrödera, opiera się zatem na znanych metodach rozwiązywania tego równania. Po omówieniu metody wykorzystania do tego celu formuły Koenigsa (1.14) skupimy się teraz na rozważeniu możliwości użycia alternatywnego sposobu konstruowania rozwiązania podstawowego równania Schrödera. Zamiast stosowania normalizowanego ciągu iteracji (1.14) korzysta się tu z możliwości rozwinięcia w szereg potęgowy zarówno funkcji danej, jak i funkcji poszukiwanej. Dopuszczalność dokonania takiego rozwinięcia wynika z założenia o analityczności obu tych funkcji, rozumianych jako funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej. Problem rozwiązania równania Schrödera polega więc teraz na określeniu ciągu współczynników szeregu potęgowego funkcji poszukiwanej na podstawie ciągu współczynników szeregu potęgowego funkcji danej.

Zacznijmy od przedstawienia w ten sposób funkcji  $h$ , interpretowanej jako obraz współdziałania mięśni:

$$(1.28) \quad h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \cdot x^i = h_1 \cdot x + h_2 \cdot x^2 + h_3 \cdot x^3 + \dots$$

Brak w rozwinięciu (1.28) wyrazu wolnego oznacza, że funkcja  $h$  ma punkt stały w zerze, a ponieważ pochodną funkcji określonej przez (1.28) w zerze jest  $h_1$ , więc warunek na wartość pochodnej funkcji  $h$  w zerze przyjmuje teraz postać  $0 < h_1 < 1$ .

Napiszmy analogiczne rozwinięcie dla funkcji  $g$  będącej rozwiązaniem podstawowym równania Schrödera (1.13). Rozwinięcie to ma postać

$$(1.29) \quad g(x) = x + \sum_{i=2}^{\infty} g_i \cdot x^i = x + g_2 \cdot x^2 + g_3 \cdot x^3 + \dots$$

Z postaci rozwinięcia (1.29) widać od razu, że chodzi tutaj o rozwiązanie podstawowe zdefiniowane również przez wzór Koenigsa (1.14). Widać to stąd, że brakuje tu wyrazu wolnego, co oznacza, że funkcja (1.29) ma punkt stały w zerze, a wyraz liniowy w zmiennej  $x$  ma postać po prostu  $x$ , czyli pochodna funkcji (1.29) w zerze wynosi 1, jak właśnie powinno być dla rozwiązania podstawowego, które musi spełniać warunek (1.21).

Rozwiązanie równania Schrödera tą metodą polega na podstawieniu formuł (1.28) i (1.29) do równania (1.13) i rekurencyjnym wyrażeniu kolejnych współczynników rozwinięcia funkcji poszukiwanej (1.29) przez współczynniki rozwinięcia funkcji znanej (1.28). Wyprowadzanie wzorów na kolejne współczynniki można zautomatyzować, dzięki czemu można szybko obliczyć nawet kilkadziesiąt pierwszych współczynników, co jest wystarczające do budowy nawet dość dokładnej metody numerycznej. Podczas realizacji tej pracy opracowano taką metodę numeryczną, korzystającą ze specjalnie napisanego programu wykonującego szereg operacji przekształceń symbolicznych i w efekcie generującego formuły na kolejne współczynniki rozwinięcia (1.29) na podstawie rozwinięcia (1.28). Program ten jest w stanie generować wspomniane wzory w możliwym do zaakceptowania czasie dla około 30 pierwszych współczynników, jednak ze względu na rozmiar tych formuł cytujemy je tylko dla  $n$  od 1 do 4:

$$\begin{aligned}
 (1.30) \quad g_1 &= 1, \\
 g_2 &= \frac{h_2}{h_1 - h_1^2}, \\
 g_3 &= \frac{2h_2^2 + h_3 - h_1 h_3}{(-1 + h_1)^2 h_1 (1 + h_1)}, \\
 g_4 &= \frac{(1 + 5h_1^2)h_2^3 + h_1(2 + 3h_1 - 5h_1^2)h_2 h_3 + (1 - h_1)^2 h_1 (1 + h_1)h_4}{(1 - h_1)^3 h_1^2 (1 + h_1)(1 + h_1 + h_1^2)}.
 \end{aligned}$$

We wzorach (1.30) można zauważyć pewne prawidłowości. Oprócz tej najbardziej rzucającej się w oczy, jakościowej, sprowadzającej się do spostrzeżenia, że stają się one coraz bardziej skomplikowane wraz ze wzrostem numeru współczynnika, jest też taka, że  $n$ -ty współczynnik w rozwinięciu (1.29) zależy jedynie od współczynników rozwinięcia (1.28) o numerach od 1 do  $n$ , a nie od wyższych. Pierwszych kilka współczynników można więc obliczyć na podstawie stosunkowo prostych formuł i często tych kilka pierwszych wyrazów wystarcza do uzyskania niezłego przybliżenia ścisłego rozwiązania.

Kształt tych formuł pokazuje, że mają one sens jedynie wtedy, gdy współczynnik  $h_1$  w (1.28), równy wartości pochodnej funkcji  $h$  w zerze, jest różny od 0 i od 1. Jest to więc warunek podobny do tego, który występuje w twierdzeniu Koenigsa [16, 18]; obie omówione tu metody uzyskania rozwiązania równania Schrödera działają więc, jeśli  $0 < h'(0) < 1$ , czyli gdy punkt stały funkcji  $h$  jest punktem przyciągającym, ale nie nadprzyciągającym lub obojętnym.

Ze względu na postać rozwinięcia (1.29), a zwłaszcza na fakt, że współczynnik przy wyrazie liniowym w (1.29) wynosi 1, całka funkcji  $g(x)$ , czyli funkcja  $f(x)$  występująca w formule (1.2) definiującej funkcję kosztu  $K$ , zachowuje się w okolicy zera jak  $\frac{1}{2}x^2$ . Ogólnie, biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned}
 (1.31) \quad f(x) &= \int_0^x g(y) dy = \int_0^x \left( y + \sum_{i=2}^{\infty} g_i \cdot y^i \right) dy = \\
 &= \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \sum_{i=2}^{\infty} g_i \cdot y^i dy = \frac{1}{2}x^2 + \sum_{i=2}^{\infty} g_i \cdot \int_0^x y^i dy = \\
 &= \frac{1}{2}x^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{g_i}{i+1} x^{i+1},
 \end{aligned}$$

na podstawie (1.30) można łatwo obliczyć kilka pierwszych współczynników rozwinięcia funkcji  $f$  w szereg potęgowy. Otrzymuje się wtedy

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 0, \\
 f_2 &= \frac{1}{2}, \\
 (1.32) \quad f_3 &= \frac{h_2}{3(h_1 - h_1^2)}, \\
 f_4 &= \frac{2h_2^2 + h_3 - h_1h_3}{4(-1 + h_1)^2h_1(1 + h_1)}, \\
 f_5 &= \frac{(1 + 5h_1^2)h_2^3 + h_1(2 + 3h_1 - 5h_1^2)h_2h_3 + (1 - h_1)^2h_1(1 + h_1)h_4}{5(1 - h_1)^3h_1^2(1 + h_1)(1 + h_1 + h_1^2)},
 \end{aligned}$$

co pozwala wyrazić funkcję  $f$ , określającą funkcję kosztu (1.2), jako sumę szeregu potęgowego zawierającą *explicite* formuły na współczynniki przy  $x$  podniesionym do potęgi od 1 do 5, wyrażone przez współczynniki od 1. do 4. rozwinięcia (1.28) funkcji  $h$  opisującej współdziałanie mięśni:

$$\begin{aligned}
 (1.33) \quad f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{h_2}{3(h_1 - h_1^2)}x^3 + \frac{2h_2^2 + h_3 - h_1h_3}{4(-1 + h_1)^2h_1(1 + h_1)}x^4 + \\
 &+ \frac{(1 + 5h_1^2)h_2^3 + h_1(2 + 3h_1 - 5h_1^2)h_2h_3 + (1 - h_1)^2h_1(1 + h_1)h_4}{5(1 - h_1)^3h_1^2(1 + h_1)(1 + h_1 + h_1^2)}x^5 + \\
 &+ \sum_{i=6}^{\infty} \frac{g_{i-1}}{i} x^i.
 \end{aligned}$$

Formuła ta stanowi – otrzymany metodą rozwinięcia w szereg potęgowy – odpowiednik wzoru (1.26) wynikającego z twierdzenia Koenigsza. Oba wzory, (1.26) i (1.33), przedstawiają oczywiście tę samą funkcję  $f$ . Dla uniknięcia nieporozumień warto pamiętać, że we wzorach tych inne jest znaczenie symbolu  $h_n$ : w (1.26) oznacza on  $n$ -tą iterację funkcji  $h$ , natomiast w (1.33) jest to współczynnik przy  $x^n$  w rozwinięciu funkcji  $h$  w szereg potęgowy.



# 2

---

## Przybliżone rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji

Formuła (1.26), przedstawiająca rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji, wymaga znalezienia granicy ciągu kolejnych iteracji funkcji  $h$  wyrażającej wzorzec współdziałania między dwoma wybranymi mięśniami. W niektórych rzadkich wypadkach można zrealizować to przejście graniczne w sposób ścisły i wtedy uzyskuje się analityczne formuły będące rozwiązaniem odwrotnego zadania optymalizacji. Zilustrujemy to w następnym rozdziale.

Teraz jednak zajmiemy się sytuacją mającą miejsce nieporównanie częściej, a mianowicie taką, w której takich ścisłych wzorów nie można znaleźć i trzeba się zadowolić przybliżonym rozwiązaniem numerycznym. Jeśli metoda otrzymywania takiego rozwiązania jest skonstruowana poprawnie, to powinno być możliwe za jej pomocą uzyskanie rozwiązania przybliżonego dowolnie bliskiego rozwiązaniu ścisłemu, więc z praktycznego punktu widzenia rozwiązanie numeryczne nie musi być mniej użyteczne od rozwiązania analitycznego.

Omówione w końcu poprzedniego rozdziału dwa sposoby otrzymania rozwiązania podstawowego równania funkcyjnego Schrödera mogą stanowić punkt wyjścia do sformułowania dwóch metod przybliżonego rozwiązania tego równania, a więc również przybliżonego rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji. W pierwszej z nich, związanej z formułą (1.14), naturalnym oczekiwaniem jest, że zatrzymanie iteracji na pewnym skończonym indeksie  $n$  zdefiniuje funkcję niewiele różniącą się od funkcji granicznej. W drugiej, podobnie, można mieć nadzieję, przynajmniej w obszarze zbieżności odpowiednich szeregów potęgowych, że ograniczenie się do pewnej skończonej liczby  $n$  początkowych wyrazów w (1.28) i (1.29) sprawi, że formuła (1.29) zdefiniuje funkcję bliską rozwiązaniu podstawowemu równania Schrödera. W obu przypadkach praktyczna użyteczność metody numerycznej wymaga, aby liczba  $n$  mogła być stosunkowo niewielka.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że sposób zbliżania się rozwiązania przybliżonego do rozwiązania ścisłego jest nieco inny w każdej z tych dwóch szkicowanych metod. W metodzie opartej na formule Koenigsa (1.14) przybliżanie odbywa się niejako globalnie i kolejne iteracje w sposób jednostajny zmierzają do rozwiązania ścisłego. Natomiast w metodzie opartej na rekurencyjnym poszukiwaniu współczynników rozwinięcia (formuły (1.28), (1.29), (1.30)) oblicza się kolejne współczynniki i te już obliczone są dokładnie takie, jak te, które charakteryzują rozwiązanie ścisłe, tyle że znamy spośród nich tylko kilka pierwszych i z braku w rozwinięciu pozostałych wyrazów wynika różnica między naszym przybliżeniem a rozwiązaniem dokładnym.

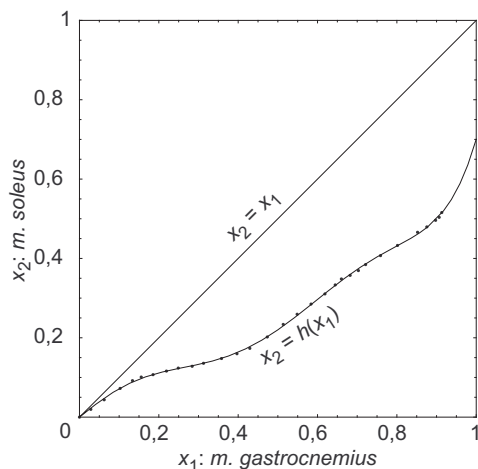
Prześledzimy teraz nieco dokładniej różnice między rozwiązaniami ścisłymi i przybliżonymi równania Schrödera, ilustrując je przebiegami odpowiednich funkcji i pamiętając, że zgodnie z rozważaniami z poprzedniego rozdziału zauważone prawidłowości będą miały znaczenie również dla rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji.

Pokażemy, jak rozwiązać odwrotne zadanie optymalizacji metodą numeryczną opartą na formule (1.14). Prosty schemat numeryczny uzyskania rozwiązania przybliżonego polega tu na tym, że zamiast ścisłej granicy (1.14) bierzemy pod uwagę  $n$ -tą iterację funkcji  $h$  i dzielimy ją przez  $n$ -tą potęgę jej pochodnej w zerze. Można to wykonać bardzo efektywnie za pomocą odpowiedniego programu komputerowego.

Rozpocznijmy od założenia przebiegu pewnej funkcji  $h$ , którą w interpretacji biomechanicznej należy rozumieć jako obraz współdziałania mięśni. Posłużymy się tutaj realistycznym, nieliniowym schematem współdziałania mięśni kota podczas lokomocji [14, 15, 4]. Ryc. 2.1 przedstawia zależność między siłą mięśnia płaszczkowatego (*m. soleus*) a siłą mięśnia brzuchatego łydki (*m. gastrocnemius*) u swobodnie poruszającego się kota (krzywa wznosząca się wykresu odpowiadającego prędkości 2,4 m/s). Jest to jednocześnie przebieg funkcji  $h$  występującej w (1.13) jako funkcja znana. Funkcję tę aproksymowano wielomianem szóstego stopnia

$$h(x) = 0,8048 \cdot x + 0,094 \cdot x^2 - 13,91 \cdot x^3 + 46,29 \cdot x^4 - 54,5 \cdot x^5 + 21,92 \cdot x^6 + (O(x))^{11}.$$

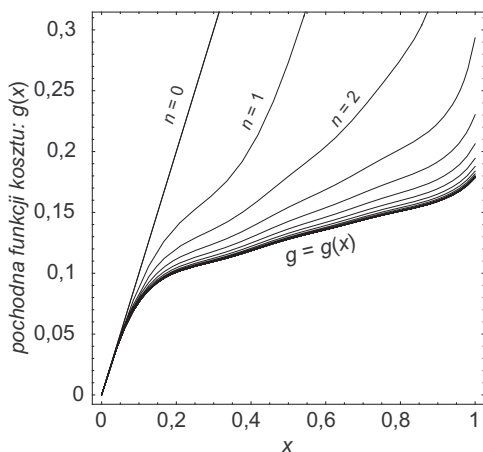
Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji wymaga dokonania przejścia granicznego zgodnie z formułą Koenigsa (1.14). Na ryc. 2.2 pokazujemy proces znajdowania kolejnych iteracji funkcji  $h$  normalizowanych



Rycina 2.1

Obraz współdziałania (funkcja  $h$ ) mięśnia płaszczkowatego i mięśnia brzuchatego łydki u swobodnie poruszającego się kota. Siły względne na tle identyczności  $x_2 = x_1$ . Na podstawie [14]

potęgami jej pochodnej w zerze. Na tej rycinie łatwo zauważyć, jak szybko osiągnąta jest granica (1.14), z przedstawionych na niej przebiegów aż 100 pierwszych iteracji widać bowiem oddzielnie jedynie 9 pierwszych. Dziesiąta iteracja jest już praktycznie nie do odróżnienia od przebiegu granicznego. Mamy więc do czynienia z bardzo sprawną metodą numeryczną, dającą szybko świetne przybliżenie rozwiązania ścisłego.



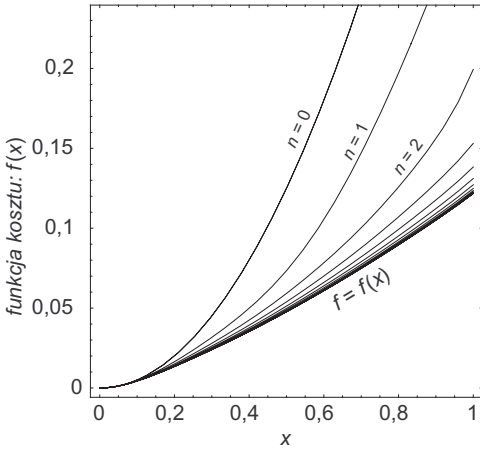
Rycina 2.2

Przebieg kolejnych normalizowanych iteracji funkcji  $h$  na drodze do granicy Koenigsa (1.14)

Oczywiście nie można numerycznie dowieść zbieżności ciągu funkcyjnego, jednak zachowanie się wykresów kolejnych normalizowanych iteracji funkcji  $h$  na ryc. 2.2 jest zgodne z faktem istnienia granicy (1.14) gwarantowanym przez twierdzenie Koenigsa. Na ryc. 2.2 można nawet zobaczyć

wykres tej granicznej funkcji, mimo że w ogólnym wypadku nie możemy dla niej uzyskać formuły analitycznej.

Kształt kolejnych przybliżeń funkcji  $f$ , obliczonych przez całkowanie funkcji  $g$  z ryc. 2.2, ilustruje ryc. 2.3. Podobnie jak na ryc. 2.2 przedsta-



Rycina 2.3  
Przebiegi funkcji  $f$  obliczonych przez całkowanie funkcji  $g$  z ryc. 2.2

wiono tutaj aż 100 kolejnych przybliżeń rozwiązania ścisłego, z których jako różne można dostrzec jedynie 10 pierwszych.

Dla sprawdzenia, czy graniczna funkcja spełnia równanie funkcyjne Schrödera, konieczny jest jeszcze test zachowania się wyrażenia

$$\frac{g(h(x))}{g(x)}.$$

Jeśli bowiem  $g$  spełnia równanie (1.13), to wyrażenie to nie powinno zależeć od  $x$ ; powinno ono być równe stałemu mnożnikowi  $s$  z równania Schrödera, który w przypadku rozwiązania podstawowego spełnia równość

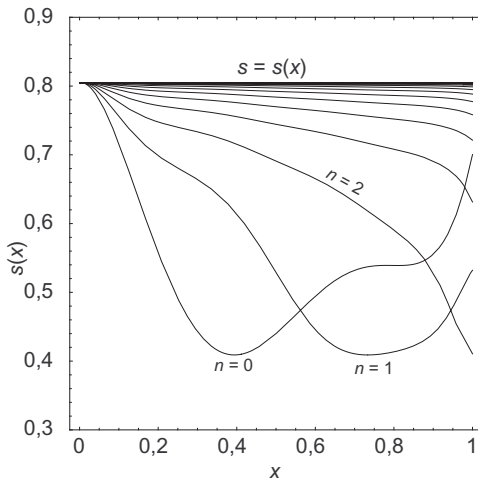
$$s = h'(0).$$

Wynik sprawdzianu przedstawia ryc. 2.4, na której umieszczono wykresy funkcji

$$\frac{g_n(h(x))}{g_n(x)}$$

dla  $n = 0, 1, 2, \dots, 100$ . W formule tej  $g_n(x)$  rozumiane jest zgodnie z (1.15). Jedynie 10 pierwszych krzywych możemy zobaczyć jako różne od linii poziomej, co sugeruje, że równanie Schrödera spełnione jest

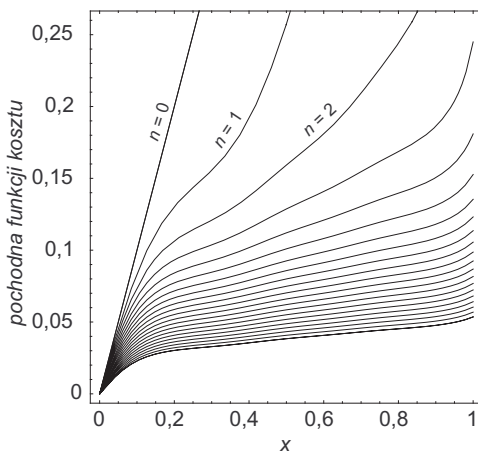
z dużą dokładnością przez funkcję graniczną, a nawet jej przybliżenia odpowiadające całkiem niskim wartościom  $n$ , jak np.  $n = 20$ . Podobnej dokładności można się zatem spodziewać również dla przybliżonego rozwiązania odpowiedniego odwrotnego zadania optymalizacji.



Rycina 2.4

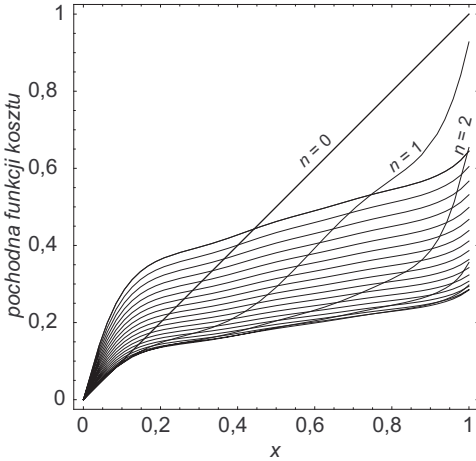
Test dokładności spełniania równania Schrödera (1.13) dla kolejnych przybliżeń rozwiązania ściślego

Z wcześniejszych rozważań wynika, że istotą pomysłu Koenigsa, jeśli chodzi o rozwiązanie równania Schrödera, było umiejętne normalizowanie kolejnych iteracji funkcji  $h$  w (1.14). Zapewnia to istnienie i skończoność występującej tam granicy, dzięki czemu formuła (1.14) definiuje dobrze określoną funkcję, co właśnie ilustruje ryc. 2.2.



Rycina 2.5

Efekt zbyt dużej normy w formule Koenigsa (1.14)



Rycina 2.6  
Efekt zbyt małej normy w formu-  
le Koenigsa (1.14)

Sprawdźmy jednak, jak zachowują się kolejne wyrazy ciągu funkcyjnego, którego granica wyznaczana jest w (1.14), gdy nieznacznie zwiększymy wartość czynnika normującego.

Zilustrowano to na ryc. 2.5. Widać na niej, że kilka pierwszych iteracji zachowuje się podobnie jak na ryc. 2.2, jednak przy dalszych iteracjach mamy do czynienia z powolnym, ale zdecydowanym zmierzaniem ciągu iteracji do granicy zerowej.

Gdy natomiast nieznacznie zmniejszymy wartość czynnika normującego, poniżej wartości pochodnej funkcji  $h'(0)$ , otrzymamy ciąg funkcyjny rozbieżny punktowo do  $+\infty$ . Przedstawia to ryc. 2.6, na której pokazano 20 pierwszych iteracji funkcji  $h$  dzielonych przez potęgi zbyt małej liczby.

Dwa ostatnie przykłady pokazują, jak ważne jest właściwe dobranie wartości czynnika normującego w formule Koenigsa (1.14). Granica zawarta w tej formule istnieje i jest skończona tylko wtedy, gdy czynnik ten jest równy pochodnej funkcji  $h$  w zerze:  $h'(0)$ . Wtedy bowiem następuje dokładna kompensacja szybkiego zmierzania do zera kolejnych iteracji funkcji  $h$  przez równie szybkie zmierzanie do zera kolejnych potęg mnożnika.

# 3

---

## Ścisłe rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji

### 3.1. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji dla liniowego współdziałania mięśni

Rozważmy układ  $n$  współdziałających mięśni obsługujących staw o jednym obrotowym stopniu swobody (ryc. 1.1 ilustruje przypadek  $n = 3$ ) i założmy, że współdziałanie tych mięśni opisane jest za pomocą funkcji  $h_{ij}$  o postaci

$$(3.1) \quad h_{ij}(x) = s_{ij} \cdot x.$$

Jest to współdziałanie liniowe, przy czym z jego postaci wynika natychmiast, że dla każdej pary  $i, j$  mamy

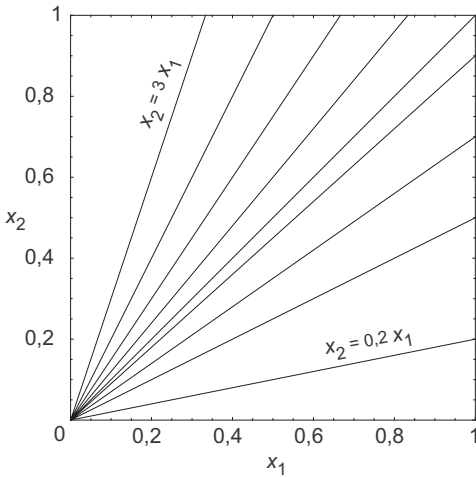
$$h_{ij}(0) = 0,$$

czyli to współdziałanie ma punkt stały w zerze (ryc. 3.1).

Opierając się na wynikach z poprzedniego rozdziału, spróbujmy skonstruować addytywnie separowalną, jednorodną, rosnącą i wypukłą (w sensie monotoniczności i wypukłości względem każdej ze zmiennych) funkcję kosztu (1.2), której minimalizacja przy warunku (1.4) prowadzi do współdziałania opisanego przez (3.1). W tym celu wybierzmy taką funkcję  $h_{ij}$ , dla której  $s_{ij} < 1$ . To zawsze można zrobić, ponieważ gdyby się okazało, że  $s_{ij} > 1$ , wówczas powinniśmy wybrać  $h_{ji}$  zamiast  $h_{ij}$ , a wtedy dla  $h_{ji}$  mielibyśmy

$$s_{ji} = \frac{1}{s_{ij}} < 1.$$

Podstawmy teraz  $h_{ij}$  do wyrażenia (1.26) definiującego funkcję  $f$ . Z liniowości funkcji  $h_{ij}$  wynika, że jej  $n$ -ta iteracja jest też funkcją liniową ze



Rycina 3.1  
Współdziałanie liniowe o punkcie stałym dla  $x = 0$

współczynnikiem kierunkowym równym  $s_{ij}^n$ . Ale  $n$ -ta potęga pochodnej funkcji  $h_{ij}$  w zerze też jest równa  $s_{ij}^n$ , wobec czego

$$(3.2) \quad f(x) = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{ij}^n y}{s_{ij}^n} dy = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} y dy = \int_0^x y dy = \frac{1}{2} x^2.$$

Okazuje się, że funkcja kosztu o ogólnej postaci (1.2) jest w tym przypadku funkcją kwadratową.

Powyżej milcząco założono, że różnych liczb  $s_{ij}$  może być wystarczająco dużo, aby uzgodnić wartość mnożnika w równaniu Schrödera z wartością pochodnej funkcji  $h_{ij}$  w zerze (jest to konieczne, jeśli chcemy mieć do czynienia z rozwiązaniem podstawowym). Aby sprawdzić, czy tak jest w istocie, przypomnijmy, że niezależnych funkcji  $h_{ij}$  jest  $(n^2 - n)/2$ , gdzie  $n$  jest liczbą mięśni obsługujących staw. Tymczasem, jeśli dopuszczamy dobieranie jedynie  $n$  stałych  $a_i$  w formule (1.2), to otrzymujemy  $n - 1$  liczb  $s_{ij}$ , co doprowadziło wcześniej do wniosku, że (przy ogólnym, nieliniowym współdziałaniu) już dla  $n = 3$  może nam zabraknąć tych stałych. Gdy jednak współdziałanie jest liniowe, pojawia się dodatkowo swoboda doboru stałych  $b_i$ , w których zawarte są m.in. maksymalne wartości siły poszczególnych mięśni. Otrzymujemy zatem  $(n - 1)(n - 1) = (n - 1)^2$  liczb. Dla każdej liczby naturalnej  $n$  spełniona jest nierówność

$$\frac{n^2 - n}{2} \leq (n - 1)^2,$$



więc zawsze można tak dobrać stałe  $a_i$  i  $b_i$ , aby móc zajmować się jedynie rozwiązaniami podstawowymi równania Schrödera. Nasze milczące założenie jest zatem uzasadnione, przynajmniej dla współdziałania liniowego o punkcie stałym w zerze.

Powyższe rozważania – dotyczące możliwości uzyskania rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji w postaci jednorodnej funkcji kosztu – przenoszą się z niewielkimi zmianami na inne przypadki współdziałania liniowego. Przypadki te różnią się umiejscowieniem punktu stałego funkcji  $h_{ij}(x)$ . W sytuacji tu omówionej znajdował on się w zerze [6], ale ze względu na zastosowania interesujący jest również przypadek punktu stałego odpowiadającego wartości

$$x = z > 0,$$

np. dla  $z = 1$  (maksymalna siła względna). Funkcje opisujące współdziałanie mięśni przyjmą teraz postać

$$(3.3) \quad h_{ij}(x) = s_{ij} \cdot (x - 1) + 1$$

i dla  $x = 1$ , jako dla punktu stałego, mamy

$$h_{ij}(1) = 1,$$

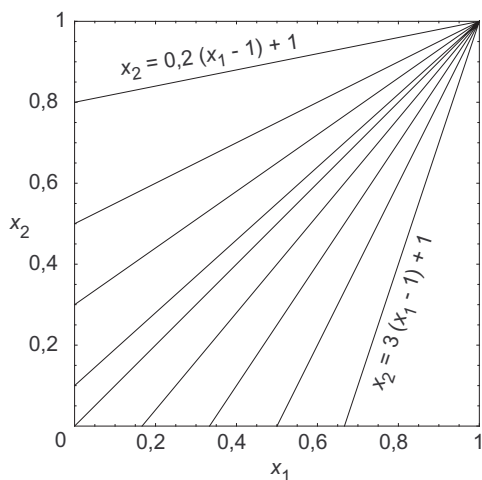
co w kontekście biomechanicznym oznaczać może warunek wspólnego osiągnięcia przez mięśnie maksymalnych wartości siły (tzw. *warunek łagodnego nasycenia* [23]). Przypadek ten zilustrowano na ryc. 3.2, zawierającej pęk linii określonych równaniem (3.3).

Obliczmy granicę Koenigsa (1.14) dla funkcji (3.3), pamiętając, że mamy do czynienia z punktem stałym dla  $x = 1$ , a nie dla  $x = 0$ , i dlatego zamiast (1.14) musimy użyć oryginalnej formuły z pracy Koenigsa [16, 5]. Uwzględniwszy postać  $n$ -tej iteracji funkcji  $h_{ij}$ , a mianowicie

$$h_{ij,n}(x) = s_{ij}^n \cdot (x - 1) + 1,$$

otrzymujemy zatem

$$(3.4) \quad g_{\text{podst}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{ij,n}(x) - 1}{s_{ij}^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{ij}^n \cdot (x - 1) + 1 - 1}{s_{ij}^n} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{ij}^n \cdot (x - 1)}{s_{ij}^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - 1) = x - 1.$$



Rycina 3.2  
Współdziałanie liniowe o punkcie stałym dla  $x = 1$

Widzimy, że podobnie jak w formule (3.2) również tutaj obliczenie granicy Koeniga znacząco się upraszcza dzięki liniowości funkcji (3.3).

Pozostaje teraz odtworzyć funkcję  $f$  występującą w definicji funkcji kosztu (1.2). Nie możemy jednak po prostu scałkować (3.4), bo w efekcie nie otrzymalibyśmy funkcji rosnącej (pamiętajmy, że (3.4) jest ujemne w przedziale  $(0, 1)$ ). Moglibyśmy wprawdzie, korzystając ze swobody charakterystycznej dla równania Schrödera, pomnożyć rozwiązanie podstawowe przez  $-1$ , ale wtedy, uzyskując rosnącą funkcję  $f$ , tracilibyśmy jej wypukłość. Aby zatem w ramach wspomnianej swobody uzyskać funkcję  $g$  dodatnią, co jest konieczne, żeby funkcja  $f$  była rosnąca, i rosnącą, co jest konieczne dla wypukłości funkcji  $f$ , możemy użyć – jako pewnej namiastki rozwiązania podstawowego spełniającej nasze oczekiwania – funkcji  $g(x) = g_{\text{podst}}^{-2}(x)$ .

Odpowiednikiem formuły (3.2) staje się teraz wzór

$$(3.5) \quad f(x) = \int_0^x g(y) dy = \int_0^x g_{\text{podst}}^{-2}(y) dy = \int_0^x (y-1)^{-2} dy = \frac{x}{1-x}.$$

Interesującym faktem jest przy tym to, że minimalizacja funkcji kosztu zbudowanej na podstawie powyższej funkcji  $f$  jest równoważna minimalizacji funkcji kosztu wykorzystującej formuły dla izotermy adsorpcji ([24], [20]) bądź formuły (faktycznie identyczne z tymi dla izotermy adsorpcji) opisujące kinetykę Michaelisa–Menten [27].

Wśród przypadków współdziałania liniowego warto rozważyć jeszcze jeden, w którym funkcje  $h_{ij}$  nie mają punktu stałego. W przypadku linio-

wych funkcji  $h_{ij}$  oznacza to tyle, że ich wykresy na płaszczyźnie  $x_1x_2$  są liniami prostymi równoległymi do linii  $x_2 = x_1$ . Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji dla tego przypadku można otrzymać dwojako: albo dokonując odpowiedniego przejścia granicznego od przypadku, gdy punkt stały jest poza zerem, albo odgadując wprost rozwiązanie odpowiedniego równania Schrödera. Wspomniane przejście graniczne polega na umiejętnym przesuwaniu punktu stałego w kierunku nieskończoności tak, aby w granicy otrzymać wykres równoległy do wykresu  $x_2 = x_1$ . Obie drogi prowadzą do takiego samego wyniku: funkcja  $g$  okazuje się funkcją eksponencjalną, więc powstająca z niej przez całkowanie funkcja  $f$  jest również funkcją eksponencjalną.

Ten ostatni przypadek można traktować jako ilustrację rozwiązania odwrotnego zadania optymalizacji w sytuacji opisanej w pracy [13], czyli odtworzenia postaci minimalizowanej funkcji kosztu na podstawie zamieszczonych w niej wykresów współdziałania między różnymi jednostkami ruchowymi (motorycznymi) modelowanego mięśnia. Ponieważ charakterystyczną cechą tych wykresów są równoległe odcinki linii prostych, więc odwrotna optymalizacja powinna prowadzić do funkcji

$$f(x) = e^x.$$

Okazuje się, że faktycznie na takiej prostej zależności funkcji kosztu od pobudzenia opiera się skomplikowana formuła z pracy [13].

### **3.2. Rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji dla współdziałania mięśni realizującego minimum zmęczenia**

Po ukazaniu się w roku 1981 klasycznej już teraz pracy [6], w której opisano użycie potęgowej funkcji kosztu o postaci zbliżonej do (1.3), dość szybko zdano sobie sprawę z ograniczeń występujących w tego rodzaju funkcjach [9]. Wynikają one z faktu, że funkcje te, choć same są nieliniowe, przewidują jednak liniowe współdziałanie mięśni, a więc taki sam podział wypadkowego momentu siły między współdziałające mięśnie niezależnie od aktualnie realizowanych wartości sił mięśni, czyli również wtedy, gdy mięśnie te wyzwalają prawie maksymalne siły. Taki rodzaj współdziałania byłby może do przyjęcia w biomechanice nieznającej ograniczeń dla sił mięśniowych, jednak w realnej biomechanice, która uwzględnia ograni-

czenia fizjologii, współdziałanie mięśni nie może być aż tak proste, jakby to wynikało z minimalizacji funkcji kosztu (1.3) opisanej w [6].

Podejmowano różne próby pokonania tych trudności, mające prowa-  
dzić do możliwości przewidywania bardziej realistycznych, nieliniowych  
schematów współdziałania mięśni. W pracy [8] zaproponowano podejście  
typu MiniMax realizujące minimum zmęczenia mięśni, kilka lat później  
pojawiła się propozycja kryterium łagodnego nasycenia [23], które osiąga  
wspomniany cel w obrębie addytywnie separowalnych i gładkich funkcji  
kosztu. Obecnie lansowana jest, jako sprawniejsza numerycznie w dużych  
modelach biomechanicznych, realizacja niektórych idei zawartych w [8]  
i [23], mająca postać uproszczonej metody MiniMax [21, 7].

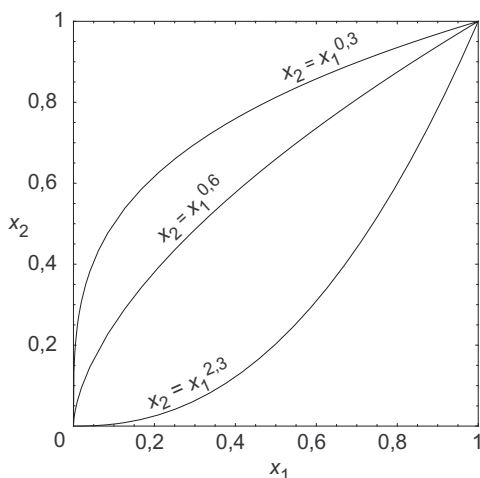
W tym podrozdziale rozważymy współdziałanie mięśni zgodne ze sche-  
matem typu MiniMax realizującym minimum zmęczenia [8] i sprawdzi-  
my, czy stosując formalizm rozwinięty w poprzednich rozdziałach, można  
skonstruować jednorodną, addytywną funkcję kosztu, z której minimali-  
zacji wynikałoby takie współdziałanie.

Rozpocniemy od przypomnienia, że nieliniowy schemat współdziała-  
nia mięśni realizujący według pracy [8] minimum zmęczenia, czyli funkcja  
 $h$  w naszej terminologii, ma postać funkcji potęgowej (ryc. 3.3):

$$(3.6) \quad h(x) = x^w,$$

gdzie  $w$  jest wykładnikiem na ogół różnym od 1 (równość ma miejsce  
jedynie dla pary mięśni nieróżniących się względną zawartością włókien  
mięśniowych różnych typów [8]). Funkcja (3.6) ma punkt stały w zerze,  
tzn.  $h(0) = 0$ , ale niestety jest to punkt stały nadprzyciągający, tzn.  
 $h'(0) = 0$  (dla  $w > 1$ ), i dlatego nie możemy tu zastosować ani formu-  
ły (1.26), ani (1.33). Na szczęście funkcja (3.6) ma jeszcze jeden punkt  
stały,  $h(1) = 1$ , co odpowiada warunkowi łagodnego nasycenia i jest cha-  
rakteryistyczne dla wszystkich trzech podejść do minimalizacji zmęcze-  
nia wspomnianych wcześniej [8, 23, 21, 7]. Łatwo sprawdzić, że pochodna  
funkcji  $h$  w tym punkcie stałym, czyli dla  $x = 1$ , jest różna od zera i różna  
od jedynki, gdy  $w \neq 1$ . Biorąc pod uwagę samą funkcję  $h$  bądź funkcję do  
niej odwrotną, można zawsze uzyskać spełnienie warunku  $0 < h'(1) < 1$ ;  
dla takiej funkcji  $h$  punkt  $x = 1$  jest punktem stałym przyciągającym  
i można stosować wyniki wcześniejszych rozdziałów.

Dalsze rozumowanie przeprowadzimy dla pewnej wartości wykładnika  
 $w > 1$ . Pochodna funkcji (3.6) ma dla  $x = 1$  wartość  $w$ , więc jest to punkt  
stały odpychający. Gdy jednak zamiast tej funkcji weźmiemy funkcję do



Rycina 3.3

Przebiegi kilku funkcji o postaci (3.6) lub (3.7), odpowiadające różnym wartościom wykładnika  $w$

niej odwrotną, jej pochodna dla  $x = 1$  wyniesie  $1/w$  ( $0 < 1/w < 1$ ), czyli dla  $x = 1$  mamy do czynienia z punktem stałym przyciągającym funkcji  $h$ , który spełnia założenia twierdzenia Koenigsa. Istnieje więc granica (1.14).

Przyjmijmy zatem funkcję  $h$  w postaci

$$(3.7) \quad h(x) = \sqrt[w]{x}.$$

Ryc. 3.3 ilustruje przebiegi kilku funkcji o postaci (3.7), odpowiadające różnym wartościom wykładnika  $w$ .

Dla obliczenia granicy Koenigsa (1.14) potrzebna będzie postać  $n$ -tej iteracji funkcji  $h$ :

$$(3.8) \quad h_n(x) = \sqrt[w^n]{x} = x^{1/w^n}.$$

Gdy punktem stałym nie jest  $x = 0$ , lecz  $x = 1$ , zamiast (1.14) musimy użyć oryginalnej formuły z pracy Koenigsa [16], którą można też znaleźć np. w [5]. W naszym przypadku prowadzi ona do równości

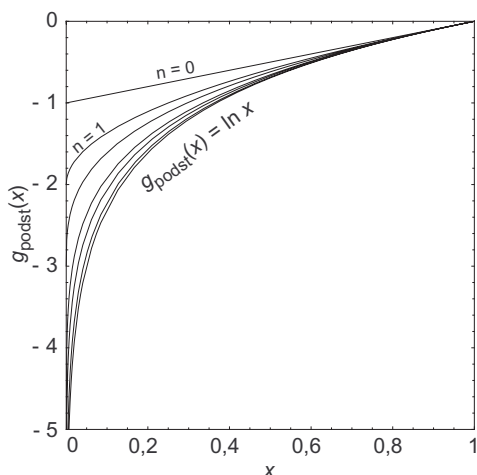
$$(3.9) \quad \begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n(x) - 1}{h'(1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1/w^n} - 1}{(1/w)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1/w^n} - 1}{1/w^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w^n (x^{1/w^n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n (x^{1/n} - 1) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x. \end{aligned}$$

Wzory (3.9) ilustrują rzadki przypadek, gdy granica Koenigsa może być obliczona ściśle mimo nieliniowości funkcji  $h$ . Na ogół nie jest to możliwe,

m.in. dlatego że nie można podać ogólnego wzoru na  $n$ -tą iterację funkcji  $h$ . W przypadku pierwiastka, jak w (3.7), można to zrobić, a dodatkowo otrzymana granica może być obliczona dzięki wykorzystaniu znanych własności funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej. Warto dodać, że w niektórych starszych podręcznikach analizy matematycznej, np. [11], granica (3.9) jest rozważana wcześniej niż funkcja logarytmiczna; można dowieść, nie korzystając z własności tej funkcji, że spełnia ona jedno z równań funkcyjnych Cauchy'ego [1]:

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

którego jedynym ciągłym rozwiązaniem określonym dla dodatnich liczb rzeczywistych jest właśnie logarytm.



Rycina 3.4  
„Dochodzenie” do granicy  
Koenigsa

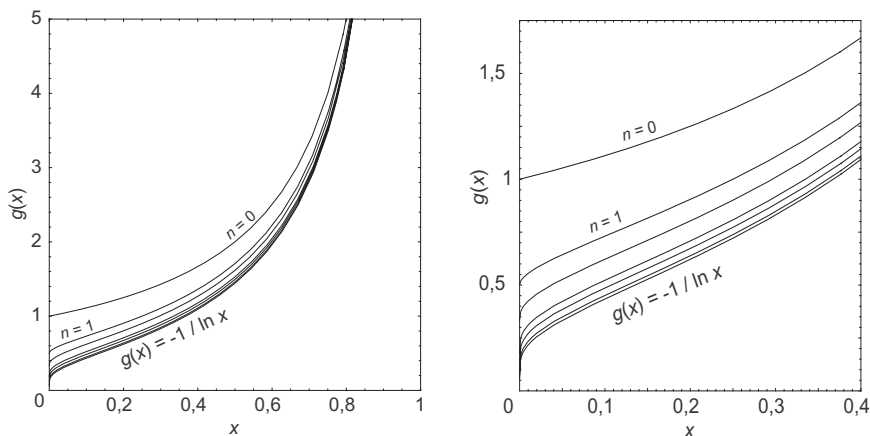
Zgodnie z twierdzeniem Koenigsa wyrażenie (3.9) powinno definiować rozwiązanie podstawowe równania Schrödera (1.13). Proces „dochodzenia” do granicy Koenigsa jest zilustrowany na ryc. 3.4, gdzie najniżej leżący wykres odpowiada funkcji granicznej  $\ln x$ . Łatwo sprawdzić, że w „górnym” punkcie stałym, czyli dla  $x = 1$ , mamy

$$g(1) = \ln 1 = 0, \quad g'(1) = \ln' 1 = \frac{1}{1} = 1,$$

a zatem faktycznie możemy napisać

$$(3.10) \quad g_{\text{podst}}(x) = \ln x.$$

Funkcja (3.10) jest analityczna w przedziale  $(0, 1]$ , nie jest jednak analityczna w punkcie  $x = 0$ , „dolnym” punkcie stałym funkcji  $h$ . To ostatnie stwierdzenie wiąże się z faktem, że ten punkt stały jest nadprzyciągający (dla funkcji  $h^{-1}$ ), w odróżnieniu od „górnego” punktu stałego, który jest przyciągający.



Rycina 3.5

Dodatnia i rosnąca potęga rozwiązania podstawowego  $g_{\text{podst}}$

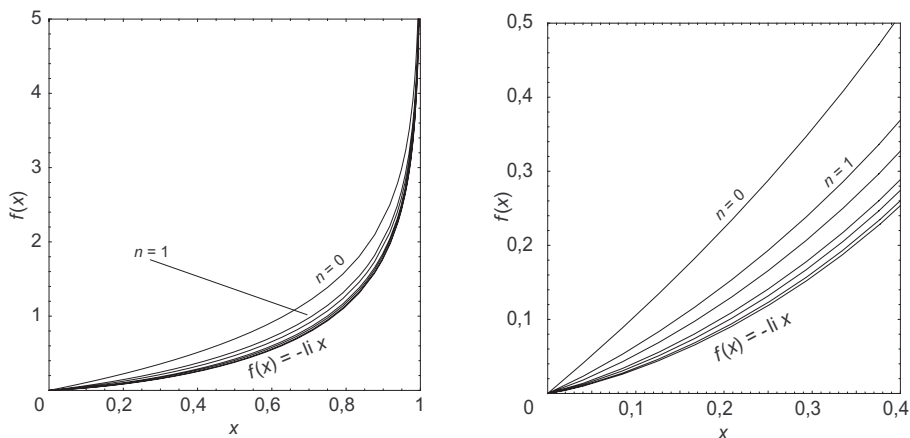
Pozostaje teraz odtworzyć funkcję  $f$  występującą w definicji funkcji kosztu (1.2). Powtarzając argumentację dla funkcji (3.10), jak dla funkcji (3.4), dochodzimy do wniosku, że aby w ramach swobody – charakterystycznej dla równania Schrödera – uzyskać funkcję  $g$  dodatnią, co jest konieczne, żeby funkcja  $f$  była rosnąca, i rosnącą, co jest konieczne dla wypukłości funkcji  $f$ , musimy podnieść (3.10) do ujemnej potęgi, a następnie wynik pomnożyć przez  $-1$ . W najprostszym przypadku oznacza to przyjęcie funkcji  $g$  w postaci

$$g(x) = -g_{\text{podst}}^{-1},$$

co zilustrowano na ryc. 3.5 zawierającej wykres funkcji  $g$ , jako leżący najniżej, wraz z wykresami kilku wyrazów zbieżnego do niej ciągu funkcyjnego. Taka postać funkcji  $g$  prowadzi do wzoru

$$(3.11) \quad f(x) = \int_0^x g(y) dy = \int_0^x (-\ln^{-1} y) dy = - \int_0^x \frac{1}{\ln y} dy = -\text{li } x,$$

gdzie funkcja  $\ln x$  oznacza logarytm całkowity, który dla rzeczywistych wartości  $x$  z przedziału otwartego  $(0, 1)$  przyjmuje wartości rzeczywiste i po uwzględnieniu znaku „minus” w (3.11) definiuje funkcję analityczną dodatnią, rosnącą i wypukłą. Funkcja (3.11) nie jest jednak analityczna ani dla  $x = 0$ , ani dla  $x = 1$ . Jej wykres, jako leżący najniżej, przedstawiony jest na ryc. 3.6 wraz z wykresami kilku wyrazów zbieżnego do niej ciągu funkcyjnego.



Rycina 3.6

Dodatnia, rosnąca i wypukła funkcja  $f$ , stanowiąca rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji dla minimum zmęczenia

Można łatwo sprawdzić, że istotnie minimalizacja funkcji (3.11) przy dodatkowym warunku typu (1.4) prowadzi do współdziałania mięśni realizującego minimum zmęczenia [8]. W odróżnieniu od oryginalnego sformułowania [8] pokazaliśmy tutaj, że ten rodzaj współdziałania może wynikać z minimalizacji pewnej jednorodnej, addytywnie separowalnej i gładkiej funkcji kosztu. Badając zachowanie się funkcji (3.11) w okolicy jej „górnego” punktu stałego, można dojść do wniosku, że przypomina ona tam asymptotycznie funkcję opisującą tzw. kinetykę Michaelisa–Menten [27].



# 4

---

## Podsumowanie i wnioski

W pracy zaproponowano metodę rozwiązania ważnego, dotychczas nierozwiązanego problemu biomechaniki, polegającego na określeniu postaci kryterium optymalizacyjnego odpowiedzialnego za obserwowane wzorce współdziałania mięśni szkieletowych. Dla takiego zadania przyjęła się nazwa *odwrotne zadanie optymalizacji*, która odróżnia je od tzw. *prostego zadania optymalizacji*, rozważanego w biomechanice w związku ze statyczną niewyznaczalnością łańcuchów biokinematycznych. Jeśli w prostym zadaniu optymalizacji chodzi o wyznaczenie takiego podziału wypadkowego momentu siły w stawie na udziały pochodzące od poszczególnych mięśni, który byłby zgodny z wymaganiem minimalizowania pewnej założonej funkcji kosztu, to odwrotne zadanie optymalizacji stawia sobie właśnie za cel znalezienie postaci takiej funkcji kosztu, czyli określenie, czym kieruje się ośrodkowy układ nerwowy, pobudzając w taki, a nie inny sposób mięśnie współpracujące przy generowaniu wypadkowego momentu siły w stawie.

Nowe podejście do odwrotnego zadania optymalizacji opiera się na spostrzeżeniu, że pewne zagadnienia optymalizacyjne z liniowymi ograniczeniami prowadzą do relacji między funkcją kosztu a rozwiązaniami danego problemu optymalizacyjnego, którą to relację można zapisać w postaci równania funkcyjnego Schrödera. Dzięki temu oba zadania optymalizacyjne, proste i odwrotne, znajdują swoje odpowiedniki w postaci zadań dotyczących tego równania. W szczególności, znając rozwiązanie pewnego problemu optymalizacyjnego i rozwiązując odpowiednie równanie funkcyjne Schrödera, można zrekonstruować w sposób ścisły funkcję kosztu, która jest minimalizowana.

Interpretowane w kontekście biomechaniki, równanie to wiąże ze sobą dwie funkcje: jedną opisującą wzorzec współdziałania mięśni i drugą będącą pochodną funkcji kosztu rozważanego problemu optymalizacyjnego. W zależności od tego, którą z nich przyjmiemy za funkcję znaną, którą zaś za niewiadomą, równanie to może stanowić podstawę do rozwiązania prostego bądź odwrotnego zadania optymalizacji.

Dostrzeżony związek między teorią optymalizacji a teorią iteracyjnych równań funkcyjnych umożliwia identyfikację funkcji kosztu odpowiadającej danemu zadaniu optymalizacyjnemu. Zastosowanie go do analizy biomechanicznego problemu współdziałania mięśni szkieletowych doprowadziło do następujących wniosków:

– Możliwe jest odtworzenie postaci funkcji kosztu, gdy znane jest choć jedno rozwiązanie prostego zadania optymalizacji.

– Jedyne funkcje kosztu prowadzące do liniowego współdziałania mięśni to funkcje potęgowe, funkcje typu kinetyki Michaelisa–Menten (potęgi funkcji Michaelisa–Menten) oraz funkcje wykładnicze.

– Jedyne gładkie funkcje kosztu prowadzące do współdziałania mięśni zgodnego z minimalizacją zmęczenia to funkcje oparte na logarytmie całkowym.

– Funkcje te asymptotycznie, dla sił mięśniowych bliskim wartościom maksymalnym, zgadzają się z kinetyką Michaelisa–Menten.

– Możliwe jest odtworzenie funkcji kosztu problemu optymalizacyjnego na podstawie znalezionych doświadczalnie funkcji opisujących schemat współdziałania mięśni.

## Bibliografia

- [1] J. Aczél. *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic Press, New York 1966.
- [2] R. K. Ahuja, J. B. Orlin. Inverse Optimization. *Operations Research*, 49(5):771–783, 2001.
- [3] R. McN. Alexander. Modelling approaches in biomechanics. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 358(1437):1429–1435, 2003.
- [4] P. Binding, A. Jinha, W. Herzog. Analytic analysis of the force sharing among synergistic muscles in one- and two-degree-of-freedom models. *Journal of Biomechanics*, 33(11):1423–1432, 2000.
- [5] P. S. Bourdon, J. H. Shapiro. Mean growth of Koenigs eigenfunctions. *Journal of the American Mathematical Society*, 10(2):299–325, 1997.
- [6] R. D. Crowninshield, R. A. Brand. A physiologically based criterion of muscle force prediction in locomotion. *Journal of Biomechanics*, 14(11):793–801, 1981.
- [7] M. Damsgaard, J. Rasmussen, S. T. Christensen, E. Surma, M. de Zee. Analysis of musculoskeletal systems in the AnyBody Modeling System. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 14(8):1100–1111, 2006.
- [8] J. Dul, G. E. Johnson, R. Shiavi, M. A. Townsend. Muscular synergism – II. A minimum-fatigue criterion for load sharing between synergistic muscles. *Journal of Biomechanics*, 17(9):675–684, 1984.
- [9] J. Dul, M. A. Townsend, R. Shiavi, G. E. Johnson. Muscular synergism – I. On criteria for load sharing between synergistic muscles. *Journal of Biomechanics*, 17(9):663–673, 1984.
- [10] T. W. Gamelin. [Recenzja książki:] D. S. Alexander, *A History of Complex Dynamics, from Schröder to Fatou and Julia*, Wiesbaden 1994. *Historia Mathematica*, 23:74–84, 1996.

- 
- [11] G. H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 1908.
- [12] T. E. Harris. Branching processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19(4):474–494, 1948.
- [13] H. Hatze, J. D. Buys. Energy-optimal controls in the mammalian neuromuscular system. *Biological Cybernetics*, 27(1):9–20, 1977.
- [14] W. Herzog, T. R. Leonard. Validation of optimization models that estimate the forces exerted by synergistic muscles. *Journal of Biomechanics*, 24(supp. 1):31–39, 1991.
- [15] W. Herzog, T. R. Leonard, A. C. Guimaraes. Forces in *gastrocnemius*, *soleus*, and *plantaris* tendons of the freely moving cat. *Journal of Biomechanics*, 26(8):945–953, 1993.
- [16] G. Koenigs. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 3<sup>e</sup> série*, 1:3–41, 1884.
- [17] M. Kuczma. *On the Schröder Equation*. Rozprawy Matematyczne, 34. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963.
- [18] M. Kuczma. *Functional Equations in a Single Variable*. Monografie Matematyczne, 46. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968.
- [19] M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger. *Iterative functional equations*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 32. Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [20] I. Langmuir. The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica and platinum. *Journal of the American Chemical Society*, 40(9):1361–1403, 1918.
- [21] J. Rasmussen, M. Damsgaard, M. Voigt. Muscle recruitment by the min/max criterion – a comparative numerical study. *Journal of Biomechanics*, 34(3):409–415, 2001.
- [22] E. Schröder. Ueber iterirte Functionen. *Mathematische Annalen*, 3:296–322, 1871.

- [23] A. Siemieński. Soft saturation, an idea for load sharing between muscles. Application to the study of human locomotion. [W:] A. Cappozzo *et al.* (Eds.), *Biocomotion: A Century of Research Using Moving Pictures*: 293–303, 1992.
- [24] A. Siemieński. Motor-unit orderly recruitment teleologically explained. *Journal of Biomechanics*, 31(supp. 1):69, 1998.
- [25] A. Siemieński. Direct solution of the inverse optimization problem of load sharing between muscles. *Journal of Biomechanics*, 39(supp. 1):45, 2006.
- [26] A. Siemieński. Can all muscular load sharing patterns be regarded as optimal in some sense? *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 8(2):43–49, 2006.
- [27] K. A. Sobiech. *Biochemia*. AWF Wrocław, 2001.
- [28] O. G. Tchikilev. Branching processes and Koenigs function. *Arxiv preprint hep-ph/0008162*, 2000.
- [29] D. Tsirakos, V. Baltzopoulos, R. Bartlett. Inverse optimization: functional and physiological considerations related to the force-sharing problem. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 25(4–5):371–407, 1997.

# Spis rycin

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1. | Staw o jednym obrotowym stopniu swobody obsługiwany przez trzy mięśnie jednostawowe .....  | 9  |
| 1.2. | Punkt styczności prostej stałego momentu siły $b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 = M$ z jedną z krzywych stałego kosztu $K(x_1, x_2) = \text{const}$ dla dwóch różnych wartości $M$ .....  | 11 |
| 1.3. | Rodzina prostych stałego momentu siły (indeksowana wartością tego momentu) wraz z rodziną krzywych stałego kosztu (indeksowaną wartością tego kosztu) definiują poprzez swoje punkty styczności funkcję $x_2 = x_2(x_1)$ ..... | 12 |
| 1.4. | Funkcja kosztu określa funkcję $x_2 = x_2(x_1)$ .....  | 13 |
| 2.1. | Obraz współdziałania (funkcja $h$ ) mięśnia płaszczkowatego i mięśnia brzuchatego łydki u swobodnie poruszającego się kota. Siły względne na tle identyczności $x_2 = x_1$ . Na podstawie [14] .....                           | 28 |
| 2.2. | Przebieg kolejnych normalizowanych iteracji funkcji $h$ na drodze do granicy Koenigsa (1.14) .....   | 28 |
| 2.3. | Przebiegi funkcji $f$ obliczonych przez całkowanie funkcji $g$ z ryc. 2.2 .....  | 29 |
| 2.4. | Test dokładności spełniania równania Schrödera (1.13) dla kolejnych przybliżeń rozwiązania ścisłego .....  | 30 |
| 2.5. | Efekt zbyt dużej normy w formule Koenigsa (1.14) .....   | 30 |
| 2.6. | Efekt zbyt małej normy w formule Koenigsa (1.14) .....   | 31 |
| 3.1. | Współdziałanie liniowe o punkcie stałym dla $x = 0$ .....  | 33 |
| 3.2. | Współdziałanie liniowe o punkcie stałym dla $x = 1$ .....  | 35 |
| 3.3. | Przebiegi kilku funkcji o postaci (3.6) lub (3.7), odpowiadające różnym wartościom wykładnika $w$ .....  | 38 |
| 3.4. | „Dochodzenie” do granicy Koenigsa .....  | 39 |
| 3.5. | Dodatnia i rosnąca potęga rozwiązania podstawowego $g_{\text{podst}}$ .....  | 40 |
| 3.6. | Dodatnia, rosnąca i wypukła funkcja $f$ , stanowiąca rozwiązanie odwrotnego zadania optymalizacji dla minimum zmęczenia .....  | 41 |

## Summary

### **The inverse optimization problem of muscular load sharing**

This work introduces a method which allows to solve the inverse optimization problem associated with load sharing between synergistic skeletal muscles. Compared to existing approaches [29, 3], it is direct and makes it possible to reconstruct strictly or numerically to any desired accuracy the objective function whose minimization yields a given muscular load sharing pattern.

The rationale of using optimization to solve the muscle load sharing problem is based on three premises. First, muscles actuating a joint usually outnumber its degrees of freedom and consequently a desired joint torque may be produced by many different muscle activation patterns. Second, despite this redundancy muscle activations during well-learned motor tasks are highly stereotypical, which suggests the existence of a law justifying the selection of one activation pattern out of infinitely many feasible ones. And third, ideas from evolutionary biology help interpret this law as a minimum principle.

Within such a formulation, the set of muscle activation levels actually selected by the central nervous system for a given task is such that the desired external joint torques are produced and a quantity depending on muscle activations attains a minimum. In terms of optimization theory this becomes a problem of finding a constrained minimum of an objective function. While there is a general agreement as to the form of the constraints – they should express the torque equilibrium conditions at joints – the proper choice of the objective function is less obvious.

As different objective functions usually lead to different muscular load sharing patterns (Fig. 1.4), a question seems natural whether an appropriate objective function could be found for a given load sharing pattern. Such questions fit within the inverse optimization approach where variables are sought that are optimized by the observed patterns of behavior, i.e. instead of seeking the best possible solution to a problem, one asks: if this load sharing pattern is the best possible solution to a problem, what was the problem? (cf. [3]).

The main idea behind the proposed method is presented in Chapter 1 entitled “Linearly constrained optimization and Schröder’s functional equation”. It is shown there that the standard formulation of the optimization problem with linear constraints leads to a functional dependence between the derivative of the objective function  $g(x)$  and a muscular load sharing pattern or muscle-muscle function  $h(x)$ . The key observation is that this dependence happens to be one of the most important iterative functional equations – Schröder’s functional equation (1.10) [22, 17–19].

The original optimization problem is thus mapped to another problem within the area of iterative functional equations. Depending on which of the two functions involved is considered known and which is considered unknown, Schröder’s equation allows to solve, thanks to such a mapping, both the forward optimization problem (when objective function is known and muscular load sharing patterns are unknown) and the inverse optimization problem (when muscular load sharing patterns are known and objective function is unknown).

The solution of the first of these problems is rather straightforward and was known already to Schröder [22]. When mapped to the optimization area it merely reproduces the standard procedure featuring the Lagrange function. The second problem, however, is more intricate and its solution, within a certain regularity class of functions, was not found until the work of Koenigs [16] published more than a decade later. The Koenigs theorem states that the solution of Schröder’s equation, i.e. function  $g(x)$ , can be found by calculating a limit (1.14) involving iterates of the known function  $h(x)$ . A method of solving the inverse optimization problem involving this limit is outlined in Section 1.1. Section 1.2 presents another version of the method exploring the possibility to expand the known and unknown function into power series.

An approximate solution of the inverse optimization problem is discussed in Chapter 2. A numerical approach is described there which allows to reconstruct to any desired accuracy the objective function whose minimization yields an experimentally observed muscular load sharing pattern. It is illustrated by constructing an objective function corresponding to one of the load sharing patterns between two hind limb muscles of the cat, reported by Herzog and Leonard [14].

The inverse optimization problem can be solved analytically in just a few cases; some of them are described in Chapter 3. Its Section 3.1



brings two such analytical solutions corresponding to linear muscular load sharing patterns.

The first pattern discussed there has a fixed point at  $x = 0$ , which is equivalent to the requirement that zero force of one muscle implies zero force of another. The objective function reconstructed based on such a load sharing pattern turns out to be the Crowninshield–Brand objective function [6].

The second linear load sharing pattern considered in Section 3.1 has a fixed point at  $x = 1$ , which corresponds to a statement that exertion of maximum force by one muscle implies maximum force produced by a synergistic muscle (the soft saturation condition [23, 21]). The objective function reconstructed for such a linear load sharing pattern turns out to be based on a function defining the Michaelis–Menten kinetics [27].

Half way between the two linear load sharing patterns is a pattern consisting of parallel straight lines. A classical example of such a load sharing can be found in [13] and reconstruction of the corresponding objective function – obtained by solving the inverse optimization problem – leads to the exponential function.

Section 3.2 shows how the inverse optimization problem can be solved for a muscular load sharing pattern that has a superattractive fixed point at  $x = 0$ , which makes the Koenigs approach [16] inapplicable. An example is discussed of a minimum-fatigue load sharing pattern [8], which – luckily enough – has also another fixed point at  $x = 1$ . This second fixed point is attractive and Koenigs’ theorem can be used there, which makes it possible to reconstruct a homogeneous, convex and smooth objective function whose minimization results in the minimum-fatigue load sharing. The reconstructed objective function turns out to be based on a function called logarithmic integral ( $\text{li } x$ ), and so is not analytic at  $x = 0$  and tends to the Michaelis–Menten kinetics based objective function as  $x$  tends to 1 – the maximum relative muscular force.

# List of figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1. | One-degree-of-freedom joint actuated by three mono-articular muscles .....                          | 9  |
| 1.2. | Single common point of a line of constant torque and a curve of constant cost .....                 | 11 |
| 1.3. | Definition of muscle-muscle function .....  | 12 |
| 1.4. | Objective function determines the muscle-muscle function .....                                      | 13 |
| 2.1. | Load sharing between <i>m. soleus</i> and <i>m. gastrocnemius</i> in a freely moving cat [14] ..... | 28 |
| 2.2. | Iterations converging to Koenigs' function .....  | 28 |
| 2.3. | Functions $f$ obtained from functions $g$ by integration .....                                      | 29 |
| 2.4. | Accuracy test for a solution of Schröder's equation .....   | 30 |
| 2.5. | Effect of too big norm in Koenigs' solution (1.14) .....  | 30 |
| 2.6. | Effect of too small norm in Koenigs' solution (1.14) .....  | 31 |
| 3.1. | Linear load sharing with a fixed point at $x = 0$ .....   | 33 |
| 3.2. | Linear load sharing with a fixed point at $x = 1$ .....   | 35 |
| 3.3. | Several muscle-muscle functions (3.6) or (3.7) for different values of the exponent $w$ .....       | 38 |
| 3.4. | Convergence to Koenigs' limit .....   | 39 |
| 3.5. | Positive and increasing power of the principal solution .....                                       | 40 |
| 3.6. | Positive, increasing and convex function $f$ for minimum fatigue .....                              | 41 |

## Skorowidz rzeczowy

funkcja celu 5

funkcja kosztu 5, 10

*inverse problems* 6

metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange'a 13

nieoznaczony mnożnik Lagrange'a 13

odwrotne zadanie optymalizacji 7, 12, 42

potęgowa funkcja kosztu 11

proste zadanie optymalizacji 7, 12, 42

równanie funkcyjne Schrödera 14

równanie Koenigsa 17

równanie Schrödera–Koenigsa 17

warunek łagodnego nasycenia 34

zadanie optymalizacji warunkowej 10

zagadnienia odwrotne 6

zasada minimum 10