

Zagadnienia statystyki aktuarialnej

pod redakcją
Joanny Dębickiej



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Krzysztof Dębicki, Grzegorz Kończak,
Zbigniew Palmowski, Włodzimierz Szkutnik

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korlub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Adam Dębski

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne
w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawnictwa

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-240-6

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	7
Joanna Dębicka: Indeksacja przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach wielostanowych	9
Stanisław Heilpern: Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie.....	30
Aleksandra Iwanicka: Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w agregacji dwóch klas ubezpieczeń.....	49
Anna Nikodem-Słowikowska: The effect of dependence on life insurance .	60
Katarzyna Ostasiewicz: Modele progowe i ich zastosowanie w socjologii i ekonomii	77
Stanisława Ostasiewicz, Katarzyna Ostasiewicz: Modelowanie trwania życia w populacjach niejednorodnych.....	99
Katarzyna Sawicz: Uwagi o finansowaniu systemu ochrony zdrowia w Polsce	123
Janusz L. Wywiół, Agnieszka Żrubek: O dokładności analitycznego wyznaczania mocy pewnego testu na normalność rozkładu prawdopodobieństwa.....	131

Summaries

Joanna Dębicka, Indexing cash flows in multistate insurance contracts	29
Stanisław Heilpern, Calculation of pensions in the multiple life insurances	48
Aleksandra Iwanicka, Influence of some outside risk factors on a ruin probability in the aggregated two-classes risk model	59
Anna Nikodem-Słowikowska, Wpływ zależności na ubezpieczenia na życie.....	76
Katarzyna Ostasiewicz, Threshold models and their application to sociology and economics	98
Stanisława Ostasiewicz, Katarzyna Ostasiewicz, Approximation of survival function for heterogeneity population	122
Katarzyna Sawicz, Some comments on the financing of health care system in Poland	130
Janusz L. Wywiół, Agnieszka Żrubek, On estimation of the power of a normality test.....	147

Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WYZNACZANIE WIELKOŚCI RENTY W ZALEŻNYCH GRUPOWYCH UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE

Streszczenie: W artykule rozpatrywane są zależne ubezpieczenia grupowe dotyczące małżonków. W odróżnieniu od podejścia klasycznego opartego na niezależności długości życia małżonków dopuszcza się bardziej realistyczne założenie mówiące o ich zależności. Rozpatruje się dwa modele: Markowa i oparty na archimedesowych funkcjach łączących. W obydwu modelach wyznacza się aktuarialne wartości trzech rodzajów rent. Na podstawie danych empirycznych dotyczących Polski zbadano różnicę między wielkościami poszczególnych rent w wariancie opartym na niezależności i dopuszczającym zależności.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia grupowe, model Markowa, funkcja łącząca, renta.

1. Wstęp

W klasycznych podejściach do ubezpieczeń grupowych zakłada się niezależność długości życia członków grupy ubezpieczonych [1]. Nie jest to jednak założenie realistyczne. Członkowie grupy mogą być narażeni na wspólne ryzyko powodujące zależność długości ich przyszłego życia. W pracy rozpatrywane są ubezpieczenia grupowe dotyczące małżonków. W tym przypadku można też zaobserwować wpływ śmierci jednego z małżonków na długość życia drugiego. Może występować tu tzw. syndrom złamanego serca.

W artykule rozpatruje się dwa modele dopuszczające zależność długości życia małżonków: Markowa i oparty na funkcjach łączących. W obydwu przypadkach wyznacza się wartości aktuarialne trzech rent: wdowiej a_{xy} , $a_{xy:\overline{n}|}$ oraz $a_{\overline{xy}:\overline{n}|}$. W pierwszym modelu cztery możliwe stany cywilne małżonków opisane są procesem Markowa, a w drugim przyjmuje się, że struktura zależności długości życia poszczególnych małżonków opisana jest archimedesową funkcją łączącą (*copula*).

Praca opiera się na artykule [2], w którym autorzy badali wpływ zależności na wielkości powyższych rent, bazując na danych pochodzących z Belgii. W niniejszym opracowaniu wartości aktuarialne rent zostały wyznaczone na podstawie danych empirycznych dotyczących naszego kraju. Dla modelu Markowa wykorzystano dane z Głównego Urzędu Statystycznego [10], a w drugim przypadku – dane

zebrane z dwóch wrocławskich cmentarzy. W obydwu przypadkach zbadano różnicę wartości rent między wariantami opartymi na niezależności a dopuszczającymi zależność.

2. Ogólne założenia

W prezentowanej pracy interesować nas będą wzajemne zależności między dalszym trwaniem życia małżonków. Zmienne losowe T_x^M, T_y^K oznaczać będą dalsze trwanie życia x -letniego męża oraz y -letniej żony. Zakładamy przy tym, że zmienne te są ograniczone. To znaczy, że ich wartości należą do przedziałów $[0, w_x^M]$ oraz $[0, w_y^K]$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że x -letni mąż przeżyje jeszcze t lat oznaczane będzie symbolem ${}_t p_x^M$ oraz określone jest wzorem

$${}_t p_x^M = P(T_x^M > t) = 1 - {}_t q_x^M,$$

gdzie ${}_t q_x^M$ jest prawdopodobieństwem zgonu x -letniego męża. ${}_t p_x^M$ jest więc wartością funkcji przeżycia, a ${}_t q_x^M$ – wartością dystrybuanty zmiennej losowej T_x^M . Prawdopodobieństwo ${}_t p_x^M$ można też wyrazić za pomocą intensywności zgonu μ_x^M :

$${}_t p_x^M = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^M ds\right). \quad (1)$$

W podobny sposób wyznaczamy prawdopodobieństwa przeżycia ${}_t p_y^K$ i zgonu ${}_t q_y^K$ y -letniej żony.

Chcąc zbadać zależność zmiennych losowych T_x^M, T_y^K musimy znać ich rozkład łączny. W szczególności prawdopodobieństwo, że oboje małżonkowie przeżyją jeszcze t -lat:

$${}_t p_{xy} = P(T_x^M > t, T_y^K > t) = 1 - {}_t q_{xy},$$

gdy mąż ma x -lat, a żona y lat, lub prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedno z nich przeżyje t -lat:

$${}_t p_{xy}^- = P(\max\{T_x^M, T_y^K\} > t) = 1 - {}_t q_{xy}^-.$$

Jeśli znamy prawdopodobieństwa brzegowe oraz jedno z tych prawdopodobieństw łącznych, możemy obliczyć drugie, korzystając ze wzoru:

$${}_t p_{xy}^- = {}_t p_x^M + {}_t p_y^K - {}_t p_{xy}.$$

Ponadto otrzymujemy

$$\begin{aligned} {}_t q_{xy} &= P(\min\{T_x^M, T_y^K\} \leq t) = P(T_x^M \leq t \text{ lub } T_y^K \leq t), \\ {}_t q_{\bar{xy}} &= P(\max\{T_x^M, T_y^K\} \leq t) = P(T_x^M \leq t, T_y^K \leq t). \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwa łączne ${}_t p_{xy}$ oraz ${}_t p_{\bar{xy}}$ możemy oszacować z dołu i z góry, wykorzystując ograniczenia Frecheta [2; 7]. Klasą Frecheta $\mathcal{R}(F_1, F_2)$ nazywamy zbiór wszystkich dwuwymiarowych zmiennych losowych $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ o tym samym rozkładzie brzegowym określonym dystrybuantami

$$F_i(x) = P(X_i \leq x).$$

Wtedy dystrybuanta łączna

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

dwuwymiarowej zmiennej losowej należącej do klasy $\mathcal{R}(F_1, F_2)$ jest ograniczona z dołu i z góry przez dystrybuanty

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2) &= \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\}, \\ W(x_1, x_2) &= \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}, \end{aligned}$$

tzn. zachodzą nierówności

$$M(x_1, x_2) \leq F(x_1, x_2) \leq W(x_1, x_2).$$

Zmienne losowe o dystrybuantach $M(x_1, x_2)$ oraz $W(x_1, x_2)$ należą do klasy Frecheta $\mathcal{R}(F_1, F_2)$, a dystrybuanty te nazywamy odpowiednio dolnym i górnym ograniczeniem Frecheta.

Łączną funkcję przetrwania

$$\bar{F}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$$

również możemy oszacować z dołu i z góry, stosując ograniczenia Frecheta oparte na brzegowych funkcjach przetrwania. Zachodzi bowiem zależność

$$\bar{F}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) + \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1,$$

z której po prostych przekształceniach wynika, że

$$\max\{\bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1, 0\} \leq \bar{F}(x_1, x_2) < \min\{\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)\}.$$

Korzystając z powyższych rozważań, możemy oszacować łączne prawdopodobieństwa przetrwania:

$$\max\{{}_t p_x^M + {}_t p_y^K - 1, 0\} \leq {}_t p_{xy} \leq \min\{{}_t p_x^M, {}_t p_y^K\},$$

$$1 - \min \{ {}_tq_x^M, {}_tq_y^K \} \leq {}_tP_{xy} \leq 1 - \max \{ {}_tq_x^M + {}_tq_y^K - 1, 0 \}.$$

Mówimy, że zmienne losowe X_1, X_2 są dodatnio zależne ćwiartkowo (*positive quadrant dependent* – PQD), jeśli [6]

$$\bar{F}(x_1, x_2) \geq \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2)$$

dla każdych x_1, x_2 . Powyższy warunek można, korzystając z podstawowych własności prawdopodobieństwa, w sposób równoważny zapisać w języku dystrybuant:

$$F(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)F_2(x_2).$$

Wartości łącznej funkcji przeżycia (dystrybuanty) są wtedy niemniejsze od wartości łącznej funkcji przeżycia (dystrybuanty) dla zmiennych losowych niezależnych. Duże (małe) wartości jednej zmiennej brzegowej pociągają za sobą również duże (małe) wartości drugiej zmiennej.

Łatwo zauważyć, że gdy zmienne losowe T_x^M, T_y^K opisujące dalsze trwanie życia małżonków są PQD, to zachodzi relacja

$${}_tP_{xy} \geq {}_tP_x^M {}_tP_y^K.$$

3. Renty

W artykule będziemy rozpatrywać trzy rodzaje rent, badając wpływ wzajemnej zależności długości życia na ich wartość aktuarialną. Zacznijemy od renty wdowiej. Gwarantuje ona y -letniej wdowie po śmierci x -letniego męża wypłatę stałej renty aż do jej śmierci. Jeśli świadczenie to wynosić będzie jedną jednostkę pieniężną, to wartość aktuarialna renty wdowiej jest równa:

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy},$$

gdzie

$$a_y = \sum_{k=1}^{w_y^K} v^k {}_kP_y^K, \quad a_{xy} = \sum_{k=1}^{w_x^M \wedge w_y^K} v^k {}_kP_{xy},$$

$v = (1 + \check{c})^{-1}$, a \check{c} jest techniczną stopą zwrotu.

Drugim przykładem jest renta wypłacana małżeństwu, gdy oboje żyją przez n lat. Jej wartość aktuarialna wynosi

$$a_{xy;\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n v^k {}_kP_{xy}.$$

Natomiast wartość aktuarialna renty płaconej przez n lat, gdy przynajmniej jeden współmałżonek żyje, jest równa:

$$a_{\overline{xy};\overline{n}} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{\overline{xy}}.$$

Wartości aktuarialne tych rent możemy oszacować z dołu oraz z góry, korzystając z ograniczeń Frecheta. Dla renty wdowiej oszacowania te przyjmują postać [2]:

$$a_{x|y}^{\min} \leq a_{x|y} \leq a_{x|y}^{\max},$$

gdzie

$$a_{x|y}^{\min} = \sum_{k=1}^{w_y^K} v^k {}_k p_y^K - \sum_{k=1}^{w_x^M \wedge w_y^K} v^k \min \{ {}_k p_x^M, {}_k p_y^K \},$$

$$a_{x|y}^{\max} = \sum_{k=1}^{w_y^K} v^k {}_k p_y^K - \sum_{k=1}^{w_x^M \wedge w_y^K} v^k \max \{ {}_k p_x^M + {}_k p_y^K - 1, 0 \}.$$

W podobny sposób można wyznaczyć oszacowania dla dwóch pozostałych rent [2]:

$$a_{xy;\overline{n}}^{\min} \leq a_{xy;\overline{n}} \leq a_{xy;\overline{n}}^{\max},$$

$$a_{\overline{xy};\overline{n}}^{\min} \leq a_{\overline{xy};\overline{n}} \leq a_{\overline{xy};\overline{n}}^{\max},$$

gdzie

$$a_{xy;\overline{n}}^{\min} = \sum_{k=1}^n v^k \max \{ {}_k p_x^M + {}_k p_y^K, 0 \},$$

$$a_{xy;\overline{n}}^{\max} = \sum_{k=1}^n v^k \min \{ {}_k p_x^M, {}_k p_y^K \},$$

$$a_{\overline{xy};\overline{n}}^{\min} = \sum_{k=1}^n v^k (1 - \min \{ {}_k q_x^M, {}_k q_y^K \}),$$

$$a_{\overline{xy};\overline{n}}^{\max} = \sum_{k=1}^n v^k (1 - \max \{ {}_k q_x^M + {}_k q_y^K, 0 \}).$$

Załóżmy teraz, że zmienne losowe T_x^M, T_y^K przedstawiające dalsze trwanie życia poszczególnych małżonków są PQD. W tej sytuacji wartości aktuarialne tych rent możemy porównać z wartościami rent w przypadku, gdy zmienne te są niezależne. Zachodzą wtedy następujące relacje [2]:

$$a_{x|y} \leq a_{x|y}^{\perp}, \quad a_{xy;\overline{n}} \leq a_{x|y;\overline{n}}^{\perp},$$

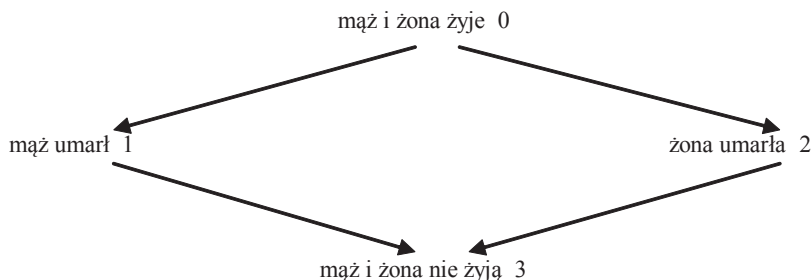
$$a_{\overline{xy};\overline{n}} \geq a_{\overline{xy};\overline{n}}^{\perp},$$

gdzie $a_{x|y}^{\perp}$, $a_{\overline{xy}:\overline{n}}^{\perp}$, $a_{xy:\overline{n}}^{\perp}$ są wartościami odpowiednich rent dla niezależnych zmiennych losowych. Widzimy, że przyjmując klasyczną metodę wyznaczania wartości atuarialnej rent zakładającą niezależność zmiennych T_x^M, T_y^K , możemy przeszacować lub niedoszacować tę wartość. Drugi przypadek zachodzi dla renty wypłacanej, gdy żyje zarówno mąż, jak i żona, czyli dla $a_{xy:\overline{n}}^{\perp}$.

4. Model Markowa

4.1. Ogólne założenia

Chcąc wyznaczyć wartości actuarialne powyższych rent, możemy posłużyć się procesem Markowa. W tym przypadku mamy cztery stany: stan 0 – mąż i żona żyją, stan 1 – mąż zmarł, żona żyje, stan 2 – mąż żyje, żona zmarła oraz stan 3 – mąż i żona nie żyją. Model ten wraz z możliwymi przejściami między stanami przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Przestrzeń stanów modelu Markowa

Źródło: [2].

Oznaczmy symbolem $p_{ij}(t, s)$, gdzie $i, j = 0, 1, 2, 3$, prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i , gdy proces jest w tym stanie w momencie t , do stanu j w momencie s . Intensywność przejścia $\mu_{ij}(t)$ ze stanu i do stanu j w momencie t wyraża się wzorem

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t) - p_{ij}(t, t)}{\Delta t}.$$

Prawdopodobieństwa pozostania w danym stanie możemy przestawić za pomocą intensywności w następujący sposób [2]:

$$p_{00}(t, s) = \exp\left(-\int_t^s (\mu_{01}(u) + \mu_{02}(u)) du\right),$$

$$p_{ii}(t, s) = \exp\left(-\int_t^s \mu_{i3}(u) du\right),$$

gdzie $i = 1, 2$. Natomiast korzystając z różniczkowych równań Kołmogorowa, prawdopodobieństwa przejścia ze stanu 0 określa się wzorami

$$p_{0i}(t, s) = \int_t^s p_{00}(t, u) \mu_{01}(u) p_{ii}(u, s) du,$$

gdzie $i = 1, 2$.

Jeśli znane są prawdopodobieństwa pozostania w stanie 0, możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo łączne zmiennych losowych T_x^M oraz T_y^K stosując wzór (2).

$$P(T_x^M > t, T_y^K > s) = \begin{cases} p_{00}(0, s) + p_{00}(0, t) p_{01}(t, s) & 0 \leq t \leq s \\ p_{00}(0, t) + p_{00}(0, s) p_{02}(s, t) & 0 \leq s \leq t \end{cases} \quad (2)$$

oraz prawdopodobieństwa brzegowe:

$$P(T_x^M > t) = p_{00}(0, t) + p_{02}(0, t),$$

$$P(T_y^K > t) = p_{00}(0, t) + p_{01}(0, t).$$

Norberg w pracy [9] pokazał, że zmienne T_x^M oraz T_y^K są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy intensywności dotyczące śmierci poszczególnych współmałżonków są równe, tzn. zachodzą zależności (2).

$$\mu_{01}(t) = \mu_{23}(t), \quad \mu_{02}(t) = \mu_{13}(t).$$

Ponadto, gdy zmienne te są PQD, otrzymujemy:

$$\mu_{01}(t) < \mu_{23}(t), \quad \mu_{02}(t) < \mu_{13}(t).$$

Wtedy intensywność związana ze śmiercią męża (żony) jest większa, gdy żona (mąż) już nie żyje.

Autorzy pracy [2] przyjęli upraszczające założenie, że dla ustalonego wieku współmałżonków x, y intensywności przejścia są proporcjonalne do intensywności zgonów w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mu_{01}(t) &= (1 - \alpha_{01}) \mu_{x+t}^M & \mu_{23}(t) &= (1 + \alpha_{23}) \mu_{x+t}^M, \\ \mu_{02}(t) &= (1 - \alpha_{02}) \mu_{y+t}^K & \mu_{13}(t) &= (1 + \alpha_{13}) \mu_{y+t}^K. \end{aligned} \quad (3)$$

W prezentowanym artykule również zastosujemy to założenie. Wtedy znając prawdopodobieństwa brzegowe ${}_t p_x^M$, ${}_t p_y^K$, stałe α_{0i} i korzystając ze wzorów (1) i (3), możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo łączne:

$$\begin{aligned} {}_t p_{xy} &= p_{00}(0, t) = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{01}(u) + \mu_{02}(u)) du\right) \\ &= ({}_t p_x^M)^{1-\alpha_{01}} ({}_t p_y^K)^{1-\alpha_{02}} \end{aligned}$$

4.2. Estymacja parametrów

Na podstawie powyższych rozważań widzimy, że chcąc zastosować w praktyce powyższy model Markowa do wyznaczenia wartości aktuarialnej składki, wystarczy oszacować stałe α_{01} oraz α_{02} . Natomiast prawdopodobieństwa brzegowe ${}_t p_x^M$, i ${}_t p_y^K$ możemy wyznaczyć na podstawie tablic trwania życia.

Estymację parametrów α_{01} , α_{02} możemy przeprowadzić, korzystając z estymatora Nelsona-Aalena opartego na funkcji kumulacyjnej [5; 2]

$$\Omega_{ij}(t) = \int_0^t \mu_{ij}(s) ds.$$

Estymator ten minimalizuje sumę kwadratów różnic między przyrostem funkcji kumulacyjnej $\Delta\Omega_{ij}$ a jej estymatorem $\Delta\hat{\Omega}_{ij}$, czyli wyrażenie

$$\sum_{k=t_1}^{t_2} \left(\Delta\hat{\Omega}_{ij}(k) - \int_0^1 \mu_{ij}(k+t) dt \right)^2.$$

Korzystając z (3), otrzymujemy

$$\int_0^1 \mu_{01}(k+t) dt = \int_0^1 (1 - \alpha_{01}) \mu_{x+k+t}^M dt = (1 - \alpha_{01}) \ln_1 p_{x+k}^M.$$

Pozostałe całki dla μ_{ij} obliczamy w analogiczny sposób. Rozwiązania powyższego zadania optymalizacyjnego przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{01} &= 1 + \frac{\sum_{k=t_1}^{t_2} \Delta\hat{\Omega}_{01}(k) \ln_1 p_{x+k}^M}{\sum_{k=t_1}^{t_2} (\ln_1 p_{x+k}^M)^2}, & \hat{\alpha}_{02} &= 1 + \frac{\sum_{k=t_1}^{t_2} \Delta\hat{\Omega}_{02}(k) \ln_1 p_{x+k}^K}{\sum_{k=t_1}^{t_2} (\ln_1 p_{x+k}^K)^2}, \\ \hat{\alpha}_{23} &= \frac{\sum_{k=t_1}^{t_2} \Delta\hat{\Omega}_{23}(k) \ln_1 p_{x+k}^M}{\sum_{k=t_1}^{t_2} (\ln_1 p_{x+k}^M)^2} - 1, & \hat{\alpha}_{13} &= \frac{\sum_{k=t_1}^{t_2} \Delta\hat{\Omega}_{13}(k) \ln_1 p_{x+k}^K}{\sum_{k=t_1}^{t_2} (\ln_1 p_{x+k}^K)^2} - 1. \end{aligned}$$

Natomiast estymatory $\Delta\hat{\Omega}_{ij}$ obliczamy, stosując formułę [2]:

$$\Delta\hat{\Omega}_{ij}(k) = \frac{L_{ij}(k+1) - L_{ij}(k)}{L_i(k+1) - L_i(k)} (\ln L_i(k+1) - \ln L_i(k)),$$

$L_{ij}(k)$ jest liczbą przejść ze stanu i do stanu j o okresie $[0, k]$, a $L_i(k)$ liczbą małżeństw w stanie i w wieku k . Dokładniejszą interpretację $L_{ij}(k)$ oraz $L_i(k)$ podano w następnym punkcie.

4.3. Wyniki

Badanie zostało przeprowadzone dla małżeństw zamieszkałych w Polsce. Za rok bazowy przyjęto rok 2002, ponieważ w roku tym został przeprowadzony Spis Powszechny i można było skorzystać z większej liczby danych. Do estymacji parametrów α_{01} oraz α_{02} potrzebnych do wyznaczenia prawdopodobieństwa łącznego ${}_tP_{xy}$ wykorzystano następujące dane dotyczące małżonków [10]:

- $L_{01}(k+1) - L_{01}(k)$: liczba k -letnich mężów zmarłych w 2002 r.,
- $L_0(k)$: ogólna liczba k -letnich mężów w 2002 r.,
- $L_0(k+1)$: ogólna liczba $(k+1)$ -letnich mężów w roku 2003

dla α_{01} , a dla α_{02} zamiast mężów należy wziąć liczbę żon. W roku 2002, czyli roku Spisu Powszechnego, dostępna jest ogólna liczba zarówno mężów, jak i żon. Jednak w następnych latach nie jest ona dana. Aby ją otrzymać, należy ją oszacować, wykorzystując liczbę k -letnich mężczyzn (kobiet), którzy się ożenili w 2002 r. (kobiet, które wyszły za mąż), liczbę mężów (żon) zmarłych w tym roku, liczbę mężów (żon), którzy się rozwiedli, oraz którym zmarła żona (mąż). Kolejną przeszkodę stanowiły pogrupowane dane według wieku w klasy o szerokości 5 lat. Aby otrzymać dane dotyczące liczby osób w wieku dokładnie k lat, klasy 5-letnie zostały równomiernie rozłożone na roczne okresy.

Do wyznaczenia parametrów α_{ij} wykorzystano, podobnie jak w pracy [2], dane dotyczące osób w wieku od 30 do 80 lat, tzn. $t_1 = 30$, $t_2 = 80$. W wyniku przeprowadzonej estymacji parametrów α_{ij} otrzymano następujące wartości:

$$\alpha_{01} = 0,0706 \quad \alpha_{02} = 0,1155 \quad \alpha_{13} = -0,0212 \quad \alpha_{23} = 0,2817.$$

Wyniki te wskazują, że zmienne ${}_tP_x^M$ i ${}_tP_y^K$ są PQD, ponieważ zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} \mu_{01}(t) &= 0,9294 \mu_{x+t}^M < 1,2817 \mu_{x+t}^M = \mu_{23}(t), \\ \mu_{02}(t) &= 0,8845 \mu_{y+t}^K < 0,9788 \mu_{y+t}^K = \mu_{13}(t). \end{aligned}$$

Dla porównania: w badaniu przeprowadzonym w Belgii w roku bazowym 1991 [2] otrzymano następujące wartości parametrów α_{ij} :

$$\alpha_{01} = 0,0929 \quad \alpha_{02} = 0,1217 \quad \alpha_{13} = 0,0413 \quad \alpha_{23} = 0,2410.$$

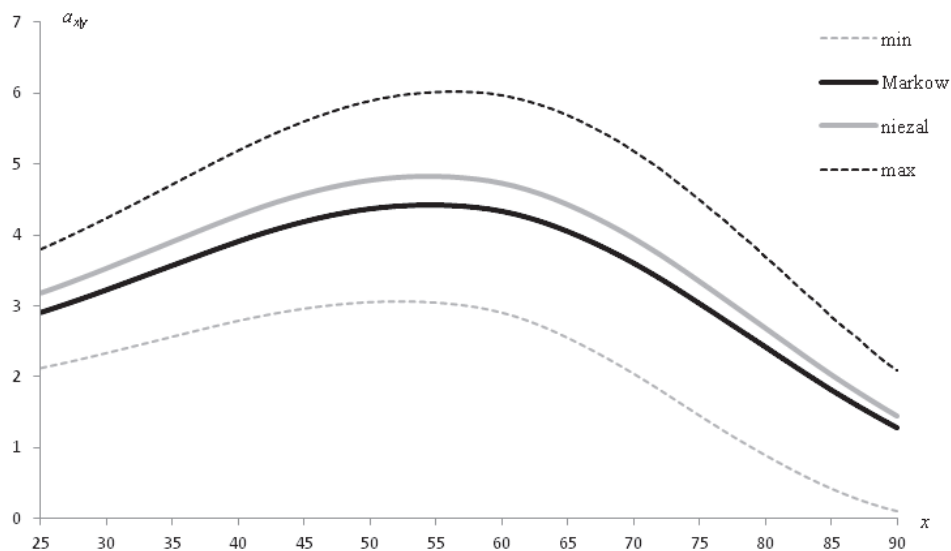
Wyniki te nieznacznie różnią się od otrzymanych przez autora niniejszego tekstu.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia wartości aktuarialnych wybranych rent. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że techniczna stopa zwrotu wynosi $\zeta = 0,03$. Zaczniemy od renty wdowiej $a_{x|y}$, przyjmując, że małżonkowie są w tym samym wieku $x = y$. Wartości tej renty dla ograniczeń Frecheta, wersji niezależnej oraz modelu Markowa, podane są na rys. 2. Natomiast tab. 1 zawiera względne wartości renty w stosunku do przypadku niezależności. Wersja niezależna przyjmuje wtedy wartość 1 dla każdej wartości x .

Tabela 1. Względne wartości renty wdowiej w stosunku do wersji niezależnej

x	30	40	50	60	70	80	90
Min	0,662	0,653	0,640	0,614	0,517	0,332	0,069
Markow	0,914	0,914	0,915	0,916	0,911	0,901	0,886
Max	1,203	1,217	1,237	1,265	1,314	1,378	1,451

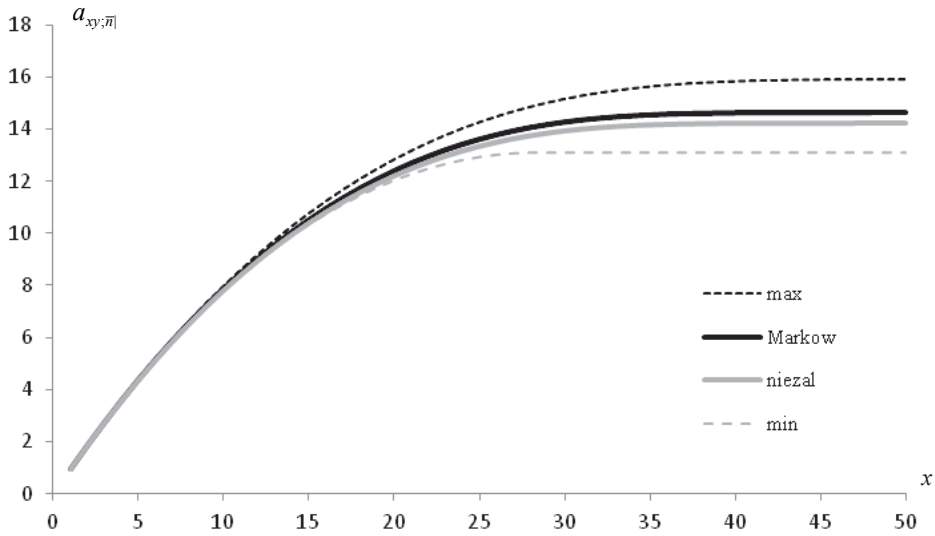
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wartości renty wdowiej dla różnych modeli

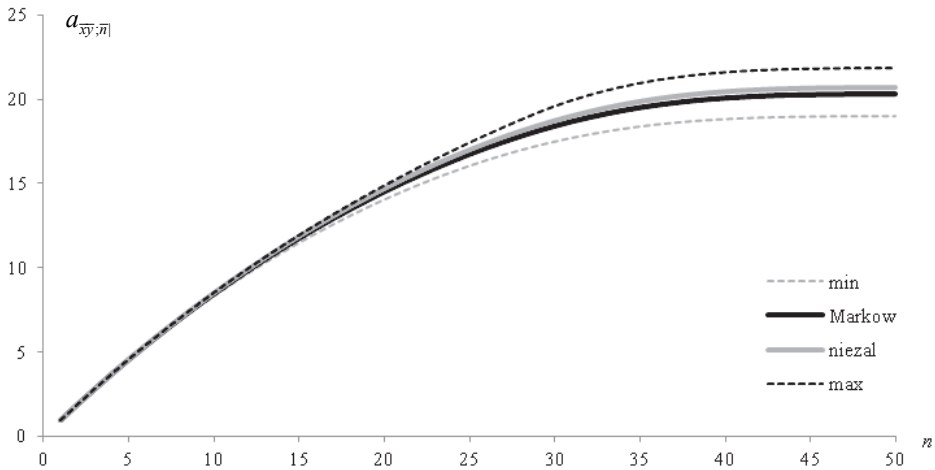
Źródło: opracowanie własne.

Widzimy, że wyznaczając aktuarialną wartość renty metodą klasyczną zakładającą niezależność w przypadku, gdy prawdziwy jest model Markowa, przeszacowujemy wartość renty przeciętnie o 9%. Wraz ze wzrostem wieku małżonków przeszacowanie wzrasta. Podobna zależność zachodzi dla prawdziwych wariantów opartych na ograniczeniach Frecheta. Jednak w tym przypadku przeszacowania lub niedoszacowania są o wiele większe, zwłaszcza dla dolnej granicy i dużej wartości wieku x .



Rys. 3. Wartości renty $a_{xy;\overline{n}}$ dla różnych modeli

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Wartości renty $a_{\overline{xy};\overline{n}}$ dla różnych modeli

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunkach 3 i 4 podane są wartości odpowiednio rent $a_{xy;\overline{n}}$ oraz $a_{\overline{xy};\overline{n}}$ i równego wieku małżonków $x = y = 50$. W pierwszym przypadku wariant klasyczny niedoszacowuje rentę względem modelu Markowa, a w drugim ją przeszacowuje. Istotne różnice możemy zauważyć dla renty $a_{xy;\overline{n}}$ dopiero po 20 latach, a dla renty $a_{\overline{xy};\overline{n}}$ po 25

latach. Następnie po 30 latach w pierwszym przypadku i po 35 latach w drugim sytuacja się stabilizuje. Niedoścadowanie wynosi wtedy 2,7%, a przeszacowanie 2%. Również dla skrajnych wariantów różnice te są znacznie mniejsze i wynoszą odpowiednio 12,1 i 5,5% dla maksymalnej granicy oraz 8 i 8,3% dla minimalnej.

5. Funkcje łączące

5.1. Podstawowe wiadomości

Innym sposobem modelowania zależności są funkcje łączące (*copula*). Funkcja łącząca C jest łącznikiem między dystrybuantami brzegowymi a dystrybuantą łączną [7]. W naszym przypadku będziemy się starać wyznaczyć funkcję łączącą opisującą zależność między długościami życia małżonków. Spełniać ona będzie zależność:

$$P(T_0^M \leq t, T_0^K \leq s) = C(P(T_0^M \leq t), P(T_0^K \leq s)).$$

Jednak aby obliczyć wartości aktuarialne rent, potrzebna będzie znajomość prawdopodobieństw łącznych ${}_tP_{xy}$, czyli łącznej funkcji przetrwania, a nie dystrybuanty. Sprowadza się to do wyznaczenia łączącej funkcji przetrwania C^* opisanej zależnością:

$$P(T_0^M > t, T_0^K > s) = C^*(P(T_0^M > t), P(T_0^K > s)).$$

Między tymi funkcjami zachodzi relacja:

$$C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Łącząca funkcja przeżycia spełnia wszystkie własności charakteryzujące funkcję łączącą. Ponadto otrzymujemy:

$${}_tP_{xy} = P(T_x^M > t, T_y^K > t) = \frac{C^*({}_xP_0^M, {}_yP_0^K)}{C^*({}_xP_0^M, {}_yP_0^K)}.$$

W prezentowanej pracy do opisu struktury zależności długości życia małżonków stosowane będą jedynie archimedesowe funkcje łączące. Są to proste funkcje łączące opisane wzorem [7]:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

gdzie $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest malejącą, ciągłą funkcją, nazywaną generatorem, spełniającą warunek $\varphi(1) = 0$. Archimedesowe funkcje łączące tworzą zwykle rodziny funkcji charakteryzowane parametrem opisującym stopień zależności. Znając generator φ , możemy wyznaczyć współczynnik korelacji Kendalla τ , stosując wzór

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

5.2. Wybór funkcji łączącej

Procedura wyboru archimedesowej funkcji łączącej „najlepiej dopasowanej” do danych empirycznych jest następująca [3; 4]:

- i) ustalamy rodziny archimedesowych funkcji łączących;
- ii) na podstawie danych empirycznych wyznaczamy współczynnik korelacji Kendalla τ ;
- iii) z każdej rodziny wybieramy funkcję łączącą odpowiadającą współczynnikowi τ ;

iv) stosując odpowiednie kryterium, wybieramy optymalną funkcję łączącą.

Autorzy w pracy [3] zaproponowali kryterium oparte na funkcji Kendalla. Funkcja ta określona jest wzorem:

$$K(t) = P\left(F(T_0^M, T_0^K) \leq t\right).$$

W przypadku archimedesowych funkcji łączących przyjmuje on prostą postać:

$$K(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}.$$

Kryterium wyboru funkcji łączącej polega na minimalizacji odległości empirycznej funkcji Kendalla $K_n(t)$ wynikającej z n -elementowej próby oraz teoretycznej funkcji Kendalla $K_c(t)$ opartej na funkcji łączącej C . Odległość ta może być określona przykładowo formułą:

$$S_n = \int_0^1 \left| \sqrt{n} (K_n(t) - K_c(t)) \right|^2 dK_c(t).$$

Wybór odpowiedniej funkcji łączącej może też być dokonany na podstawie wykresu opartego na funkcji $\lambda(t) = t - K(t)$. Wybieramy wtedy wykres funkcji $\lambda(t)$ najlepiej dopasowanej do jej empirycznej wersji.

5.3. Wyniki

W tym przypadku, w odróżnieniu od estymacji modelu Markowa, potrzebne są dane szczegółowe dotyczące długości życia obydwu małżonków. Nie da się ich osiągnąć na podstawie danych pochodzących z urzędów statystycznych. W pracy [2] dane zostały zabrane z czterech cmentarzy brukselskich. W prezentowanej pracy postępowano w podobny sposób. Próba liczyła $n = 447$ elementów i została zebrana losowo z dwóch cmentarzy wrocławskich: dużego Grabiszyńskiego (337) oraz mniejszego, zlokalizowanego na Klecinie (100). Zawierała pary przedstawiające liczbę lat przeżytych przez obydwu małżonków. Oczywiście autor zdaje sobie sprawę, że próba nie jest reprezentatywna. Służy przede wszystkim do ilustracji przedstawionej metody.

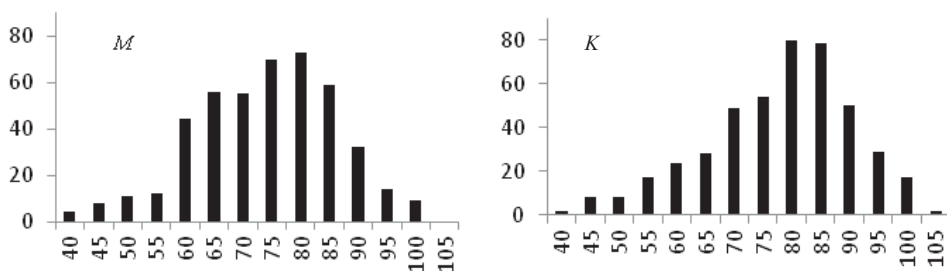
Średni wiek mężczyzn (M) i kobiet (K) oraz pozostałe parametry brzegowych rozkładów: odchylenia standardowe, kwantyle i medianę uzyskane z uzyskanych 447 par małżonków przedstawione zostały w tab. 2. Histogramy tych rozkładów

zawarte są na rys. 5. Widzimy, że żony przeciętnie żyły trochę dłużej od swoich mężów. Rysunek 6 zawiera wykres korelacyjny.

Tabela 2. Podstawowe parametry rozkładów brzegowych

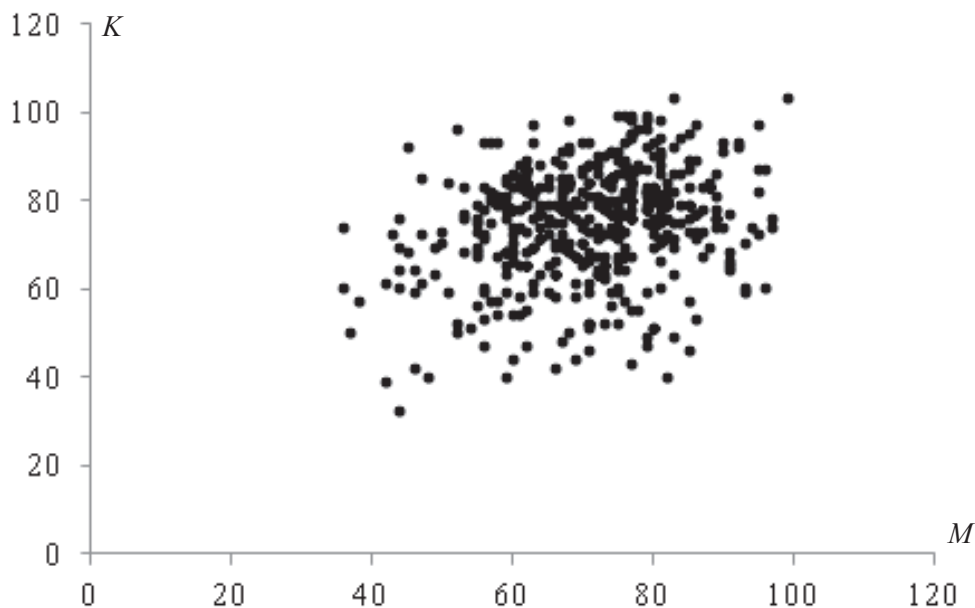
	Średnia	Odch. st.	Q_1	Mediana	Q_3
M	70,870	12,017	62	72	80
K	74,969	12,780	67	77	84

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Histogramy rozkładów brzegowych

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Wykres korelacyjny

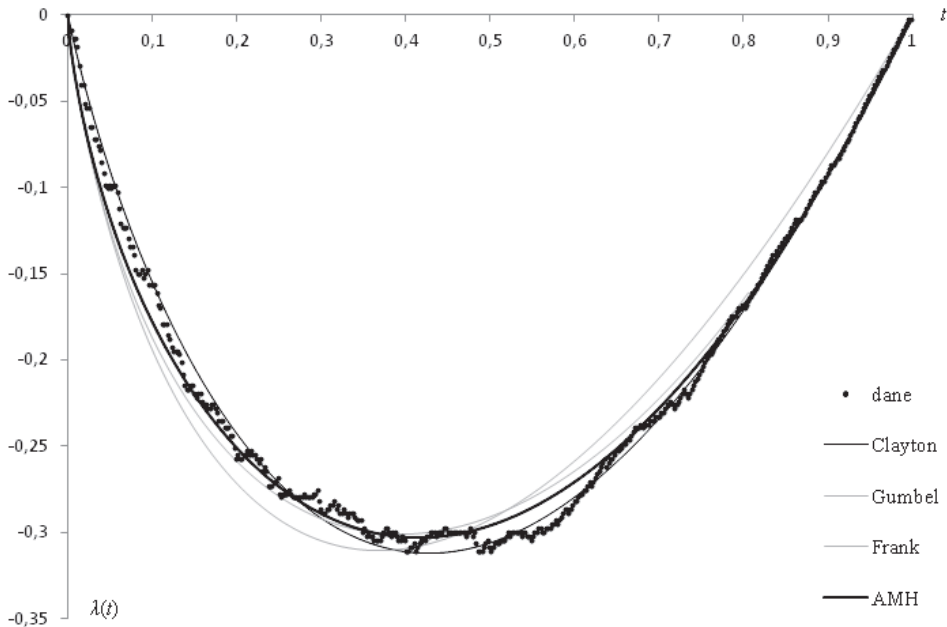
Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie próby wyznaczono współczynnik korelacji Kendalla $\tau = 0,156$. Jest on trochę większy niż uzyskany na podstawie danych z Brukseli, gdzie $\tau = 0,092$ [2]. Natomiast współczynnik korelacji Pearsona wyniósł $r = 0,275$.

Tabela 3. Charakterystyki wybranych rodzin archimedesowych funkcji łączących

	$\varphi(t)$	τ	α	S_n
Clayton	$t^\alpha - 1$	$\frac{\alpha}{\alpha + 2}$	0,371	0,1694
Gumbel	$(-\ln t)^\alpha$	$1 - \frac{1}{\alpha}$	1,185	0,1875
Frank	$-\ln \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^\alpha - 1}$	$1 - \frac{4}{\alpha}(D_1(-\alpha) - 1)$	-1,436	0,1382
AMH	$\ln \frac{1-\alpha(1-t)}{t}$	$1 - \frac{2(\alpha + (\alpha-1)^2 \ln(1-\alpha))}{3\alpha^2}$	0,588	0,0667

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 7. Wykresy funkcji $\lambda(t)$

Źródło: opracowanie własne.

Pośród czterech rodzin archimedesowych funkcji łączących: Claytona, Gumbela, Franka i AMH, wybrano rodzinę AMH opisaną funkcją łączącą $C_\alpha(u, v) = \frac{uv}{1 - \alpha(1-u)(1-v)}$ oraz jej reprezentanta z parametrem $\alpha = 0,5879$.

Wartość odległości S_n była w tym przypadku najmniejsza, wynosiła $S_n = 0,0667$. W tabeli 3 podana jest dla każdej rodziny postać generatora $\varphi(t)$, wzór umożliwiający wyznaczenie teoretycznego współczynnika Kendalla, wartość parametru reprezentanta rodziny odpowiadającemu współczynnikowi τ oraz wartość odległości S_n .

$D_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{e^t - 1} dt$ jest funkcją Debye'a wykorzystywaną do wyznaczania współczynnika Kendalla dla rodziny Franka.

Na rysunku 7 podane są wykresy funkcji $\lambda(t)$ dla wybranych rodzin archimedesowych funkcji łączących. Widzimy, że wykres odpowiadający rodzinie AMH w miarę dobrze dopasowany jest do danych empirycznych.

Wyznamy teraz względne wartości aktuarialne renty wdowiej oraz renty $a_{xy:\overline{n}|}$ dla $x = y = 50$ w stosunku do wariantu opartego na niezależności. Wyniki podane są w tab. 4 i 5.

Tabela 4. Względne wartości renty wdowiej

x	40	50	60	70	80	90
Min	0,653	0,640	0,614	0,517	0,332	0,069
AMH	0,915	0,904	0,893	0,884	0,902	0,963
Max	1,217	1,237	1,265	1,314	1,378	1,451

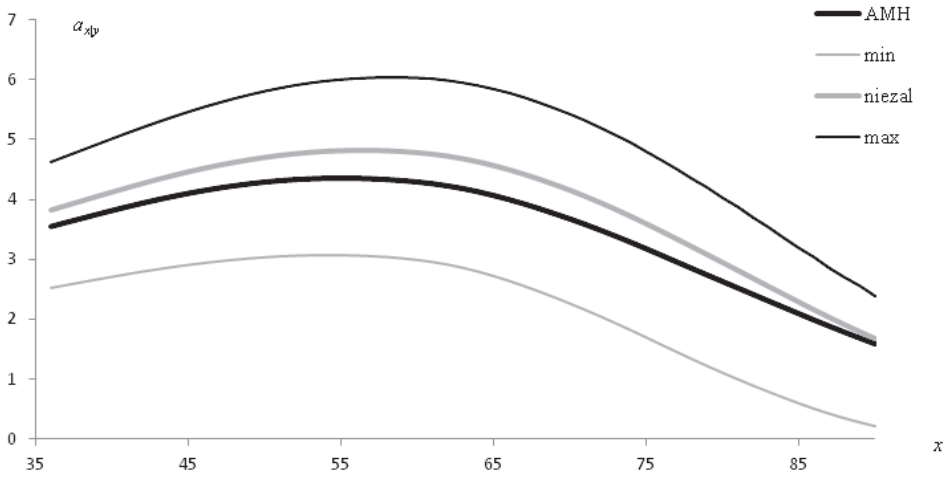
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Względne wartości renty $a_{xy:\overline{n}|}$

n	10	20	30	40	50
Min	0,998	0,985	0,940	0,921	0,920
AMH	1,005	1,014	1,025	1,031	1,031
Max	1,024	1,054	1,090	1,116	1,121

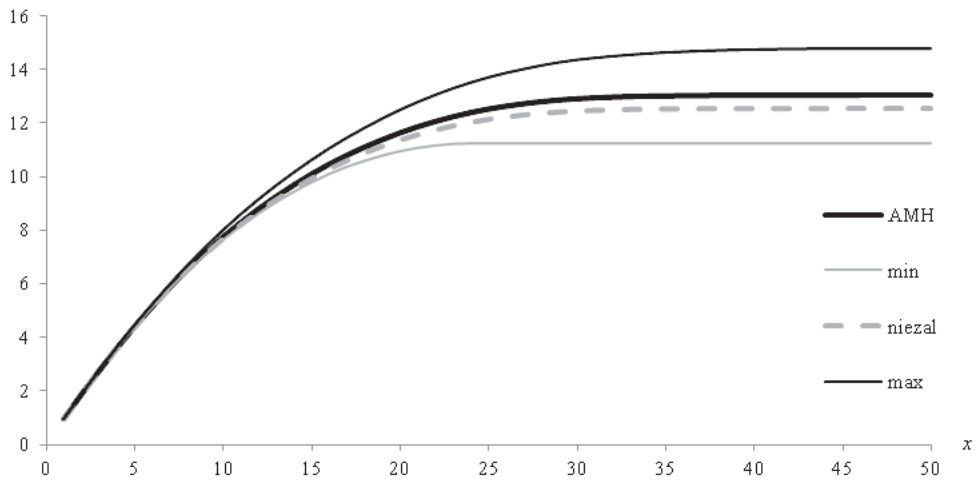
Źródło: opracowanie własne.

W tym przypadku sytuacja jest trochę inna niż dla modelu Markowa. Tutaj również, przyjmując wariant niezależny, przeszacowujemy rentę wdowią. Maksymalne przeszacowanie rzędu 12% występuje dla męża zmarłego w wieku $x = 70$ lat, ale wraz ze wzrostem x większym niż 70 lat następuje wyraźny spadek przeszacowania. Natomiast dla renty $a_{xy:\overline{n}|}$ mamy nieznaczne niedoszacowanie dochodzące do 3% i stabilizujące się powyżej $n = 30$. Wartości aktuarialne tych rent podane są również na rys. 8 i 9.



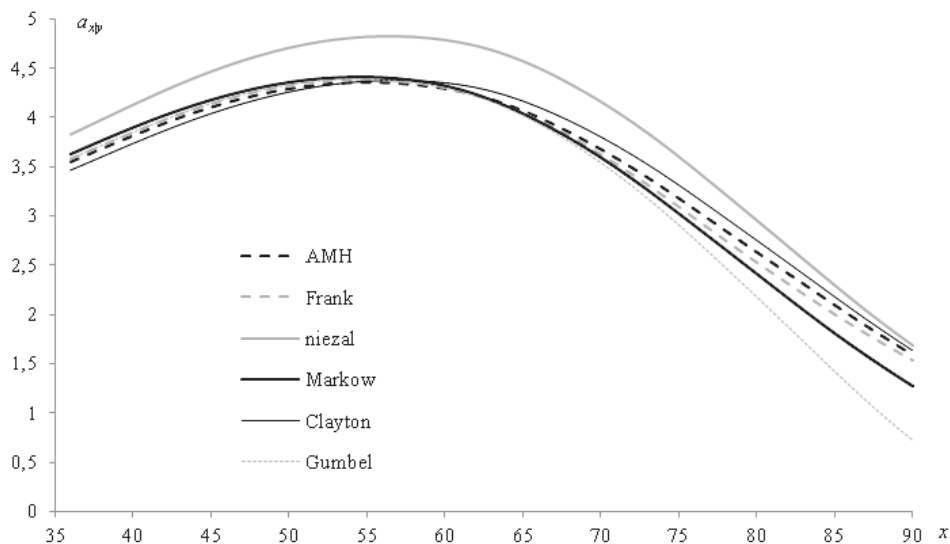
Rys. 8. Wartości renty wdowiej

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 9. Wartości renty $a_{xy:\overline{n}|}$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Wartości renty wdowiej dla różnych modeli

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 10 przedstawia zbiorczy wykres wartości aktuarialnych renty wdowiej wyznaczonych dla różnych modeli opartych na rodzinach archimedesowych funkcji łączących, jak i dla modelu Markowa. Można na nim zauważyć, że istotne różnice wartości renty zachodzą dopiero, gdy wiek x przekracza 60 lat. Wcześniej różnice są niewielkie. Ponadto model oparty na funkcjach łączących Gumbela wyraźnie odstaje od pozostałych. Wybierając więc pozostałe rodziny funkcji łączących, niewiele się pomylimy, chyba że prawdziwy będzie model związany z rodziną Gumbela.

Literatura

- [1] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois 1986.
- [2] Denuit M., Dhaene J., Le Bailly de Tillegem C., Teghem S., *Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths*, "Belgian Actuarial Bulletin" 2001, 1 (1), s. 18-39.
- [3] Genest C., Rivest L.-P., *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*, JASA, 1993, 88, s. 1034-1043.
- [4] Heilpern S., *Funkcje łączące*, AE, Wrocław 2007.
- [5] Jones B.L., *Methods for the analysis of CCRC data*, "North American Actuarial Journal" 1997, 1, s. 40-54.
- [6] Lehmann E.L., *Some concepts of dependence*, "Annals of Mathematical Statistics" 1966, 37, s. 1137-1153.

- [7] Nelsen R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.
- [8] Nikodem-Słowikowska A., *Zastosowanie procesu Markowa w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie*, Prace Naukowe UE w Katowicach (w recenzji).
- [9] Norberg R., *Actuarial analysis of dependent lives*, "Bulletin de l'Association Suisse des Actuar-ies" 1989, 40, s. 243-254.
- [10] Witryna internetowa Głównego Urzędu Statystycznego: www.stat.gov.pl.

CALCULATION OF PENSIONS IN THE MULTIPLE LIFE INSURANCES

Summary: The paper is devoted to the dependent multiple life insurance of married couples. A more realistic assumption of dependent lifetime of spouses is investigated as distinct from classical, which assumes the independence. Two models: Markov and based on the Archimedean copulas are studied. The actuarial values of three cases of pensions are calculated in these models. The differences between the values of pensions in the classical model and models based on the dependences are studied using the empirical data from Poland.

Keywords: group insurances, Markov model, copula, annuity.