PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics

254

Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski

Redaktorzy naukowi
Krzysztof Jajuga
Wanda Ronka-Chmielowiec

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2012

Recenzenci: Diarmuid Bradley, Jan Czekaj, Marek Gruszczyński, Jacek Lisowski, Paweł Miłobędzki, Włodzimierz Szkutnik, Mirosław Szreder, Adam Szyszka, Waldemar Tarczyński, Stanisław Wieteska, Tomasz Wiśniewski

Redaktor Wydawnictwa: Aleksandra Śliwka

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-293-2

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 254 • 2012
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski ISSN 1899-3192

Jacek Białek
Uniwersytet Łódzki

ZASTOSOWANIE STATYSTYCZNYCH INDEKSÓW ŁAŃCUCHOWYCH DO OCENY PRZECIĘTNEGO ZWROTU GRUPY OFE

Streszczenie: W niniejszym artykule proponuje się wykorzystanie indeksów łańcuchowych do oszacowania przeciętnej stopy zwrotu grupy OFE. Okazuje się, że znane z literatury definicje przeciętnego zwrotu bazują na pewnych łańcuchowych indeksach statystycznych. Ogólnie wybrane formuły łańcuchowe nie tylko spełniają postulaty Gajka i Kałuszki, ale również uwzględniają cały badany interwał czasowy, a nie jedynie jego krańce.

Słowa kluczowe: przeciętna stopa zwrotu OFE, indeksy łańcuchowe, martyngał.

1. Wstęp

W polskim prawie[1] obowiązuje definicja przeciętnej stopy zwrotu grupy OFE, która wyznacza tzw. minimalny zwrot dla funduszy. Ryzyko uzyskania stopy zwrotu za ostatnie 36 miesięcy mniejszej od wymaganego ustawowo minimum pociąga za sobą poważne konsekwencje finansowe. Zgodnie z polskim prawem w sytuacji takiej fundusz jest zobligowany do pokrycia powstałego deficytu[2]. Jednak jak pokazali Gajek i Kałuszka [2000] – miara przeciętnej stopy zwrotu nie spełnia pewnych ekonomicznie zasadnych postulatów. W literaturze przedmiotu można znaleźć definicje alternatywne (por. [Gajek, Kałuszka 2001; Białek 2005]). W niniejszym artykule proponuje się jednak wykorzystanie statystycznych indeksów łańcuchowych do oszacowania przeciętnego zwrotu grupy OFE. Okazuje się, że wspomniane wcześniej alternatywne definicje stanowią pewne szczególne, łańcuchowe indeksy staty-

[1] DzU nr 139, poz. 934, art. 173.

[2] Obecnie, od 1 kwietnia 2004 r., środki na pokrycie niedoboru mają pochodzić w pierwszej kolejności z umorzenia jednostek rozrachunkowych zgromadzonych na rachunku rezerwowym, następnie z umorzenia jednostek rozrachunkowych zgromadzonych na rachunku części dodatkowej Funduszu Gwarancyjnego. Jeżeli środki te nie są wystarczające, pokrycie niedoboru następuje kolejno ze środków własnych PTE, a jeżeli i te środki nie wystarczają, z pozostałych środków Funduszu Gwarancyjnego, z zastrzeżeniem, że w pierwszej kolejności pokrywany jest on ze środków części podstawowej Funduszu Gwarancyjnego. Ostatecznym gwarantem pokrycia niedoboru jest Skarb Państwa.

styczne. Ogólnie wybrane formuły łańcuchowe nie tylko spełniają postulaty Gajka i Kałuszki, ale również uwzględniają cały badany interwał czasowy, a nie jedynie jego krańce. Okazuje się również, iż przy traktowaniu procesów cen jednostek uczestnictwa jako pewnych procesów stochastycznych założenie, że są to martyngały, wystarcza, aby własność tę przenieść również na wybrane, proponowane formuły łańcuchowe. Można dowieść (por. [Gajek, Kałuszka 2001]), że definicja polska nie stanowi w tym przypadku martyngału, co wydaje się nienaturalne.

Jak wspomniano, definicja polska przeciętnego zwrotu OFE bierze pod uwagę jedynie krańcowe momenty czasowe trzyletniego interwału czasowego. Ma ona postać:

$$\overline{r}_0(T_1,T_2)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i(T_1,T_2)\cdot\left(\frac{A_i(T_1)}{\sum_{i=1}^{n}A_i(T_1)}+\frac{A_i(T_2)}{\sum_{i=1}^{n}A_i(T_2)}\right), \tag{1}$$

gdzie: n – liczba funkcjonujących funduszy emerytalnych,

$[T_1,T_2]$ – rozważany interwał czasowy, dla którego mierzymy przeciętny zwrot,

$r_i(T_1,T_2)$ – stopa zwrotu *i*-tego funduszu liczona jako względny przyrost wartości jednostki uczestnictwa tego funduszu w czasie $[T_1,T_2]$,

$A_i(t)$ – aktywa netto *i*-tego funduszu w chwili *t*.

Do końca marca 2004 r. średnia ważona stopa zwrotu obliczana była na ostatni dzień roboczy każdego kwartału i obejmowała 24 miesiące poprzedzające ten dzień. Po zmianie przepisów stopa ta obliczana jest co 6 miesięcy, na ostatni dzień roboczy marca i września, za 36 miesięcy poprzedzających ten dzień. Sam fakt, iż definicja (1) bierze pod uwagę jedynie momenty T_1 i T_2, sztucznie kreuje zachowanie OFE w pobliżu miesiąca ich oceny. Poza tym, jak wspomniano, miara polska nie spełnia przynajmniej trzech postulatów Gajka i Kałuszki, m.in. nie zachowuje się tak, jak klasyczna stopa procentowa w procencie składanym[3]. Dlatego nasza uwaga w niniejszym artykule koncentruje się na konstrukcji miary przeciętnego zwrotu, która pozbawiona byłaby opisanych wyżej niedogodności. Dodajmy, iż w pracy pomijamy omówienie najczęściej pojawiających się zarzutów wobec idei przeciętnego zwrotu OFE i minimalnego zwrotu. Miary te *de facto* nie biorą pod uwagę ryzyka inwestycyjnego, nie generują zdrowej konkurencji na rynku OFE i nie stanowią – jak się okazuje – wystarczającego bodźca dla lepszych inwestycji funduszy. Niemniej jednak ze względu na to, iż wspomniana ustawa nadal obowiązuje, ograniczymy rozwa-

[3] Jedną z pożądanych własności stóp procentowych jest, aby spełniały relację: $1+r(T_1,T_2)=$ $=[1+r(T_1,t)][1+r(t,T_2)]$.

żania do tematu określonego w tytule niniejszej pracy. W analogii do teorii indeksów przyjmiemy, że OFE stanowią pewien agregat składających się z n różnych komponentów, wyrażonych w dowolnej chwili t przez ceny jednostek rozrachunkowych $p_i(t)$ i ilości $q_i(t)$, gdzie $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

2. Statystyczne indeksy łańcuchowe

Indeksy statystyczne służą analizie dynamiki zjawisk masowych, które porównujemy w dwóch momentach czasowych: badanym T_1 i bazowym T_2. Ich praktyka sięga blisko 300 lat – jednym z pierwszych, który zaczął je stosować, był francuski ekonomista Dutot ze słynną pracą *Reflexions politiques sur les finances et le commerce* (1738). Postawiono przed nim problem oszacowania inflacji dla lat 1515-1735 na dworze Ludwika XV.

Dutot zaproponował wówczas koszyk dóbr (obejmował m.in. ceny kurczaka, królika, gołębia, stogu siana, dzienne wynagrodzenie mężczyzn i kobiet (ceny usług)) i jako pierwszy zaproponował uśrednienie cen:

$$I_{Du}^{P}(T_1, T_2) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i(T_2)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i(T_1)}. \tag{2}$$

Kolejne propozycje indeksów były również formułami nieważonymi – wymienić tu można indeks Carli (1764), Drobischa (1871) czy Jevonse'a (1863). Dziś już wiemy, że tego typu proste, nieważone formuły sprawdzają się tylko w nielicznych sytuacjach. Co więcej, nie spełniają one wymogów (aksjomatów) wobec poprawnej formuły indeksów, tzw. testów (por. [Fisher 1922; Balk 1995]). Kolejną grupą indeksów były więc formuły doskonalsze, bo ważone. Wymienić można tu znane indeksy Laspeyresa (1864), Paaschego (1874) czy Törnqvista (1936). Krokiem milowym w teorii indeksów była praca [Fisher 1922], w której autor po raz pierwszy na tak szeroką skalę zaczął wykorzystywać wspomniane testy do poszukiwań idealnej formuły indeksu. W ten sposób Fisher zaproponował m.in. własną formułę, stanowiącą średnią geometryczną z indeksów Laspeyresa i Paaschego. Ale również ciekawym kierunkiem rozwoju teorii indeksów okazało się podejście [Divisia 1925], w którym bierze się pod uwagę nie tylko te dwa skrajne momenty czasowe T_1 i T_2, ale również wszystkie momenty pośrednie, tzn.: $T_1 + 1,\ T_1 + 2, ..., T_2 - 1$. Indeks cenowy $\widetilde{I}^{P}$ tworzy się tu jako iloczyn indeksów dla „połączonych" okresów, tzn.

$$\widetilde{I}^{P}(T_1, T_2) = \prod_{\tau=T_1}^{T_2-1} I^{P}(\tau, \tau+1), \tag{3}$$

gdzie $I^P(\tau,\tau+1)$ – jest dowolną formułą indeksu cenowego porównującego okresy τ i $\tau+1$ (może to być formuła zarówno ważona, jak i nieważona).

3. Miary przeciętnego zwrotu OFE jako warianty indeksów łańcuchowych

W niniejszej pracy postuluje się, aby przeciętny zwrot OFE $\bar{r}(T_1,T_2)$ wyznaczać jako

$$\bar{r}(T_1,T_2)=\tilde{I}^P(T_1,T_2)-1, \tag{4}$$

gdzie $\tilde{I}^P(T_1,T_2)$ jest pewną formułą cenowego indeksu łańcuchowego określonego formułą (3). Okazuje się, że postać (4) przeciętnego zwrotu OFE jest o tyle zasadna, iż dla pewnych szczególnych przypadków indeksów $I^P(\tau,\tau+1)$ uzyskuje się znane z literatury, alternatywne propozycje przeciętnej stopy zwrotu funduszy. Załóżmy więc najpierw, że rozważamy łańcuchowy indeks cen Laspeyresa dany formułą

$$\tilde{I}^P_{La}(T_1,T_2)=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1} I^P_{La}(\tau,\tau+1), \tag{5}$$

gdzie $I^P_{La}(\tau,\tau+1)$ jest cenowym indeksem Laspeyresa określonym jako (por. [Białek, Depta 2010])

$$I^P_{La}(\tau,\tau+1)=\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau+1)}{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau)}. \tag{6}$$

Zauważmy, iż zgodnie ze wzorem (4) przeciętny zwrot OFE wyznaczać będziemy wówczas zgodnie z następującą formułą (dla odróżnienia przypadku wprowadzimy oznaczenie $\bar{r}_{La}$):

$$\bar{r}_{La}(T_1,T_2)=\tilde{I}^P_{La}(T_1,T_2)-1=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1} I^P_{La}(\tau,\tau+1)-1=$$

$$=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1}\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau+1)}{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau)}-1=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\tau)p_i(\tau)}{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau)}\cdot\frac{p_i(\tau+1)}{p_i(\tau)}\right)-1= \tag{7}$$

$$=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\tau)p_i(\tau)}{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau)}\cdot\frac{p_i(\tau+1)-p_i(\tau)}{p_i(\tau)}\right)-1=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}A_i^*(\tau)r_i(\tau,\tau+1)\right)-1,$$

gdzie: $A_i^*(\tau)$ oznacza relatywny udział aktywów netto i-tego funduszu w chwili τ, tzn.

$$A_i^*(\tau) = \frac{q_i(\tau)p_i(\tau)}{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau)}, \tag{8}$$

natomiast $r_i(\tau, \tau+1)$ jest stopą zwrotu i-tego funduszu zrealizowaną w przedziale czasu $[\tau, \tau+1]$, a więc liczoną według wzoru

$$r_i(\tau, \tau+1) = \frac{p_i(\tau+1) - p_i(\tau)}{p_i(\tau)}. \tag{9}$$

Zauważmy, iż formuła (7) stanowi definicję przeciętnego zwrotu OFE zaproponowaną przez Gajka i Kałuszkę (por. [Gajek, Kałuszka 2001]). W cytowanej pracy dowodzi się m.in. następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1

Miara określona wzorem (7) spełnia wszystkie postulaty Gajka i Kałuszki[4]. Co więcej, jeśli $\{p_i(\tau) : \tau = 0,1,2,...\}$ jest $\mathbb{F}$–martyngałem dla każdego i, wtedy $\{\overline{r}_{La}(0,\tau) : \tau = 0,1,2,...\}$ jest również $\mathbb{F}$–martyngałem.

Załóżmy teraz, że rozważamy łańcuchowy logarytmiczny indeks cen Laspeyresa dany formułą

$$\widetilde{I}_{LL}^{P}(T_1, T_2) = \prod_{\tau=T_1}^{T_2-1} I_{LL}^{P}(\tau, \tau+1), \tag{10}$$

gdzie $I_{LL}^{P}(\tau, \tau+1)$ jest cenowym logarytmicznym indeksem Laspeyresa określonym jako (por. [von der Lippe 2010]):

$$I_{LL}^{P}(\tau, \tau+1) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i(\tau+1)}{p_i(\tau)} \right)^{A_i^*(\tau)}. \tag{11}$$

Zauważmy, iż zgodnie ze wzorem (4) przeciętny zwrot OFE wyznaczać będziemy wówczas zgodnie z następującym wzorem (dla odróżnienia przypadku wprowadzimy oznaczenie[5] $\overline{r}_{LL}$):

---

[4] Omówienie postulatów Gajka i Kałuszki byłoby zbyt obszerne. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do oryginalnej pracy [Gajek, Kałuszka 2001] bądź prac: [Białek 2005; Domański (red.) 2011].

[5] Podobnie formuły oparte na indeksie Paaschego oznaczylibyśmy odpowiednio $\overline{r}_{Pa}(T_1, T_2)$ i $\overline{r}_{LPa}(T_1, T_2)$.

$$\overline{r}_{LL}(T_1,T_2)=\tilde{I}^P_{LL}(T_1,T_2)-1=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1} I^P_{LL}(\tau,\tau+1)-1=\prod_{\tau=T_1}^{T_2-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i(\tau+1)}{p_i(\tau)}\right)^{A_i^*(\tau)}-1=$$

$$=\prod_{t=T_1}^{T_2-1}\exp\left(\ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i(t+1)}{w_i(t)}\right)^{A_i^*(t)}\right)-1=\prod_{t=T_1}^{T_2-1}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^*(\tau)\ln\left(\frac{w_i(t+1)}{w_i(t)}\right)\right)-1. \quad (12)$$

Zauważmy, iż formuła (12) stanowi definicję przeciętnego zwrotu OFE zaproponowaną przez Białka (por. [Białek 2005]). Omówienie jej własności znaleźć można w pracach [Białek 2009; Domański (red.) 2011]. Można pokazać, iż miara ta spełnia postulaty Gajka i Kałuszki. Ponadto w przypadku stochastycznym dowodzi się (por. [Białek 2005]) następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2

Jeśli każdy proces $\{p_i(\tau):\tau=0,1,2,...\}$ jest $\mathbb{F}$–martyngałem dla każdego i, oraz z prawdopodobieństwem równym jeden zachodzi[6]:

$$\sum_{i=1}^{n}A_i^*(\tau)\ln\frac{w_i(\tau+1)}{w_i(\tau)}\geq 0,\ \text{dla każdego}\ \tau\,, \quad (13)$$

wtedy $\{\overline{r}_{LL}(0,\tau):\tau=0,1,2,...\}$ jest również $\mathbb{F}$–martyngałem.

Jak pokazują formuły (7) i (12), poprawną w sensie ekonomicznych postulatów definicję przeciętnego zwrotu daje się wyrazić przez statystyczne indeksy łańcuchowe cen. W ten sposób można by stworzyć jednak bardzo wiele różnych wersji przeciętnego zwrotu. Pamiętać jednak należy, iż znane indeksy łańcuchowe często pozostają w ścisłych relacjach względem siebie. Z punktu widzenia klientów OFE poszukiwać powinniśmy miary, która daje jak największe wskazania (bo podnosimy w ten sposób minimalny próg rentowności dla OFE). W interesie funduszy z kolei jest, by miara ta generowała możliwie niskie wartości. Problem jest więc otwarty i trudny. Biorąc pod uwagę prezentowane tu miary $\overline{r}_{La}$ i $\overline{r}_{LL}$ oraz uwzględniając relacje, jakie zachodzą pomiędzy indeksem Laspeyresa cen a jego logarytmiczną wersją, uzyskujemy wniosek, iż

$$\overline{r}_{LL}(T_1,T_2)\leq\overline{r}_{La}(T_1,T_2). \quad (14)$$

[6] Warunek ten oznacza, iż w rozważanym czasie na rynku OFE przeważają wzrosty notowań cen jednostek nad spadkami. Jest to więc naturalny wymóg, ale tylko w okresie prosperity.

4. Przypadek czasu ciągłego

W pracy [Divisia 1925] autor zaproponował model czasu ciągłego dla konstrukcji agregatowych indeksów cen i ilości. Załóżmy, że procesy cen $p_i(\tau)$, ilości $q_i(\tau)$ i przez to wartości komponentów $v_i(\tau) = p_i(\tau)q_i(\tau)$ są ciągłymi funkcjami na przedziale $[T_1, T_2]$. Funkcja całkowitej wartości komponentów agregatu w chwili τ to[7]:

$$V(\tau) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\tau)q_i(\tau) = P(\tau)Q(\tau) \cdot \tag{15}$$

Zakładając dodatkowo różniczkowalność rozważanych funkcji, otrzymujemy:

$$\frac{dV(\tau)}{V(\tau)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)dp_i(\tau)}{V(\tau)} + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(\tau)dq_i(\tau)}{V(\tau)} \cdot \tag{16}$$

Pierwszy z czynników występujących po prawej stronie (16) odpowiada za zmianę cen, drugi za zmianę liczby komponentów. Divisia definiuje więc sumaryczną cenę:

$$P(T_2) = P(T_1)\exp\left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i'(\tau)}{V(\tau)} d\tau \right) \cdot \tag{17}$$

A zatem zgodnie z Divisia otrzymujemy następującą formułę indeksu cenowego:

$$\tilde{I}_{Div}^{P}(T_1, T_2) = \frac{P(T_2)}{P(T_1)} = \exp\left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i'(\tau)}{V(\tau)} d\tau \right). \tag{18}$$

Zauważmy, iż zgodnie ze wzorem (4) przeciętny zwrot OFE wyznaczać będziemy w tym przypadku zgodnie z następującą formułą (dla odróżnienia przypadku wprowadzimy oznaczenie $\overline{r}_{Div}$):

$$\overline{r}_{Div}(T_1, T_2) = \tilde{I}_{Div}^{P}(T_1, T_2) - 1 = \exp\left(\int_{T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\tau)p_i(\tau)}{\sum_{i=1}^{n} q_i(\tau)p_i(\tau)} \frac{p_i'(\tau)}{p_i(\tau)} d\tau \right) - 1 . \tag{19}$$

[7] Sumaryczna cena *P* i sumaryczna ilość *Q* to wielkości bezpośrednio nieobserwowalne.

Oznaczmy teraz funkcję $\delta_i(\tau)$ określającą chwilowy, względny przyrost ceny komponentu:

$$\delta_i(\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0^+} \frac{p_i(\tau + \Delta\tau) - p_i(\tau)}{p_i(\tau)\Delta\tau} = \frac{d}{d\tau} \ln p_i(\tau). \tag{20}$$

Wobec (19) i (20) otrzymujemy:

$$\overline{r}_{Div}(T_1, T_2) = \exp[\int_{T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^{n} A_i^*(\tau)\delta_i(\tau)d\tau] - 1. \tag{21}$$

Okazuje się zatem, iż również w przypadku czasu ciągłego zastosowanie formuły indeksu statystycznego do określenia przeciętnego zwrotu OFE prowadzi do konstrukcji znanej z literatury przedmiotu. W tym przypadku definicja (21) jest identyczna z propozycją przeciętnej stopy zwrotu funduszy przedstawionej w pracy [Gajek, Kałuszka 2000].

5. Badanie empiryczne

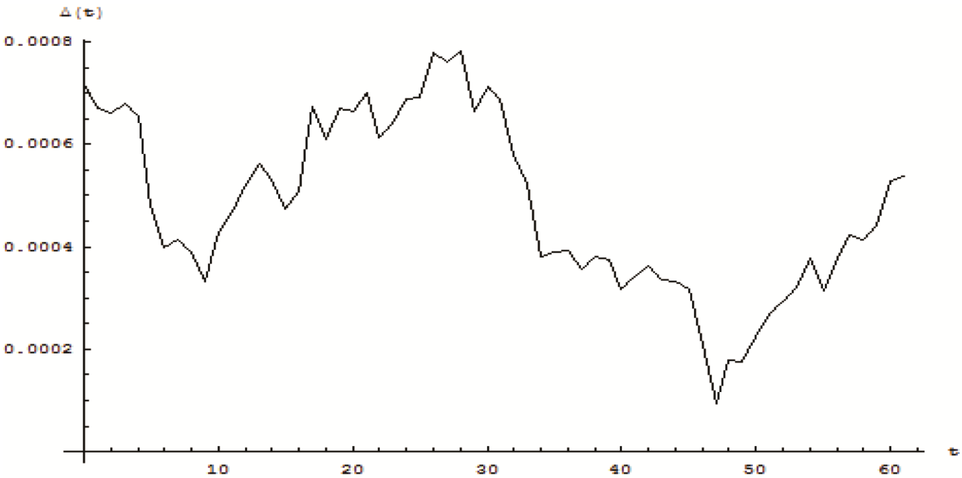
Badaniem empirycznym objęto okres I 2003-I 2011. Sprawdzono, jakie różnice wartości mogą wystąpić pomiędzy wskazaniami miar przeciętnego zwrotu opartych na różnych indeksach łańcuchowych. W badaniu uwzględniono dane miesięczne. Tabela 1 prezentuje uzyskane wyniki dla wybranych trzyletnich podokresów.

Tabela 1. Porównanie miar przeciętnego zwrotu dla okresu I 2003-I 2011

Formuła	Przeciętny zwrot dla wybranych trzyletnich podokresów $[T_1, T_2]$					
	I 2003- -I 2006	I 2004- -I 2007	I 2005- -I 2008	I 2006- -I 2009	I 2007- -I 2010	I 2008- -I 2011
$\overline{r}_0(T_1,T_2)$	39,35%	50,80%	53,88%	33,23%	–5,79%	0,86%
$\overline{r}_{La}(T_1,T_2)$	39,30%	50,77%	53,83%	33,20%	–5,79%	0,82%
$\overline{r}_{LLa}(T_1,T_2)$	39,28%	50,75%	53,82%	33,19%	–5,81%	0,81%
$\overline{r}_{Pa}(T_1,T_2)$	39,31%	50,77%	53,83%	33,19%	–5,79%	0,82%
$\overline{r}_{LPa}(T_1,T_2)$	39,33%	50,79%	53,84%	33,21%	–5,78%	0,83%

Źródło: obliczenia własne w Mathematica 4.1.

Widać, iż wskazania przeciętnej stopy zwrotu stosowanej w polskim ustawodawstwie są większe od wskazań pozostałych miar, opartych na indeksach łańcuchowych. Różnice pomiędzy wartościami prezentowanych formuł są bardzo niewielkie. Jednak biorąc pod uwagę wielomiliardowe aktywa netto OFE, należy stwierdzić, że różnica finansowa dla funduszu, który nie osiągnął minimalnego zwrotu i musi pokryć powstały deficyt, może być już wymierna. Rysunek 1 prezentuje zmieniającą się w czasie różnicę trzyletnich stóp zwrotu, z których pierwsza wyznaczana jest zgodnie z ustawą, druga zaś oparta jest na łańcuchowym, logarytmicznym indeksie Laspeyresa.



Rys. 1. Wykres różnicy $\Delta(t) = \overline{r}_0(t, t+36) - \overline{r}_{LLa}(T_1, T_2)$ dla całego okresu I 2003-I 2011

Źródło: opracowanie własne.

6. Wnioski

Definicja przeciętnego zwrotu OFE proponowana przez ustawodawstwo polskie nie spełnia pewnych, ekonomicznie zasadnych postulatów. Miary przeciętnego zwrotu oparte na wybranych indeksach łańcuchowych nie tylko spełniają wymogi Gajka i Kałuszki, ale również charakteryzują się z reguły minimalnie niższymi wartościami w stosunku do miary $\overline{r}_0$. W obliczu ewentualnego deficytu w stosunku do wymagalnego, minimalnego zwrotu sytuacja taka może nieść wymierne konsekwencje finansowe dla funduszy emerytalnych. Problemem otwartym nadal pozostałby jednak wybór odpowiedniej formuły indeksu łańcuchowego.

Literatura

Balk M., *Axiomatic price index theory: a survey*, „International Statistical Review” 1995, no 63.

Białek J., *Jak mierzyć rentowność grupy funduszy emerytalnych? Model stochastyczny*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko’05*, red. T. Trzaskalik, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2005.

Białek J., *New Definition of the Average Rate of Return of a Group of Pension Funds,* [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting and Decision-Making*, WUŁ, Łódź 2009.

Białek J., Depta A., *Statystyka dla studentów z programem STAT_STUD 1.0„* Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2010.
Divisia F., *L'indice montaire et la theorie de la monnaie,* „Revue d'Economique Politique " 1925.
Domański Cz. (red.), *Nieklasyczne metody oceny efektywności i ryzyka. Otwarte Fundusze Emerytalne*, PWE, Warszawa 2011.
Fisher I., *The Making of Index Numbers*, Houghton Mifflin, Boston 1922.
Gajek L., Kałuszka M., *On the average return rate for a group of investment funds,* "Acta Universitas Lodziensis, Folia Oeconomica" nr 152, Łódź 2000.
Gajek L., Kałuszka M., *On Some Properties of the Average Rate of Return – a Discrete Time Stochastic Model,* (praca nieopublikowana) 2001.
Törnqvist L., *The Bank of Finland's Consumption Price Index*, "Bank of Finland Monthly Bulletin" 1936, no 10.
von der Lippe P., *Index Theory and Price Statistics*, Peter Lang, Frankfurt, Germany 2007.

THE APPLICATION OF CHAIN INDICES TO EVALUATE THE AVERAGE RATE OF RETURN OF A GROUP OF OPEN PENSION FUNDS

Summary: In the article we propose the application of chain indices to evaluate the average rate of return of a group of Open Pension Funds. We show that some definitions of the average return, known from the literature, are based on some chain indices. In general, the discussed chain formulas not only satisfy the postulates given by Gajek and Kałuszka, but also take into consideration the whole considered time interval.

Keywords: average rate of return of Open Pension Funds, chain indices, martingale.