

Zagadnienia statystyki aktuarialnej

pod redakcją
Joanny Dębickiej



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Krzysztof Dębicki, Grzegorz Kończak,
Zbigniew Palmowski, Włodzimierz Szkutnik

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korlub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Adam Dębski

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne
w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawnictwa

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-240-6

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	7
Joanna Dębicka: Indeksacja przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach wielostanowych	9
Stanisław Heilpern: Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie.....	30
Aleksandra Iwanicka: Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w agregacji dwóch klas ubezpieczeń.....	49
Anna Nikodem-Słowikowska: The effect of dependence on life insurance .	60
Katarzyna Ostasiewicz: Modele progowe i ich zastosowanie w socjologii i ekonomii	77
Stanisława Ostasiewicz, Katarzyna Ostasiewicz: Modelowanie trwania życia w populacjach niejednorodnych.....	99
Katarzyna Sawicz: Uwagi o finansowaniu systemu ochrony zdrowia w Polsce	123
Janusz L. Wywił, Agnieszka Żrubek: O dokładności analitycznego wyznaczania mocy pewnego testu na normalność rozkładu prawdopodobieństwa.....	131

Summaries

Joanna Dębicka, Indexing cash flows in multistate insurance contracts	29
Stanisław Heilpern, Calculation of pensions in the multiple life insurances	48
Aleksandra Iwanicka, Influence of some outside risk factors on a ruin probability in the aggregated two-classes risk model	59
Anna Nikodem-Słowikowska, Wpływ zależności na ubezpieczenia na życie.....	76
Katarzyna Ostasiewicz, Threshold models and their application to sociology and economics	98
Stanisława Ostasiewicz, Katarzyna Ostasiewicz, Approximation of survival function for heterogeneity population	122
Katarzyna Sawicz, Some comments on the financing of health care system in Poland	130
Janusz L. Wywił, Agnieszka Żrubek, On estimation of the power of a normality test.....	147

Stanisława Ostasiewicz

Wyższa Szkoła Oficerska Wojsk Lądowych we Wrocławiu

Katarzyna Ostasiewicz

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

MODELOWANIE TRWANIA ŻYCIA W POPULACJACH NIEJEDNORODNYCH

Streszczenie: W demografii, tak jak naukach aktuarialnych, od dawna trwa dyskusja na temat, czy istnieje uniwersalne prawo opisujące proces wymierania populacji. Od wielu lat czynione są próby znalezienia takiego prawa. Mimo że proponowano wiele funkcji, żadna z nich nie opisuje wystarczająco dokładnie rozkładu empirycznego. Trudność tkwi w tym, że populacja ludzka jest niejednorodna i do opisu umieralności trzeba stosować mieszankę różnych rozkładów. W pracy przedstawiono próbę opisania długości życia populacji mężczyzn polskich w roku 2009 za pomocą mieszanki rozkładów Gompertza, Weibulla, gamma i lognormalnego. Parametry rozkładów oraz wagi mieszanki wyznaczone będą metodą minimum chi-kwadrat.

Słowa kluczowe: trwanie życia, mieszanka rozkładów, niejednorodność.

1. Wstęp

Podstawową wielkością w analizie przeżycia jest czas, jaki upływa do momentu śmierci jednostki. Wielkość ta jest nieujemną zmienną losową, którą zwykle oznacza się symbolem T_x , gdzie x jest wiekiem osoby, i charakteryzuje się ją za pomocą dystrybuanty:

$$F_x(t) = P(T_0 \leq x + t | T_0 > x) \equiv F(t) = P(T_x \leq t). \quad (1)$$

Wartość dystrybuanty $F_x(t)$ w punkcie t_0 oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje nie więcej niż t_0 lat. Inną charakterystyką zmiennej losowej T_x jest funkcji gęstości, która z dystrybuantą związana jest następująco:

$$f_x(t) = F'_x(t), \quad (2)$$

gdzie $F'_x(t)$ oznacza pochodną funkcji $F_x(t)$.

Do charakteryzowania czasu życia wykorzystuje się również funkcję przeżycia i funkcję intensywności.

W prezentowanej pracy czas życia charakteryzowany będzie za pomocą dystrybuanty i funkcji gęstości zmiennej losowej T_x .

2. Teoretyczne modele czasu przeżycia

Od dawna czynione są próby opisanie długości czasu życia za pomocą znanego rozkładu teoretycznego. Prezentowany artykuł należy do tego typu prac. Jego celem jest opisanie trwania życia populacji mężczyzn polskich w roku 2009.

W punkcie tym przedstawione są rozkłady teoretyczne trwania życia wykorzystywane przy realizacji zadania.

Pierwszym parametrycznym modelem życia wykorzystywanym do opisu populacji ludzkich był model zaproponowany w roku 1725 przez de Moivre'a (por. [1]). Czas przeżycia T_x w tym modelu opisywany był za pomocą rozkładu jednostajnego (por. [10]). Obecnie model ten nie jest stosowany, ma on znaczenie wyłącznie historyczne.

Znacznie częściej do modelowania czasu przeżycia wykorzystywany jest model zaproponowany w roku 1825 przez B. Gompertza (por. [2; 4; 8; 10]).

Funkcja gęstości i dystrybuanta rozkładu Gompertza są następujące:

$$f(t) = \exp\left\{-\frac{b}{\gamma} \exp((\gamma t) - 1) \exp(\gamma t)\right\}, \quad (3)$$

gdzie $b > 0, \gamma > 0, b > 0, \gamma > 0$

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\frac{\beta}{\gamma} \exp((\gamma t) - 1)\right\}. \quad (4)$$

Taka postać modelu uzasadniana była przez Gompertza w następujący sposób (por. [1]): śmiertelność (intensywność zgonów) jest wynikiem działania dwóch rodzajów przyczyn; pierwszą przyczynę stanowią choroby, które działają tak samo na ludzi młodych, jak i starszych. Tak więc liczba zgonów z tych przyczyn nie zależy od wieku i jest proporcjonalna do liczebności populacji. Druga przyczyna zgonów to spadek zdolności człowieka do przeciwstawiania się śmierci. Spadek odporności organizmu na śmierć (witalności) jest proporcjonalny do wieku.

Model Gompertza dość dobrze opisuje rzeczywistą intensywność zgonów w grupie wiekowej powyżej 80 lat, jednak w odniesieniu do ludności młodszej zgodność ta jest znacznie gorsza. Powstało więc przypuszczenie, że oprócz dwóch wymienionych przyczyn istnieją jeszcze inne, które nie zostały uwzględnione przy konstrukcji modelu i które powodują, że funkcja Gompertza nie opisuje dobrze intensywności empirycznej.

Model ten w roku 1867 został zmodyfikowany przez Makehama, który uważał że intensywność zgonów w każdym wieku jest częściowo niezależna od wieku. Za-

leży natomiast od pewnych czynników oddziałujących na intensywność w sposób addytywny niezależnie od wieku. Czynniki te są zagregowane i występują w modelu w postaci stałej, która dodawana jest do funkcji Gompertza (por. [1]).

Otrzymany model nazywany jest prawem Gompertza-Makehama i ma postać: dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)\right), & x > 0, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$.

Rozkład Gompertza jest szczególnym przypadkiem rozkładu Gompertza-Makehama.

Jeżeli przyjmiemy $a = 0$, otrzymamy rozkład Gompertza.

Gęstość zmiennej losowej ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ (a + be^{\gamma x}) \exp\left(-ax - \frac{b}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)\right), & x > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Oba modele, zarówno model Gompertza, jak i Gompertza-Makehama, wykorzystywane są do dziś. Oprócz tych omówionych modeli stosowanych do opisu przeżycia populacji ludzkiej wykorzystywane też są inne rozkłady teoretyczne, które nawet nazywane są prawami życia, ale żaden z nich nie opisuje dobrze rzeczywistych procesów umieralności.

W dalszej części pracy wykorzystywane będą jeszcze rozkłady: Weibulla, gamma i rozkład lognormalny. Dystrybuanty i funkcje gęstości tych rozkładów mają następującą postać:

- Dystrybuanta rozkładu Weibulla:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), & x > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

- Funkcja gęstości rozkładu Weibulla:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), & x > 0. \end{cases} \quad (8)$$

- Dystrybuanta rozkładu gamma

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\Gamma(\alpha, x/\beta)}{\Gamma(\alpha)} & x > 0, \end{cases} \quad (9)$$

gdzie: $\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$ oraz $\beta > 0, \alpha > 0$.

- Funkcja gęstości rozkładu gamma określona jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c^{-a} x^{a-1} \exp(-\frac{x}{c})}{\Gamma(a)}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \quad (10)$$

- Dystrybuanta rozkładu lognormalnego

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \Phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right), & x > 0, \end{cases} \quad (11)$$

gdzie $\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$.

- Funkcja gęstości rozkładu lognormalnego ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

3. Model empiryczny trwania życia

Mimo że od dawna czynione są próby skonstruowania funkcji, która mogłaby być traktowana jako prawo opisujące czas życia, to, jak do tej pory, kończyły się one niepowodzeniem. Opracowano więc empiryczny model trwania życia, który nazwany został tablicami wymieralności. Później nazwa ta została zmieniona na nazwę tablice trwania życia (TTŻ) (por. [13]). W Polsce model ten konstruowany jest ostatnio co roku: osobno dla mężczyzn, osobno dla kobiet. Tablice trwania życia mężczyzn w Polsce w roku 2009 zamieszczone zostały w artykule jako Załącznik 1.

Najważniejszymi funkcjami biometrycznymi występującymi w TTŻ są (por. [1; 5]):

- liczba dożywających wieku x ,
- liczba zmarłych w wieku x ,
- prawdopodobieństwo zgonu w wieku x .

Wiek x podawany jest w sposób dyskretny w punktach $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$. ω jest to najstarsza grupa wieku i w polskich TTŻ jest ona równa 100 lat. l_0 to liczba dożywających wieku 0 lat, czyli początkowa liczebność populacji, w polskich TTŻ wynosi ona 100 000 osób. W miarę upływu czasu następuje wymieranie populacji; w wieku 100 lat liczebność ta jest bardzo mała i tablice nie są w dalszym ciągu kontynuowane.

Najważniejszą funkcją biometryczną są prawdopodobieństwa zgonów, które wyznaczone są na podstawie współczynników zgonów obserwowanych w okresie, dla którego budowane są tablice trwania życia. Na podstawie współczynników zgonów można odtworzyć wszystkie funkcje biometryczne.

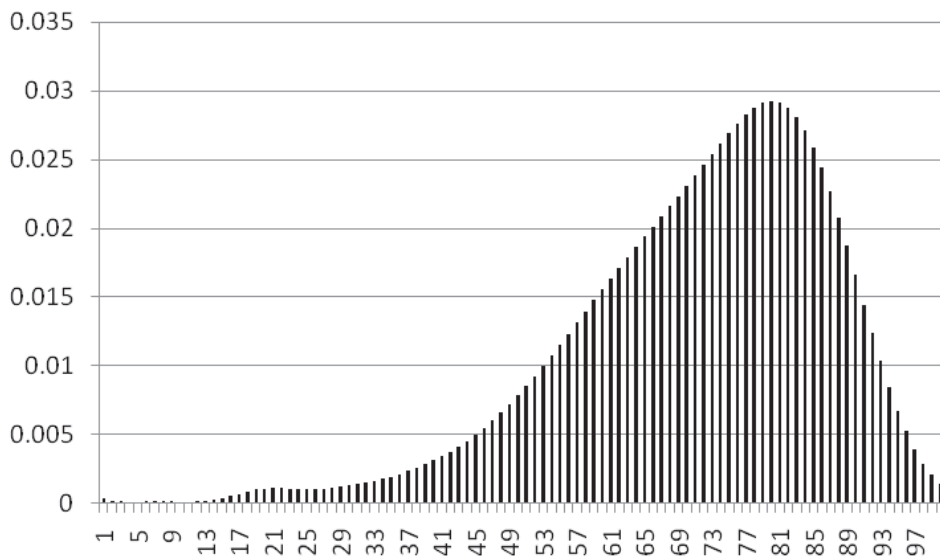
Istnieje związek między empirycznym modelem trwania życia i modelem teoretycznym.

Wartość gęstości empirycznej czasu życia w wieku x oznaczona $\hat{f}(x)$ jest równa następującemu ilorazowi

$$\hat{f}(x) = \frac{d_x}{l_0} \text{ dla } x = 0, 1, 2, \dots, 100, \quad (13)$$

gdzie d_x to liczba zgonów w wieku x (czyli w przedziale $\langle 0, x+1 \rangle$), natomiast l_0 to początkowa liczebność badanej populacji. Jeżeli w wieku x zmarło d_x osób to znaczy, że spośród 100 000 osób d_x przeżyło x lat. Częstość przeżycia x lat można więc policzyć ze wzoru (13). W pozostałych punktach przedziału $(x, x+1)$ wartość funkcji gęstości empirycznej nie jest znana.

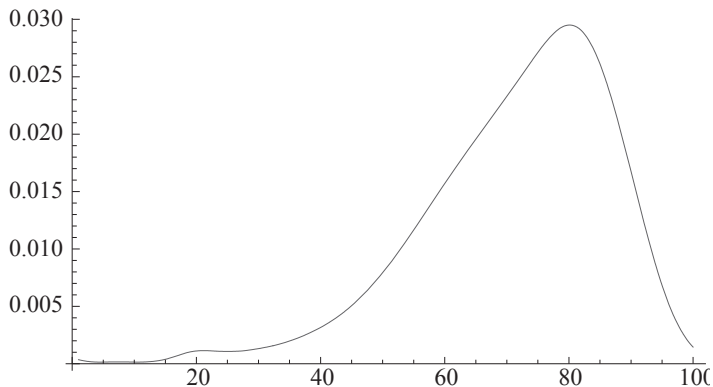
Na rysunku 1 przedstawiony został histogram długości życia mężczyzn polskich w roku 2009 wyznaczony na podstawie badanej próby 100 000 mężczyzn.



Rys. 1. Histogram częstości długości życia

Źródło: opracowanie własne na podstawie TTŻ mężczyzn w roku 2009.

Na rysunku 2 przedstawiony został natomiast diagram długości życia.



Rys. 2. Diagram częstości długości życia wygładzony numerycznie

Źródło: opracowanie własne na podstawie TTŻ mężczyzn w roku 2009.

Po wygładzeniu diagramu otrzymuje się funkcję ciągłą.

4. Badanie zgodności rozkładu empirycznego i teoretycznego

Sprawdzimy teraz, czy badana próba (10 000 osób) pochodzi z populacji, w której czas życia opisany jest za pomocą rozkładu Weibulla. Parametry tego rozkładu estymowane będą metodą największej wiarygodności (por. [3; 10]).

Estymatory $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ parametrów rozkładu Weibulla otrzymane metodą największej wiarygodności (MNV) spełniają równania (por. [6]):

$$\frac{\overline{x^{\hat{\alpha}} \ln x}}{\overline{x^{\hat{\alpha}}}} - \overline{\ln x} = \frac{1}{\hat{\alpha}},$$

$$\hat{\beta} = (\overline{x^{\hat{\alpha}}})^{1/\hat{\alpha}},$$
(14)

gdzie $\overline{g(x)}$ oznacza wartość średnią funkcji $g(x)$.

Równania te można rozwiązać tylko numerycznie (por. [6; 7]).

W badanej populacji otrzymano następujące wartości estymatorów parametrów rozkładu teoretycznego (obliczenia wykonano za pomocą programu Mathematica):

$$\hat{\alpha} = 5,75974,$$

$$\hat{\beta} = 77,1482.$$

Teoretyczna funkcja gęstości ma więc postać:

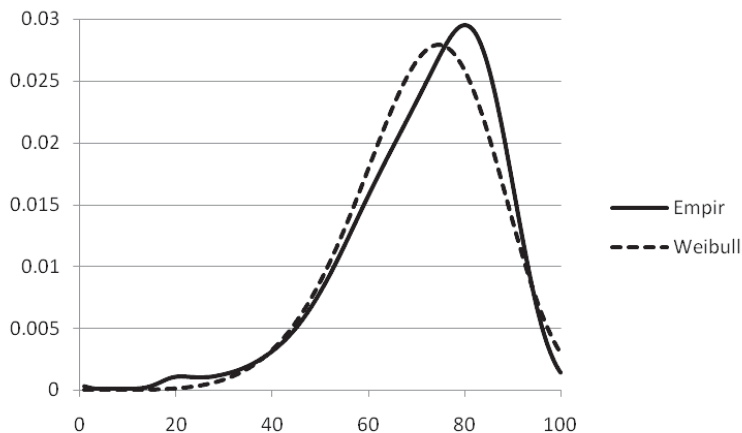
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0,075 \left(\frac{x}{77,15} \right) \exp \left(- \left(\frac{x}{77,15} \right)^{5,76} \right) & x > 0. \end{cases}$$
(15)

Wiek	Liczba zgonów	Gęstość empiryczna zgonów	Gęstość teoretyczna rozkładu Weibulla	Różnica dystrybuanty teoretycznej Weibulla i dystrybuanty empirycznej	Wartość bezwzględna różnicy dystrybuanty rozkładu Weibulla i dystrybuanty empirycznej	Gęstość teoretyczna rozkładu Gompertza	Różnica dystrybuanty teoretycznej Gompertza i dystrybuanty empirycznej	Wartość bezwzględna różnicy dystrybuanty rozkładu Gompertza i dystrybuanty empirycznej
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	604	0,00604	0	-0,00604	0,00604	0,000130	-0,000190	0,000190
1	35	0,000353	0	-0,00035	0,00035	0,000148	-0,000210	0,000210
2	24	0,000242	0	-0,00060	0,00060	0,000160	-0,000300	0,000300
3	17	0,000171	0	-0,00077	0,00077	0,000174	-0,000300	0,000300
4	14	0,000141	0	-0,00091	0,00091	0,000189	-0,000260	0,000260
5	14	0,000141	0	-0,00105	0,00105	0,000205	-0,000210	0,000210
6	15	0,000151	0	-0,00120	0,00120	0,000222	-0,000150	0,000150
7	15	0,000151	0	-0,00135	0,00135	0,000241	-6,7E-05	6,7E-05
8	15	0,000151	0	-0,00150	0,00150	0,000261	3,29E-05	3,29E-05
9	15	0,000151	0	-0,00165	0,00165	0,000283	0,000154	0,000154
10	14	0,000141	0	-0,00180	0,00180	0,000308	0,000308	0,000308
11	14	0,000141	0	-0,00192	0,00192	0,000334	0,000487	0,000487
12	16	0,000161	1,06E-05	-0,00208	0,00208	0,000362	0,000673	0,000673
13	20	0,000202	1,56E-05	-0,00226	0,00226	0,000393	0,000849	0,000849
14	27	0,000272	2,21E-05	-0,00252	0,00252	0,000426	0,000985	0,000985
15	38	0,000383	3,07E-05	-0,00288	0,00288	0,000462	0,001046	0,001046
16	53	0,000535	4,18E-05	-0,00337	0,00337	0,000501	0,000992	0,000992
17	70	0,000706	5,58E-05	-0,00403	0,00403	0,000543	0,000808	0,000808
18	88	0,000888	7,32E-05	-0,00485	0,00485	0,000589	0,000487	0,000487
19	102	0,001029	9,47E-05	-0,00580	0,00580	0,000639	7,17E-05	7,17E-05
20	110	0,001109	0,000121	-0,00680	0,00680	0,000693	-0,000370	0,000370
21	113	0,001140	0,000152	-0,00781	0,00781	0,000752	-0,000790	0,000790
22	112	0,001130	0,000190	-0,00876	0,00876	0,000815	-0,001140	0,001140
23	109	0,001099	0,000235	-0,00965	0,00965	0,000884	-0,001390	0,001390
24	107	0,001079	0,000288	-0,01047	0,01047	0,000958	-0,001550	0,001550
25	106	0,001069	0,000349	-0,01122	0,01122	0,001038	-0,001620	0,001620
26	107	0,001079	0,000421	-0,01192	0,01192	0,001126	-0,001620	0,001620
27	109	0,001099	0,000503	-0,01256	0,01256	0,001220	-0,001540	0,001540
28	114	0,001150	0,000598	-0,01316	0,01316	0,001322	-0,001420	0,001420
29	122	0,001231	0,000706	-0,01374	0,01374	0,001433	-0,001280	0,001280
30	130	0,001311	0,000829	-0,01428	0,01428	0,001552	-0,001100	0,001100
31	140	0,001412	0,000969	-0,01479	0,01479	0,001682	-0,000890	0,000890
32	151	0,001523	0,001125	-0,01527	0,01527	0,001822	-0,000660	0,000660
33	164	0,001654	0,001301	-0,01571	0,01571	0,001973	-0,000420	0,000420
34	179	0,001805	0,001498	-0,01612	0,01612	0,002137	-0,000170	0,000170
35	196	0,001977	0,001717	-0,01649	0,01649	0,002313	7,41E-05	7,41E-05
36	215	0,002169	0,001959	-0,01683	0,01683	0,002504	0,000313	0,000313
37	236	0,002380	0,002228	-0,01712	0,01712	0,002710	0,000539	0,000539
38	260	0,002622	0,002523	-0,01736	0,01736	0,002932	0,000736	0,000736
39	285	0,002875	0,002847	-0,01756	0,01756	0,003172	0,000912	0,000912
40	313	0,003157	0,003202	-0,01769	0,01769	0,003430	0,001055	0,001055
41	344	0,003470	0,003589	-0,01777	0,01777	0,003709	0,001153	0,001153
42	378	0,003813	0,004009	-0,01779	0,01779	0,004008	0,001197	0,001197
43	415	0,004186	0,004465	-0,01774	0,01774	0,004330	0,001178	0,001178
44	456	0,004599	0,004957	-0,01763	0,01763	0,004677	0,001080	0,001080
45	501	0,005053	0,005486	-0,01746	0,01746	0,005049	0,000888	0,000888
46	550	0,005547	0,006055	-0,017240	0,017240	0,005448	0,000587	0,000587

1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	603	0,006082	0,006663	-0,016970	0,016970	0,005876	0,000164	0,000164
48	660	0,006657	0,007310	-0,016640	0,016640	0,006335	-0,000390	0,000390
49	721	0,007272	0,007998	-0,016270	0,016270	0,006825	-0,001080	0,001080
50	786	0,007928	0,008726	-0,015830	0,015830	0,007349	-0,001930	0,001930
51	854	0,008613	0,009494	-0,015340	0,015340	0,007908	-0,002920	0,002920
52	925	0,009330	0,01030	-0,014780	0,014780	0,008503	-0,004040	0,004040
53	1000	0,010086	0,011144	-0,014140	0,014140	0,009136	-0,005310	0,005310
54	1076	0,010853	0,012023	-0,013420	0,013420	0,009807	-0,006700	0,006700
55	1155	0,011649	0,012934	-0,012590	0,012590	0,010519	-0,008190	0,008190
56	1235	0,012456	0,013874	-0,011640	0,011640	0,011127	-0,009750	0,009750
57	1316	0,013273	0,014840	-0,010560	0,010560	0,012063	-0,011360	0,011360
58	1397	0,014090	0,015826	-0,009320	0,009320	0,012896	-0,012980	0,012980
59	1478	0,014907	0,016828	-0,007900	0,007900	0,013768	-0,014560	0,014560
60	1557	0,015704	0,017838	-0,006280	0,006280	0,01468	-0,016040	0,016040
61	1636	0,016501	0,018850	-0,004430	0,004430	0,015629	-0,017390	0,017390
62	1713	0,017277	0,019857	-0,002350	0,002350	0,016611	-0,018550	0,018550
63	1789	0,018044	0,020849	-4,5E-05	4,5E-05	0,017625	-0,019480	0,019480
64	1864	0,018811	0,021817	0,002480	0,002480	0,018664	-0,020150	0,020150
65	1939	0,019557	0,022752	0,005210	0,005210	0,019724	-0,020510	0,020510
66	2013	0,020303	0,023643	0,008108	0,008108	0,020797	-0,020550	0,020550
67	2087	0,021050	0,024479	0,011123	0,011123	0,021874	-0,020270	0,020270
68	2161	0,021796	0,025249	0,014197	0,014197	0,022947	-0,019650	0,019650
69	2235	0,022542	0,025942	0,017257	0,017257	0,024002	-0,018720	0,018720
70	2310	0,023299	0,026547	0,020211	0,020211	0,025028	-0,017500	0,017500
71	2385	0,024055	0,027054	0,022964	0,022964	0,026009	-0,016030	0,016030
72	2461	0,024822	0,027451	0,025404	0,025404	0,026929	-0,014380	0,014380
73	2537	0,025588	0,027729	0,027416	0,027416	0,02777	-0,012610	0,012610
74	2614	0,026365	0,027881	0,028867	0,028867	0,028514	-0,010820	0,010820
75	2689	0,027121	0,027900	0,029648	0,029648	0,029139	-0,009110	0,009110
76	2760	0,027838	0,027779	0,029661	0,029661	0,029627	-0,007550	0,007550
77	2823	0,028473	0,027516	0,028849	0,028849	0,029957	-0,006220	0,006220
78	2875	0,028997	0,027110	0,027176	0,027176	0,030108	-0,005170	0,005170
79	2911	0,029360	0,026561	0,024663	0,024663	0,030063	-0,004430	0,004430
80	2925	0,029502	0,025872	0,021389	0,021389	0,029806	-0,003970	0,003970
81	2915	0,029401	0,025050	0,017460	0,017460	0,029325	-0,003790	0,003790
82	2878	0,029028	0,024103	0,013019	0,013019	0,028612	-0,003830	0,003830
83	2810	0,028342	0,023041	0,008258	0,008258	0,027664	-0,004010	0,004010
84	2714	0,027374	0,021878	0,003352	0,003352	0,026487	-0,004290	0,004290
85	2589	0,026113	0,020628	-0,001500	0,001500	0,02509	-0,004600	0,004600
86	2438	0,024590	0,019308	-0,006120	0,006120	0,023494	-0,004880	0,004880
87	2265	0,022845	0,017936	-0,010340	0,010340	0,021725	-0,005100	0,005100
88	2075	0,020929	0,016532	-0,014030	0,014030	0,019817	-0,005250	0,005250
89	1871	0,018871	0,015113	-0,017080	0,017080	0,017811	-0,005300	0,005300
90	1660	0,016743	0,013699	-0,019420	0,019420	0,015754	-0,005260	0,005260
91	1447	0,014595	0,012309	-0,021010	0,021010	0,013693	-0,005130	0,005130
92	1237	0,012476	0,010959	-0,021850	0,021850	0,011679	-0,004930	0,004930
93	1036	0,010449	0,009665	-0,022000	0,022000	0,009976	-0,004670	0,004670
94	847	0,008543	0,008440	-0,021490	0,021490	0,007976	-0,004360	0,004360
95	677	0,006828	0,007295	-0,020460	0,020460	0,006363	-0,004030	0,004030
96	526	0,005305	0,006240	-0,019010	0,019010	0,004944	-0,003700	0,003700
97	398	0,004014	0,005278	-0,017270	0,017270	0,003735	-0,003390	0,003390
98	293	0,002955	0,004414	-0,015390	0,015390	0,002735	-0,003130	0,003130
99	208	0,002098	0,003648	-0,01346	0,013460	0,001937	-0,002910	0,002910
100	144	0,001452	0,002979	-0,01161	0,011610	0,001323	-0,002740	0,002740

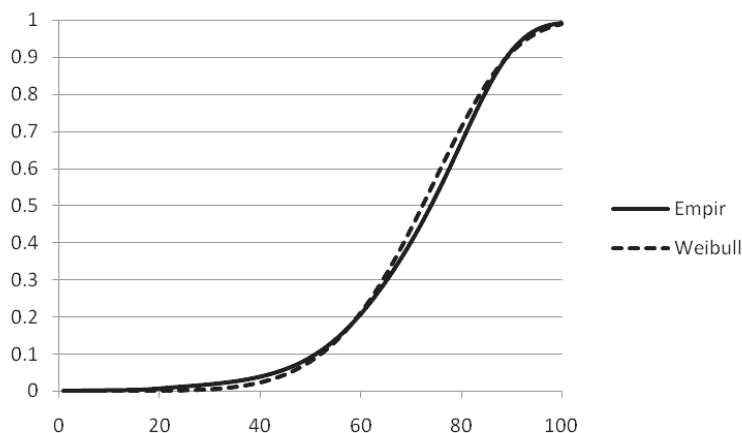
Źródło: opracowanie własne.

Wartości funkcji gęstości empirycznej i teoretycznej przedstawiono w kolumnach 3 i 4 tab. 1, natomiast na rys. 3 przedstawiono ich wykresy. Na rysunku 4 przedstawiono zaś wykresy odpowiednich dystrybuant.



Rys. 3. Teoretyczna i empiryczna funkcja gęstości

Źródło: opracowanie własne.

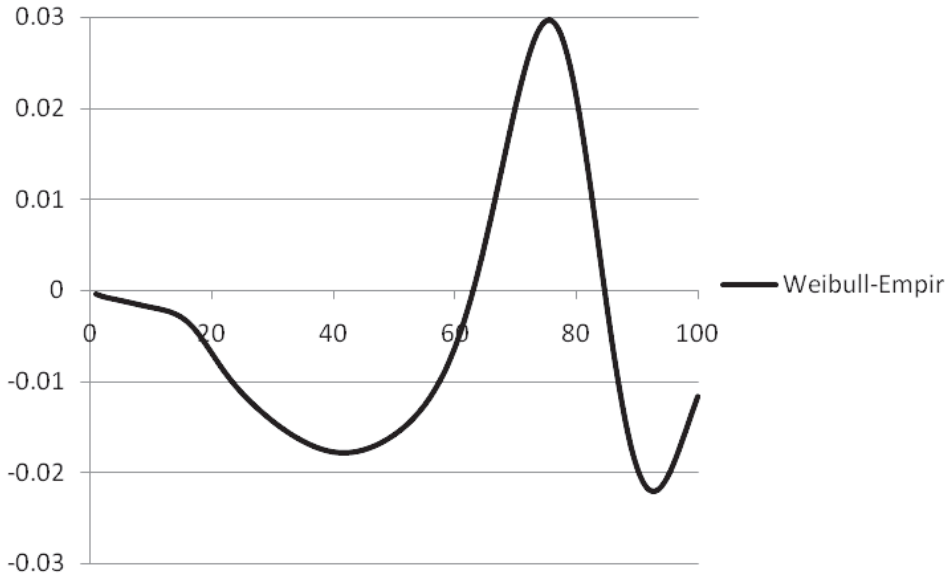


Rys. 4. Dystrybuanta rozkładu empirycznego i teoretycznego

Źródło: opracowanie własne.

Funkcja gęstości empiryczna i teoretyczna różnią się we wszystkich przedziałach wieku. Różnice między dystrybuantami empiryczną i teoretyczną przedstawionymi na rys. 4 są również bardzo widoczne.

Aby ocenić statystycznie zgodność rozkładów teoretycznego i empirycznego dla wszystkich przedziałów wieku, policzono różnicę między wartościami dystrybuanty empirycznej i teoretycznej. Wartości tych różnic przedstawione są w kolumnie 5 tab. 1, a ich wykres przedstawiony jest rys. 5.



Rys. 5. Różnice między wartościami dystrybuanty empirycznej i dystrybuanty rozkładu Weibulla

Źródło: opracowanie własne.

Jak można zauważyć, analizując rys. 5, różnice te są dość znaczne. Maksymalna różnica występuje w wieku $x = 76$ lat i wynosi około 0,0296, czyli

$$\max_x \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| = 0,0296 ,$$

gdzie $\hat{F}_n(x)$ oznacza wartość dystrybuanty empirycznej w punkcie x , natomiast $F(x)$ wartość dystrybuanty teoretycznej w punkcie x .

Do weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładu teoretycznego i empirycznego wykorzystany zostanie test λ -Kołmogorowa.

Statystyka testowa λ dla tego testu ma postać:

$$\lambda = \sqrt{n} \max_x \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| . \quad (16)$$

Przy założeniu prawdziwości sprawdzanej hipotezy statystyka ta ma znany rozkład λ – Kołmogorowa, który jest stabilizowany zarówno dla małej, jak i dużej próby (por. [10]).

Test Kołmogorowa jest testem jednostronnym, czyli hipotezę o jednakowości rozkładu empirycznego i teoretycznego odrzucamy, gdy wartość statystyki testowej przekracza wartość krytyczną.

W rozpatrywanym przypadku wartość empiryczna statystyki λ -Kołmogorowa jest równa 9,36, natomiast wartość krytyczna λ_{α} , odczytana z tablic, odpowiadająca poziomowi istotności $\alpha = 0,05$ jest równa 1,36. Wynika z tego, że hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego i teoretycznego należy odrzucić. Oznacza to, że czas życia w populacji mężczyzn polskich w roku 2009 nie ma rozkładu Weibulla.

Innym rozkładem wykorzystywanym do opisu czasu życia jest rozkład Gompertza, którego funkcja gęstości określona jest wzorem (6). Jak widać, funkcja ta zależy od dwóch parametrów, które oznaczone są b, γ .

Estymatory największej wiarygodności parametrów $\hat{b}, \hat{\gamma}$ funkcji gęstości rozkładu Gompertza spełniają następujące równania (por. [7]):

$$\hat{b} = \frac{\hat{\gamma}}{\exp(\hat{\gamma}x) - 1}, \quad (17)$$

$$\hat{\gamma} \bar{x} (\exp(\hat{\gamma}x) - 1) = \overline{\exp(\hat{\gamma}x)} (\hat{\gamma}^2 - 1) + 1. \quad (18)$$

Równania te rozwiązano numerycznie za pomocą programu Matematica, używając następujące wartości estymatorów:

$$\hat{b} = 0,000136,$$

$$\hat{\gamma} = 0,08172.$$

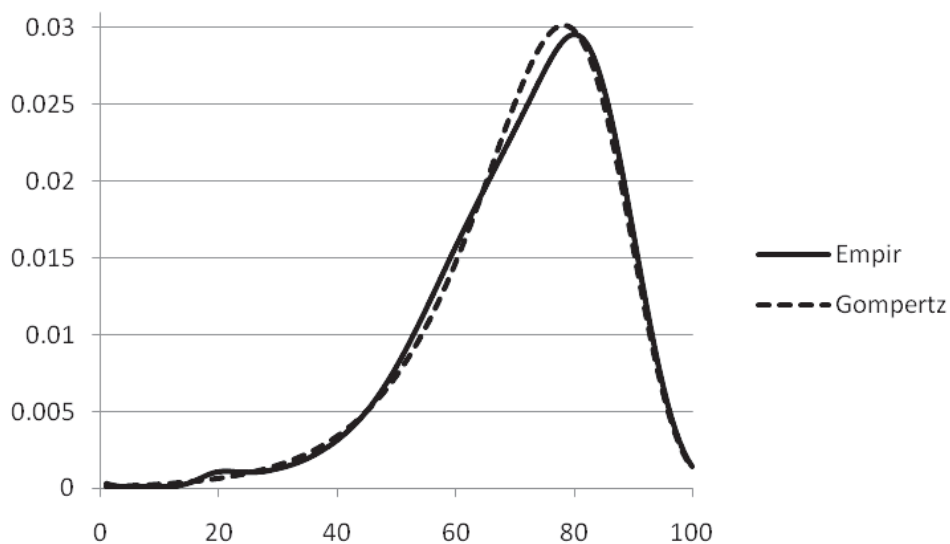
Funkcja gęstości prawa Gompertza ma więc postać:

$$f(t) = \exp\{-0,00166 \exp((0,082t) - 1) \exp(0,082t)\}. \quad (19)$$

Wartości teoretycznej funkcji gęstości dla poszczególnych grup wiekowych przedstawiono w tab. 1.

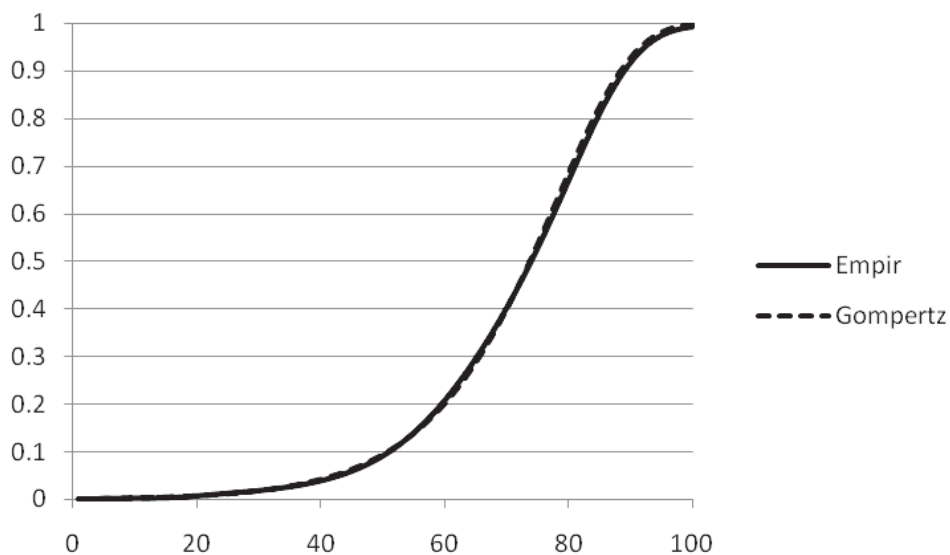
Na rysunku 6 przedstawiono graficznie gęstość empiryczną i gęstość rozkładu Gompertza, natomiast na rysunku 7 – dystrybuanty tych rozkładów.

Patrząc na rys. 6 i 7, zauważamy, że zgodność gęstości empirycznej i teoretycznej jest bardzo duża dla populacji w wieku powyżej 80 lat. Fakt ten został dawno odnotowany przez demografów i aktuariuszy (por. [1]). W pozostałych grupach wieku zgodność jest znacznie mniejsza.



Rys. 6. Funkcja gęstości rozkładu empirycznego i rozkładu Gompertza

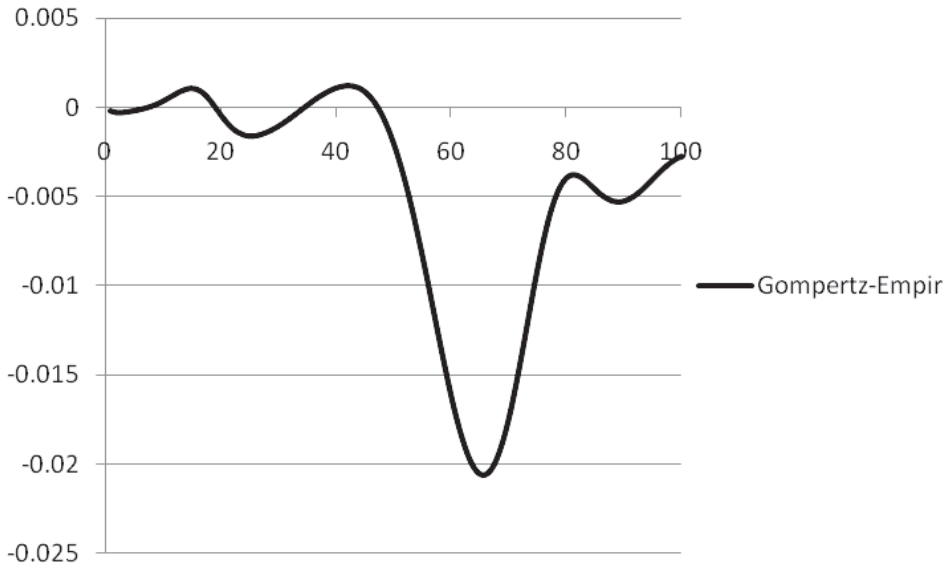
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 7. Dystrybuanta empiryczna i teoretyczna

Źródło: opracowanie własne.

Różnice między rozkładem empirycznym i teoretycznym są znacznie mniej widoczne na wykresach dystrybuant. Dokładne wielkości różnicy między dystrybuantą empiryczną i teoretyczną przedstawione zostały w tab. 1. Graficznie różnice te przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Różnice między dystrybuantą empiryczną i dystrybuantą rozkładu Gompertza

Źródło: opracowanie własne.

Jak można zauważyć, analizując tab. 1, maksymalna wielkość różnicy występuje w wieku 66 lat i jest ona równa 0,02055. Stąd wartość statystyki testowej λ_e wynosi: $\lambda_e = \sqrt{100\,000} \cdot 0,0296 = 6,5$. Wartość ta jest większa od wartości krytycznej, która przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ wynosi 1,96. Hipotezę o tym, że czas życia populacji można opisać rozkładem Gompertza należy odrzucić.

Dalszych prób aproksymacji gęstości empirycznej gęstością teoretyczną nie przeprowadzono. Uznano, że badana populacja nie jest jednorodna, a w takim przypadku na pewno nie znajdzie się rozkładu teoretycznego, który opisywałby rozkład empiryczny.

Niejednorodność populacji oznacza, że populacja składa się z pewnych grup jednostek (por. [11]). Wszystkie jednostki w grupie charakteryzują się takim samym rozkładem trwania życia, ale w poszczególnych grupach jest on różny. Jednostki te zostały wymieszane i nie można odróżnić, która jednostka należała do której grupy. Powstał nowy rozkład (mieszanka) rozkładów w grupach. Dystrybuantą tego rozkładu oznaczona została $G(x)$.

Dystrybuantą $G(x)$ jest mieszanka rozkładów o dystrybuantach $G_i(x)$ z poszczególnych grup, przy czym udział rozkładów poszczególnych grup w mieszance

Tabela 1. Obliczenia pomocniczej jest proporcjonalny do liczebności tych grup. Liczebności te nie są znane. Dystrybuanta $G(x)$ ma więc postać:

$$G(x) = \sum_{i=1}^m w_i G_i(x), \quad (20)$$

gdzie m to liczba grup, a w_i to udział poszczególnych grup w mieszance.

Nieznane parametry rozkładu $G(x)$ estymowane będą metodą minimum chi-kwadrat (por. [7]).

Statystyka chi-kwadrat która będzie minimalizowana ma następującą postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i}, \quad (21)$$

gdzie k oznacza liczbę przedziałów, na które zostały pogrupowane wartości zmiennej losowej, π_i oznacza prawdopodobieństwo, że wartość zmiennej o dystrybuancie $G(x)$ należy do przedziału i -tego, n_i to zaobserwowana liczba obserwacji należących do przedziału i -tego.

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy populacja składa się z dwóch grup, rozkład długości życia w pierwszej grupie opisany jest za pomocą rozkładu Weibulla (dystrybuanta określona wzorem (7)), natomiast w grupie drugiej – za pomocą rozkładu Gomperta ((dystrybuanta określona wzorem (4)). Rozkład mieszanki określony jest więc za pomocą następującej dystrybuanty:

$$G(x) = w_1(1 - \exp(-\frac{b}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1))) + w_2(1 - \exp(-(\frac{x}{\beta})^\alpha)) \text{ dla } x > 0. \quad (22)$$

Rozkład $G(x)$ zależy od pięciu parametrów: $w_1, b, \gamma, \beta, \alpha$. Udział $w_2 = 1 - w_1$.

Statystyka chi-kwadrat, która będzie minimalizowana w rozpatrywanym przypadku, ma następującą postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{99} \frac{(d_i - l_0\pi_i)^2}{n\pi_i}, \quad (23)$$

gdzie d_i to obserwowana liczba zgonów w i -tym przedziale wieku odczytana z TTŻ, l_0 to początkowa liczebność populacji, czyli 100 000, natomiast

$$l_0\pi_i = l_0 (G(i+1) - G(i)). \quad (24)$$

Zadanie minimalizacji statystyki χ^2 polega na znalezieniu takich wartości parametrów rozkładu $G(x)$, aby funkcja określona wzorem (23) miała wartość jak najmniejszą. W rozpatrywanym przypadku funkcja ta zależy od pięciu parametrów (zmiennych), a więc należy znaleźć ekstremum funkcji pięciu zmiennych.

Minimalizacja funkcji została wykonana za pomocą programu Mathematica. Stosowana metoda wymaga ustalenia punktów startowych. W rozwiązywanym zadaniu jako wartości startowe dla parametrów, względem których funkcje były mi-

nimalizowane, przyjęto wartości, które zostały uprzednio otrzymane jako estymatory parametrów rozkładów teoretycznych aproksymujących rozkład empiryczny. W następnych krokach wartości startowe zwiększane były co około 10% pierwotnej wartości, a wartości funkcji w punkcie minimum znalezionym przy takich wartościach początkowych porównywane z wartościami, w których było minimum w poprzednich krokach. Poszukiwania minimum kończono, gdy kilka kolejnych zmian wartości wyjściowych prowadziło albo do tego samego, albo tylko do „płytszych” minimum funkcji. Jako że badane funkcje wielu zmiennych mają bardzo skomplikowaną postać, procedura ta nie gwarantuje, że znalezione minimum jest minimum globalnym.

Wartości parametrów minimalizujące wartość statystyki χ^2 dla mieszanki rozkładów Weibulla i Gomperta (W+Go) są następujące:

$$\hat{\alpha} = 6,124$$

$$\hat{\beta} = 59,308$$

$$\hat{b} = 0,000128$$

$$\hat{\gamma} = 0,0824$$

$$w_1 = 0,9603$$

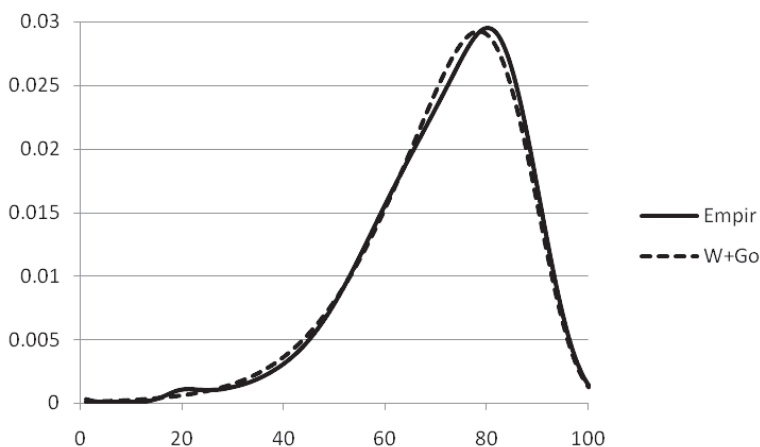
$$w_2 = 0,0397$$

Minimalna wartość statystyki χ^2 jest równa:

$$\chi^2 = 419,204.$$

Wartości funkcji gęstości mieszanki (W+Go) zamieszczono w kolumnie trzeciej tab. 2.

Wykresy gęstości empirycznej i teoretycznej (mieszanki rozkładu Gomperta i rozkładu Weibulla) przedstawione są na rys. 9.



Rys. 9. Wykres gęstości empirycznej i gęstości mieszanki

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Empiryczna funkcja gęstości i funkcje gęstości mieszanek

1	Empiryczna funkcja gęstości	Funkcja gęstości mieszanek W+Go	Funkcja gęstości mieszanek W+Go+Ga	Funkcja gęstości mieszanek W+Go+Ga+LN
2	3	4	5	
0	0,00604	0,000140	0,000110	0,000110
1	0,000353	0,000134	0,000102	0,000113
2	0,000242	0,000145	0,000111	0,000123
3	0,000171	0,000157	0,000120	0,000134
4	0,000141	0,000171	0,000131	0,000146
5	0,000141	0,000186	0,000143	0,000159
6	0,000151	0,000201	0,000156	0,000173
7	0,000151	0,000219	0,000170	0,000188
8	0,000151	0,000238	0,000186	0,000204
9	0,000151	0,000258	0,000205	0,000222
10	0,000141	0,000280	0,000230	0,000242
11	0,000141	0,000305	0,000265	0,000263
12	0,000161	0,000331	0,000312	0,000289
13	0,000202	0,000360	0,000376	0,000325
14	0,000272	0,000391	0,000455	0,000380
15	0,000383	0,000425	0,000549	0,000468
16	0,000535	0,000463	0,000651	0,000596
17	0,000706	0,000504	0,000755	0,000758
18	0,000888	0,000548	0,000853	0,000925
19	0,001029	0,000597	0,000938	0,001065
20	0,001109	0,000651	0,001007	0,001150
21	0,001140	0,000709	0,001059	0,001174
22	0,001130	0,000773	0,001096	0,001115
23	0,001099	0,000843	0,001121	0,001103
24	0,001079	0,000920	0,001140	0,001060
25	0,001069	0,001004	0,001158	0,001038
26	0,001079	0,001096	0,001180	0,001044
27	0,001099	0,001196	0,001211	0,001080
28	0,001150	0,001306	0,001254	0,001142
29	0,001231	0,001426	0,001312	0,001225
30	0,001311	0,001556	0,001387	0,001326
31	0,001412	0,001699	0,001479	0,001443
32	0,001523	0,001855	0,001591	0,001574
33	0,001654	0,002024	0,001722	0,001719
34	0,001805	0,002208	0,001873	0,001881
35	0,001977	0,002409	0,002045	0,002059
36	0,002169	0,002626	0,002240	0,002256
37	0,002380	0,002862	0,002458	0,002473
38	0,002622	0,003117	0,002701	0,002714
39	0,002875	0,003393	0,002970	0,002979
40	0,003157	0,003691	0,003269	0,003273
41	0,003470	0,004011	0,003598	0,003597
42	0,003813	0,004356	0,003959	0,003954
43	0,004186	0,004727	0,004356	0,004348
44	0,004599	0,005123	0,004789	0,004780
45	0,005053	0,005547	0,005260	0,005253
46	0,005547	0,005999	0,005772	0,005769
47	0,006082	0,006480	0,006324	0,006328
48	0,006657	0,006990	0,006918	0,006932
49	0,007272	0,007530	0,007553	0,007578

1	2	3	4	5
50	0,007928	0,008101	0,008226	0,008264
51	0,008613	0,008701	0,008937	0,008985
52	0,009330	0,009332	0,009681	0,009733
53	0,010086	0,009993	0,010453	0,010502
54	0,010853	0,010683	0,011248	0,011280
55	0,011649	0,011403	0,012058	0,012058
56	0,012456	0,012150	0,012877	0,012833
57	0,013273	0,012924	0,013695	0,013604
58	0,014090	0,013725	0,014507	0,014383
59	0,014907	0,014550	0,015306	0,015183
60	0,015704	0,015399	0,016087	0,016010
61	0,016501	0,016270	0,016849	0,016852
62	0,017277	0,017161	0,017593	0,017679
63	0,018044	0,018069	0,018323	0,018460
64	0,018811	0,018993	0,019048	0,019178
65	0,019557	0,019929	0,019777	0,019850
66	0,020303	0,020871	0,020520	0,020516
67	0,021050	0,021817	0,021287	0,021222
68	0,021796	0,022757	0,022084	0,022000
69	0,022542	0,023685	0,022912	0,022854
70	0,023299	0,024591	0,023767	0,023765
71	0,024055	0,025462	0,024637	0,024702
72	0,024822	0,026285	0,025505	0,025627
73	0,025588	0,027044	0,026347	0,026506
74	0,026365	0,027722	0,027135	0,027309
75	0,027121	0,028298	0,027841	0,028009
76	0,027838	0,028754	0,028436	0,028580
77	0,028473	0,029067	0,028889	0,029001
78	0,028997	0,029217	0,029176	0,029249
79	0,029360	0,029185	0,029270	0,029303
80	0,029502	0,028954	0,029153	0,029145
81	0,029401	0,028508	0,028805	0,028760
82	0,029028	0,027839	0,028216	0,028138
83	0,028342	0,026942	0,027378	0,027274
84	0,027374	0,025820	0,026293	0,026169
85	0,026113	0,024482	0,024969	0,024833
86	0,024590	0,022945	0,023423	0,023284
87	0,022845	0,021234	0,021682	0,021548
88	0,020929	0,019384	0,019781	0,019660
89	0,018871	0,017432	0,017764	0,017662
90	0,016743	0,015426	0,015681	0,015602
91	0,014595	0,013413	0,013584	0,013532
92	0,012476	0,011441	0,011530	0,011505
93	0,010449	0,009560	0,009571	0,009573
94	0,008543	0,007809	0,007755	0,007779
95	0,006828	0,006226	0,006120	0,006161
96	0,005305	0,004833	0,004693	0,004745
97	0,004014	0,003645	0,003487	0,003546
98	0,002955	0,002665	0,002505	0,002563
99	0,002098	0,001883	0,001733	0,001788
100	0,001452	0,001282	0,001152	0,001199

Źródło: opracowanie własne.

Statystyka χ^2 wykorzystania zostanie do weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładu teoretycznego określonego następująco:

$$G(x) = 0,9603(1 - \exp(-0,00155(e^{0,0824 \cdot x} - 1))) + 0,0397(1 - \exp(-\left(\frac{x}{59,308}\right)^{6,124})) \quad (25)$$

i rozkładu empirycznego.

Jeżeli próba pochodzi z populacji o rozkładzie $G(x)$ określonym wzorem (25), to statystyka χ^2 ma rozkład chi-kwadrat z 94 stopniami swobody (por. [3; 10]). Zbiór krytyczny jest prawostronny.

Przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ wartość krytyczna odczytana z tablic rozkładu chi-kwadrat jest równa 117,63 (por. [13]).

Otrzymana empiryczna wartość statystyki χ^2 jest równa 419,24, a więc znajduje się w zbiorze krytycznym. Oznacza to, że na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę o tym, że czas trwania życia populacji mężczyzn jest mieszanką 96% jednostek, których czas życia ma rozkład Gompertza, i 4% jednostek, których czas życia ma rozkład Weibulla, należy odrzucić. W tej sytuacji powstaje podejrzenie, że w populacji są jednostki, których czas życia opisany jest innym rozkładem niż rozkłady poprzednio zmieszane.

Rozpatrzmy teraz mieszankę trzech rozkładów: Weibulla, Gompertza i rozkładu gamma.

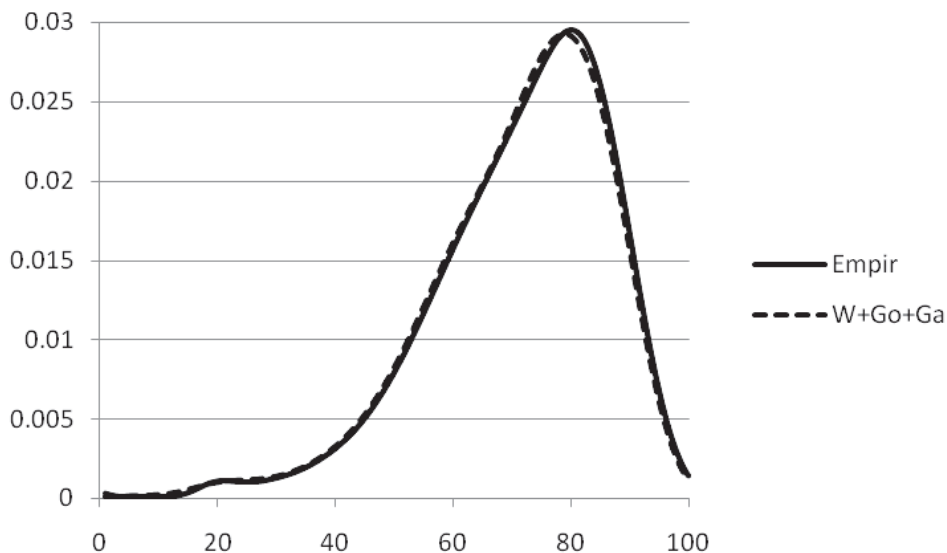
Estymatory parametrów mieszanki otrzymane metodą minimum chi-kwadrat są następujące:

$$\begin{aligned} \text{parametry rozkładu Weibulla:} & \quad \hat{\alpha} = 8,19, & \quad \hat{\beta} = 59,05, \\ \text{parametry rozkładu Gompertza:} & \quad \hat{b} = 0,0001, & \quad \hat{\gamma} = 0,08544, \\ \text{parametry rozkładu gamma:} & \quad \hat{a} = 18,826, & \quad \hat{c} = 1,164, \\ \text{waga, z jaką wchodzi do mieszanki rozkład Weibulla} & \quad w_w = 0,0638, \\ \text{waga, z jaką wchodzi do mieszanki rozkład gamma} & \quad w_\gamma = 0,006148, \\ \text{waga, z jaką wchodzi do mieszanki rozkład Gompertza} & \quad w_G = 0,93, \\ \text{Wartość statystyki chi-kwadrat jest równa} & \quad \chi^2 = 133,731. \end{aligned}$$

Z przeprowadzonej estymacji wynika, że 93% analizowanej populacji charakteryzuje się długością życia podlegającą rozkładowi Gompertza, 0,6% ma rozkład trwania życia opisany rozkładem gamma i 6% populacji charakteryzuje się trwaniem życia opisany za pomocą rozkładu Weibulla. Ponieważ estymowanych było 8 parametrów rozkładu mieszanki, statystyka χ^2 ma rozkład chi-kwadrat z 91 stopniami swobody. Wartość krytyczna przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ jest równa 117,632, a przy poziomie istotności $\alpha = 0,02$ jest równa 120,801.

Wartości funkcji gęstości mieszanki rozkładów Weibulla, Gompertza i gamma (W+ Go + Ga) zamieszczono w kolumnie czwartej tab. 2.

Wykres funkcji gęstości rozkładu empirycznego i gęstości rozkładu mieszanki przedstawiono na rys. 10.



Rys. 10. Rozkład empiryczny i rozkład mieszanki (W+ Go + Ga)

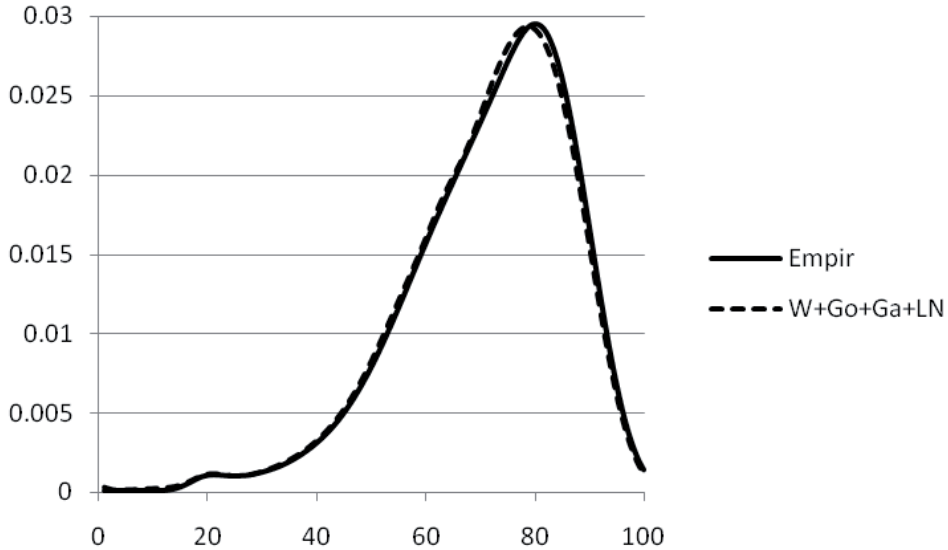
Źródło: opracowanie własne.

Wydaje się, że rozkład teoretyczny (mieszanka) zaznaczony na rys. 10 linią przerywaną i rozkład empiryczny zaznaczony linią ciągłą przebiegają niemal identycznie. Jeśli jednak przeprowadzimy weryfikację statystyczną hipotezy o zgodności tych rozkładów, to okaże się, że zarówno na poziomie istotności $\alpha = 0,05$, jak też na poziomie istotności $\alpha = 0,02$ hipotezę tę trzeba odrzucić, gdyż wartość statystyki testowej, która równa jest 133,71 w obu przypadkach, znajduje się w zbiorze krytycznym. Oznacza to, że w skład mieszanki rozkładu teoretycznego wchodzi jeszcze inne rozkłady.

Spróbujmy zwiększyć składniki mieszanki o rozkład lognormalny. Jest to rozkład nieujemny zależny od dwóch parametrów. Funkcja gęstości tego rozkładu określona jest wzorem (9) (por. [3]). W tym przypadku rozkład teoretyczny będzie zależał od 11 parametrów. Estymatory tych parametrów wyznaczone według kryterium minimalnego χ^2 są następujące:

estymatory parametrów rozkładu Weibulla:	$\hat{\alpha} = 9,505$, $\hat{\beta} = 56,99$,
estymatory parametrów rozkładu Gompertza:	$\hat{b} = 0,00011$, $\hat{\gamma} = 0,084$,
estymatory parametrów rozkładu gamma:	$\hat{a} = 46,77$, $\hat{c} = 0,439$,
estymatory parametrów rozkładu lognormalnego:	$\hat{m} = 4,156$, $\hat{\sigma} = 0,046$,
waga, z jaką wchodzi rozkład Weibulla	$w_w = 0,044$,
waga, z jaką wchodzi rozkład gamma	$w_\gamma = 0,0044$,
waga, z jaką wchodzi rozkład lognormalny	$w_{LN} = 0,00747$,
waga, z jaką wchodzi rozkład Gombertza	$w_G = 0,944$,
wartość statystyki $\chi^2 = 108,846$.	

Wartości funkcji gęstości mieszanki $W + Go + Ga + LN$ znajdują się w kolumnie piątej tab. 2.



Rys. 11. Gęstość empiryczna i gęstość mieszanki $W + Go + Ga + LN$

Źródło: opracowanie własne.

W ostatnim rozpatrywanym przypadku statystyka χ^2 ma rozkład chi-kwadrat z 88 stopniami swobody. Wartość krytyczna odczytana z tablic przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ równa jest $\chi_{\alpha}^2 = 110,898$, natomiast przy poziomie istotności $\alpha = 0,02$ wartość ta równa jest $\chi_{\alpha}^2 = 117,340$.

Przy obu poziomach istotności wartość empiryczna znajduje się w zbiorze przyjęcia sprawdzanej hipotezy. Tak więc możemy stwierdzić, że rozkład czasu życia mężczyzn w Polsce w roku 2009 jest mieszanką czterech nieujemnych rozkładów zmiennych losowych. Świadczy to o tym, że populacja jest bardzo silnie zróżnicowana. Z udziałów poszczególnych rozkładów w mieszance wynika, że największą podgrupą w tej populacji, bo stanowiącą aż 94,4%, są mężczyźni, których czas życia opisany jest rozkładem Gomperta. Mimo że jest to grupa bardzo liczna, jej rozkład nie reprezentuje całej populacji.

Literatura

- [1] Balicki A., *Analiza przeżycia i tablice wymieralności*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2006.
- [2] Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbit D., *Actuarial Mathematics*, Itasca, The Society of Actuaries 1986.
- [3] Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1976.
- [4] Gerber H.U., *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, 1990.
- [5] Holzer J., *Demografia*, PWE, Warszawa 1999.
- [6] http://pl.wikisource.org/wiki/Tablica_rozk%C5%82adu_chi-kwadrat.
- [7] Law A.M., Kelton W., *Simulation Modelling and Analysis*, McGraw-Hill, 1982.
- [8] Ostasiewicz S., *Ocena umieralności w populacjach o zróżnicowanej witalności*. Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych, Zeszyt 21, Warszawa 2010.
- [9] Ostasiewicz S., *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*, AE, Wrocław 2000.
- [10] Ostasiewicz W., *Propedeutyka probabilistyki*, AE, Wrocław 2000.
- [11] Ostasiewicz S. (red.), *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych*, AE, Wrocław 2000.
- [12] Rao C., *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
- [13] *Trwanie życia w 2009 r. Life expectancy tables of Poland. Informacje i opracowania statystyczne*, GUS, Warszawa 2011, http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/PUBL_lud_trwanie_zycia_2009.pdf.

Załącznik 1

56

TABL. A. TABLICA TRWANIA ŻYCIA 2009
LIFE TABLE OF POLAND 2009

OGÓŁEM
TOTAL

MĘŻCZYŹNI
MALES

Wiek Age	Liczba dożywających Number of survivors	Prawdopodobieństwo zgonu Probability of dying	Liczba zmarłych Number deceased	Ludność stacjonarna Stationary population		Przeciętne dalsze trwanie życia Life expectancy
				w wieku x at age x	skumulowana cumulated	
x	l_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	100000	0,00804	604	99461	7153083	71,53
1	99396	0,00035	35	99379	7053622	70,96
2	99362	0,00024	24	99350	6954243	69,99
3	99338	0,00017	17	99330	6854893	69,01
4	99321	0,00015	14	99314	6755563	68,02
5	99307	0,00014	14	99300	6656249	67,03
6	99293	0,00015	15	99285	6556950	66,04
7	99278	0,00016	15	99270	6457665	65,05
8	99262	0,00015	15	99254	6358395	64,06
9	99247	0,00015	15	99240	6259141	63,07
10	99232	0,00014	14	99225	6159901	62,08
11	99218	0,00014	14	99211	6060676	61,08
12	99204	0,00016	16	99196	5961464	60,09
13	99188	0,00020	20	99178	5862268	59,10
14	99168	0,00027	27	99155	5763090	58,11
15	99141	0,00038	38	99122	5663935	57,13
16	99104	0,00053	53	99077	5564812	56,15
17	99051	0,00071	70	99015	5465735	55,18
18	98980	0,00089	88	98936	5366720	54,22
19	98892	0,00103	102	98841	5267784	53,27
20	98790	0,00112	110	98734	5168843	52,32
21	98679	0,00114	113	98623	5070209	51,38
22	98566	0,00113	112	98510	4971586	50,44
23	98455	0,00111	109	98400	4873075	49,50
24	98346	0,00109	107	98292	4774675	48,55
25	98239	0,00108	106	98185	4676383	47,60
26	98132	0,00109	107	98079	4578198	46,65
27	98026	0,00112	109	97971	4480119	45,70
28	97916	0,00117	114	97859	4382148	44,75
29	97802	0,00125	122	97741	4284289	43,81
30	97680	0,00133	130	97615	4186548	42,86
31	97550	0,00143	140	97480	4088933	41,92
32	97411	0,00155	151	97335	3991453	40,98
33	97259	0,00169	164	97177	3894118	40,04
34	97095	0,00185	179	97005	3796941	39,11
35	96915	0,00203	198	96817	3699936	38,18
36	96719	0,00223	215	96611	3603118	37,25
37	96504	0,00245	236	96385	3506507	36,34
38	96267	0,00270	260	96137	3410122	35,42
39	96008	0,00297	285	95865	3313984	34,52
40	95723	0,00327	313	95566	3218119	33,62
41	95410	0,00360	344	95238	3122553	32,73
42	95066	0,00397	378	94877	3027315	31,84
43	94688	0,00438	415	94480	2932439	30,97
44	94273	0,00484	456	94045	2837958	30,10
45	93817	0,00534	501	93566	2743914	29,25
46	93316	0,00589	550	93041	2650348	28,40
47	92766	0,00650	603	92464	2557307	27,57
48	92162	0,00716	660	91832	2464843	26,74
49	91502	0,00788	721	91142	2373011	25,93
50	90781	0,00866	786	90388	2281869	25,14

Trwanie życia w 2009 r.

57

TABL. A. TABLICA TRWANIA ŻYCIA 2009 (cd.)
LIFE TABLE OF POLAND 2009 (cont.)

Wiek Age	Liczba dożywających Number of survivors	Prawdopodobień- stwo zgonu Probability of dying	Liczba zmarłych Number deceased	OGÓLEM TOTAL		MEŻCZYŹNI MALES
				Ludność stacjonarna Stationary population		Przeciętne dalsze trwanie życia Life expectancy
				w wieku x at age x	skumulowana cumulated	
x	l_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x
51	89995	0,00949	854	89568	2191481	24,35
52	89141	0,01038	925	88679	2101913	23,58
53	88216	0,01133	1000	87716	2013234	22,82
54	87216	0,01234	1076	86678	1925518	22,08
55	86140	0,01341	1155	85563	1838840	21,35
56	84985	0,01453	1235	84367	1753277	20,63
57	83750	0,01571	1316	83092	1668910	19,93
58	82434	0,01695	1397	81735	1585818	19,24
59	81037	0,01824	1478	80298	1504083	18,56
60	79559	0,01958	1557	78780	1423785	17,90
61	78001	0,02097	1636	77183	1345005	17,24
62	76365	0,02244	1713	75509	1267821	16,60
63	74652	0,02397	1789	73757	1192313	15,97
64	72863	0,02559	1865	71930	1118555	15,35
65	70998	0,02731	1939	70028	1046625	14,74
66	69059	0,02915	2013	68052	976596	14,14
67	67045	0,03113	2087	66002	908544	13,55
68	64958	0,03327	2161	63878	842543	12,97
69	62797	0,03559	2235	61680	778665	12,40
70	60562	0,03814	2310	59407	716985	11,84
71	58253	0,04094	2385	57060	657578	11,29
72	55868	0,04405	2461	54637	600518	10,75
73	53407	0,04751	2537	52138	545880	10,22
74	50870	0,05138	2614	49563	493742	9,71
75	48256	0,05572	2689	46911	444179	9,20
76	45567	0,06057	2760	44187	397267	8,72
77	42807	0,06596	2823	41395	353080	8,25
78	39984	0,07191	2875	38546	311685	7,80
79	37108	0,07844	2911	35653	273139	7,36
80	34198	0,08555	2925	32735	237486	6,94
81	31272	0,09323	2915	29814	204751	6,55
82	28357	0,10148	2878	26918	174937	6,17
83	25479	0,11030	2810	24074	148019	5,81
84	22669	0,11971	2714	21312	123945	5,47
85	19955	0,12973	2589	18661	102633	5,14
86	17366	0,14041	2438	16147	83972	4,84
87	14928	0,15176	2265	13795	67825	4,54
88	12662	0,16386	2075	11625	54030	4,27
89	10587	0,17676	1871	9652	42405	4,01
90	8716	0,19041	1660	7886	32754	3,76
91	7056	0,20512	1447	6333	24868	3,52
92	5609	0,22063	1237	4990	18535	3,30
93	4371	0,23694	1036	3854	13545	3,10
94	3336	0,25406	847	2912	9691	2,91
95	2488	0,27196	677	2150	6779	2,72
96	1812	0,29063	526	1548	4629	2,56
97	1285	0,31004	398	1086	3081	2,40
98	887	0,33015	293	740	1995	2,25
99	594	0,35093	208	490	1255	2,11
100	385	0,37234	144	314	765	1,99

Life tables of Poland 2009

APPROXIMATION OF SURVIVAL FUNCTION FOR HETEROGENEITY POPULATION

Summary: For long time demographers and actuaries have been deliberating a problem of the laws of life. A number of proposed survival functions turned out to be unsatisfactory when applying them empirically. One of the ways to overcome the difficulties is to modify the general survival functions by introducing an additional patten characterizing frailty of individuals. The other way is to use the mixture of an appropriate distributions. In this contribution we applied the second approach to determine the survival time of men in the Polish population in 2009.

Keywords: lifetime, mixture of distribution, heterogeneity.