Politechnika
Wrocławska

Instytut Fizyki

ZBIÓR ZADAŃ Z FIZYKI

Podręcznik internetowy
dla studentów Politechniki Wrocławskiej

Włodzimierz Salejda
Michał H. Tyc

Wrocław, październik 2001

Zbiór zadań obejmuje zagadnienia metodologii fizyki, podstaw rachunku wektorów, kinematyki i dynamiki ruchu postępowego i obrotowego, zasad zachowania, pola grawitacyjnego, statyki, dynamiki płynów, ruchu drgającego, podstaw termodynamiki, fal mechanicznych oraz szczególnej teorii względności.

Skład komputerowy za pomocą systemu emTEX 4b (format LAMEX 1.05/LATEX 2.09) — M.H. Tyc i W. Salejda

Wersja postscriptowa: dvips 5.83

Wersja PDF: Aladdin Ghostscript 5.10

You do not know anything until you have practiced
Richard P. Feynman (1918–1986)

Spis treści

1. Metodologia fizyki

1-1. Oszacować swój własny wiek w sekundach. Jaki to stanowi ułamek wieku Wszechświata?

1-2. Opona samochodowa jest technologicznie przygotowana do przejechania $7{,}5 \cdot 10^4$ km. Oszacować, ile wykona obrotów, zanim zostanie zużyta.

1-3. Masa Saturna wynosi $M_\mathrm{S} = 5{,}64 \cdot 10^{26}$ kg, a jego promień $R_\mathrm{S} = 6 \cdot 10^7$ m. Czy planeta ta pływałaby na powierzchni hipotetycznego oceanu wodnego?

1-4. Oszacować masę 10^3 jednakowych stalowych kuleczek o średnicy 1 mm. Ile atomów żelaza zawiera pojedyncza stalowa kulka? Gęstość żelaza 7860 kg/m^3, a masa atomu żelaza 56 u, gdzie $1\,\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg — jednostka masy atomowej.

1-5. Astronomowie używają jednostki długości zwanej parsekiem. Jest to odległość, z jakiej promień orbity Ziemi widać pod kątem 1 sekundy ($1''$). Ile metrów i ile lat świetlnych ma parsek?

1-6. Niech A i B będą wielkościami fizycznymi. Które z podanych działań są sensowne: $A - B$, $A + B$, A/B, $A \cdot B$, jeśli A i B mają: **(a)** różne, **(b)** identyczne wymiary?

1-7. Prawo powszechnego ciążenia Newtona ma postać $F = Gm_1m_2/r^2$, gdzie F — siła grawitacji, m_1, m_2 — masy oddziałujących ciał, r — odległość między nimi. Jaki jest wymiar G?

1-8. **(a)** Sprawdzić zgodność wymiarów we wzorach: $x = v^2/(2a)$; $x = at/2$; $t = \sqrt{2x/a}$, gdzie t — czas, x — położenie, v — prędkość, a — przyspieszenie. **(b)** Prędkość cząstki zależy od czasu jak $v(t) = At - Bt^3$. Jakie są wymiary stałych A i B?

1-9. Kwadrat prędkości v^2 ciała poruszającego się z przyspieszeniem a po przebyciu drogi s wynosi $v^2 = k \cdot a^n \cdot s^m$, gdzie k — bezwymiarowa stała. Za pomocą analizy wymiarowej wyznaczyć n i m.

1-10. Okres T drgań wahadła matematycznego wynosi $T = k \cdot l^n \cdot g^m$, gdzie k jest bezwymiarową stałą, l — długością wahadła, g — przyspieszeniem ziemskim. Obliczyć wartości n i m.

1-11. Okres T obiegu sztucznego satelity wokół planety o gęstości ϱ po orbicie położonej bardzo nisko nad jej powierzchnią wynosi $T = k \cdot \varrho^n \cdot G^m$, gdzie k jest bezwymiarową stałą, a G — stałą grawitacji. Wyznaczyć wartości n i m.

1-12. Znane są wartości następujących stałych przyrody: prędkości światła $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s, stałej grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ oraz stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$. Posługując się tymi wartościami, utworzyć jednostki (tzw. *jednostki Plancka*): długości, czasu, masy i energii.

1-13. Argument funkcji trygonometrycznej jest wielkością bezwymiarową. Prędkość v cząstki o masie m zależy od czasu t jak $v(t) = A\omega \sin(\sqrt{k/m}\, t)$. Wiadomo, że A ma wymiar długości. Jakie wymiary mają wielkości ω i k?

1-14. Oszacować: **(a)** Liczbę piłeczek pingpongowych, które można zmieścić w pokoju średniej wielkości; **(b)** Liczbę skurczów serca przeciętnie długo żyjącej Polki (Polaka); **(c)** Liczbę słów (liter) w tym zbiorze zadań.

1-15. Miliarder oferuje Pani (Panu) przekazanie miliarda złotych w jednozłotowych monetach pod warunkiem, że przeliczy je Pani (Pan) osobiście. Czy można zaakceptować tę propozycję? Przyjąć założenie, że przeliczenie jednej złotówki trwa 1 sekundę.

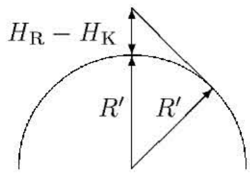
1-16. W fizyce używamy często matematycznych przybliżeń. Pokazać za pomocą kalkulatora, że dla małych kątów $\alpha < 20°$ spełniona jest relacja $\mathrm{tg}\,\alpha \simeq \sin\alpha \simeq \alpha \simeq (\pi \cdot \alpha'/180°)$, gdzie kąt α jest podany w radianach, a α' w stopniach.

1-17. Rok trwa około $N_1 = \pi \cdot 10^7$ sekund. Obliczyć błąd względny tego przybliżenia. Wskazówka: błąd względny wynosi $100\% \cdot (N_\mathrm{d} - N_1)/N_\mathrm{d}$, gdzie N_d — dokładna liczba sekund w roku.

1-18. Kropla oleju o masie $9 \cdot 10^{-7}$ kg i gęstości 918 kg/m^3 rozpłynęła sie po powierzchni wody tworząc kolistą monowarstwę (jest to pojedyncza warstewka molekuł oleju na wodzie) o średnicy 41,8 cm. Oszacować średnicę pojedynczej molekuły oleju.

1-19. Gęstość barionów (tak nazywamy protony i neutrony) we Wszechświecie wynosi obecnie około 0,4 bariona na metr sześcienny. Oszacować: **(a)** Liczbę barionów we Wszechświecie; **(b)** Średnią gęstość masy barionowej we Wszechświecie.

1-20. Czy ze szczytu Rysów o wysokości $H_{\mathrm{R}} = 2499\,\mathrm{m}$ n.p.m. można by było zobaczyć Kraków przy założeniu, że atmosfera jest idealnie przejrzysta (patrz rysinek poniżej)? Promień Ziemi $R = 6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$. Przyjąć, że Kraków leży na wysokości $H_{\mathrm{K}} = 250\,\mathrm{m}$ n.p.m.



$(R' = R + H_{\mathrm{K}})$

2. Elementy rachunku wektorowego

2-1. Dwa punkty leżące na płaszczyznie mają współrzędne kartezjańskie $(2, -4)$ oraz $(-3, 3)$. Wyznaczyć: **(a)** odległość pomiędzy nimi; **(b)** ich współrzędne biegunowe.

2-2. Współrzędne biegunowe punktu na płaszczyźnie są równe ($r = 5{,}5\,\mathrm{m}; \theta = 240°$). Obliczyć jego współrzędne kartezjańskie.

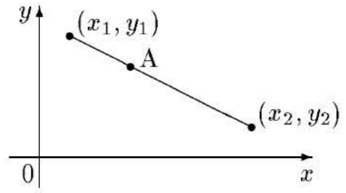
2-3. Jeśli współrzędnymi biegunowymi punktu (x, y) są (r, θ), to ile wynoszą współrzędne biegunowe punktów: **(a)** $(-x, y)$; **(b)** $(-2x, -2y)$; **(c)** $(3x, -3y)$?

2-4. Samolot przelatuje od miasta A odległość 200 km na wschód do miasta B, a następnie pod kątem 30° do kierunku wschód–zachód przelatuje jeszcze 300 km do miasta C. Jaka jest odległość w linii prostej pomiędzy A i C? W jakim kierunku względem A jest położone miasto C?

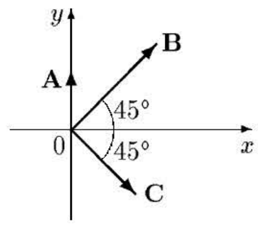
2-5. Pewna osoba przespacerowała się po półokręgu o promieniu $R = 20\,\mathrm{m}$. Wyznaczyć wektor przesunięcia tej osoby oraz jego długość. Określić długość przebytej drogi. Obliczyć wektor przesunięcia w przypadku, gdy spacerowicz obejdzie cały okrąg.

2-6. Chłopiec przebiegł 30 m na północ, 40 m w kierunku północno-wschodnim oraz 50 m w kierunku zachodnim. Wyznaczyć długość i kierunek całkowitego wektora przesunięcia w tym ruchu.

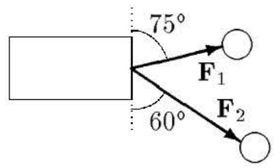
2-7. Punkt A na rysunku jest dowolnym punktem odcinka łączącego dwa punkty leżące na płaszczyźnie o współrzędnych: (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2). Pokazać, że współrzędne punktu A można wyrazić wzorem $((1 - f)x_1 + fx_2, (1 - f)y_1 + fy_2)$, gdzie f jest dowolną liczbą spełniającą warunek $0 \leqslant f \leqslant 1$.



2-8. Trzy wektory są zorientowane jak na rysunku, przy czym ich długości są następujące: $|\mathbf{A}| = 20\,\mathrm{m}$, $|\mathbf{B}| = 40\,\mathrm{m}$, $|\mathbf{C}| = 30\,\mathrm{m}$. Wyznaczyć składowe oraz długość, kierunek i zwrot wektora wypadkowego.



2-9. Widok z lotu ptaka dwóch osiłków ciągniących skrzynię i działających na nią wskazanymi siłami jest przedstawiony na rysunku. Z jaką wypadkową siłą (o jakim kierunku, zwrocie i wartości) działają oni na tę skrzynię, jeśli $F_1 = 80\,\mathrm{N}$ i $F_2 = 120\,\mathrm{N}$?



2-10. Punkt leżący na płaszczyźnie XOY i mający współrzędne (x, y) można przedstawić jako punkt końcowy wektora $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Pokazać, że wektor przesunięcia cząstki, która przemieściła się od (x_1, y_1) do (x_2, y_2) jest wektorem $\mathbf{d} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$. Narysować wektory $\mathbf{r}_1$ oraz $\mathbf{r_2}$ i zweryfikować graficznie, że $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

2-11. Pokazać, że *algebraiczna* definicja iloczynu skalarnego wektorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ w postaci

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

jest równoważna definicji *geometrycznej* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

2-12. Dla wektorów $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ oraz $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ znaleźć: **(a)** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, **(b)** kąt pomiędzy nimi.

2-13. Wektory $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są zaczepione w początku układu odniesienia i mają współrzędne biegunowe równe odpowiednio (r_1, θ_1) i (r_2, θ_2). Obliczyć $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

2-14. Obliczyć kąty pomiędzy wektorami: **(a)** $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = (3, -2)$ i $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = (4, -4)$, **(b)** $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + k\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (3, 1, 2)$ i $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (1, -2, 3)$.

2-15. Pokazać, że *algebraiczna* definicja iloczynu wektorowego wektorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ w postaci

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

jest równoważna definicji *geometrycznej* (wzór $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ i reguła śruby prawoskrętnej).

2-16. Obliczyć iloczyn wektorowy oraz kąt pomiędzy wektorami: **(a)** $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = (3, -2)$ i $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = (4, -4)$, **(b)** $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + k\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (3, 1, 2)$ i $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (1, -2, 3)$.

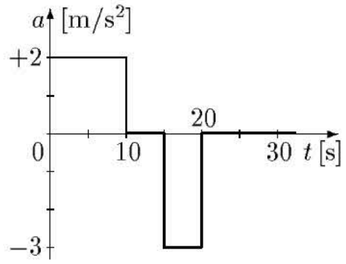
2-17. Jeśli $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, to jaki kąt tworzą wektory $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$?

2-18. Pewien student twierdzi, że znalazł wektor $\mathbf{A}$ taki, że $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times \mathbf{A} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$. Czy można mu wierzyć?

3. Kinematyka

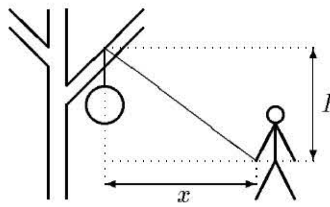
3-1. W chwili $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ współrzędna cząstki poruszającaj się ze stałą prędkością po prostej wynosi $x_1 = -3\,\mathrm{m}$, a w chwili $t_2 = 6\,\mathrm{s}$ współrzędna $x_2 = 5\,\mathrm{m}$. Korzystając z tych danych narysować wykres położenia cząstki w funkcji czasu. Określić na podstawie wykresu prędkość cząstki.

3-2. Cząstka rozpoczyna ruch przyspieszony z zerową prędkością początkową. Zależność przyspieszenia od czasu przedstawia wykres. Wyznaczyć: **(a)** prędkość cząstki w cwilach $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ i $t_2 = 20\,\mathrm{s}$; **(b)** drogę przebytą przez nią po czasie t_2.



3-3. Zależność wysokości H wznoszącego się helikoptera od czasu lotu t ma postać $H = 3{,}0 \cdot t^3$ (w jednostkach SI). Po upływie $2\,\mathrm{s}$ od startu z helikoptera zaczyna spadać swobodnie plecak. Po jakim czasie upadnie on na ziemię?

3-4. Harcerz przywiązał do jednego końca liny plecak, linę przerzucił przez konar drzewa odległy od ziemi o H i ruszył do przodu ze stała prędkością v_h, trzymając za drugi koniec liny (patrz rysunek). Pokazać, że plecak podnosi się z prędkością $v_\mathrm{p} = xv_\mathrm{h}/\sqrt{x^2 + H^2}$, a jego przyspieszenie wynosi $a_\mathrm{p} = H^2 v_\mathrm{h}^2/(\sqrt{x^2 + H^2})^3$. W jakim czasie plecak zostanie wciągnięty na drzewo? Ile będzie wynosiła wtedy jego prędkość i przyspieszenie chwilowe? Obliczenia wykonać dla wartości $v_\mathrm{h} = 2\,\mathrm{m/s}$, $H = 6\,\mathrm{m}$.



3-5. Pociąg pasażerski minimalizuje czas przejazdu między stacjami odległymi o $1\,\mathrm{km}$ w ten sposób, że w czasie t_1 jedzie z przyspieszeniem $a_1 = 0{,}1\,\mathrm{m/s^2}$, a następnie w czasie t_2 hamuje z przyspieszeniem $a_2 = -0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. Wyznaczyć czas podróży między sąsiednimi stacjami oraz czas t_1.

3-6. W biegu na 100 metrów Ben Johnson i Carl Lewis przecinają linię mety na *ostatnim wydechu* równocześnie w czasie $10{,}2\,\mathrm{s}$ (bo wiatr był przeciwny). Przyspieszając jednostajnie, Ben potrzebuje $2\,\mathrm{s}$, a Carl $3\,\mathrm{s}$, aby osiągnąć maksymalne prędkości, które nie zmieniają się do końca biegu. **(a)** Jakie są maksymalne prędkości oraz przyspieszenia obu sprinterów? **(b)** Jaka jest ich maksymalna prędkość względna? **(c)** Który z nich prowadzi w szóstej sekundzie biegu?

3-7. Prędkość kuli w lufie karabinu zależy od czasu jak $v(t) = 3{,}0 \cdot 10^5 t - 5{,}0 \cdot 10^7 t^2$ (w jednostkach SI). Przyspieszenie kuli opuszczającej lufę wynosi zero. Wyznaczyć położenie oraz przyspieszenie kuli wewnątrz lufy. Ile czasu trwa ruch kuli w lufie? Z jaką prędkością pocisk wylatuje z karabinu? Ile wynosi długość lufy?

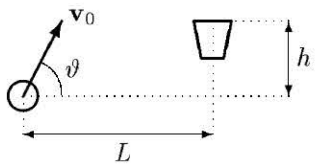
3-8. Piłka golfowa wykonuje na zboczu ruch płaski po torze: $x(t) = 18{,}0t$, $y(t) = 4{,}0t - 4{,}90t^2$ (w jednostkach SI). Wyznaczyć zależność od czasu wektora położenia $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; wynik końcowy sformułować za pomocą wersorów **i** i **j**. Przeprowadzić takie same wyprowadzenia dla wektorów prędkości i przyspieszenia. Obliczyć $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ w chwili $t = 5\,\mathrm{s}$.

3-9. Cząstka rozpoczyna ruch w chwili $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ i porusza się w płaszczyznie ze stałym przyspieszeniem $\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Obliczyć prędkość, szybkość i wektor położenia po upływie czasu $t > t_0$.

3-10. Prędkość cząstki poruszającej się w płaszczyznie XOY wynosi $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (A, Bx)$, gdzie x — odcięta wektora położenia $\mathbf{r} = (x, y)$, a A i B — stałe współczynniki. Wyznaczyć równanie toru cząstki, tj. zależność $y(x)$.

3-11. Strzelba jest wycelowana w cel wiszący na wysokości H. W tej samej chwili pada strzał i cel zaczyna swobodnie spadać. Pokazać, że kula trafi w cel. W jakiej odległości od strzelby należy umieścić cel, aby kula weń nie trafiła?

3-12. Koszykarz rzuca piłkę z prędkością początkową v_0 pod kątem ϑ do kosza odległego w poziomie o L i w pionie o h od punktu wyrzutu, jak na rysunku. Pokazać, że początkowa prędkość piłki konieczna dla trafienia do kosza dana jest wzorem $v_0^2 = gL/[2\cos^2\vartheta\,(\mathrm{tg}\,\vartheta - h/L)]$.



3-13. Diego Maradona, stojący na wierzchołku stromego wzniesienia nad brzegiem jeziora o wysokości $H = 40\,\mathrm{m}$, kopnął poziomo piłkę, która następnie wpadła do wody. Po upływie czasu $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$ usłyszał plusk. Jaka była prędkość początkowa piłki? Prędkość dźwięku w powietrzu $c = 330\,\mathrm{m/s}$.

3-14. Dwóch pływaków: A i B skacze jednocześnie do rzeki, w której woda płynie z prędkością v. Prędkość c każdego pływaka względem wody jest taka sama (oraz $c > v$). Pływak A przepływa z prądem odległość L i zawraca do punktu startu. Pływak B płynie prostopadle do brzegów rzeki (pomimo znoszącego go prądu) i oddala się na odległość L, po czym zawraca do punktu startu. Który z nich wróci pierwszy?

3-15. Położenie cząstki zależy od czasu jak $\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t)\mathbf{i} + A\sin(\omega t)\mathbf{j}$, gdzie A i ω — stałe. Znaleźć: tor ruchu, prędkość, szybkość i przyspieszenie. Pokazać, że $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r} = -v^2\hat{\mathbf{r}}/r$ ($\hat{\mathbf{r}}$ oznacza wektor jednostkowy o kierunku i zwrocie wektora $\mathbf{r}$).

3-16. Pocisk wystrzelono z prędkością początkową v_0 pod kątem ϑ względem poziomu z działa ustawionego u podnóża wzniesienia o kącie nachylenia $\varphi < \vartheta$. Pokazać, że pocisk przebędzie odległość $d = 2v_0^2\cos\vartheta\sin(\vartheta - \varphi)/[g\cos^2\varphi]$, mierzoną wzdłuż wzniesienia.

3-17. Silnik nadaje rakiecie wystrzelonej pod kątem $70°$ do poziomu przyspieszenie o stałym kierunku i wartości $8\,\mathrm{m/s^2}$. Po upływie $6{,}5\,\mathrm{s}$ od startu wyłącza się. Znaleźć zasięg rakiety w poziomie oraz jej maksymalną wysokość.

3-18. Jakie nachylenie (przy założeniu stałej szerokości podstawy) powinien mieć dach domu, aby krople deszczu spływały po nim w najkrótszym czasie?

3-19. Ciało spadające swobodnie przebyło w ostatniej sekundzie ruchu $1/3$ całej drogi. Obliczyć początkową wysokość i całkowity czas ruchu ciała.

3-20. Wyznaczyć składowe prędkości i przyspieszenia w ruchu po torze opisanym równaniami parametrycznymi: $x(t) = A\cos(bt^2)$, $y(t) = B\sin(bt^2)$, gdzie A, B, b — stałe. Podać równanie toru. Określić rodzaj ruchu. Podać sposób obliczania zależności promienia krzywizny toru od czasu.

3-21. Koło o promieniu $R = 0{,}1\,\mathrm{m}$ obraca się tak, że zależność kąta obrotu φ od czasu t zadaje równanie $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, gdzie $B = 2\,\mathrm{rad/s}$, $B = 1\,\mathrm{rad/s^3}$. Wyznaczyć dla chwili $t = 10\,\mathrm{s}$ i dla punktów położonych w odległości $R/2$ od osi obrotu: **(a)** prędkość kątową; **(b)** prędkość liniową; **(c)** przyspieszenie styczne, normalne i całkowite.

3-22. Ćma porusza się po krzywej, której długość s dana jest wzorem $s = s_0\exp(ct)$, gdzie s_0 i c — stałe. Wiedząc, że wektor przyspieszenia $\mathbf{a}$ tworzy stały kąt α ze styczną do toru w każdym jego punkcie, znaleźć wartości: **(a)** prędkości; **(b)** przyspieszenia stycznego i normalnego;

(c) promienia krzywizny toru jako funkcje długości łuku krzywej.

3-23. Ruch punktu w biegunowym układzie współrzędnych opisują równania: $r(t) = Bt^2$, $\vartheta(t) = At^2$. Wyznaczyć: **(a)** parametryczne równania toru w kartezjańskim układzie współrzędnych; **(b)** składową radialną i transwersalną (azymutalną) prędkości oraz szybkość; **(c)** składową radialną i transwersalną przyspieszenia.

3-24. Parametryczne równania ruchu punktu materialnego mają postać: $x(t) = v_0 t \cos\alpha$, $y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$. Jaki to rodzaj ruchu? Wyznaczyć: **(a)** przyspieszenie styczne i normalne w dowolnej chwili t; **(b)** zależność krzywizny toru od czasu.

3-25. Tarcza o promieniu R obraca się ze stałą prędkością kątową Ω. Ze środka tarczy wyruszył żółw i idzie wzdłuż promienia ze stałą prędkością v_r. Wyznaczyć: **(a)** równanie toru żółwia we współrzędnych biegunowych i kartezjańskich; **(b)** zależność od czasu prędkości transwersalnej i radialnej; **(c)** zależność od czasu wektora przyspieszenia oraz jego składowych: radialnej i transwersalnej oraz normalnej i stycznej; **(d)** zależność od czasu promienia krzywizny toru ϱ.

3-26. Rybak płynął w górę rzeki. Przepływając pod mostem upuścił do wody wiosło. Po upływie kwadransa zauważył zgubę i zawróciwszy dopędził wiosło w odległości 1 km od mostu. Jaka jest prędkość prądu rzeki, jeżeli rybak płynąc w górę i w dół rzeki wiosłował z jednakowym wysiłkiem? Wskazówka: Rozwiązać zadanie w układzie odniesienia związanym z wiosłem lub rybakiem.

3-27. W celu wyznaczenia prędkości v_0 kuli wylatującej z lufy pistoletu dokonano następujących zabiegów: (1) ustawiono naładowany pistolet w odległości x od tarczy; (2) wycelowano go w punkt P na tarczy; (3) oddano strzał i stwierdzono, że pocisk przebił tarczę o Δy poniżej punktu P. Pokazać, że $\Delta y = ax^2$. Wyrazić a jako funkcję przyspieszenia ziemskiego i prędkości początkowej pocisku v_0. Ile wynosi v_0, jeśli $\Delta y = 0{,}21\,\mathrm{m}$ i $x = 50{,}0\,\mathrm{m}$?

3-28. Położenie cząstki w funkcji czasu opisuje zależność $\mathbf{r}(t) = bt\mathbf{i} + (c - dt^2)\mathbf{j}$, przy czym $b = 2{,}00\,\mathrm{m/s}$, $c = 5{,}00\,\mathrm{m}$, $d = 1{,}00\,\mathrm{m/s^2}$. Wyrazić y jako funkcję x oraz naszkicować tor cząstki (tj. wykres $y(x)$). Wyznaczyć wektor prędkości. Dla jakiego t wektor prędkości jest prostopadły do wektora położenia?

3-29. Wyobraźmy sobie, że Ziemia obraca się wokół własnej osi z taką prędkością kątową, że człowiek stojący na równiku nic nie waży. Z jaką prędkością kątową i liniową porusza się ten osobnik? Jak długo trwa w tych warunkach doba?

3-30. Młody Dawid, który pokonał Goliata, ćwicząc posługiwanie się procą zauważył, że procy o długości 0,6 m jest w stanie nadać 8 obrotów/s, natomiast procy o długości 0,9 m może maksymalnie nadać 6 obrotów/s. W którym z przypadków kamień uzyskuje większą prędkość? Ile wynosi wówczas przyspieszenie dośrodkowe?

3-31. Cząstka porusza się ze stałą prędkością 30 m/s po okręgu. Okres obiegu jest równy 1,2 s. Ile wynosi przyspieszenie dośrodkowe?

3-32. Pojazd kosmiczny porusza się po orbicie wokół Księżyca blisko jego powierzchni. Przyspieszenie dośrodkowe pochodzące od siły ciążenia wynosi $1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$. Wyznaczyć: **(a)** prędkość pojazdu; **(b)** okres obiegu tej orbity. Promień Księżyca $R = 1{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$; wysokość orbity jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z R.

3-33. Del Piero stojący na skale w kształcie półkuli o promieniu R kopie poziomo piłkę, która rozpoczyna ruch z prędkością początkową v_0. Jaka wartość prędkości początkowej zapewnia, że piłka nie uderzy w skałę? W jakiej odległości od skały upadnie wtedy piłka? Wskazówka: Zauważyć, że w każdym punkcie (x, y) toru piłki warunek zadania jest spełniony, o ile zachodzi nierówność $x^2 + y^2 > R^2$.

4. Dynamika

4-1. Zbadać zależność drogi hamowania samochodu od jego prędkości v_0. Założyć różne czasy t_r reakcji kierowcy; przyjąć, że czas ten mieści się w przedziale od 0,2 s do 1 s. Opóźnienie a samochodu zależy od stanu nawierzchni i opon; założyć, że wartości a leżą w przedziale od $4\,\mathrm{m/s^2}$ do $8\,\mathrm{m/s^2}$. Sporządzić wykresy. Czy wyniki zależą od masy samochodu?

4-2. Siła zależna od czasu $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$ (w jednostkach SI) działa na ciało o masie $m = 2\,\mathrm{kg}$, które początkowo spoczywało. **(a)** Wyznaczyć chwilę t_1, w której prędkość ciała będzie wynosiła 15 m/s. **(b)** Jak daleko od punktu początkowego znajduje się ciało w chwili t_1? **(c)** Jaki jest wówczas wektor przesunięcia tego ciała?

4-3. Na ciało o masie m działa zależna od położenia siła $\mathbf{F}(x, y, z) = (-kx, 0, 0)$. Wyznaczyć zależności $x(t)$ i $v_x(t)$ przy następujących warunkach początkowych: **(a)** $x(0) = A$, $v_x(0) = 0$; **(b)** $x(0) = 0$, $v_x(0) = v_0$.

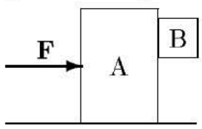
4-4. Z wysokości H spada swobodnie kulka o gęstości: **(a)** równej gęstości wody; **(b)** większej; **(c)** mniejszej. Kulka wpada następnie do wody, gdzie działa na nią siła oporu $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Jak zależy od czasu prędkość kulki w wodzie podczas jej ruchu?

4-5. Spadochroniarz wyskakuje z samolotu na dużej wysokości, zwlekając z otwarciem spadochronu. W powietrzu działa na niego zależna od prędkości siła oporu $\mathbf{F} = -kv^2\hat{\mathbf{v}}$. Jaka jest graniczna prędkość spadochroniarza (po dostatecznie długim czasie, ale przed otwarciem spadochronu)?

4-6. Na ciało o masie $m = 3{,}5\,\mathrm{kg}$ działa zależna od czasu, skierowana poziomo siła o wartości $F = 8{,}6\,\mathrm{N} + 2{,}5\,\mathrm{N/s^3} \cdot t^3$. Ile wynosi przesunięcie poziome ciała po upływie 3,0 s, jeśli ciało początkowo spoczywało?

4-7. Piłkę o masie m upuszczono swobodnie z wieżowca o wysokości H. W trakcie ruchu działa na nią stała siła pozioma o wartości F. Pokazać, że piłka porusza się po linii prostej.

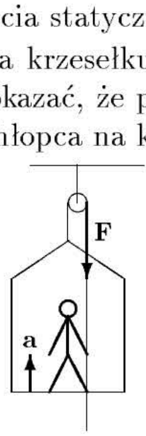
4-8. Jaką siłą należy działać na ciało A, aby ciało B nie poruszało się względem niego (patrz rysunek)? Współczynnik tarcia pomiędzy A i B wynosi 0,55.



4-9. Blok porusza się w górę równi pochyłej o kącie $\varphi = 45°$ ze stałą prędkością pod działaniem siły $F = 15\,\mathrm{N}$ równoległej do równi. Wyznaczyć: **(a)** ciężar bloku; **(b)** minimalną wartość siły powodującej ruch bloku w dół równi, jeśli współczynnik tarcia kinematycznego μ_k wynosi 0,30.

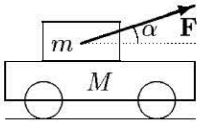
4-10. Wózek o ciężarze $\mathbf{W}$ popchnięto siłą $\mathbf{F}$ skierowaną pod kątem φ do poziomu. Pokazać, że wartość siły niezbędnej do wprawienia wózka w ruch wynosi $F_\mathrm{min} = \mu_\mathrm{s} W / [\cos\varphi\,(1 - \mu_\mathrm{s}\,\mathrm{tg}\,\varphi)]$, gdzie μ_s jest znanym współczynnikiem tarcia statycznego.

4-11. Chłopiec o wadze 320 N siedzący na krzesełku bosmańskim ważącym 160 N ciągnie za linę (patrz rysunek) z siłą $F = 250\,\mathrm{N}$. Pokazać, że przyspieszenie ruchu chłopca do góry jest równe $a = 0{,}408\,\mathrm{m/s^2}$. Ile wynosi nacisk chłopca na krzesło?



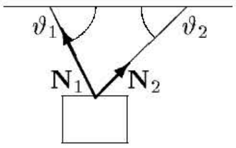
4-12. Masy m_1, m_2 i m_3 są połączone nicią w ten sposób, że m_1 i m_2 leżą na stole, a masa m_3 zwisa pionowo na nici przewieszonej przez nieważki krążek zamocowany na krawędzi stołu. Współczynniki tarcia ciał 1 i 2 wynoszą odpowiednio f_1 i f_2. Wyznaczyć przyspieszenie, z jakim poruszają się ciała, oraz naciągi nici. Przy jakich warunkach (dotyczących współczynników tarcia i mas) ruch będzie się odbywał: **(a)** ze stałą prędkością; **(b)** ze stałym przyspieszeniem?

4-13. Na wózku o masie M leży ciężarek o masie m, który jest ciągnięty siłą $\mathbf{F}$ skierowaną pod kątem α do poziomu (patrz rysunek). Jaką maksymalną wartość może mieć ta siła, aby ciężarek nie ślizgał się wzdłuż wózka? Z jakim przyspieszeniem będzie się wówczas poruszał wózek? Współczynnik tarcia między wózkiem i ciężarkiem wynosi μ.

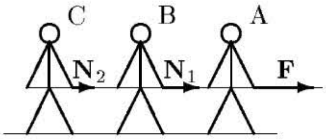


4-14. Ciało zsuwa się po równi pochyłej o kącie nachylenia α. Zależność przebytej drogi od czasu ma postać $s = ct^2$, przy czym $c > 0$. Wyznaczyć współczynnik tarcia pomiędzy ciałem i równią.

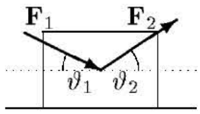
4-15. Walizka wisi na dwóch sznurach, jak to pokazuje rysunek. Pokazać, że naciąg lewego sznura $N_1 = W \cos\vartheta_2 / \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, gdzie W jest ciężarem walizki, a kąty ϑ_1 i ϑ_2 są znane.



4-16. Trzej łyżwiarze: A, B i C, o masach $m_A = 30\,\mathrm{kg}$, $m_B = 50\,\mathrm{kg}$ i $m_C = 20\,\mathrm{kg}$, trzymają się liny ciągniętej z siłą $F = 200\,\mathrm{N}$ i ślizgają się po powierzchni o współczynniku tarcia $\mu = 0{,}1$ (patrz rysunek). Znaleźć przyspieszenie a łyżwiarzy oraz siły N_1 i N_2 naciągu liny.



4-17. Na blok o masie 3,6 kg umieszczony na poziomej powierzchni o współczynniku tarcia $\mu_k = 0{,}3$ działają dwie siły jak na rysunku. Z jakim przyspieszeniem porusza się blok? Dane: $F_1 = 20\,\mathrm{N}$, $F_2 = 12\,\mathrm{N}$, $\vartheta_1 = 18°$ i $\vartheta_2 = 27°$.



5. Nieinercjalne układy odniesienia

5-1. Samochód porusza się po łuku o promieniu R. Nawierzchnia drogi nachylona jest pod kątem ϑ do poziomu (w kierunku do wnętrza łuku). Współczynnik tarcia wynosi μ. Pokazać, że maksymalna szybkość, przy której samochód nie wypadnie z drogi na skutek poślizgu, dana jest wzorem $v_{\mathrm{max}} = \sqrt{Rg(\mu + \operatorname{tg}\vartheta)/(1 - \mu\operatorname{tg}\vartheta)}$. Przyjąć, że $\mu\operatorname{tg}\vartheta < 1$.

5-2. Samochód porusza się ze stałą prędkością v po wzgórzu, którego promień krzywizny w najwyższym punkcie wynosi $20\,\mathrm{m}$. Wyznaczyć v, jeśli na szczycie wzgórza nacisk kół samochodu na podłoże jest praktycznie równy zeru (pojazd nie odrywa się od nawierzchni szosy).

5-3. Wiadro z wodą wprawiono w ruch po okręgu o promieniu $R = 1\,\mathrm{m}$, którego płaszczyzna jest pionowa. Jaka jest minimalna prędkość wiadra w najwyższym punkcie toru, przy której woda nie wyleje się?

5-4. Dziecko o masie $M = 40\,\mathrm{kg}$ buja się na huśtawce zawieszonej na dwóch linkach o długości $3\,\mathrm{m}$ każda. W najniższym punkcie toru siła naprężenia każdej z linek wynosi $N = 350\,\mathrm{N}$. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie dośrodkowe dziecka oraz siłę nacisku dziecka na deskę huśtawki w najniższym punkcie toru.

5-5. Prędkość v wagonika kolejki w lunaparku w najwyższym punkcie pionowego toru w kształcie okręgu wynosi $13{,}0\,\mathrm{m/s}$, a przyspieszenie dośrodkowe $a_{\mathrm{d}} = 2g$. Obliczyć promień toru kolejki.

5-6. Do sufitu wagonu poruszającego się po poziomym torze z przyspieszeniem $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$ podwieszono na nici ciało o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Wyznaczyć kąt odchylenia nici od pionu i jej naprężenie.

5-7. Największy i najmniejszy ciężar człowieka stojącego na wadze umieszczonej w windzie wynosi odpowiednio $591\,\mathrm{N}$ i $391\,\mathrm{N}$. Zakładając, że przyspieszenie podczas ruszania i hamowania windy jest takie samo, wyznaczyć: **(a)** ciężar rzeczywisty człowieka i jego masę; **(b)** przyspieszenie windy.

5-8. Przy bocznej ścianie pomieszczenia w kształcie cylindra o pionowej osi i promieniu R stoi człowiek. Współczynnik tarcia między człowiekiem a ścianą wynosi μ. Pokazać, że maksymalna wartość okresu T obrotu pomieszczenia wokół osi, przy której człowiek nie będzie zsuwał się po ścianie (jeśli usuniemy podłogę), wynosi $T = \sqrt{4\pi^2 R\mu/g}$. Obliczenia przeprowadzić dla $R = 4\,\mathrm{m}$ i $\mu = 0{,}40$. Ile obrotów wykona wtedy pomieszczenie w ciągu jednej minuty?

5-9. Określić kierunek oraz obliczyć wartość odchylenia y ciała spadającego z wieży o wysokości H w polu grawitacyjnym Ziemi. Wynik przedyskutować w zależności od szerokości geograficznej φ miejscowości, na której znajduje się wieża (uwzględnić obie półkule). Wskazówka: Założyć, że kąt odchylenia kierunku prędkości od pionu jest bardzo mały.

5-10. Oszacować odchylenie od kierunku północ-południe toru pocisku, którego średnia prędkość podczas lotu wynosi $v_0 = 400\,\mathrm{m/s}$, czas lotu $1\,\mathrm{s}$, a szerokość geograficzna miejsca strzału $\varphi = 60^\circ$, w przypadku, gdy pocisk wystrzelono w kierunku południkowym. Wskazówka: Założyć, że wartość siły Coriolisa jest stała w trakcie ruchu.

5-11. Pokazać, że okres obrotu płaszczyzny drgań wahadła Foucaulta na szerokości geograficznej φ wynosi $T = 2\pi/(\Omega\sin\varphi)$. W jaki sposób obraca się ta płaszczyzna na półkuli północnej i południowej? Wskazówka: Rozłożyć wektor prędkości kątowej Ziemi $\boldsymbol{\Omega}$ na składowe: poziomą i pionową.

6. Praca i energia

6-1. Pozioma siła $F = 150\,\mathrm{N}$ działa na ciało o masie $m = 40{,}0\,\mathrm{kg}$ i przesuwa je na odległość $s = 6{,}00\,\mathrm{m}$ po chropowatej powierzchni. Przyjmując, że ciało przesuwało się ze stałą prędkością, obliczyć: **(a)** pracę siły F; **(b)** energię straconą na pokonanie siły tarcia; **(c)** współczynnik tarcia.

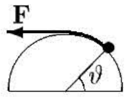
6-2. Blok o masie $m = 15\,\mathrm{kg}$ jest przesuwany po poziomej chropowatej powierzchni pod działaniem stałej siły $F = 70\,\mathrm{N}$ skierowanej pod kątem $20°$ do poziomu. Blok przesunięty został o $s = 5{,}00\,\mathrm{m}$, a współczynnik tarcia kinematycznego $\mu_\mathrm{k} = 0{,}30$. Obliczyć pracę: **(a)** siły F; **(b)** składowej pionowej wypadkowej siły działającej na blok; **(c)** siły grawitacji. Jaka ilość energii została stracona na pokonanie siły tarcia?

6-3. Łucznik naciąga łuk w ten sposób, że cięciwa zostaje odciągnięta na odległość $d = 0{,}40\,\mathrm{m}$ pod działaniem siły narastającej od zera do $240\,\mathrm{N}$. Ile wynosi efektywny współczynnik sprężystości cięciwy łuku? Jaką pracę wykonał łucznik podczas naciągania cięciwy?

6-4. Przy rozciąganiu sprężyny o $10\,\mathrm{cm}$ wykonano pracę $W_1 = 4{,}00\,\mathrm{J}$. Obliczyć pracę potrzebną do rozciągnięcia sprężyny do $20\,\mathrm{cm}$.

6-5. W lufie strzelby o długości $l = 0{,}60\,\mathrm{m}$ działa na kulę o masie $m = 100\,\mathrm{g}$ zależna od położenia siła $F(x) = (15000 + 10000x - 25000x^2)\,[\mathrm{N}]$ (x w metrach). Obliczyć pracę wykonaną przez gazy prochowe nad kulą w trakcie jej ruchu w lufie. Ile wynosi energia kinetyczna kuli opuszczającej lufę?

6-6. Małe ciało o masie m jest ciągnięte w górę za pomocą nici i porusza się po powierzchni cylindra o promieniu R. Ruch odbywa się ze stałą prędkością. Pokazać, że wartość naciągu nitki wynosi $F = mg\cos\vartheta$ (patrz rysunek). Wyznaczyć pracę siły F pomiędzy $\vartheta_\mathrm{p} = 0$ i $\vartheta_\mathrm{k} = \pi/2$.



6-7. Blok o masie $m = 0{,}60\,\mathrm{kg}$ ześlizguje się z idealnie gładkiej równi pochyłej o długości $6\,\mathrm{m}$ i kącie nachylenia $20°$, a następnie zaczyna się poruszać po poziomej płaszczyźnie, gdzie współczynnik tarcia $\mu_\mathrm{k} = 0{,}50$. Ile wynosi prędkość bloku na końcu równi oraz po przebyciu 1 metra na poziomej powierzchni? Jaką odległość przebędzie blok po poziomej płaszczyźnie do chwili zatrzymania się?

6-8. Zależna od czasu siła działając na ciało o masie $m = 4\,\mathrm{kg}$ powoduje jego przesunięcie o $x = 2t - 3t^2 + t^3\,[\mathrm{m}]$ (t w sekundach). Wyznaczyć pracę siły zewnętrznej w ciągu pierwszych trzech sekund.

6-9. Samochód o masie $m = 1500\,\mathrm{kg}$ przyspiesza jednostajnie od stanu spoczynku do prędkości $v_3 = 10\,\mathrm{m/s}$ w czasie $t_3 = 3\,\mathrm{s}$. Obliczyć: **(a)** Pracę wykonaną nad samochodem; **(b)** Średnią moc silnika w pierwszych trzech sekundach ruchu; **(c)** Moc chwilową dla $t_2 = 2\,\mathrm{s}$.

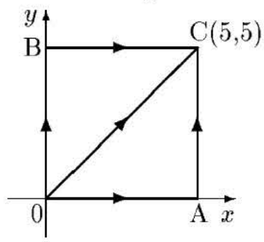
6-10. Ciało o masie $m = 0{,}4\,\mathrm{kg}$ ślizga się po poziomym torze w kształcie koła o promieniu $R = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Jego prędkość początkowa wynosi $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$. Po jednym pełnym obrocie jego prędkość, wskutek działania tarcia, zmniejszyła się do $v_1 = 6\,\mathrm{m/s}$. Wyznaczyć stratę energii na pracę nad siłami tarcia. Obliczyć współczynnik tarcia kinetycznego. Ile obrotów wykona to ciało zanim się zatrzyma?

6-11. Pocisk o masie $m = 5\,\mathrm{g}$ i prędkości $v = 600\,\mathrm{m/s}$ wbił się w drewno na głębokość $d = 4\,\mathrm{cm}$. Korzystając z twierdzenia o pracy i energii, wyznaczyć średnią wartość siły oporu działającej na pocisk. Zakładając, że siła oporu jest stała, obliczyć czas hamowania pocisku w drewnie.

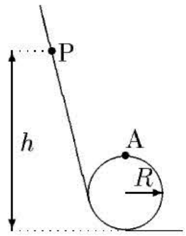
6-12. Spadochroniarz o masie $m = 50\,\mathrm{kg}$ wyskoczył z samolotu na wysokości $1000\,\mathrm{m}$ i wylądował z prędkością $v = 5\,\mathrm{m/s}$. Jaka ilość energii została zużyta na pokonanie sił oporu powietrza?

6-13. Siła zachowawcza $\mathbf{F}$ zależy tylko od współrzędnej x: $\mathbf{F} = (-Ax + Bx^2)\mathbf{i}\,[\mathrm{N}]$, gdzie A i B — stałe, a x w metrach. Wyznaczyć $U(x)$, jeśli $U(0) = 0$.

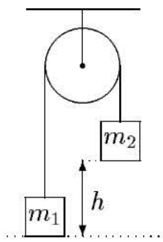
6-14. Korzystając ze wzoru na pracę $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ pokazać, że dowolna stała siła jest zachowawcza. Obliczyć pracę sił: **(a)** $\mathbf{F} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ [N]; **(b)** $\mathbf{F} = (3y + x^2)\mathbf{j}$ [N] na drodze: **(1)** OAC, **(2)** OBC, **(3)** OC (patrz rysunek). Która z nich jest zachowawcza?



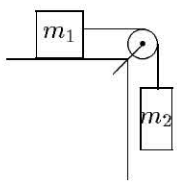
6-15. Paciorek P ślizga się bez tarcia po pętli z drutu (patrz rysunek). Jeśli wysokość początkowa wynosi $h = 3{,}5R$, to jaką ma on prędkość w punkcie A? Ile wynosi nacisk paciorka na drut w tym punkcie?



6-16. Dwie masy są połączone nicią przewieszoną przez krążek, jak na rysunku. Stosując zasadę zachowania energii wyznaczyć prędkość masy m_1 w momencie, gdy masa m_2 osiągnie poziomą płaszczyznę. Masę krążka i nici pominąć.



6-17. Współczynnik tarcia między masą $m_1 = 3$ kg a podłożem wynosi 0,4. Układ rozpoczyna ruch od stanu spoczynku (patrz rysunek). Ile wynosi prędkość masy $m_2 = 5$ kg po przebyciu przez nią odległości $h = 1{,}5$ m? Masę krążka i nici zaniedbać.



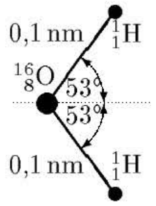
6-18. Energia potencjalna siły $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ ma postać $U(x, y) = 3x^3y - 7x$. Obliczyć $\mathbf{F}$ dla dowolnego (x, y).

6-19. Pokazać, że następujące siły są zachowawcze: **(a)** $F_x(x) = Ax + Bx^2$; **(b)** $F_x(x) = Ae^{\alpha x}$, gdzie A, B, α są stałymi. Wyznaczyć zmianę energii potencjalnej pomiędzy $x_p = 0$ oraz $x_k = x > 0$.

7. Zasada zachowania pędu

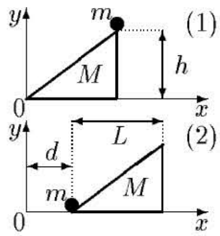
7-1. Kula bilardowa o masie $m = 0{,}10\,\mathrm{kg}$ i prędkości $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ uderza w bok stołu i odbija się pod kątem $60°$. Wyznaczyć wartość średniej siły, z jaką bila działała na stół w trakcie zderzenia trwającego 0,20 s.

7-2. Wyznaczyć położenie środka masy przedstawionej na rysunku cząsteczki wody.



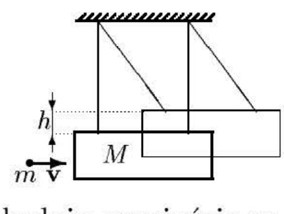
7-3. Blondynka o masie $m_b = 45\,\mathrm{kg}$ stoi na desce surfingowej o masie $m = 150\,\mathrm{kg}$ i długości 3 m, spoczywającej na powierzchni wody. Dziewczyna rozpoczyna spacer po desce z prędkością $u = 1\,\mathrm{m/s}$ względem deski. Z jaką prędkością porusza się względem wody dziewczyna, a z jaką deska? Jak daleko przesunie się względem wody dziewczyna, jeśli przejdzie z jednego końca deski na drugi? Jak daleko przesunie się w tym czasie deska?

7-4. Ciało o masie $m = 2\,\mathrm{kg}$ znajduje się początkowo na wierzchołku równi pochyłej w kształcie jednorodnego klina o masie $M = 8\,\mathrm{kg}$, wysokości $h = 2\,\mathrm{m}$ i długości $L = 6\,\mathrm{m}$, mogącego przesuwać się po poziomej płaszczyźnie (patrz rysunek). Zakładając, że tarcie nie występuje, wyznaczyć położenie równi w momencie, gdy ciało zsunie się (osiągnie płaszczyznę poziomą). Wskazówka: współrzędna x środka masy nie zmienia się.



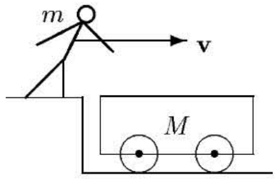
7-5. Ciało o masie $m = 6\,\mathrm{kg}$ spada swobodnie na Ziemię z wysokości $h = 10\,\mathrm{m}$. Z jaką prędkością względem inercjalnego układu odniesienia porusza się Ziemia w momencie upadku ciała? Masa Ziemi $M = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

7-6. W zawieszone na dwóch niciach wahadło balistyczne o masie $M = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ (patrz rysunek) wbija się pocisk o masie $m = 5{,}00\,\mathrm{g}$ (zderzenie jest idealnie niesprężyste). Wahadło wraz z pociskiem podnosi się na wysokość $h = 5{,}00\,\mathrm{cm}$. Wyznaczyć prędkość pocisku v_0 oraz ilość ciepła, jakie wydzieliło się podczas zderzenia.



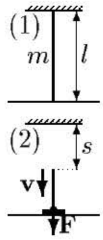
7-7. Neutron zderza się czołowo i idealnie sprężyście ze spoczywającym początkowo jądrem atomu węgla $^{12}_{6}$C. Jaką część początkowej energii kinetycznej neutronu jest przekazywana atomowi węgla? Wyznaczyć energię kinetyczną jądra węgla i neutronu po zderzeniu, jeśli początkowa energia kinetyczna neutronu wynosiła $1{,}60 \cdot 10^{-23}$ J. Masa jądra atomu węgla jest 12-krotnie większa od masy neutronu.

7-8. Człowiek o masie $m = 60\,\mathrm{kg}$ biegnący z prędkością początkową $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ skacze na stojący wózek o masie $M = 120\,\mathrm{kg}$ (patrz rysunek). Człowiek początkowo ślizga się po powierzchni wózka, po czym zatrzymuje się względem niego. Współczynnik tarcia między człowiekiem i wózkiem wynosi 0,4, a wózek porusza się po poziomej płaszczyznie bez tarcia. **(a)** Wyznaczyć końcową prędkość człowieka i wózka. (**b**) Obliczyć siłę tarcia działającą na człowieka w trakcie poślizgu. Jak długo trwał poślizg? (**c**) Wyznaczyć zmianę pędu człowieka oraz wózka. (**d**) Jak daleko względem wózka przemieści się człowiek podczas poślizgu? (**e**) Jaką odległość przebędzie w tym czasie wózek? (**f**) Obliczyć zmianę energii kinetycznej człowieka i wózka. Dlaczego wyniki są różne?



7-9. Kula bilardowa poruszająca się z prędkością $v_1 = 5{,}00\,\mathrm{m/s}$ zderza się niecentralnie z drugą identyczną kulą. Po zderzeniu pierwsza kula porusza się z prędkością $u_1 = 4{,}33\,\mathrm{m/s}$ pod kątem 30° względem początkowego kierunku ruchu. Zakładając, że zderzenie jest idealnie sprężyste, wyznaczyć prędkość drugiej kuli.

7-10. Łańcuch o długości l i masie m zwisa pionowo nad stołem, dotykając go jednym końcem (jak na rysunku). W pewnej chwili górny koniec zostaje zwolniony i łańcuch zaczyna spadać. Znaleźć zależność siły F działającej na stół od drogi s przebytej przez górny koniec łańcucha i pokazać, że jej maksymalna wartość wynosi $3mg$.



7-11. Silniki pierwszego stopnia rakiety Saturn V paliwo zużywają w tempie $1{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{kg/s}$, a powstające spaliny wyrzucane są z prędkością $u = 2{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}$. Obliczyć siłę ciągu silników tej rakiety (siła ciągu silnika $F_c = u\,\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$). Obliczyć przyspieszenie rakiety w momencie startu, jeśli jej początkowa masa wynosi $3{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}$ (należy uwzględnić siłę grawitacji).

7-12. Odległości do najbliższych gwiazd wynoszą około 4 lat świetlnych. Gdybyśmy chcieli wysłać do jednej z nich sondę kosmiczną, która miałaby nam przekazać wyniki badań po „rozsądnym" czasie oczekiwania (kilkadziesiąt lat), musielibyśmy nadać jej prędkość rzędu $0{,}1c = 3 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$. Jaką część początkowej masy pojazdu musiałoby stanowić paliwo, gdyby posługiwać się konwencjonalnym napędem wykorzystującym chemiczne spalanie (patrz zadanie poprzednie)? Jak zmieniłaby się sytuacja, gdyby udało się uzyskać $u \sim 10^7\,\mathrm{m/s}$ (np. za pomocą jakiegoś rodzaju paliwa jądrowego)?

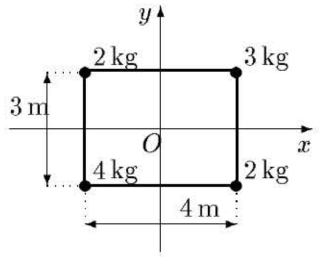
7-13. Na szynach stoi wagon-cysterna z wodą. W dnie cysterny zamontowano w odległości l od jednego z jej końców pionową rurkę zakończoną kranem. Czy i w którą stronę zacznie się poruszać wagon, jeśli otworzymy kran? Tarcie zaniedbać.

8. Dynamika bryły sztywnej. Zasada zachowania momentu pędu

8-1. Silnik elektryczny został wyłączony w chwili, gdy jego wirnik wykonywał 100 obrotów na minutę. Zakładając, że opóźnienie kątowe wirnika wynosi $2\,\mathrm{rad/s^2}$, obliczyć: **(a)** czas, po którym wirnik zatrzyma się; **(b)** kąt, o jaki obróci się wirnik do chwili zatrzymania.

8-2. Zależność drogi kątowej Θ pewnego punktu leżącego na kole od czasu jest dana wzorem $\Theta(t) = 5 + 10t + 2t^2\,[\mathrm{rad}]$ (t w sekundach). Określić położenie kątowe, prędkość kątową oraz przyspieszenie kątowe tego punktu dla $t_0 = 0$ i $t_1 = 3\,\mathrm{s}$.

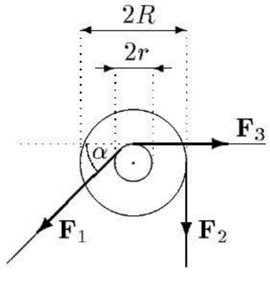
8-3. Cztery masy są połączone ze sobą sztywnymi prętami o pomijalnej masie (patrz rysunek). Obliczyć moment bezwładności układu względem osi OZ (prostopadłej do płaszczyzny XOY i przechodzącej przez punkt O). Wyznaczyć energię kinetyczną ruchu obrotowego, jeśli układ obraca się wokół osi OZ ze stałą prędkością kątową $6\,\mathrm{rad/s}$.



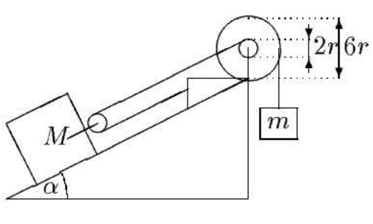
8-4. Dwie masy: M i m są połączone prętem o długości L i znikomo małej masie. Pokazać, że moment bezwładności względem osi prostopadłej do pręta jest najmniejszy dla osi przechodzącej przez środek masy układu.

8-5. Wyznaczyć moment bezwładności następujących brył jednorodnych: **(a)** wydrążonego walca o masie m i promieniach: zewnętrznym R i wewnętrznym $r < R$ względem osi przechodzącej przez środek masy i równoległej do ścian bocznych; **(b)** kuli o promieniu R i masie M względem osi przechodzącej przez jej środek; **(c)** tej samej kuli — względem osi stycznej do jej powierzchni; **(d)** tarczy o promieniu r i masie m względem osi przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do płaszczyzny tarczy; **(e)** tarczy względem osi przechodzącej przez punkt na jej brzegu i prostopadłej do płaszczyzny tarczy.

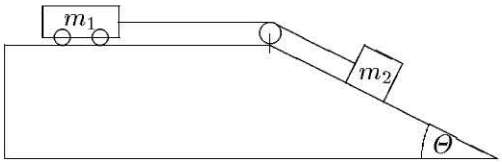
8-6. Wyznaczyć wartość wypadkowego momentu sił τ działającego na podwójną szpulkę względem jej osi (patrz rysunek), jeśli $r = 10\,\mathrm{cm}$, $R = 25\,\mathrm{cm}$, nitki są ciągnięte z siłami $F_1 = 12\,\mathrm{N}$, $F_2 = 9\,\mathrm{N}$, $F_3 = 10\,\mathrm{N}$, a kąt $\alpha = 45°$.



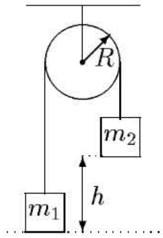
8-7. Obliczyć masę m ciężarka, jaki należy zawiesić, aby przedstawiony na rysunku układ pozostawał w równowadze, jeśli $M = 150\,\mathrm{kg}$ i $\alpha = 30°$.



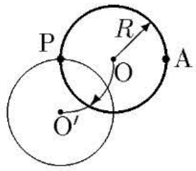
8-8. W układzie przedstawionym na rysunku $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$,$m_2 = 6\,\mathrm{kg}$, promień krążka $R = 0{,}25\,\mathrm{m}$, jego masa $m_\mathrm{k} = 10\,\mathrm{kg}$, kąt $\Theta = 30°$, współczynnik tarcia kinetycznego dla masy m_2 na równi $\mu = 0{,}30$. Zaniedbując masę sznurka, wyznaczyć przyspieszenie mas m_1 i m_2 oraz naciągi nici. Czy naciągi są takie same?



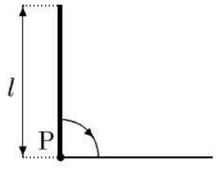
8-9. W układzie przedstawionym na rysunku $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 19\,\mathrm{kg}$, krążek ma promień $R = 0{,}1\,\mathrm{m}$, jego masa $m_\mathrm{k} = 3\,\mathrm{kg}$, a $h = 3\,\mathrm{m}$. Zaniedbując masę sznurka i tarcie, wyznaczyć przyspieszenie i prędkość mas m_1 i m_2 oraz naciągi nici (czy są takie same?) w momencie, gdy obie masy mijają się. Wskazówka: Wykorzystać zasadę zachowania energii mechanicznej.



8-10. Jednorodna tarcza o promieniu R i masie M może się obracać wokół punktu P (patrz rysunek). Obliczyć prędkość środka masy tarczy w najniższym punkcie toru. Wyznaczyć prędkość punktu A w najniższym punkcie toru ruchu. Wskazówka: Wykorzystać zasadę zachowania energii mechanicznej. Powtórzyć obliczenia, zastępując tarczę obręczą.



8-11. Jednorodny pręt o długości L i masie M może się obracać wokół osi P. Jego położenie początkowe jest pionowe. Obliczyć: **(a)** jego prędkość kątową i przyspieszenie kątowe; **(b)** składowe: poziomą i pionową przyspieszenia całkowitego środka masy pręta; **(c)** składowe siły, z jaką pręt działa na punkt P w chwili, gdy znajduje się w położeniu poziomym. Wskazówka: Wykorzystać zasadę zachowania energii mechanicznej.

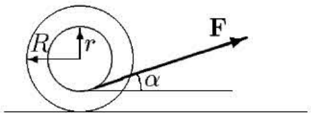


8-12. Dziecko o masie $m = 40\,\mathrm{kg}$ stoi na zewnątrz kołowej karuzeli o masie $M = 80\,\mathrm{kg}$ i promieniu $R = 2\,\mathrm{m}$ obracającej się z prędkością kątową $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$. Dziecko wchodzi na karuzelę. **(a)** Czy zmieni się jej prędkość kątowa? Jeśli tak, to jaka jest jej nowa wartość? **(b)** Dziecko rozpoczyna wędrówkę do środka karuzeli. Ile wynosi jej prędkość kątowa w chwili, gdy dziecko znajduje się na środku? **(c)** Jak zmieni się energia kinetyczna układu, gdy dziecko przejdzie od brzegu do środka karuzeli?

8-13. Jednorodny walec (kula) o promieniu r i masie m stacza się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia β. Obliczyć przyspieszenie a środka masy walca (kuli) oraz prędkość v, jaką ma on po przebyciu drogi s wzdłuż równi, jeżeli w chwili $t = 0$ ciało spoczywało.

8-14. Na wierzchołku równi pochyłej spoczywają: kula, sfera, walec, rurka, tarcza i obręcz. W jakiej kolejności stoczą się te obiekty z równi, jeśli ich masy i promienie są takie same?

8-15. Na poziomym stole leży szpulka nici. Z jakim przyspieszeniem liniowym a będzie się poruszać oś szpulki, jeśli ciągnąć ją siłą $\mathbf{F}$ (patrz rysunek)? Pod jakim kątem należy ciągnąć nić, by szpulka poruszała się w prawo? Szpulka toczy się po powierzchni stołu bez poślizgu. Moment bezwładności szpulki o masie m względem jej środka wynosi I.



8-16. W zawieszony u sufitu jednorodny pręt o masie m i długości l uderza idealnie niesprężyście ciało o masie M lecące z prędkością v_0 prostopadle do osi pręta. Określić prędkość kątową układu pręt + ciało tuż po zderzeniu, jeżeli ciało uderzyło w odległości $l/3$ od punktu zawieszenia pręta. Jaka ilość ciepła wydzieliła się w trakcie zderzenia? O jaki kąt α odchyli się od pionu pręt?

8-17. Drewniana listwa o długości $l = 0{,}4\,\mathrm{m}$ i masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ może się obracać dookoła osi prostopadłej do niej i przechodzącej przez jej środek. W koniec listwy trafia pocisk o masie $m_1 = 0{,}01\,\mathrm{kg}$, lecący z prędkością $v_1 = 200\,\mathrm{m/s}$ w kierunku prostopadłym do osi i do listwy. Znaleźć prędkość kątową, z jaką listwa zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk.

8-18. Poziomy stolik o masie $M = 20\,\mathrm{kg}$ i promieniu $1\,\mathrm{m}$ wiruje z prędkością $\omega_0 = 20\,\mathrm{obr/min}$. W środku stolika stoi człowiek i trzyma w wyciągniętych rękach hantle. Jaka będzie prędkość kątowa ω_k układu, jeśli człowiek opuściwszy ręce zmniejszy swój moment bezwładności od wartości $I_0 = 3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ do $I_\mathrm{k} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$? Jak zmieni się przy tym energia kinetyczna układu?

9. Pole grawitacyjne. Statyka

9-1. Oszacować, jakie promienie powinny mieć Ziemia i Słońce, aby stały się czarnymi dziurami. Ile wynosiłyby wówczas ich gęstości? Ile ważyłyby umieszczone na ich powierzchniach blondynki o masie $m = 55\,\mathrm{kg}$ każda?

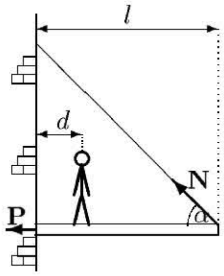
9-2. Okres obrotu Słońca wokół własnej osi wynosi obecnie $T = 27$ dni. Po czasie potrzebnym na spalenie się paliwa jądrowego ($\sim 5 \cdot 10^9$ lat) Słońce zacznie się kurczyć w procesie grawitacyjnego kolapsu. Oszacować promień Słońca R_x, przy którym zacznie się ono rozpadać. Masa Słońca $M_\mathrm{S} = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, promień $R_\mathrm{S} = 7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$.

9-3. Korzystając z twierdzenia Gaussa, wyznaczyć natężenie i potencjał pola grawitacyjnego: **(a)** wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli o masie M i promieniu R. **(b)** wokół jednorodnej nieskończenie długiej struny o liniowej gęstości ϱ.

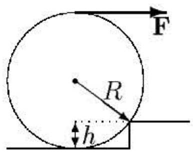
9-4. Trzy jednakowe masy m umieszczone są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a. Wyznaczyć natężenie i potencjał pola grawitacyjnego w środku trójkąta i w środku jednego z boków. Jaką pracę trzeba wykonać przeciw siłom grawitacji, aby przesunąć ciało o masie M pomiędzy tymi punktami?

9-5. Ziemia, której masa wynosi $M_\mathrm{Z} = 5{,}96 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, porusza się po elipsie wokół Słońca o masie $M_\mathrm{S} = 1{,}97 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Jej najmniejsza i największa odległość od Słońca wynoszą odpowiednio $l_\mathrm{min} = 1{,}49 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ i $l_\mathrm{max} = 1{,}51 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Wyznaczyć moment pędu Ziemi oraz jej prędkość w punktach odległych od Słońca o l_min i l_max.

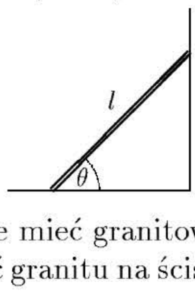
9-6. Jednorodna pozioma platforma zamocowana jest do ściany i podwieszona liną, jak na rysunku. Obliczyć naciąg liny N i siłę P wywieraną przez platformę na ścianę, jeśli w odległości $d = 2\,\mathrm{m}$ od ściany stoi człowiek o ciężarze $W_1 = 600\,\mathrm{N}$. Ciężar platformy $W_2 = 200\,\mathrm{N}$, jej długość $l = 8\,\mathrm{m}$, a kąt $\alpha = 53°$.



9-7. Z jaką minimalną siłą F trzeba ciągnąć za nić, aby wtoczyć szpulkę o promieniu R na próg o wysokości $h < R$ (patrz rysunek)? Jaką siłą P naciska wtedy szpulka na krawędź progu? Założyć, że szpulka nie ślizga się.



9-8. Jednorodna drabina o ciężarze W oparta jest o idealnie gładką pionową ścianę (patrz rysunek). Pod jakim kątem θ można postawić drabinę, aby się nie ślizgała, jeśli współczynnik tarcia między drabiną a podłogą wynosi $\mu = 0{,}4$?

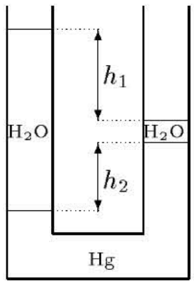


9-9. Jaką maksymalną wysokość może mieć granitowy słup o stałym przekroju, aby nie pękł pod własnym ciężarem? Wytrzymałość granitu na ściskanie wynosi $170 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^2}$, a jego gęstość $2{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

10. Dynamika płynów

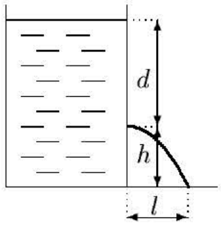
10-1. Basen o wymiarach $30\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$ i płaskim dnie jest napełniony wodą do głębokości $2\,\mathrm{m}$. Jakie całkowite siły działają na dno oraz na każdą ze ścian basenu?

10-2. Obustronnie otwarta rurka w kształcie litery U jest częściowo napełniona rtęcią (gęstość $\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$), a częściowo wodą, jak na rysunku. Ile wynosi h_2 w stanie równowagi, jeśli $h_1 = 1{,}00\,\mathrm{cm}$?



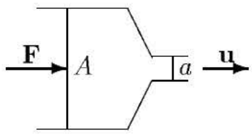
10-3. Jaki ciężar może unieść balon o objętości $V = 400\,\mathrm{m^3}$ wypełniony helem? Gęstość helu $\varrho_{\mathrm{He}} = 0{,}180\,\mathrm{kg/m^3}$, powietrza $\varrho = 1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$.

10-4. Boczna ściana dużego zbiornika z wodą przerdzewiała na wysokości $h = 4\,\mathrm{m}$ nad ziemią i na głębokości $d = 16\,\mathrm{m}$ pod zwierciadłem wody. Z powstałej dziury woda wycieka w tempie $2{,}5\,\mathrm{l/min}$. Z jaką prędkością v wypływa strumień wody? Jaki przekrój ma dziura? Jak daleko od ściany zbiornika strumień opada na ziemię?

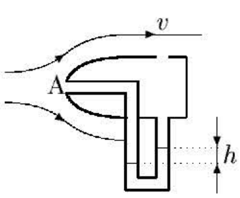


10-5. Pod jakim minimalnym ciśnieniem musi być pompowana woda z rzeki płynącej na wysokości $h_1 = 564\,\mathrm{m}$ n.p.m., aby dotarła do wioski położonej na wysokości $h_2 = 2096\,\mathrm{m}$ n.p.m.? Jaka jest prędkość wody w rurze, jeśli pompowane jest $4500\,\mathrm{m^3}$ na dobę, a średnica rury wynosi $d = 15\,\mathrm{cm}$? Jakie dodatkowe ciśnienie jest potrzebne do zapewnienia tego przepływu? Przyjąć, że ciśnienie atmosferyczne i przyspieszenie ziemskie jest takie samo na obu wysokościach.

10-6. Tłoczek strzykawki o powierzchni A porusza się ze stałą prędkością v pod działaniem siły $\mathbf{F}$. Z jaką prędkością wylatuje ze strzykawki strumień cieczy o gęstości ϱ przez otwór o przekroju a ($a \ll A$)?



10-7. Do pomiaru prędkości przepływu powietrza można użyć *rurki Pitota* (patrz rysunek), mierząc różnicę między ciśnieniem statycznym i całkowitym. Jaka jest prędkość przepływu powietrza v, jeśli różnica poziomów rtęci (o gęstości $\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$) w ramionach U-rurki wynosi $h = 5{,}00\,\mathrm{cm}$? Założyć, że w punkcie A powietrze nie porusza się. Gęstość powietrza $\varrho = 1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$.



11. Drgania

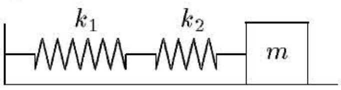
11-1. Wyznaczyć okresy małych drgań: (**a**) tarczy o promieniu R zawieszonej w punktach odległych od środka masy o R i $R/2$; (**b**) kulki metalowej zawieszonej na nitce o długości $L = 0{,}25\,\mathrm{m}$ umieszczonej w cieczy o gęstości trzykrotnie mniejszej od gęstości kulki (opory zaniedbać); (**c**) ciała o masie m zawieszonego pośrodku poziomej metalowej linki o długości L rozciąganej siłą N.

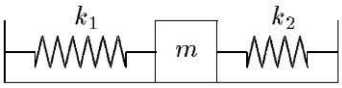
11-2. Amplitudy drgań wymuszonych odbywających się pod działaniem dwóch sił zewnętrznych o częstościach kołowych $\omega_1 = 200\,\mathrm{s}^{-1}$ i $\omega_2 = 300\,\mathrm{s}^{-1}$ są równe. Wyznaczyć częstość rezonansową ω_r.

11-3. Przy jakiej prędkości samochód poruszający się po drodze ułożonej z betonowych płyt będzie szczególnie silnie drgał w kierunku pionowym, jeśli długość każdej płyty wynosi L, a nacisk na resor, który ugina się o Δx pod działaniem siły F_x, wynosi N_1?

11-4. Blok A o masie M przyczepiony do sprężyny o współczynniku sprężystości k wykonuje ruch harmoniczny prosty, ślizgając się po idealnie gładkiej powierzchni. Blok B o masie m spoczywa na nim. Jaki jest okres drgań? Jaka jest maksymalna amplituda drgań, przy której blok B nie będzie się ślizgał względem bloku A, jeśli współczynnik tarcia statycznego między nimi wynosi μ?

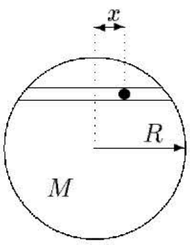
11-5. Masa m jest przyczepiona do dwóch sprężyn o stałych sprężystości k_1 i k_2 (patrz rysunki). W obu przypadkach zostaje ona wychylona z położenia równowagi i puszczona; porusza się bez tarcia. Pokazać, że wykonuje ona ruch harmoniczny prosty o okresach równych odpowiednio $T_\mathrm{A} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$ i $T_\mathrm{B} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$.





11-6. (**a**) Całkowita energia mechaniczna ciała o masie m wykonującego ruch harmoniczny prosty po idealnie gładkiej poziomej powierzchni pod działaniem siły sprężystości sprężyny o współczynniku k wynosi $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Korzystając z zasady zachowania energii ($\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$), wyprowadzić równanie ruchu harmonicznego. (**b**) Małe ciało ślizga się bez tarcia wewnątrz sferycznej powierzchni o promieniu R. Energia mechaniczna ciała wychylonego z położenia równowagi o kąt ϑ wynosi $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\vartheta)$. Wyprowadzić równanie ruchu. Pokazać, że okres małych drgań jest równy $T = 2\pi\sqrt{R/g}$.

11-7. Rysunek przedstawia tunel wewnątrz jednorodnej planety o masie M i promieniu R. Pokazać, że wynikające z II zasady dynamiki równanie ruchu dla ciała w tunelu ma postać równania oscylatora harmonicznego $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + gx/R = 0$, gdzie g — przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety. Oszacować okres oscylacji dla ciała w tunelu we wnętrzu Ziemi.



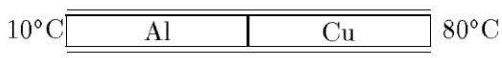
12. Termodynamika

12-1. Dwa betonowe (współczynnik rozszerzalności liniowej $1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$) przęsła mostu o długości L każde są tak zamontowane, że nie mają miejsca na rozszerzanie się. Na jaką wysokość y wybrzuszy się most, jeśli temperatura wzrośnie o ΔT? Wykonać obliczenia dla $L = 250\,\mathrm{m}$ oraz $\Delta T = 20°\mathrm{C}$.

12-2. Wahadło zegara jest podwieszone na mosiężnym (współczynnik rozszerzalności liniowej $1{,}84 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$) pręcie. Zegar chodzi dokładnie w temperaturze 20°C. O ile spóźni się on lub pośpieszy w ciągu tygodnia, jeśli temperatura wzrośnie do 30°C?

12-3. Słońce można traktować jako ciało o temperaturze 5800 K. Jeśli promień Słońca wynosi $7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ i $e = 1$, jaka jest jego całkowita moc promieniowania?

12-4. Dwa pręty — z miedzi i z aluminium, o przewodnościach cieplnych odpowiednio 394 i $218\,\mathrm{J/(m \cdot s \cdot K)}$, długości 50 cm każdy i promieniu 1 cm są połączone jak na rysunku. Ich powierzchnie boczne są izolowane cieplnie. Wolny koniec pręta miedzianego znajduje się w temperaturze 80°C, a aluminiowego — w temperaturze 10°C. **(a)** Jaka jest temperatura na złączu? **(b)** Jaka jest szybkość przepływu ciepła przez pręty?

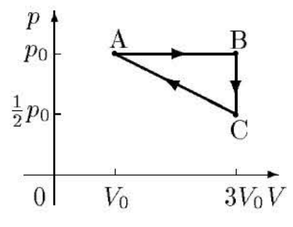


12-5. Ile ciepła potrzeba do przekształcenia 80 g lodu o temperaturze początkowej −10°C w 60 g wody i 20 g pary wodnej o temperaturze 100°C? Ciepło właściwe lodu wynosi $2095\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$, ciepło topnienia 334 kJ/kg, ciepło właściwe wody $4190\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$, ciepło parowania w temperaturze wrzenia 2258 kJ/kg.

12-6. W niskich temperaturach molowe ciepło właściwe ciał stałych opisane jest *prawem Debye'a* $\mathcal{C} = k(T/T_{\mathrm{D}})^3$, gdzie $k = 1945\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$, a T_{D} jest *temperaturą Debye'a* charakterystyczną dla danego ciała stałego. Obliczyć ilość ciepła potrzebną do podniesienia temperatury 2,4 mol aluminium ($T_{\mathrm{D}} = 400\,\mathrm{K}$) od $T_1 = 10\,\mathrm{K}$ do $T_2 = 20\,\mathrm{K}$.

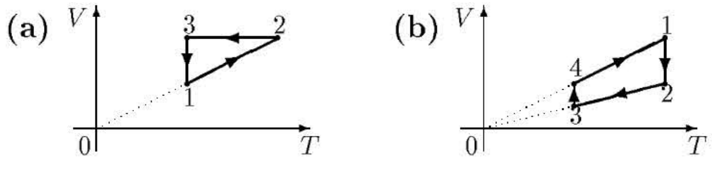
12-7. W naczyniu znajduje się gaz o masie cząsteczkowej μ, temperaturze T i ciśnieniu p. Jaka jest gęstość gazu w tych warunkach? Obliczenia wykonać dla $T = 300\,\mathrm{K}$, $p = 1{,}04 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ i $M = 32\,\mathrm{kg/kmol}$. Stała gazowa $R = 8{,}32\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$.

12-8. Gaz idealny poddany jest przemianie cyklicznej A→B→C→A przedstawionej na wykresie. Przedstawić przemianę we współrzędnych (p, T) oraz (V, T). Wyrazić przez p_0 i V_0: **(a)** pracę wykonaną przez gaz na każdym odcinku cyklu; **(b)** całkowitą pracę W wykonaną przez gaz w każdym cyklu; **(c)** ciepło Q pobrane przez gaz w każdym cyklu.



12-9. W dwóch naczyniach o pojemnościach V_1 i V_2 znajdują się masy m_1 i m_2 gazów o masach cząsteczkowych odpowiednio μ_1 i μ_2. Obliczyć ciśnienie mieszaniny gazów powstałej po połączeniu tych naczyń przewodem o pomijalnej objętości. Temperatura gazów jest stała i wynosi T.

12-10. Przedstawić we współrzędnych (p, V) na tle rodzin izoterm przemiany cykliczne pokazane na rysunkach we współrzędnych (V, T).



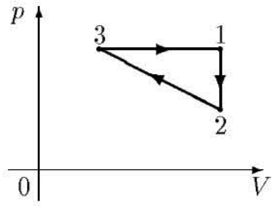
12-11. Udowodnić, że zachodzi relacja $c_p - c_V = R/\mu$.

12-12. Obliczyć pracę wykonaną przy adiabatycznym sprężaniu pewnej masy gazu od objętości V_1 do V_2, jeżeli ciśnienie początkowe wynosiło p_1. Dany jest stosunek $\kappa = \mathcal{C}_p/\mathcal{C}_V$.

12-13. Masa m wodoru rozszerza się izobarycznie, dwukrotnie powiększając objętość. Znaleźć zmianę entropii w tym procesie. Dane są: masa cząsteczkowa wodoru μ i ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p.

12-14. Znaleźć zmianę entropii przy zamianie masy m lodu o temperaturze T_1 w parę o temperaturze T_2.

12-15. 1 mol gazu doskonałego podlega cyklicznej przemianie przedstawionej na rysunku. Obliczyć ciepło pobrane przez gaz w przemianie 2→3 oraz pracę uzyskaną w cyklu, jeśli dane są temperatury: najwyższa T_1 i najniższa $T_2 = T_3$.



12-16. Gaz o cząsteczkach dwuatomowych poddany zostaje przemianom w cyklu Carnota, przy czym podczas rozprężania izotermicznego jego objętość wzrasta dwukrotnie, a podczas rozprężania adiabatycznego wykonuje on pracę równą 300 kJ. Znaleźć pracę wykonaną podczas pełnego cyklu.

12-17. Zaproponowano projekt elektrowni, wykorzystującej gradient temperatury w oceanie. Układ miałby pracować pomiędzy 20°C (temperaturą wód powierzchniowych) a 5°C (temperaturą wód na głębokości około 1 km). **(a)** Jaka jest maksymalna sprawność takiego układu? **(b)** Gdyby elektrownia miała mieć moc 75 MW, jaka ilość energii cieplnej byłaby pobierana w ciągu godziny? **(c)** Co czyni ten projekt interesującym, pomimo wyniku otrzymanego w punkcie (a)?

13. Ruch falowy

13-1. Dwa impulsy falowe $y_1(x,t) = 5/[(3x-4t)^2+2]$ i $y_2(x,t) = -5/[(3x+4t-6)^2+2]$ biegną wzdłuż tej samej napiętej struny. **(a)** W jakich kierunkach i z jakimi prędkościami poruszają się te impulsy? **(b)** W jakiej chwili czasu impulsy zniosą się na całej prostej? **(c)** W jakich punktach te impulsy znoszą się w dowolnej chwili czasu?

13-2. Kosinusosidalna fala rozchodzi się wzdłuż osi OX. Jej amplituda wynosi $A = 0{,}01\,\mathrm{m}$, długość $\lambda = 0{,}4\,\mathrm{m}$, a częstotliwość $f = 8\,\mathrm{Hz}$. Poprzeczne wychylenie punktów ośrodka sprężystego dla $t = 0$ i $x = 0$ wynosi $0{,}01\,\mathrm{m}$. Wyznaczyć wektor falowy k, okres T, częstość kołową ω i prędkość c tej fali. Określić wartość fazy początkowej α_0 oraz napisać równanie fali.

13-3. Napisać równanie fali sinusoidalnej (tj. jawną zależność $y(x,t)$) biegnącej wzdłuż sznura w ujemnym kierunku osi OX, jeśli jej amplituda $A = 4{,}0\,\mathrm{cm}$, długość $\lambda = 100\,\mathrm{cm}$, częstotliwość $f = 4{,}0\,\mathrm{Hz}$, gdy: **(a)** $y(0,t) = 0$ dla $t = 0$; **(b)** $y(x,0) = 0$ dla $x = 20\,\mathrm{cm}$.

13-4. Kosmonauta na Księżycu mierzy przyspieszenie pola grawitacyjnego g_K przez pomiar czasu przebiegu fali przez pionowy drut, którego masa $m = 4\,\mathrm{g}$, a długość $l = 1{,}6\,\mathrm{m}$. Na drucie zawieszony jest ciężarek o masie $M = 3\,\mathrm{kg}$. Czas zmierzony przez kosmonautę wynosi $t = 36{,}1\,\mathrm{ms}$. Wyznaczyć g_K. Przy liczeniu siły naciągu zaniedbać ciężar drutu.

13-5. Z sufitu zwisa swobodnie struna o masie m i długości l. Pokazać, że czas przebiegu fali poprzecznej wzdłuż struny wynosi $t = 2\sqrt{l/g}$.

13-6. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypadku, gdy do struny podwieszono dodatkowo ciężarek o masie M — pokazać, że $t = 2\sqrt{l/mg}\,(\sqrt{M+m} - \sqrt{M})$.

13-7. Dwie fale sinusoidalne $y_1(x,t) = 4{,}0\sin(3{,}0x - 20t)$ oraz $y_2(x,t) = 8{,}0\cos(3{,}0x - 20t)$ rozchodzą się jednocześnie w ośrodku sprężystym. Pokazać, że fala wypadkowa dana wzorem $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ jest także falą sinusoidalną oraz obliczyć jej fazę i amplitudę. Wskazówka: skorzystać z zależności trygonometrycznej $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

13-8. Wyznaczyć prędkość poprzeczną $v_y = \partial y/\partial t$ oraz przyspieszenie poprzeczne $a_y = \partial^2 y/\partial t^2$ cząsteczek w chwili czasu $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$ w punkcie $x = 1{,}6\,\mathrm{m}$ struny, w której rozchodzi się fala $y(x,t) = 0{,}12\sin[\pi(\frac{1}{8}x + 4t)]$. Ile wynoszą wartości maksymalne wyznaczonych wielkości? Dla jakich chwil czasu wielkości v_y oraz a_y osiągają w tym punkcie wartości ekstremalne? Czy spełniona jest relacja $a_y = -\omega^2 y$? Ile wynoszą: długość, okres i prędkość fazowa tej fali?

13-9. Sprawdzić, że równanie fali kosinusoidalnej $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$, gdzie $\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ jest rozwiązaniem jednowymiarowego równania falowego $\partial^2 y/\partial t^2 = c^2\partial^2 y/\partial x^2$.

13-10. Pokazać, że średnia prędkość cząsteczek ośrodka, jeśli rozchodzi się w nim fala kosinusoidalna z poprzedniego zadania, wynosi $\langle v_y(x)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T[-A\omega\sin(\omega t - kx)]\,dt = 0$.

13-11. Sprawdzić, że funkcje $y(x,t) = f(x \pm ct)$ są rozwiązaniami jednowymiarowego równania falowego $\partial^2 y/\partial t^2 = c^2\partial^2 y/\partial x^2$. Pokazać, że następujące funkcje: **(a)** $y(x,t) = \ln[b(x-ct)]$, **(b)** $y(x,t) = \exp[b(x-ct)]$, **(c)** $y(x,t) = x^2 + c^2t^2$, **(d)** $y(x,t) = \sin kx\cos\omega t$ są rozwiązaniami równania falowego. Wskazówka: funkcje **(c)** i **(d)** przedstawić w postaci $f(x+ct) + g(x-ct)$?

13-12. Wahadło matematyczne składa się z kulki o masie M wiszącej na cienkim sztywnym pręcie o masie $m \ll M$ i długości l. Wyznaczyć prędkość fal poprzecznych w pręcie wahadła, jeśli jego okres drgań wynosi T.

13-13. Stalowy pręt o długości $l_s = 12{,}4\,\mathrm{m}$ jest połączony z prętem miedzianym o długości $l_{Cu} = 6{,}2\,\mathrm{m}$, tworząc jeden pręt o długości $l = l_s + l_{Cu}$. Przekrój obu prętów jest taki sam i równy $S = 25\,\mathrm{mm}^2$. Pręt rozciąga siła $F = 3{,}1\cdot 10^3\,\mathrm{N}$. Jak długo biegnie podłużna (poprzeczna) fala sprężysta od jednego do drugiego końca pręta? Stałe materiałowe: $E_s = 2\cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$, $G_s = 8{,}4\cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$, $E_{Cu} = 1{,}1\cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$, $G_{Cu} = 4{,}2\cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$, $\varrho_s = 7800\,\mathrm{kg/m^3}$, $\varrho_{Cu} = 8900\,\mathrm{kg/m^3}$.

13-14. Prędkość dźwięku w powietrzu zależy od temperatury jak $v = (331{,}5 + 0{,}607t_C)\,[\mathrm{m/s}]$, gdzie t_C — temperatura w skali Celsjusza. Przyjmując, że temperatura powietrza maleje o $1^\circ\mathrm{C}$ na każde $150\,\mathrm{m}$ wysokości, wyznaczyć czas przelotu fali dźwiękowej na wysokość $9\,\mathrm{km}$ w górę.

Temperaturę powietrza na poziomie gruntu przyjąć 20°C. Porównać to z czasem przebycia tej odległości przez falę poruszającą się ze stałą prędkością 343 m/s.

13-15. Nietoperz jest w stanie dokonać detekcji małego obiektu (insekta) o rozmiarze liniowym porównywalnym z długością emitowanej przez siebie fali. Ile wynosi ten rozmiar, jeśli nietoperz wysyła ultradźwięki o częstotliwości 50,0 kHz, a prędkość dźwięku w powietrzu $c = 343$ m/s?

13-16. Struna ma gęstość liniową masy $\varrho_l = 0{,}03$ kg/m i jest naciągnięta siłą $N = 100$ N. Jaką moc musi wytwarzać źródło fali umieszczone na jednym końcu struny, aby wygenerować w niej falę sinusoidalną o częstości $f = 100$ Hz i amplitudzie $A = 0{,}01$ m?

13-17. Obliczyć energię fali z poprzedniego zadania, zawartą we fragmencie struny o długości 1 mm.

13-18. Naciągnięta struna ma masę m i długość l. Jaką moc należy dostarczyć strunie w celu wygenerowania w niej fali sinusoidalnej o amplitudzie A, długości λ i prędkości v? Obliczenia wykonać dla $m = 0{,}18$ kg, $l = 3{,}6$ m, $A = 0{,}1$ m, $\lambda = 0{,}5$ m, $v = 30$ m/s.

13-19. Pokazać, że przy przechodzeniu fali przez granicę ośrodków zachodzi równość $\mathcal{T}+\mathcal{R} = 1$.

14. Szczególna teoria względności

14-1. Z dwóch inercjalnych układów odniesienia: układu laboratoryjnego K i poruszającego się z prędkością $V \| OX \| OX'$ względem niego układu K' zaobserwowano jedno i to samo zdarzenie. Obserwator w K przypisał mu chwilę czasu 1000 s i współrzędne przestrzenne $(1; 3; 5)$ km. Wyznaczyć współrzędne tego zdarzenia w układzie K'.

14-2. Z *collidera* (akceleratora) cząstek elementarnych wylatuje z prędkościa $v = 0{,}999c$ strumień pionów. Ile wynosi czas życia pionów w laboratoryjnym układzie odniesienia, jeśli ich własny czas życia $\tau_0 = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ s? Jaką drogę przebędzie pion w jego własnym i laboratoryjnym układzie odniesienia od miejsca powstania do punktu rozpadu? O ile oddali się akcelerator od pionu w układzie związanym z pionem?

14-3. Obliczyć relatywistyczne pędy cząstek: protonu, elektronu i fotonu o energii całkowitej $1\,\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV}$ każda ($1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$). Wyznaczyć relatywistyczną energię kinetyczną protonu i elektronu.

14-4. Relatywistyczna energia kinetyczna cząstki jest 10 razy większa od jej energii spoczynkowej. Jaka jest prędkość tej cząstki? Znaleźć prędkość cząstki, której energia całkowita jest 10-krotnie większa od jej energii spoczynkowej.

14-5. Układ K' porusza się równolegle do osi OX układu laboratoryjnego K z prędkościa V. W układzie K' znajduje się spoczywający pręt o długości własnej L_0 tworzący z osią OX' kąt α'. Jaką długość pręta L i jaki kąt α zmierzy obserwator w układzie K?

14-6. Pokazać, że relacja $E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$ jest konsekwencją związków: $E = \gamma m_0 c^2$ oraz $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$.

14-7. Całkowita objętość wody w oceanach Ziemi wynosi $1{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{km}^3$, średnia gęstość wody $1030\,\mathrm{kg/m}^3$, a jej ciepło właściwe $4200\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$. Oszacować wzrost masy wód oceanów, jeśli ich temperatura podniesie się o $10°$C.

14-8. Dwa obiekty poruszają się z prędkościami $v = 0{,}75c$ w przeciwnych kierunkach w układzie związanym z Ziemią. Z jaką prędkością porusza się drugi obiekt w układzie związanym z pierwszym?

14-9. We wnętrzu Słońca zachodzi reakcja $4p \to {}^4_2\mathrm{He} + \Delta E$, gdzie p oznacza proton. Energia spoczynkowa protonu $E_p = 938{,}2\,\mathrm{MeV}$, a energia spoczynkowa jądra atomu helu $E_{^4_2\mathrm{He}} = 3727\,\mathrm{MeV}$. Pokazać, że w energię zamienia się 0,7% początkowej masy.

14-10. Moc promieniowanej przez Słońce energii wynosi $3{,}8 \cdot 10^{26}$ W. Jaką ilość masy traci Słońce w każdej sekundzie?