

# **Problemy fizyki matematycznej**

**Jadwiga Jędrzejczyk-Kubik  
Jerzy Wyrwał**

**OPOLE 2007**

<b>WSTĘP</b> .....	5
<b>1. FORMUŁOWANIE PROBLEMÓW FIZYKI MATEMATYCZNEJ</b>	
(Jadwiga Jędrzejczyk-Kubik).....	7
1.1. Bilanse zagadnień fizyki.....	7
1.2. Równania tworzące.....	13
1.3. Warunki brzegowe i początkowe.....	20
1.4. Problem brzegowy dla dyfuzji masy.....	21
1.5. Problem brzegowy dla przewodnictwa cieplnego.....	22
1.6. Problem brzegowy teorii sprężystości.....	23
1.7. Zadanie brzegowe elektrostatyki.....	24
1.8. Zadanie brzegowe dla przepływowego pola elektrycznego.....	24
<b>2. WARIACYJNE FORMUŁOWANIE PROBLEMÓW MECHANIKI</b>	
(Jerzy Wyrwał).....	27
2.1. Aksjomaty przestrzeni HILBERTA.....	27
2.2. Operator. Funkcjonał. Różniczka GÂTEAUX operatora.....	33
2.3. Gradient funkcyjonału. Operator potencjalny.....	38
2.4. Twierdzenie WAINBERGA.....	41
2.5. Równania teorii sprężystości i lepkosprężystości.....	48
2.6. Funkcjonały teorii sprężystości (LAGRANGE'A, REISSNERA, HU-WASHIZU) .	51
2.7. Uogólnienie funkcyjonału liniowej sprężystości na zadania lepkosprężystości.....	57
2.8. Funkcjonał dla problemu wymiany ciepła w ośrodku ciągłym.....	58
<b>3. UOGÓLNIONE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH</b>	
(Jadwiga Jędrzejczyk-Kubik).....	63
3.1. Funkcje podstawowe.....	64
3.2. Dystrybucje.....	66
3.3. Różniczkowanie dystrybucji.....	68
3.4. Splot dystrybucji.....	70
3.5. Uogólnione rozwiązania równań różniczkowych.....	71
3.6. Transformaty FOURIERA dystrybucji temperowanych.....	74
3.7. Transformacje LAPLACE'A dystrybucji.....	80
3.8. Rozwiązania podstawowe równań różniczkowych zwyczajnych.....	81
3.9. Równanie przewodności cieplnej.....	83
3.10. Równanie falowe.....	85
3.11. Równanie LAPLACE'A.....	86
3.12. Rozwiązania podstawowe równań termosprężystości.....	86
<b>LITERATURA</b> .....	95
<b>STRESZCZENIA</b> .....	96

## Wstęp

Celem monografii jest zaprezentowanie przyszłym inżynierom metod i sposobów postępowania typowych dla współczesnej fizyki matematycznej. Jej aplikacyjny charakter narzucił specyficzne ujęcie tych zagadnień. Postępowanie takie charakteryzuje cały materiał przedstawiony w monografii.

Rozdział pierwszy poświęcony jest formułowaniu zagadnień początkowo-brzegowych fizyki matematycznej. Przedstawiono w nim równania bilansowe, równania tworzące oraz sposoby formułowania zadań brzegowych takich problemów technicznych, jak: dyfuzja masy, przewodzenie ciepła, przewodzenie prądu elektrycznego oraz naprężenia i odkształcenia ciał sprężystych.

W rozdziale drugim omówiono wariacyjne problemy termomechaniki. Po wprowadzeniu podstawowych definicji z zakresu analizy funkcjonalnej oraz takich niezbędnych pojęć, jak gradient funkcjonału, operator potencjalny i kluczowego w prezentowanym ujęciu problemu twierdzenia WAINBERGA, zamieszczono w nim liczne przykłady zastosowań wprowadzonego formalizmu do formułowania funkcjonałów wariacyjnych w przypadku zagadnień brzegowych teorii sprężystości, lepkosprężystości oraz przewodzenia ciepła.

W przypadku liniowych równań różniczkowych fizyki zasadnicze znaczenie mają rozwiązania fundamentalne. Sposób ich wyznaczania, uzyskiwanego w zakresie teorii dystrybucji, zaprezentowano w ostatnim, trzecim rozdziale. Obejmuje on zarówno równania eliptyczne i paraboliczne, typowe dla zagadnień przewodnictwa cieplnego, jak i równania falowe dynamicznej termosprężystości.

Monografia ta jest poprawioną i uzupełnioną wersją wykładów przedstawionych na studium podyplomowym z zakresu mechaniki konstrukcji, jakie odbyło się w latach 1982-83 w Instytucie Inżynierii Lądowej w Opolu. Wydaje się, że przedstawiona w niej tematyka (zawierająca też pewne oryginalne wyniki naszych ówczesnych badań) nie straciła nic ze swojej aktualności, pozostając ważnym elementem ogólnego wykształcenia współczesnego inżyniera budownictwa, dlatego zdecydowaliśmy się ją wydać w postaci monografii. Sądzymy też, że może ona poszerzyć ofertę dydaktyczną oraz zwiększyć potencjał naukowy wydziałów inżynierii uczelni politechnicznych, będąc pomocną w procesie kształcenia studentów i doktorantów tych wydziałów.

Autorzy

# 1. FORMUŁOWANIE PROBLEMÓW FIZYKI MATEMATYCZNEJ

Spotykane w różnych zagadnieniach fizyki i techniki równania różniczkowe dotyczą z reguły zjawisk występujących w określonych obszarach przestrzeni i interwałach czasu. Funkcje w nich występujące są więc co najmniej funkcjami dwóch zmiennych. Wynika stąd, że w prostych przypadkach będą to równania różniczkowe cząstkowe o stałych współczynnikach. Do tej klasy równań należą więc równania fizyki matematycznej, a w tym klasyczne równania przewodności cieplnej, dyfuzji, równania przemieszczeniowe teorii sprężystości, równania falowe, czy też równania elektrodynamiki.

Istnieje kilka sposobów wyprowadzania tych równań, a w szczególności:

- metoda bilansów dla różniczkowego elementu ciała i różniczkowego przyrostu czasu,
- wykorzystanie ogólnych równań bilansów, twierdzenia o dywergencji oraz równań fizycznych,
- wykorzystanie twierdzeń wariacyjnych.

W niniejszym rozdziale podamy przykłady wywodu równań z wykorzystaniem drugiego sposobu.

Oprócz równań różniczkowych zagadnień fizyki, które opisują ewolucję procesu fizycznego zachodzącą w najbliższym otoczeniu dowolnego punktu ośrodka, należy jeszcze dokonać lokalizacji problemu przez podanie odpowiednich warunków brzegowych i początkowych. Poszukuje się więc funkcji spełniających we wnętrzu obszaru równania, a na jego brzegu warunki brzegowe oraz początkowe.

Wprowadzenie równań różniczkowych fizyki matematycznej można więc podzielić na następujące etapy:

- sformułowanie bilansów problemu, które opisują jedynie wzajemne oddziaływanie pól;
- podanie równań tworzących, w których znajdują odzwierciedlenie różne właściwości fizyczne ciała;
- uzyskanie z bilansów i równań tworzących równań różniczkowych problemu;
- określenie lokalizacji zadań, tj. warunków brzegowych i początkowych.

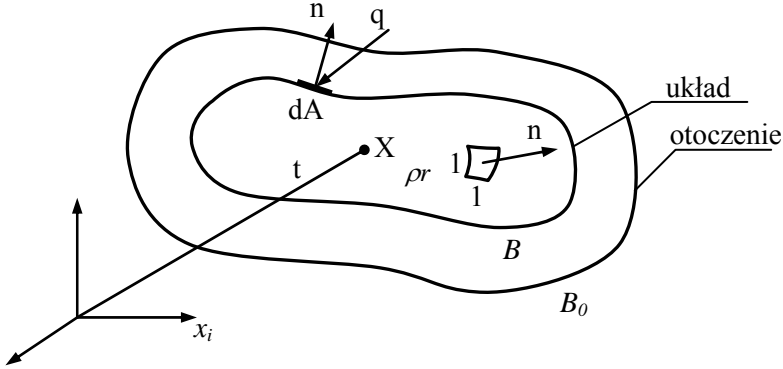
W wyniku takiego postępowania otrzymuje się równania zadań brzegowych fizyki matematycznej.

## 1.1. Bilanse zagadnień fizyki

Rozważania nasze ograniczymy do trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E_3$ , w której każdy punkt parametryzowany jest trójką liczb  $(x_1, x_2, x_3)$  – jego współrzędnych. Każdy z procesów będzie się odbywał w interwale  $[0, \infty)$ , przy czym  $\tau \in [0, \infty)$  jest dowolną chwilą procesu. Od funkcji występujących w

poszczególnych problemach będziemy wymagali, aby były funkcjami ciągłymi wraz z pochodnymi do odpowiedniego rzędu włącznie.

Przedmiotem naszych rozważań będzie ograniczony obszar  $B$  ciała  $B_0$ , który dla ustalonej chwili stanowi podobszar przestrzeni  $E_3$ ,  $B \subset B_0 \subset E_3$ .



**Rys. 1.1**

Obszar  $B$  zostanie ograniczony powierzchnią  $A$ , która stanowi skończoną sumę gładkich płatów powierzchni  $A = \bigcup_{(i)} A_i$ . Wektor jednostkowej normalnej

zewnętrznej oznaczmy przez  $\mathbf{n}$ . Ogólnie równania bilansu są konsekwencją następującego stwierdzenia: zmiana określonej wielkości fizycznej  $\mathbf{T}$  w całym obszarze  $B$  dokonuje się tylko w wyniku produkcji źródła  $\mathbf{R}$  lub też dopływu  $\mathbf{Q}$  z otoczenia obszaru  $B_0$ .

Zmianę wielkości  $\mathbf{T} = \int_B \mathbf{t}(x, t) dV$  w interwale  $(t, t + dt)$  aproksymuje różniczką

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t + dt) - \mathbf{T}(t) &= \int_{B'} \rho \mathbf{t}(x, t + dt) dV - \int_B \rho \mathbf{t}(x, t) dV \cong \\ &\cong \frac{d}{dt} \int_B \rho \mathbf{t}(x, t) dV dt, \end{aligned} \quad (1.1)$$

natomiast produkcję źródła w interwale  $(t, t + dt)$  określa funkcja

$$\mathbf{R} = \int_B \rho \mathbf{r}(x, t) dV dt. \quad (1.2)$$

W obu równaniach  $\rho$  oznacza gęstość w otoczeniu punktu  $x$  w obszarze  $B$ .

Dopływ wielkości bilansowanej do obszaru  $B$  przez powierzchnię  $A$  określa pole  $\mathbf{q}$ , które podaje ilość przepływającej wielkości przez jednostkę powierzchni określonej przez wektor normalnej  $\mathbf{n}$  w czasie  $(t, t + dt)$ . Pole to określa wielkość, (rys.1.1)

$$\mathbf{Q} = \int_A \mathbf{q}(x, t) \mathbf{n}(x) dA dt. \quad (1.3)$$

W efekcie ogólna postać bilansu dla obszaru  $B$  jest następująca

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \mathbf{t} dV dt = \left[ \int_B \rho \mathbf{r} dV - \int_A \mathbf{q} \mathbf{n} dA \right] dt, \quad (1.4)$$

a wobec dowolnego wyboru interwału  $(t, t + dt)$  otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \mathbf{t} dV = \int_B \rho \mathbf{r} dV - \int_A \mathbf{q} \mathbf{n} dA. \quad (1.5)$$

Znak minus w ostatniej całce wynika z przeciwnych zwrotów wektora normalnej zewnętrznej  $\mathbf{n}$  i wektora przepływu skierowanego do wnętrza obszaru  $B$ . Ostatnia całka jest całką powierzchniową, dla której słuszne jest twierdzenie GAUSSA o dywergencji

$$\int_A \mathbf{q} \mathbf{n} dA = \int_B \text{div} \mathbf{q} dV. \quad (1.6)$$

W rozważaniach naszych, pominiemy zmianę bilansowanej wielkości związaną z przemieszczaniem się rozpatrywanego elementu objętości  $B$  z pewną prędkością. Możemy więc przyjąć przemienność operacji różniczkowania i całkowania przestrzennego, czyli

$$\frac{d}{dt} \int_B (\cdot) dV = \int_B \frac{\partial (\cdot)}{\partial t} dV. \quad (1.6)_1$$

Po wykorzystaniu (1.6), (1.6)<sub>1</sub> i warunku ciągłości ośrodka, równanie bilansu przyjmie postać

$$\int_B \rho \frac{\partial t}{\partial t} dV = \int_B \rho r dV - \int_B \operatorname{div} \mathbf{q} dV, \quad (1.7)$$

z którego, wobec dowolnego wyboru obszaru  $B$ , otrzymamy lokalną postać bilansu

$$\rho \frac{\partial t}{\partial t} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.8)$$

Podane w ogólnej postaci bilanse zostaną teraz skonkretyzowane dla kilku różnych procesów fizycznych.

### **Przykład 1.** Dyfuzja masy w ciele stałym

Analizować będziemy proces migracji masy w obszarze  $B$  określony przez koncentrację  $\rho C(x, t)$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością ciała,  $C = \frac{\rho^\alpha}{\rho}$ ,  $\rho^\alpha$  - gęstością składnika dyfundującego. Strumień odpływającej przez powierzchnię masy oznaczymy symbolem  $\mathbf{j}$ , który jest ilością masy przepływającej przez jednostkowy płat powierzchni w jednostce czasu. Natomiast źródłem masy nazwiemy ilość masy powstającej lub pochłanianej w jednostce objętości szkieletu i jednostce czasu.

Poszukiwany bilans wielkości skalarnej  $C$  ma więc postać

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho C dV = \int_B \rho r dV - \int_A \mathbf{j} n dA \quad (1.9)$$

lub w zapisie lokalnym

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (1.10)$$

gdzie nosi on nazwę równania ewolucji dyfuzji (tzw. II prawo FICKA).

### **Przykład 2.** Przewodnictwo cieplne w ciele stałym

Przedmiotem rozważań będzie proces przepływu ciepła w ciele stałym  $B$ , ograniczonym powierzchnią  $A$ . Bilans energii będzie dotyczył zmian energii we-

wewnętrznej  $\rho U$ , które są wywołane działaniem źródła ciepła  $\rho r$  i dopływem ciepła  $\mathbf{q}$  z otoczenia obszaru  $B$ . Wielkość ta jest rozumiana jako ilość ciepła przepływającego przez jednostkowy płat powierzchni o normalnej  $\mathbf{n}$  w jednostce czasu. Natomiast  $\rho r$  jest ilością ciepła wytworzoną w jednostce objętości ciała i jednostce czasu.

Odpowiednie równania bilansu globalnego i lokalnego przyjmą formę

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho U dV = \int_V \rho r dV - \int_A \mathbf{q} \mathbf{n} dA \quad (1.11)$$

lub

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.12)$$

### Przykład 3. Równanie ruchu w ciele stałym

Omówimy zmiany pędu  $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  cząstek ciała  $B$  wywołane istnieniem źródeł pędu, którymi są siły masowe  $\rho \mathbf{F}$ , oraz strumieniem pędu. Strumieniem pędu są siły powierzchniowe  $\mathbf{P}$  działające na brzeg  $A$  ciała  $B$ . W odróżnieniu od poprzednich bilansów, które dotyczyły pól skalarnych, równanie bilansu pędu odnosi się do pól wektorowych, a strumień pędu  $\mathbf{P}$  zawiera również wielkość tensorową  $\sigma$  - symetryczny tensor naprężeń. Strumień  $\mathbf{P}$  z tensorem  $\sigma$  związany jest zależnością  $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{P}$ .

Posługując się wskaźnikowym zapisem wielkości wektorowych i tensorowych oraz przyjmując konwencję sumacyjną, zgodnie z którą powtórzenie wskaźnika w pewnym wyrażeniu oznacza sumowanie względem tego wskaźnika w całym jego zakresie, otrzymujemy następującą postać bilansu pędu

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} dV = \int_V \rho F_i dV + \int_A P_i dA, \quad (1.13)$$

czyli

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV = \int_V \left( \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV,$$



gdyż

$$\int_A P_i dA = \int_A \sigma_{ij} n_j dA .$$

Stąd

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{lub} \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} . \quad (1.14)$$

Szczególną postacią równań ruchu są równania równowagi, w których człon bezwładnościowy  $\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  zostaje pominięty. Uzyskujemy wówczas następujący układ trzech równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + \rho F_1 &= 0, \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + \rho F_2 &= 0, \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + \rho F_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

gdzie

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} = (\cdot)_{,j} .$$

Podane w tej postaci równania równowagi i ruchu są podstawą wszystkich rozważań prowadzonych w mechanice odkształcalnych ciał stałych.

#### **Przykład 4.** Zagadnienie elektrostatyki

Mimo że zmiennemu polu elektrycznemu zawsze towarzyszy pole magnetyczne, to jednak w szczególnych przypadkach można niezależnie analizować oba zagadnienia. Z przypadkiem takim mamy do czynienia m.in. wtedy, kiedy ładunki elektryczne znajdują się w spoczynku. Ściśle rzecz traktując, pole elektrostatyczne istnieje tylko w sensie makroskopowym, ponieważ cząstki elementarne będące składnikami atomów i drobin są zawsze w nieustannym ruchu. O spoczynku ładunków możemy więc mówić tylko w sensie makroskopowym.

W omawianym bilansie podstawowe znaczenie będzie miał wektor indukcji elektrycznej  $\mathbf{D}$ , który określanym jest jako ilość ładunków przepływających przez zorientowany jednostkowy płat powierzchni w jednostce czasu oraz źródło ła-

dunków  $\rho e$ , jako ilość ładunków powstających w jednostce czasu i objętości ośrodka.

Równania bilansu przyjmą postać bilansu globalnego

$$\int_V \rho e dV - \int_A \mathbf{D} \mathbf{n} dA = 0 \quad (1.16)$$

lub w ujęciu lokalnym

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho e, \quad D_{i,i} = \rho e. \quad (1.17)$$

### Przykład 5. Przepływowe pole elektryczne

W przypadku przepływów pól elektrycznych prądów stałych możemy również doprowadzić do rozseparowania zjawisk elektromagnetycznych towarzyszących przepływowi pól elektrycznych.

Podstawową wielkością występującą w bilansie przepływowych pól elektrycznych jest wektor gęstości prądu elektrycznego  $\mathbf{J}$ , który w bilansie występuje jako wektor przepływu. Jest on określany jako ilość prądu, która w jednostce czasu przepłynie przez zorientowany i jednostkowy płat powierzchni  $A$ .

Globalne równanie bilansu jest następujące:

$$\int_A \mathbf{J} \mathbf{n} dA = 0, \quad (1.18)$$

a jego odpowiednik lokalny ma postać

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad \text{lub} \quad J_{i,i} = 0. \quad (1.19)$$

Bilanse uzyskane w powyższych przykładach są tylko zastosowaniem ogólnego bilansu do konkretnych zjawisk fizycznych. Z drugiej strony jednak stanowią one podstawowe równania określające przebieg poszczególnych procesów, które po uzupełnieniu przez równania tworzące i warunki początkowo-brzegowe pozwolą na ostateczne sformułowanie prostych zadań brzegowych dla równań fizyki matematycznej.

## 1.2. Równania tworzące

Równania te stanowią drugi bardzo ważny element równań fizyki. Zauważmy, że równania bilansów określały ewolucje konkretnych procesów fizycznych niezależnie od odmiennych właściwości poszczególnych materiałów, a

więc odmiennej przewodności cieplnej, elektrycznej, czy też dyfuzyjnej. Wpływ różnorodnych cech materiału w makroskopowym ujęciu zagadnień fizyki ujmują równania tworzące, przy czym w najprostszym przypadku, są to zawsze równania liniowe. Istotnie, liniowymi są związki między strumieniami ciepła i masy a gradientami temperatury i stężeń, zwane prawami FOURIERA i FICKA, podobnie jak prawo HOOKE'A, które łączy liniowo tensory naprężeń z tensorami odkształceń.

W ogólnym przypadku liniowe równania fizyczne między parami wielkości wektorowych i tensorowych przyjmują postać:

– dla pól wektorowych

$$T_i = K_{ij} R_j, \quad (1.20)$$

– dla pól tensorowych w ciałach anizotropowych

$$T_{ij} = E_{ijkl} R_{kl}, \quad (1.21)$$

oraz w ciałach izotropowych

$$T_i = k \delta_{ij} R_j = k R_i, \quad (1.20)_1$$

$$T_{ij} = [E_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + E_3 \delta_{il} \delta_{jk}] R_{kl},$$

$$T_{ij} = E_1 \delta_{ij} R_{kk} + (E_2 + E_3) R_{ij}. \quad (1.21)_1$$

We wzorach powyższych stosowano konwencję sumacyjną, a  $\delta_{ij}$  jest tensorem jednostkowym - „delta” KRONECKERA.

Podamy z kolei ostateczną postać równań, w których uwzględnimy zarówno lokalne postacie bilansów, jak i równania tworzące.

### **Przykład 1.** Dyfuzja masy w ciele stałym

Równanie fizyczne łączy w tym przypadku strumień masy  $\mathbf{j}$  z gradientem stężenia  $C$  lub ogólniej potencjału chemicznego  $\mu$  i ma ono formę

$$\mathbf{j} = -D \text{grad } C, \quad (j_i = -D C_{,i}). \quad (1.22)$$

Jest więc równaniem tworzącym zachodzącym między parę pól wektorowych. Znak minus wynika z samorzutnej tendencji do wyrównywania stężeń w ciele, w efekcie której przepływ odbywa się w kierunku przeciwnym do wektora

gradientu stężenia. Symbolem  $D$  oznaczono tu współczynnik dyfuzji, który jest równy strumieniowi masy przy jednostkowym gradiencie stężenia.

Równanie fizyczne wraz z równaniem bilansu

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{j} \quad \text{i} \quad \mathbf{j} = -D \operatorname{grad} C ,$$

prowadzą do równania dyfuzji ( $\rho = \text{const.}$ ,  $D = \text{const.}$ )

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = \rho r - \operatorname{div}(\mathbf{j} = -D \operatorname{grad} C) = \rho r + D \nabla^2 C ,$$

$$\nabla^2 C = \frac{\rho}{D} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\rho}{D} r , \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} , \quad (1.23)$$

które z formalnego punktu widzenia jest niejednorodnym równaniem parabolicznym rzędu drugiego.

### Przykład 2. Przewodnictwo cieplne w ciele stałym

Przyjmując, że jedynym rodzajem energii wewnętrznej w ciele jest energia cieplna, otrzymamy zależność  $\rho \frac{\partial U}{\partial t} = T \rho \frac{\partial S}{\partial t}$ , gdzie  $T$  jest temperaturą ciała, a  $S$  jego entropią. W dalszej kolejności entropia  $S$  wyraża się zależnością  $\rho \frac{\partial S}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ , gdzie  $c$  jest ciepłem właściwym. Równanie to jest pierwszym równaniem tworzącym w zagadnieniach przepływu ciepła. Natomiast drugie równanie otrzymujemy analogicznie jak w zagadnieniach dyfuzji, przez porównanie strumienia ciepła  $\mathbf{q}$  z gradientem temperatury. Wykorzystujemy tu fakt, że przepływ ciepła następuje z miejsc o wyższej temperaturze w kierunku niższej. Jest więc przeciwnie skierowany do gradientu temperatury. Równanie to ma postać

$$\mathbf{q} = -K \operatorname{grad} T , \quad (1.24)$$

zależności między dwoma polami wektorowymi.

Zamiast temperaturą wygodniej jest operować jej przyrostem  $\Theta = T - T_0$ , gdzie  $T_0$  jest temperaturą stanu odniesienia, a  $T$  aktualną temperaturą ciała.

Komplet równań tworzących ma więc postać

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = T_0 \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad \text{i} \quad \mathbf{q} = -K \text{ grad } \Theta \quad (q_i = -K \Theta_{,i}),$$

a równanie bilansu przyjmie formę

$$T_0 \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \rho r - \text{div}(-K \text{ grad } \Theta) = \rho r + K \nabla^2 \Theta.$$

W efekcie końcowym równanie przewodnictwa jest następujące

$$\nabla^2 \Theta = \frac{\rho T_0 c}{K} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \rho \frac{r}{K}. \quad (1.25)$$

W równaniach tych  $K = \text{const.}$  jest współczynnikiem przewodności cieplnej, a  $\chi = \frac{K}{\rho} T_0 c$  - współczynnikiem wyrównywania temperatur.

### Przykład 3. Równania teorii sprężystości

W zagadnieniach mechaniki ośrodka odkształcalnego, do których należą również problemy mechaniki ciał sprężystych, znaczną rolę odgrywa wydzielenie z pola przemieszczeń  $u_i(x, t)$  ruchu sztywnego, nie wywołującego naprężeń w ciele, od odkształceń generujących napięcia między poszczególnymi cząstkami ciała. Rozdział ten otrzymuje się, wydzielając z gradientu pola przemieszczeń  $u_{i,j}$  część symetryczną, którą jest tensor odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  oraz niesymetryczną - tensor sztywnych obrotów  $\omega_{ij}$ .

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (1.26)$$

Z powyższego rozkładu wynika, że istnienie gradientu przemieszczeń nie pociąga jeszcze za sobą występowania napięć w ośrodku. Może bowiem zachodzić  $u_{i,j} = \omega_{ij}$ . Natomiast kiedy  $\varepsilon_{ij} \neq 0$  to w ciele pojawiają się naprężenia, które ujmuje tensor naprężenia  $\sigma_{ij}$ . Oba pola tensorowe są symetryczne, co oznacza, że  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Poszukiwane równania fizyczne będą więc liniowymi równaniami zachodzącymi między parą tensorów.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

Dla izotropowego ciała sprężystego przyjmą one postać:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.27)$$

gdzie stałe  $\mu$  i  $\lambda$  zależą od mechanicznych właściwości ciała i noszą nazwę stałych LAMEGO.

Podstawiając równania tworzące do równań ruchu (1.14) otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$2\mu \varepsilon_{ij,j} + \lambda \varepsilon_{kk,i} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i,$$

gdzie  $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho \ddot{u}_i$ .

Jeżeli uwzględnimy teraz zależności geometryczne, tzn.  $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ , to uzyskamy relacje

$$\mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda u_{k,ki} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i,$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (1.28)$$

Przytoczone równania przemieszczeniowe dla liniowego ciała sprężystego stanowią układ trzech równań różniczkowych, cząstkowych.

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \rho F_1 = \rho \ddot{u}_1,$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \rho F_2 = \rho \ddot{u}_2,$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \rho F_3 = \rho \ddot{u}_3,$$

które w literaturze nazywają się równaniami LAMEGO.

Równania LAMEGO możemy zapisać w formie operatorowej

$$\mathbf{D} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \mathbf{u} = -\rho \mathbf{F} + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

$$\begin{bmatrix} \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, & (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, & (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}, & \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}, & (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2}, & \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho F_1 \\ \rho F_2 \\ \rho F_3 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Podane w tej postaci równania teorii sprężystości służą do wyznaczenia pola przemieszczeń i tensora naprężeń w ciałach sprężystych. Trudności związane z rozwiązywaniem zadań brzegowych teorii sprężystości są więc znacznie większe aniżeli w trakcie wyznaczania rozkładu pola temperatur czy też dyfuzji w ciele stałym.

Natomiast w ciele lepkosprężystym, które jest najprostszym materiałem z pamięcią, równania tworzące mają postać

$$\sigma_{ij} = 2\mu * d\varepsilon_{ij} + \lambda * d\varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \text{ gdzie } f * dg = \int_0^t f(t-\tau) \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.30)$$

a równania przemieszczeniowe można zapisać

$$\mu * du_{i,jj} + (\lambda + \mu) * du_{j,ji} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.31)$$

w formie układu równań różniczkowo-całkowych.

#### **Przykład 4.** Pole elektrostatyczne

Występujące w bilansie elektrostatyki pole wektorowe indukcji elektrycznej  $\mathbf{D}$  jest związane liniową zależnością z wektorem natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

gdzie  $\varepsilon$  jest przenikalnością elektryczną. Natomiast pole  $\mathbf{E}$  jest gradientem pola skalarnego  $V$  ( $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ ).

W efekcie równanie tworzące dla zagadnień elektrostatyki ma postać

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \text{grad } V,$$

formalnie identyczną jak równania FICKA i FOURIERA analizowane w poprzednich punktach.

Problem opisują więc równania tworzące

$$\mathbf{D} = -\varepsilon \text{grad } V, \quad (D_i = -\varepsilon V_{,i}), \quad (1.32)$$

oraz równania bilansu

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho e, \quad (D_{i,i} = \rho e),$$

z których otrzymamy poszukiwane równanie zagadnienia

$$-\varepsilon \text{div grad } V = \rho e, \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho e}{\varepsilon}. \quad (1.33)$$

#### **Przykład 5.** Przepływowe pole elektryczne

W bilansie tego pola występuje jedynie strumień  $\mathbf{J}$  wektora gęstości prądu. Pole wektorowe  $\mathbf{J}$  związane jest z polem wektora natężenia pola elektrostatycznego  $\mathbf{E}$  związkiem konstytutywnym



$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E},$$

który nosi nazwę prawa Ohma, przy czym  $\gamma$  jest przewodnością właściwą ośrodka. Podobnie jak w poprzednim przykładzie  $\mathbf{E} = -\text{grad}V$ , czyli

$$\mathbf{J} = -\gamma \text{grad}V, \quad (J_i = -\gamma V_{,i}). \quad (1.34)$$

Współczynnik  $\gamma$  określamy jako wartość wektora gęstości prądu odpowiadającego jednostkowemu przyrostowi potencjału  $V$ .

Zadanie ujmuje więc równanie bilansu  $\text{div}\mathbf{J} = 0$  oraz równanie fizyczne, z których otrzymamy po przekształceniach poszukiwane równanie zagadnienia

$$\text{div}(-\gamma \text{grad}V) = 0 \rightarrow -\gamma \nabla^2 V = 0. \quad (1.35)$$

### 1.3. Warunki brzegowe i początkowe

Oprócz wyprowadzonych w poprzednim punkcie równań dla różnych zagadnień fizyki, musimy jeszcze podać warunki brzegowe i początkowe, określające razem z nimi pełne zadanie początkowo-brzegowe fizyki.

Naturalnym warunkiem brzegowym, wynikającym zresztą z ogólnego równania bilansu, jest przyjęcie, że na brzegu określonym przez powierzchnię  $A$  dany jest strumień, tzn.

$$\mathbf{q}(x, t) \Big|_{\tilde{x} \in A} = \hat{\mathbf{q}}(\tilde{x}, t) \quad (1.36)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{q}}$  jest znanym rozkładem wektora  $\mathbf{q}$  na brzegu  $A$ .

Z przedstawionym warunkiem brzegowym w zadaniach przewodnictwa cieplnego i dyfuzji związane są inne sformułowania zadań brzegowych uwzględniające np. odmienność faz ośrodka i jego otoczenia itp.

Natomiast najprostszy warunek brzegowy sformułowany jest przez wymaganie, aby poszukiwane w zadaniu pole przyjmowało na brzegu  $A$  określoną wartość, tzn.

$$u(x, t) \Big|_{\tilde{x} \in A} = \hat{u}(\tilde{x}, t). \quad (1.37)$$

Podane w postaci ogólnej warunki brzegowe zostaną w dalszej części skonkretyzowane w taki sposób, aby uwzględnić specyficzne cechy poszczególnych procesów fizycznych.

Natomiast rodzaj warunków początkowych na ogół określa już forma równań bilansu. Istotnie, klasyczna postać równań tworzących, to w zasadzie rów-

niania algebraiczne, stąd też rząd pochodnej pola występującego w bilansie określa już warunki początkowe.

W efekcie warunki początkowe dla zagadnień przewodnictwa cieplnego i dyfuzji zawierają jedynie początkowe rozkłady pól temperatur i koncentracji w ciele. Natomiast dynamiczne równania teorii sprężystości wymagają już podania nie tylko początkowej wartości wektora przemieszczeń, ale także i prędkości przemieszczeń. Odwrotna sytuacja występuje w polach elektrycznych omawianych w opracowaniu, gdzie w bilansie nie występuje czynnik zmienny, znajdujący się po lewej stronie w równaniu bilansu (1.8). Równania te dotyczą więc procesu stacjonarnego, niezmiennego w czasie.

#### 1.4. Problem brzegowy dla dyfuzji masy

Zadanie początkowo-brzegowe dla dyfuzji masy opisuje we wnętrzu obszaru  $B$  i w interwale czasu  $[0, \infty)$  równanie

$$\nabla^2 C(x, t) = \frac{\rho}{D} \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} - \frac{\rho}{D} r(x, t). \quad (1.38)$$

Zakładać będziemy, że równanie pola jest spełnione w obszarze  $B \times [0, \infty)$ , gdzie  $B$  jest regularnym obszarem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej,  $[0, \infty)$  jest przedziałem czasowym.

Do powyższego równania dołączone są warunki początkowe

$$C(\cdot, 0) = C_0 \text{ na } \bar{B}, \quad (1.39)$$

oraz warunki brzegowe :

– dla koncentracji dyfundującej masy

$$C = \hat{C} \text{ na } A_1 \times [0, \infty), \quad (1.40)$$

– dla strumienia masy

$$\mathbf{j} = \hat{\mathbf{j}} \text{ na } A_2 \times [0, \infty), \quad (1.41)$$

– dla wymiany masy z otoczeniem

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \alpha_D (C_A - C_0) \text{ na } A_3 \times [0, \infty), \quad (1.42)$$

gdzie  $\alpha_D$  jest współczynnikiem przejmowania masy,  $C_A$  i  $C_0$  koncentracją masy na brzegu  $A$  i w jego zewnętrznym otoczeniu.

Płaty powierzchni spełniają ograniczenia

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A \quad A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Będziemy przy tym wymagali, aby w klasycznym ujęciu zadania zachodziło

$$C \in C^{2,1} \text{ na } B \times [0, \infty).$$

Równanie dyfuzji należy do równań rzędu drugiego typu parabolicznego.

### 1.5. Problem brzegowy dla przewodnictwa cieplnego

Zadanie to opisuje w obszarze  $B \times [0, \infty)$ , analogiczne równanie

$$\nabla^2 \Theta = \frac{\rho}{\chi} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{\rho}{K} r, \quad (1.43)$$

do którego dołączymy warunek początkowy

$$\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0 \text{ na } \bar{B}, \quad (1.44)$$

oraz warunki brzegowe dla:

– temperatury

$$\Theta = \hat{\Theta} \text{ na } A_1 \times [0, \infty), \quad (1.45)$$

– strumienia ciepła

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \text{ na } A_2 \times [0, \infty), \quad (1.46)$$

– wymiany ciepła z otoczeniem

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \alpha_T (T_A - T_0) \text{ na } A_3 \times [0, \infty), \quad (1.47)$$

gdzie  $\alpha_T$  jest współczynnikiem wymiany ciepła z otoczeniem,  $T_A$  temperaturą na brzegu, a  $T_0$  jego zewnętrznego otoczenia.

Zachodzą również zależności

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A \text{ i } A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \phi,$$

natomiast przyrost temperatury  $\Theta$  jest funkcją klasy  $C^{2,1}$  na  $B \times [0, \infty)$ .

## 1.6. Problem brzegowy teorii sprężystości

Zadanie to opisuje w obszarze  $B \times [0, \infty)$  układ równań różniczkowych

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \rho F_i \quad (1.48)$$

do którego należy dołączyć warunki początkowe

$$u_i(\cdot, 0) = u_{i0} \text{ i } \frac{\partial u_i}{\partial t}(\cdot, 0) = \tilde{u}_{i0} \text{ na } \bar{B}, \quad (1.49)$$

oraz przemieszczeniowe

$$u_i(x, t) = \hat{u}_i(x, t) \text{ na } A_1 \times [0, \infty) \quad (1.50)$$

i naprężeniowe

$$\sigma_{ij} n_j = P_i [\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}] = P_i \text{ na } A_2 \times [0, \infty) \quad (1.51)$$

warunki brzegowe.

Będziemy zakładali, że przytoczone równania spełnione będą w obszarze  $B \times [0, \infty)$ , a na brzegach spełnione będą odpowiednie warunki brzegowe. Ponadto przyjmujemy, że pole przemieszczeń  $u_i$  będzie funkcją klasy  $C^{2,2}$  na  $B \times [0, \infty)$ , a części brzegu spełniają ograniczenia

$$A_1 \cap A_2 = \phi \text{ i } A_1 \cup A_2 = A.$$

Warto tu zwrócić uwagę, że w przypadku ciała lepkosprężystego w analogicznym problemie będziemy wymagali, aby  $u_1 \in C^{2,2}$  na  $B \times [0, \infty)$  przy identycznych sformułowaniach warunków brzegowych i ograniczeniach narzuconych na płaty brzegu  $A_\alpha$   $\alpha = 1, 2$ .

## 1.7. Zadanie brzegowe elektrostatyki

Zagadnienie opisane jest przez równanie

$$\nabla^2 V = 0, \quad (1.52)$$

które powinno być spełnione w obszarze  $B$ , zaś na brzegu  $A$  mogą być postawione warunki brzegowe dla:

– potencjału

$$V = \hat{V} \text{ na } A_1, \quad (1.53)$$

– strumienia indukcji elektrycznej

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} \text{ na } A_2. \quad (1.54)$$

Potencjał musi być funkcją klasy  $C^2$  w  $B$ , natomiast obszary  $A_1$  i  $A_2$  spełniać powinny ograniczenia

$$A_1 \cup A_2 = A \text{ i } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Zauważmy przy tym, że warunek brzegowy dla strumienia może przyjąć postać następującą

$$-\varepsilon \operatorname{grad} V = \hat{\mathbf{D}} \text{ na } A_2.$$

## 1.8. Zadanie brzegowe dla przepływowego pola elektrycznego

Problem we wnętrzu obszaru  $B$  opisuje równanie

$$\nabla^2 V = 0, \quad (1.55)$$

natomiast na brzegu  $A$  określone są warunki dla:

– potencjału  $V$

$$V = \hat{V} \text{ na } A_1, \quad (1.56)$$

– wektora gęstości prądu

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} \text{ na } A_2. \quad (1.57)$$

Ponadto potencjał  $V \in C^2(B)$  zaś  $A_1 \cup A_2 = A$  i  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

Sformułowane w tym rozdziale zadania początkowo-brzegowe dla różnych procesów fizycznych prowadzą więc w przypadkach najprostszych do liniowych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Fakt ten sankcjonuje tak znaczne zainteresowanie tymi równaniami. Stwierdzamy przy tym podobieństwo formalne równań opisujących różne procesy fizyczne. Przykładem mogą tu służyć stacjonarne przepływy ciepła, masy czy też prądu elektrycznego oraz statyczne zagadnienie teorii sprężystości. We wszystkich tych przypadkach mamy do czynienia z tym samym typem równania różniczkowego eliptycznego. Natomiast niestacjonarne przepływy ciepła i masy opisują już równania typu parabolicznego. Wreszcie dynamiczne zagadnienia teorii sprężystości, a także tzw. falowe równania przewodnictwa cieplnego i dyfuzji masy są przykładami równań hiperbolicznych. Wprowadzając w tak uproszczony sposób klasyfikację równań rzędu drugiego założyliśmy milcząco, że występujące w tych równaniach współczynniki przyjmują dodatnie wartości, niezmiennie w obszarze  $B \times [0, \infty)$ .

Oprócz omawianych równań, w fizyce matematycznej opisuje się bardziej złożone zjawiska, w których jednocześnie oddziałują na siebie kilka rodzajów pól. Przykładem mogą tu służyć procesy dyfuzosprężystości lub termosprężystości, a nawet termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej. We wszystkich tych przypadkach sposób postępowania jest analogiczny, z tym, że pojawiają się bardziej złożone bilanse i równania tworzące. Równania te muszą spełniać określone zasady fizyki, a głównie termodynamiki, z której wynikają ograniczenia nakładane na równania tworzące i bilanse.

Okazuje się, że w najprostszych, a więc liniowych przypadkach równań tworzących, uzyskujemy również równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego.

## 2. WARIACYJNE FORMUŁOWANIE PROBLEMÓW MECHANIKI

Rozwój współczesnej mechaniki, charakteryzujący się rozległością podstaw fizycznych i koniecznością uzyskiwania rozwiązań przybliżonych, doprowadził do dużego zainteresowania metodami wariacyjnymi. Obok tradycyjnych i klasycznych zasad wariacyjnych pojawiło się wiele nowych rezultatów z zakresu wariacyjnego ujęcia problemów mechaniki ośrodka ciągłego. Istnieją trzy zasadnicze powody zainteresowania metodami wariacyjnymi:

- fizyczny (charakter poznawczy),
- analityczny (badanie struktury formalnej problemów mechaniki),
- numeryczny (wiele zalet praktycznych tych metod).

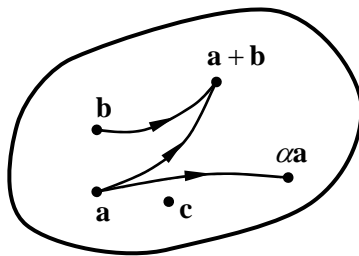
Zagadnienia wariacyjne można podzielić na następujące grupy:

- z uwagi na wymiar problemu (mechanika kontinuum, mechanika konstrukcji),
- z uwagi na czas (stacjonarne, niestacjonarne),
- z uwagi na rodzaj równań (z operatorem potencjalnym, z operatorem niepotencjalnym),
- z uwagi na algebraiczne właściwości operatora (liniowe, nieliniowe).

Metody wariacyjne obejmują więc szeroki zakres zagadnień mechaniki; w przedstawionym opracowaniu uwzględniono jedynie bardzo skromną ich część. Celem opracowania jest zapoznanie czytelnika z podstawami rachunku wariacyjnego w przestrzeni HILBERTA oraz elementami teorii operatorów potencjalnych z ukierunkowaniem na zastosowania w mechanice. Przez wykorzystanie elementów analizy funkcjonalnej możliwe było jednolite i zwarte ujęcie przedstawionego materiału. Opierając się na twierdzeniu WAINBERGA pokazujemy sposób wariacyjnego formułowania wybranych problemów brzegowych mechaniki. Rozdział zawiera liczne przykłady, będące ilustracją przedstawionej teorii.

### 2.1. Aksjomaty przestrzeni HILBERTA

Załóżmy, że mamy dany zbiór elementów  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  dowolnej natury (rys. 2.1), który to zbiór oznaczать będziemy przez  $R$ . To, że element  $\mathbf{a}$  należy do zbioru  $R$ , oznaczать będziemy symbolem  $\mathbf{a} \in R$ .



Rys. 2.1

Założmy dalej, że na elementach zbioru  $R$  można wykonać dwa działania. Pierwsze działanie, zwane dodawaniem, przyporządkowuje parze elementów  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R$  element oznaczany symbolem  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in R$  zwany *sumą* elementów  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$ . Drugie działanie, zwane *mnożeniem* elementu  $\mathbf{a}$  przez liczbę  $\alpha$  ( $\alpha \in R$ , gdzie  $R$  jest zbiorem liczb rzeczywistych) przyporządkowuje parze  $\alpha, \mathbf{a}$  nowy element zbioru  $R$ , który oznaczamy przez  $\alpha\mathbf{a}$ .

Zbiór  $R$ , z tak określonymi działaniami, nazywamy *przestrzenią liniową* (wektorową), jeżeli dla wszystkich elementów zbioru  $R$  (zwanych *punktami* lub *wektorami*) i wszystkich liczb  $\alpha$  spełnione są następujące warunki:

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (prawo przemienności dodawania);
2.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (prawo łączności dodawania);
3. istnieje element  $\mathbf{0}$  zwany zerem, taki że  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ;
4. istnieje element  $-\mathbf{a}$  zwany elementem przeciwnym do  $\mathbf{a}$  taki, że  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ;
5.  $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$  (prawo łączności mnożenia);
6. dla liczby 1 i dla każdego  $\mathbf{a}$  mamy  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ ;
7.  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ ;
8.  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ .

Elementy  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in R$  nazywamy liniowo niezależnymi, jeżeli z równości

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

wynika, że

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$



Bazą przestrzeni liniowej  $R$  nazywamy każdy zbiór elementów z tej przestrzeni spełniającej następujące warunki:

- jest liniowo niezależny,
- zbiór wszystkich kombinacji liniowych tych elementów daje całą przestrzeń.

Przestrzeń, w której baza jest skończona nazywamy *przestrzenią skończone wymiarową*. Istnieją również przestrzenie z *bazą nieskończoną* (np. zbiór funkcji ciągłych  $y(t)$  określonych w przedziale  $t \in [0,1]$ ).

*Normą* w przestrzeni liniowej nazywamy przyporządkowanie elementowi  $\mathbf{a}$  przestrzeni  $R$  liczby rzeczywistej  $\|\mathbf{a}\|$ , spełniające warunki

1.  $\|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,
2.  $\|\alpha\mathbf{a}\| = |\alpha| \|\mathbf{a}\|$ ,  $\alpha \in R$ ,
3.  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ .

Przestrzeń liniową, w której wprowadzono normę nazywamy *przestrzenią unormowaną*. W przestrzeni liniowej unormowanej można wprowadzić pojęcie zbieżności. Ciąg elementów  $\{\mathbf{a}_n\}$  przestrzeni nazywamy *zbieżnym do granicy  $\mathbf{a}^x$* , jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}^x\| \rightarrow 0$ . Natomiast ciąg  $\{\mathbf{a}_n\}$  nazywamy *ciągami CAUCHY'EGO*, jeżeli  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| \rightarrow 0$ .

Przestrzeń, w której każdy ciąg CAUCHY'EGO jest zbieżny do granicy leżącej w tej przestrzeni nazywamy *przestrzenią zupełną*. *Przestrzenią BANACHA* nazywamy przestrzeń unormowaną i zupełną (STEFAN BANACH – wybitny polski matematyk). Przestrzenie BANACHA odgrywają zasadniczą rolę w matematyce, gdzie jedno z podstawowych zagadnień polega na poszukiwaniu określonego elementu  $\mathbf{a}_0$ , np. elementu spełniającego pewne równanie lub realizującego ekstremum funkcjonału, w przestrzeni  $R$ . Poszukiwanie takie może być skuteczne jedynie wtedy, gdy działania algebraiczne nie „wyprowadzają” elementu z przestrzeni  $R$ .

Szczególną rolę wśród przestrzeni odgrywają przestrzenie, w których określony jest *iloczyn skalarny*. Niech  $R$  będzie taką przestrzenią. Jeżeli każdej parze elementów  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R$  przyporządkowana zostanie liczba rzeczywista  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  spełniająca następujące warunki:

- 1°  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ ,
- 2°  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ ,
- 3°  $\langle \alpha\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  dla dowolnej liczby  $\alpha \in R$ ,

$4^\circ \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$ , przy czym  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$  jedynie wtedy, gdy  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,

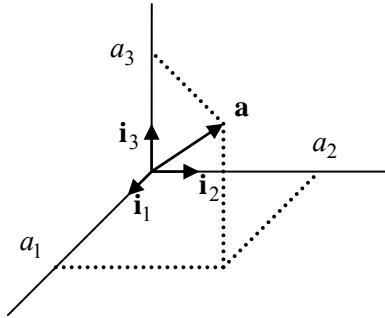
to liczbę  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  nazywamy *iloczynem skalarnym* elementów  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$ , zaś liczbę

$\|\mathbf{a}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2}$  – *normą* elementu  $\mathbf{a}$ .

Przestrzeń liniową z iloczynem skalarnym, zupełną nazywamy *przestrzenią HILBERTA*.

### Przykład 2.1.

Zbiór wektorów w przestrzeni fizycznej (rys. 2.2)



**Rys. 2.2**

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3 = a_i \mathbf{i}_i,$$

gdzie  $a_i$  są składowymi wektora  $\mathbf{a}$ , natomiast  $\mathbf{i}_i$  są wektorami bazy, z iloczynem skalarnym i normą w postaci

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i,$$

$$\|\mathbf{a}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} \equiv (a_i a_i)^{1/2},$$

tworzy przestrzeń euklidesową trójwymiarową  $E^3$ , będącą przestrzenią HILBERTA.

**Przykład 2.2.**

Zbiór elementów postaci nieskończonych ciągów liczbowych

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\},$$

z normą

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2},$$

i iloczynem skalarnym

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i;$$

tworzy przestrzeń HILBERTA  $l^2$ .

**Przykład 2.3.**

Zbiór funkcji ciągłych na odcinku  $[a, b]$  z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

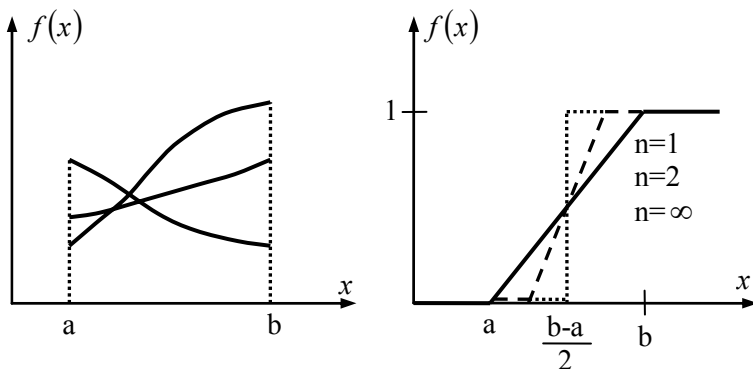
i normą

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

tworzy przestrzeń  $C[a, b]$ . Przestrzeń ta nie jest zupełna, zatem nie jest przestrzenią HILBERTA (rysunek 2.3).

**Przykład 2.4.**

Zbiór funkcji określonych na odcinku  $[a, b]$  i spełniających warunek

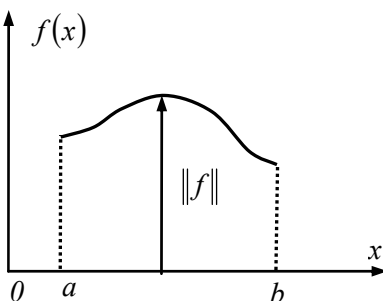
**Rys. 2.3**

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

z iloczynem skalarnym i normą jak w przestrzeni  $C[a, b]$ , tworzy przestrzeń HILBERTA  $L^2[a, b]$ .

**Przykład 2.5.**

Jeżeli w przestrzeni  $C[a, b]$  (rys. 2.4)

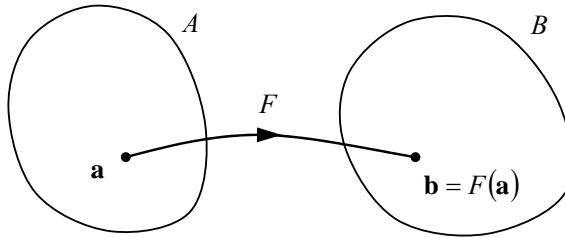
**Rys. 2.4**

wprowadzić normę  $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

to przestrzeń ta jest przestrzenią zupełną (lecz nie jest przestrzenią HILBERTA).

## 2.2. Operator. Funkcjonał. Różniczka GÂTEAUX operatora

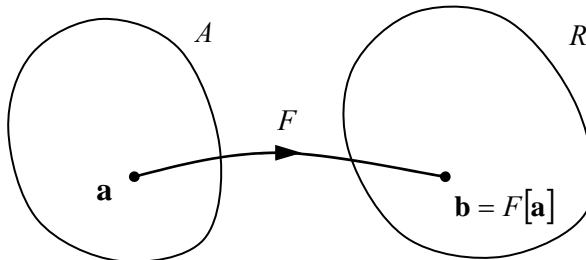
Niech dane będą dwa zbiory  $A$  i  $B$  o elementach  $\mathbf{a} \in A$  i  $\mathbf{b} \in B$  (rys. 2.5).



**Rys. 2.5**

Jeżeli każdemu elementowi  $\mathbf{a} \in A$  zostanie jednoznacznie przyporządkowany pewien element  $\mathbf{b} \in B$ , to mówimy, że na zbiorze  $A$  została określona *funkcja*  $F: A \rightarrow B$ , przyjmująca wartości  $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$  w zbiorze  $B$  (albo że zostało określone *odwzorowanie* zbioru  $A$  w zbiór  $B$ ). Zbiór  $A$  nazywamy *dziedziną* funkcji  $F$ , a zbiór  $F(A)$  *zbiorem wartości* funkcji  $F$ . W dalszym ciągu wyrazy: funkcja, operacja (operator), odwzorowanie traktowane będą jako synonimy.

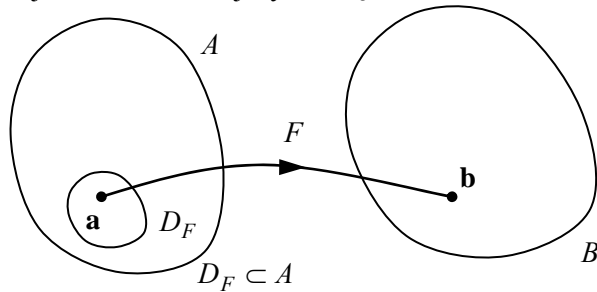
Jeżeli zbiór  $B$  jest zbiorem liczb rzeczywistych ( $B \equiv R$ ), to operator  $F: A \rightarrow R$  nazywać będziemy *funkcjonałem* (rys. 2.6).



**Rys. 2.6**

Zbiór wartości funkcjonału oznaczać będziemy symbolem  $F[A]$ .

Jeżeli funkcja  $F$  odwzorowuje tylko część  $D$  zbioru  $A$  w zbiór  $B$  (rys. 2.7)



**Rys. 2.7**

to dziedzinę funkcji  $F$  oznaczamy symbolem  $D_F (D_F \subset A)$ .

**Przykład 2.6.**

Jeżeli

$$A = B = \{f(x) \in C[a, b]\}$$

i jeżeli określimy zależność

$$A = \frac{d}{dx} : A \rightarrow B, \quad (A : f(x) \rightarrow f'(x)),$$

to na zbiorze  $A$  określiliśmy operację różniczkowania o wartościach w zbiorze  $B$ .

**Przykład 2.7.**

Potencjalna energia deformacji belki wolnopodpartej (rys. 2.8)

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (u'')^2 dx, \quad u(x) \in D_F, \quad U \in R,$$

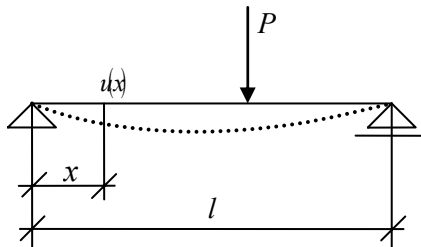
gdzie

$$F[\cdot] = \frac{EJ}{2} \int_0^l (\cdot)'{}^2 dx,$$

jest funkcjonalem  $F : D_F \rightarrow R$ , przy czym

$$D_F = \{u(x) \in C^2[0,1]: u(0) = u(1) = 0\}$$

jest zbiorem funkcji mających pierwszą i drugą pochodną, przyjmujących na końcach przedziału wartości zerowe.

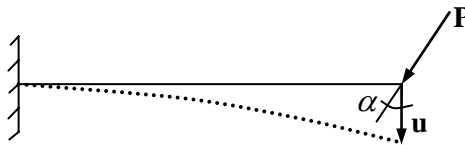


**Rys. 2.8**

### Przykład 2.8.

Praca wykonana przez siłę  $\mathbf{P}$  na przemieszczeniu  $\mathbf{u}$ , która w przypadku belki utwierdzonej (rys. 2.9) dana jest relacją

$$L = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{P}||\mathbf{u}| \cos \alpha(\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}),$$



**Rys. 2.9**

jest także funkcjonalem.

**Przykład 2.9.**

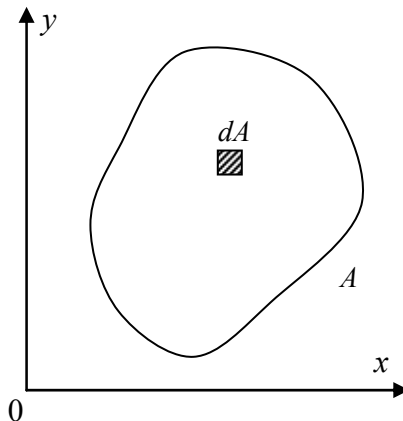
Funkcjonałem jest także osiowy moment bezwładności

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

oraz moment statyczny

$$S_x = \int_A y dA$$

przekroju płaskiego (rys. 2.10).



**Rys. 2.10**

Dział matematyki zajmujący się metodami poszukiwania ekstremalnych wartości funkcjonałów nazywa się *rachunkiem wariacyjnym*. Ma on zasadnicze znaczenie w wielu zagadnieniach współczesnej mechaniki, i to zarówno w formułowaniu praw rządzących zjawiskami fizycznymi, jak i w uzyskiwaniu rozwiązań przybliżonych dla wielu problemów inżynierskich.

Niech  $H$  będzie przestrzenią HILBERTA, natomiast  $P$  operatorem nieliniowym  $P: D_p \subset H \rightarrow H'$  (gdzie  $H'$  jest inną przestrzenią HILBERTA). Operator  $\delta P$  określony zależnością

$$\delta P(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = \frac{d}{d\alpha} P(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{h}) \Big|_{\alpha=0}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{h} \in D_p, \quad \alpha \in R, \quad (2.1)$$



nazywamy *różniczką GÂTEAUX* operatora  $P$  w punkcie  $\mathbf{u}$  przy przyroście  $\mathbf{h}$ . Jeżeli różniczkę GÂTEAUX można przedstawić w postaci

$$\delta P(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = P'(\mathbf{u})\mathbf{h}, \quad P': D_p \rightarrow H', \quad (2.2)$$

to operator  $P'$  nazywamy *pochodną GÂTEAUX* operatora  $P$ . W przypadku operatora  $P(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{f}$  mamy

$$\delta P(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = A\mathbf{h}, \quad (2.3)$$

gdzie  $A$  jest operatorem liniowym ( $A(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha A(\mathbf{u}) + \beta A(\mathbf{v})$ ). Jeżeli operator  $P$  jest funkcjonałem ( $P: D_p \rightarrow R$ ), to różniczkę GÂTEAUX nazywamy *pierwszą wariacją* funkcjonału.

### Przykład 2.10.

Różniczka GÂTEAUX operatora  $P(u) = u^2$ , wynosi

$$\delta P(u, h) = \left. \frac{d}{d\alpha} P(u + \alpha h) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} (u + \alpha h)^2 \right|_{\alpha=0} = 2uh.$$

Zatem pochodna GÂTEAUX tego operatora jest równa  $P' = 2u$ .

### Przykład 2.11.

W przypadku operatora  $P(u) = (u')^2$ , różniczka GÂTEAUX wynosi

$$\delta P(u, h) = 2u' h'.$$

Jak widać, różniczka GÂTEAUX nie jest w tym przypadku liniowa względem przyrostu  $h$ , zatem nie istnieje pochodna GÂTEAUX.

**Przykład 2.12.**

W przypadku potencjału

$$F[u] = \int_0^l \left( -\frac{1}{2}u'^2 + u \right) dx,$$

gdzie

$$D_F = \{u \in C^2[0,1]: u(0) = u(1) = 0\},$$

pierwsza wariacja dana jest relacją

$$\delta F[u, h] = \frac{d}{d\alpha} \int_0^l \left[ -\frac{1}{2}(u + \alpha h)^2 + (u + \alpha h) \right] dx \Big|_{\alpha=0} = \int_0^l (-u' h' + h) dx,$$

skąd po scałkowaniu przez części

$$\delta F = \int_0^l (u'' + 1) h dx - u' h \Big|_0^l$$

i wykorzystaniu właściwości, że  $h \in D_F$ , otrzymamy

$$\delta F[u, h] = \int_0^l (u'' + 1) h dx.$$

**2.3. Gradient funkcjonału. Operator potencjalny**

Jeżeli pierwszą wariację funkcjonału  $F$  można przedstawić w postaci

$$\delta F[\mathbf{u}, \mathbf{h}] = \langle \text{grad } F[\mathbf{u}], \mathbf{h} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{h} \in D_F, \quad (2.4)$$

gdzie symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza iloczyn skalarny w  $H$ , to operator  $\text{grad } F$  nazywamy *gradientem funkcjonału*.

Operator  $P : D_p \in H'$  nazywamy *operatorem potencjalnym*, jeżeli istnieje taki funkcjonal  $F : D_F \rightarrow R$ , że

$$P(\mathbf{u}) = \text{grad } F[\mathbf{u}], \quad (2.5)$$

w przypadku dowolnego elementu  $\mathbf{u} \in D_p$ . Funkcjonał ten nazywamy *potencjałem* operatora  $P$ .

Aby operator  $P$  był potencjalny, musi być symetryczny w następującym sensie

$$\langle \delta P(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \mathbf{g} \rangle = \langle \delta P(\mathbf{u}, \mathbf{g}), \mathbf{h} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{g} \in D_p \subset \mathcal{X}, \quad (2.6)$$

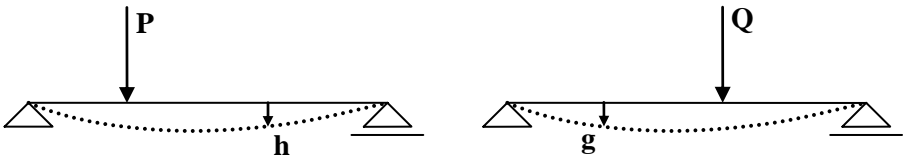
przy czym jest to warunek konieczny i dostateczny.

W przypadku operatora liniowego  $P(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{f}$ , warunek ten przyjmie postać

$$\langle A\mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle = \langle A\mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle. \quad (2.7)$$

Zależność (2.7) posiada znaną w mechanice ośrodka ciągłego interpretację, gdzie odpowiadają jej twierdzenia o wzajemności. Najprostsze z tych twierdzeń można sformułować następująco:

Niech na belkę wolnopodpartą działają dwa układy sił  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  wywołujących przemieszczenia  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{g}$  (rys. 2.11)



**Rys. 2.11**

a mianowicie

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} = A\mathbf{h}, \mathbf{h}) & \text{ w układzie pierwszym,} \\ (\mathbf{Q} = A\mathbf{g}, \mathbf{g}) & \text{ w układzie drugim.} \end{aligned}$$

Wówczas prawdziwa jest zależność

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{h} \rangle,$$

która nosi nazwę twierdzenia o wzajemności, przy czym  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jest iloczynem skalarnym sił i przemieszczeń.

Analogiczną interpretację równości (2.7) możemy uzyskać przy analizie zagadnień wymiany ciepła, a także dyfuzji masy. We wszystkich tych przypadkach relacja (2.7) jest przejawem symetrii występującej w zagadnieniach mechaniki ośrodka ciągłego, przepływów ciepła i dyfuzji masy.

Pojęcie gradientu funkcjonału ma zasadnicze znaczenie w poszukiwaniu wartości stacjonarnej funkcjonału, gdyż funkcjonał osiąga ekstremum w punkcie  $\mathbf{u}_0$ , w którym  $\text{grad } F[\mathbf{u}_0] = \mathbf{0}$ . Punkt  $\mathbf{u}_0$  nazywamy *punktem krytycznym*. Widoczne jest, że w przypadku operatorów potencjalnych poszukiwanie rozwiązania równania operatorowego  $P(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  można zastąpić poszukiwaniem punktu krytycznego odpowiedniego funkcjonału.

### Przykład 2.13.

Jeżeli w przykładzie 2.12 określić iloczyn skalarny w postaci

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \int_0^1 (\cdot)(\cdot) dx,$$

to gradient funkcjonału dany jest zależnością

$$\text{grad } F[u] = 1 + u''.$$

### Przykład 2.14.

W przypadku następującego operatora

$$P(u) = 1 + u'',$$

gdzie

$$D_P = \{u \in C^2[0,1]: u(0) = u(1) = 0\},$$

funkcjonał z przykładu 2.12 jest potencjałem. Zatem operator ten jest potencjalny.

**Przykład 2.15.**

Punktem krytycznym funkcjonału z przykładu 2.12 jest funkcja

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x(1-x),$$

w przypadku której

$$\text{grad } F[u_0] = 1 + u_0'' = 0.$$

Funkcja  $u_0(x)$  jest jednocześnie rozwiązaniem równania operatorowego

$$P(u) = 1 + u'' = 0.$$

**2.4. Twierdzenie WAINBERGA**

W teorii operatorów potencjalnych zasadnicze znaczenie ma następujące twierdzenie, zwane *twierdzeniem WAINBERGA*.

Jeżeli  $P$  jest operatorem potencjalnym w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{u}^*$ , to istnieje funkcjonal  $F$  (z dokładnością do addytywnej stałej  $F_0$ ), gradientem którego jest operator  $P$ . Funkcjonał ten dany jest relacją

$$F[\mathbf{u}] = \int_0^1 \langle P[\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)], \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \rangle d\alpha + F_0; \quad \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in D_p, \quad \alpha \in R.$$

Często przyjmuje się, że  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  i  $F_0 = 0$ . Wtedy powyższy funkcjonal przyjmuje postać

$$F[\mathbf{u}] = \int_0^1 \langle P(\alpha\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle d\alpha.$$

W przypadku liniowych operatorów potencjalnych  $P(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{f}$ , funkcjonal ten dany jest relacją

$$F[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle.$$

Podsumowanie najważniejszych definicji z zakresu teorii operatorów potencjalnych zawiera poniższa tabela

Równanie	Różniczka GÂTEAUX	Warunek potencjalności	Funkcjonał
Liniowe $P(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{f}$	$\delta A(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = A\mathbf{h}$	$\langle A\mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle =$ $= \langle A\mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle$	$F[\mathbf{u}] =$ $= \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle$
Nieliniowe $P(\mathbf{u})$	$\frac{d}{d\alpha} P(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{h}) \Big _{\alpha=0} =$ $= \delta P(\mathbf{u}, \mathbf{h})$	$\langle \delta P(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \mathbf{g} \rangle =$ $= \langle \delta P(\mathbf{u}, \mathbf{g}), \mathbf{h} \rangle$	$F[\mathbf{u}] =$ $= \int_0^1 \langle P(\alpha\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle d\alpha$

Chcąc zatem zbudować funkcjonal wariacyjny w przypadku zadania brzegowego, należy postąpić w następujący sposób:

- określić postać operatora i iloczynu skalarnego,
- sprawdzić, czy operator jest potencjalny,
- opierając się na twierdzeniu WAINBERGA, zbudować funkcjonal będący potencjałem danego operatora potencjalnego.

Jeżeli operator nie jest potencjalny, to nie istnieje funkcjonal będący sformułowaniem wariacyjnym danego problemu brzegowego.

### Przykład 2.16.

W przypadku zadania brzegowego

$$2uu'' + u'^2 = f, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

określamy operator nieliniowy

$$P(u) = f - 2uu'' - u'^2,$$

gdzie

$$D_P = \{u \in C^2[0,1]: u(0) = u(1) = 0\},$$

oraz definiujemy iloczyn skalarny

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u v dx.$$

Następnie obliczamy różniczkę GÂTEAUX operatora  $P$

$$\begin{aligned} \delta P(u, h) &= \frac{d}{d\alpha} [f - 2(u + \alpha h)(u + \alpha h)' - (u + \alpha h)^2]_{\alpha=0} = \\ &= -2(u''h + uh'' + u'h'). \end{aligned}$$

Dalej obliczamy wartość wyrażenia

$$\begin{aligned} \langle \delta P(u, h), g \rangle - \langle \delta P(u, g), h \rangle &= \\ &= 2 \int_0^1 (-ugh'' + ug''h - u'h'g + u'g'h) dx = 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystano z zależności

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-ugh'' + ug''h) dx &= (-ugh' + ug'h) \Big|_0^1 - \int_0^1 (-u'gh' + u'g'h) dx = \\ &= \int_0^1 (u'gh' + u'g'h) dx. \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że operator  $P$  jest potencjalny, czyli istnieje funkcjonal  $F$ , gradientem którego jest  $P$ . Funkcjonał ten dany jest następującą relacją

$$\begin{aligned}
F[u] &= \int_0^1 \langle P(\alpha u), u \rangle d\alpha = \int_0^1 \langle f - 2(\alpha u)(\alpha u'') - (\alpha u')^2, u \rangle d\alpha = \\
&= \int_0^1 \langle f - \alpha^2(2uu'' + u'^2), u \rangle d\alpha = \\
&= \int_0^1 \left[ fu - \frac{1}{3}(2u^2u'' + uu'^2) \right] dx = \int_0^1 (uu'^2 + fu) dx.
\end{aligned}$$

W powyższych przekształceniach wykorzystano wzór na całkowanie przez części

$$\int_0^1 u^2 u'' dx = u^2 u' \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 uu'^2 dx = -2 \int_0^1 uu'^2 dx.$$

Jak łatwo sprawdzić, w punkcie krytycznym  $u_0(x)$  funkcjonału  $F$  zachodzi

$$\text{grad } F[u_0] = P(u_0) = f - 2u_0 u_0'' - u_0'^2 = 0.$$

### Przykład 2.17.

Problem wyznaczenia stacjonarnego rozkładu temperatury w płycie o grubości 1 opisany jest nieliniowym równaniem różniczkowym

$$[\lambda(T)T'] = Q, \quad T(0) = T(1) = 0,$$

gdzie:  $T(x)$  jest temperaturą,  $Q(x)$  – źródłem ciepła, zaś  $\lambda$  oznacza współczynnik przewodności cieplnej. Przyjmijmy, że współczynnik ten jest liniową funkcją temperatury

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 + \varepsilon T),$$

gdzie  $\varepsilon$  jest parametrem. Określając operator problemu

$$P(T) = \frac{d}{dx} \left[ \lambda_0(1 + \varepsilon T) \frac{dT}{dx} \right] - Q,$$



oraz iloczyn skalarny

$$\langle T, R \rangle = \int_0^1 TR \, dx,$$

Sprawdzimy, czy operator  $P$  jest potencjalny. Obliczamy w tym celu różniczkę GÂTEAUX tego operatora

$$\begin{aligned} \delta P(T, R) &= \frac{d}{d\alpha} \{ [\lambda_0(1 + \varepsilon T + \varepsilon \alpha R)(T + \alpha R)] - Q \}_{\alpha=0} = \\ &= \lambda_0 [\varepsilon R T' + (1 + \varepsilon T) R'] = \lambda_0 [\varepsilon(2R' T' + R T'') + (1 + \varepsilon T) R''] \end{aligned}$$

oraz wartość wyrażenia

$$\begin{aligned} \langle \delta P(T, R), S \rangle - \langle \delta P(T, S), R \rangle &= \\ &= \lambda_0 \int_0^1 [2\varepsilon(R' S T' - R S' T) + (1 + \varepsilon T)(R'' S - S'' R)] dx = \\ &= \lambda_0 \varepsilon \int_0^1 (R' T' S - R T' S') dx \neq 0. \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że operator  $P$  nie jest operatorem potencjalnym.

### Przykład 2.18.

Jeżeli współczynnik przewodności cieplnej  $\lambda$  jest funkcją miejsca, to operator problemu sformułowanego w przykładzie 2.17 ma postać operatora liniowego

$$P(T) = AT + f,$$

gdzie

$$AT = [\lambda T'], \quad f = -Q,$$

zaś różniczka GÂTEAUX określona jest zależnością

$$\delta P(T, R) = AR = [\lambda R'], \quad R \in D_A.$$

Obliczamy wartość wyrażenia

$$\begin{aligned} \langle AR, S \rangle - \langle AS, R \rangle &= \langle \lambda' R' + \lambda R'', S \rangle - \langle \lambda' S' + \lambda S'', R \rangle = \\ &= \int_0^1 (\lambda' R' S + \lambda R'' S - \lambda' S' R - \lambda S'' R) dx = 0, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystano zależność

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\lambda R'' S - \lambda S'' R) dx &= \lambda (R' S - R S') \Big|_0^1 - \int_0^1 (\lambda' R' S - \lambda' S' R) dx = \\ &= - \int_0^1 \lambda' (R' S - S' R) dx. \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że w rozważanym przypadku operator  $A$  jest potencjalny, zaś odpowiedni funkcjonal dany jest relacją

$$\begin{aligned} F[T] &= \frac{1}{2} \langle AT, T \rangle + \langle f, T \rangle = \frac{1}{2} \langle [\lambda T'], T \rangle + \langle -Q, T \rangle = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (\lambda' T' T + \lambda T'' T) - QT \right] dx = - \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \lambda T'^2 + QT \right) dx. \end{aligned}$$

Skorzystano tu z wzoru na całkowanie przez części

$$\int_0^1 \lambda T T'' dx = \lambda T T' \Big|_0^1 - \int_0^1 (\lambda' T' T + \lambda T'^2) dx = - \int_0^1 (\lambda' T' T + \lambda T'^2) dx.$$

### Przykład 2.19.

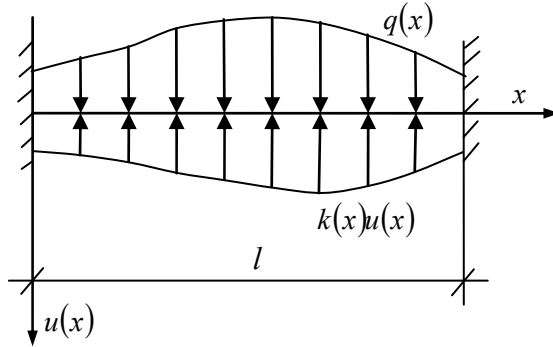
Zagadnienie zginania belki na podłożu sprężystym (rys. 2.12) opisane jest równaniem

$$[EJ(x)u'']'+k(x)u = q(x),$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = u'(0) = 0,$$

$$u(1) = u'(1) = 0.$$



**Rys. 2.12**

W równaniu powyższym  $E$  jest modułem YOUNGA,  $J$  – momentem bezwładności przekroju,  $u$  – ugięciem belki,  $k$  – współczynnikiem podatności podłoża,  $q$  – intensywnością obciążenia.

Zdefiniujmy wielkości

$$Au = [EJu'']'+ku; \quad f = -q,$$

$$D_A = \{u \in C^4[0,1]: u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\},$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 uv dx$$

oraz obliczmy zależność

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle - \langle Av, u \rangle &= \langle [EJu'']'+ku, v \rangle - \langle [EJu'']'+kv, u \rangle = \\ &= E \int_0^1 [(Ju'')'v - (Jv'')'u] dx. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (Ju''')' v \, dx &= \int_0^1 [(Ju'')' v]' \, dx - \int_0^1 (Ju'')' v' \, dx = \\
 &= (Ju'')' v \Big|_0^1 - \int_0^1 (Ju'')' v' \, dx = - \int_0^1 (Ju'')' v' \, dx = \\
 &= - \int_0^1 [(Ju'')' v]' \, dx + \int_0^1 Ju'' v' \, dx = \\
 &= -(Ju'')' v \Big|_0^1 + \int_0^1 Juv \, dx = \int_0^1 Ju'' v'' \, dx,
 \end{aligned}$$

zatem  $\langle Au, v \rangle - \langle Av, u \rangle = 0$ , czyli operator  $A$  jest potencjalny i korzystając z twierdzenia WAINBERGA możemy zbudować funkcjonal wariacyjny zadania zginania belki na podłożu sprężystym. Odpowiedni funkcjonal dany jest w tym przypadku formułą

$$\begin{aligned}
 F[T] &= \frac{1}{2} \langle [EJu''']' + ku, u \rangle + \langle -q, u \rangle = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (EJu''')' u - ku^2 - qu \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (EJu''^2 + ku^2) - qu \right] dx.
 \end{aligned}$$

Zatem zamiast szukać rozwiązania wyjściowego równania różniczkowego możemy poszukiwać punktu krytycznego powyższego funkcjonułu.

## 2.5. Równania teorii sprężystości i lepkosprężystości

Niech  $B$  oznacza odwzorowanie jednorodnego, anizotropowego ciała sprężystego  $\mathbf{B}$  na obszar trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^3$ ;  $\partial B$  niech będzie brzegiem tego obszaru ( $\bar{B} = B \cup \partial B$ ), natomiast  $n_i$  współrzędną wektora normalnego do brzegu.

Na skutek działania sił masowych  $\rho F_i$ , obciążenia powierzchniowego  $p_i^*$  oraz zadanych na brzegu przemieszczeń  $u_i^*$  ciało  $B$  doznaje deformacji opisanych przemieszczeniem  $u_i$ , odkształceniem  $\varepsilon_{ij}$  i naprężeniem  $\sigma_{ij}$ . Pola powyższe są funkcjami miejsca  $x \in B$  i przy założeniu odpowiedniej regularności tych pól, można quasi-statyczny proces deformacji ciała opisać następującymi równaniami tensorowymi:

– równaniami równowagi (statyki)

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad x \in B, \quad (2.8)$$

– związkami geometrycznymi

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) = \varepsilon_{ij} - u_{(i,j)} = 0, \quad x \in B, \quad (2.9)$$

– zależnościami fizycznymi

$$\sigma_{ij} - E_{ijkl} \varepsilon_{kl} = 0, \quad x \in B, \quad (2.10)$$

lub

$$\varepsilon_{ij} - J_{ijkl} \sigma_{kl} = 0, \quad x \in B \quad (2.11)$$

oraz warunkami brzegowymi:

– w naprężeniach (statycznych)

$$\sigma_{ij} n_j - p_i^* = p_i - p_i^* = 0, \quad x \in \partial B_\sigma, \quad (2.12)$$

– w przemieszczeniach (kinematycznych)

$$u_i - u_i^* = 0, \quad x \in \partial B_u, \quad (2.13)$$

gdzie  $\partial B_\sigma$ ,  $\partial B_u$  są odpowiednio częściami brzegu ciała na których zadano siły i przemieszczenia, przy czym zachodzi  $\partial B_\sigma \cup \partial B_u = \partial B$ ,  $\partial B_\sigma \cap \partial B_u = \emptyset$  ( $\cup$  –

suma zbiorów,  $\cap$  – iloczyn zbiorów,  $\emptyset$  – zbiór pusty). W powyższych zależnościach użyto typowych oznaczeń rachunku tensorowego we współrzędnych kartezjańskich.

W przypadku, gdy stan ciała w chwili aktualnej zależy od całej przeszłości ciała (tak jest np. w betonie czy też w polimerach), związki fizyczne dane są zależnościami

$$\sigma_{ij} - E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} = 0, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{ij} - J_{ijkl} * d\sigma_{kl} = 0, \quad (2.15)$$

gdzie symbolem  $*$  oznaczono splot (całkę) STIELTIESA

$$f * dg = \int_0^t f(t - \tau) dg(\tau), \quad (2.16)$$

o następujących właściwościach:

$$\begin{aligned} f * dg &= g * df, \\ f * (dg * dh) &= (f * dg) * dh = f * dg * dh, \\ f * d(g + h) &= f * dg + f * dh, \\ f * dg &= 0, \quad \text{gdy } f = 0 \text{ lub } g = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ciało, w przypadku którego słuszne są związki (2.14) i (2.15), nosi nazwę ciała liniowo lepkosprężystego. Pozostałe zależności (statyczne, geometryczne oraz warunki brzegowe) są tu takie same jak dla ciała sprężystego.

W dalszych rozważaniach związki (2.8–2.10, 2.12, 2.13) przedstawiono w postaci równania macierzewego

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad x \in \bar{B}, \quad (2.18)$$

gdzie elementy macierzy kolumnowych

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} u_i & x \in B \\ \varepsilon_{ij} & x \in B \\ \sigma_{ij} & x \in B \\ p_i & x \in \partial B_\sigma \\ u_i & x \in \partial B_u \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{f}\} = \begin{bmatrix} u_i & x \in B \\ \varepsilon_{ij} & x \in B \\ \sigma_{ij} & x \in B \\ u_i^* & x \in \partial B_u \\ -p_i^* & x \in \partial B_\sigma \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

są odpowiednio funkcjami poszukiwanymi i danymi, natomiast elementy macierzy kwadratowej

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\dots)_{,j} & 0 & 0 \\ 0 & E_{ijkl}(\delta_{ik}\delta_{jl}\dots) & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}[(\dots)_{,j} + (\delta_{ij}\dots)_{,i}] & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

są operatorami liniowymi.

## 2.6. Funkcjonały teorii sprężystości (LAGRANGE'A, REISSNERA, HU-WASHIZU)

Jeżeli zdefiniować iloczyn skalarny w postaci

$$\langle \{\mathbf{u}\}^T, \{\mathbf{v}\} \rangle = \sum_{I=1}^3 \int_B u_I v_I dV + \int_{\partial B_\sigma} u_4 v_4 dA + \int_{\partial B_u} u_5 v_5 dA, \quad (2.21)$$

to zbiór macierzy  $\{\mathbf{u}\}$  będzie tworzył przestrzeń HILBERTA (w zależności (2.21)  $u_I$  jest  $I$ -tym elementem macierzy kolumnowej  $\{\mathbf{u}\}$ ), natomiast równanie operatorowe (2.18) jest równaniem w tej przestrzeni. Mając określoną postać operatora problemu oraz iloczynu skalarnego, sprawdzamy czy operator  $[\mathbf{A}]$  jest potencjalny. W tym celu obliczamy wartość wyrażenia

$$\begin{aligned}
& \left\langle \{[\mathbf{A}]^T, \{\mathbf{u}'\}\}^T, \{\mathbf{u}''\} \right\rangle - \left\langle \{[\mathbf{A}]^T, \{\mathbf{u}''\}\}^T, \{\mathbf{u}'\} \right\rangle = \\
& = \int_B [(-\sigma'_{ij,j} \mathbf{u}_i'') + (-\sigma''_{ij,j} \mathbf{u}_i') + (u'_{(i,j)} - \varepsilon'_{ij}) \sigma''_{ij} - (u''_{(i,j)} - \varepsilon''_{ij}) \sigma'_{ij} + \\
& + (-\sigma'_{ij} + E_{ijkl} \varepsilon'_{kl}) \varepsilon''_{ij} - (-\sigma''_{ij} + E_{ijkl} \varepsilon''_{kl}) \varepsilon'_{ij}] dV + \\
& + \int_{\partial B_\sigma} [(p'_i u_i'') - (p''_i u_i')] dA + \int_{\partial B_u} [(-u'_i p_i'') + (u_i'' p_i')] dA.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Wykorzystując następnie symetrię funkcji materiałowych

$$E_{ijkl} = E_{klij}, \tag{2.23}$$

oraz twierdzenie o dywergencji (GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO)

$$\begin{aligned}
& \int_B (-\sigma'_{ij,j} u_i'' + \sigma''_{ij,j} u_i') dV = \\
& = \int_B (-p'_i u_i'' + p''_i u_i') dA + \int_B (-\sigma'_{ij} u''_{i,j} + \sigma''_{ij} u'_{i,j}) dA,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

otrzymujemy relację

$$\left\langle \{[\mathbf{A}] \{\mathbf{u}'\}\}^T, \{\mathbf{u}''\} \right\rangle = \left\langle \{[\mathbf{A}] \{\mathbf{u}''\}\}^T, \{\mathbf{u}'\} \right\rangle,$$

która dowodzi potencjalności operatora  $[\mathbf{A}]$ . Zatem, zgodnie z twierdzeniem WEINBERGA, istnieje potencjał (funkcjonał) operatora  $[\mathbf{A}]$ . Funkcjonał ten dany jest zależnością

$$\begin{aligned}
F[\{\mathbf{u}\}] &= F[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] = \frac{1}{2} \left\langle \{[\mathbf{A}] \{\mathbf{u}\}\}^T, \{\mathbf{u}\} \right\rangle + \langle \{\mathbf{f}\}, \{\mathbf{u}\} \rangle = \\
& = \frac{1}{2} \int_B [(-\sigma_{ij,j} u_i) + (-\sigma_{ij,j} + E_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \varepsilon_{ij} + (u_{(i,j)} - \varepsilon_{ij}) \sigma_{ij} + \\
& - \rho F_i u_i] dV + \int_{\partial B_\sigma} \left( \frac{1}{2} p_i^* - p_i \right) u_i dA + \int_{\partial B_u} \left( -\frac{1}{2} u_i + u_i^* \right) p_i dA.
\end{aligned} \tag{2.25}$$



Dokonując przekształceń analogicznych do (2.24), otrzymujemy

$$F[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] = \int_B \left[ \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} (u_{(i,j)} - \varepsilon_{ij}) - \rho F_i u_i \right] dV + \\ - \int_{\partial B_\sigma} p_i^* u_i dA + \int_{\partial B_u} (-u_i + u_i^*) p_i dA. \quad (2.26)$$

Funkcjonał (2.26) jest funkcjonałem wariacyjnym problemu deformacji jednorodnego i anizotropowego ciała sprężystego, i zwany jest funkcjonałem HU-WASHIZU ( $F[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] = F_{H-W}$ ). Jako zmienne niezależne występują tu trzy składowe wektora przemieszczenia  $u_i$ , sześć składowych tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  oraz sześć składowych tensora naprężenia  $\sigma_{ij}$ . Chcąc uzyskać rozwiązanie przybliżone zadania brzegowego na drodze minimalizacji funkcjonału (2.26), traktujemy funkcje  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  jako niezależne od siebie, przy czym nie muszą być spełnione warunki brzegowe (2.12) i (2.13). Zatem możemy napisać, że

$$D_F = \left\{ u_i(x) \in C^1(\bar{B}), \quad \varepsilon_{ij}(x) \in C^0(\bar{B}), \quad \sigma_{ij}(x) \in C^1(\bar{B}) \right\} \quad (2.27)$$

Wykorzystanie funkcjonału HU-WASHIZU w zastosowaniach inżynierskich może być kłopotliwe (mimo że mamy w tym przypadku największą swobodę w poszukiwaniu rozwiązania przybliżonego, gdyż nie musimy stosować żadnych ograniczeń). Dlatego też, eliminując z tego funkcjonału tensory odkształcenia i naprężenia, oraz część warunków brzegowych, uzyskamy funkcjonal mający podstawowe znaczenie w zastosowaniach praktycznych. Zażądajmy zatem, aby zostały spełnione związki (2.9), (2.10) i (2.13). Otrzymamy wtedy

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \\ \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} E_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}) = E_{ijkl} u_{k,l}, \\ u_i = u_i^*. \quad (2.28)$$

Podstawiając powyższe zależności do funkcjonału (2.26), otrzymujemy

$$\begin{aligned} F[u_i, \varepsilon_{ij}(u_k), \sigma_{ij}(u_k)] &= F[u_i] = \\ &= \int_B \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} - \rho F_i u_i \right) dV - \int_{\partial B_\sigma} p_i^* u_i dA. \end{aligned} \quad (2.29)$$

W funkcjonałe (2.29) jako zmienne niezależne występują trzy składowe wektora przemieszczenia  $u_i$  i nazywamy go funkcjonałem LAGRANGE'A ( $F[u_i] \equiv F_L$ ). Obszar określoności tego funkcjonału stanowi

$$D_F = \left\{ u_i(x) \in C^2(\bar{B}), \quad u_i = u_i^*, \quad x \in \partial B_u \right\} \quad (2.30)$$

przy czym

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{k,l}. \quad (2.31)$$

Przy dobieraniu funkcji bazowych dla uzyskania rozwiązania przybliżonego musimy spełnić kinematyczne warunki brzegowe, lecz nie musimy spełnić statycznych warunków brzegowych. Po wyznaczeniu składowych wektora przemieszczenia  $u_i$  z zależności (2.31) wyznaczamy składowe tensorów odkształcenia i naprężenia. Interesująca jest postać operatora potencjalnego będącego gradientem funkcjonału LAGRANGE'A. Obliczamy zatem pierwszą wariację funkcjonału (2.29)

$$\begin{aligned} \delta F_L &= \left. \frac{dF[\{\mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}'\}]}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \int_B \left[ \frac{1}{2} E_{ijkl} (u_{k,l} + \alpha u'_{k,l}) (u_{i,j} + \alpha u'_{i,j}) + \right. \\ &\quad \left. - \rho F_i (u_i + \alpha u'_i) \right]_{\alpha=0} dV - \frac{d}{d\alpha} \int_{\partial B_\sigma} p_i^* (u_i + \alpha u'_i) \Big|_{\alpha=0} dA = \\ &= \int_B E_{ijkl} (u_{k,lj} - \rho F_i) u'_i dV + \int_{\partial B} (p_i - p_i^*) u'_i dA \end{aligned} \quad (2.32)$$

Wykorzystano tu twierdzenia o dywergencji oraz warunek brzegowy w przemieszczeniach.

Jeżeli określić postać iloczynu skalarnego

$$\langle \{\mathbf{u}\}^T, \{\mathbf{v}\} \rangle = \int_B u_1 v_1 dV + \int_{\partial B} u_2 v_2 dA, \quad (2.33)$$

gdzie

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{cases} u_i & x \in B \\ u_i & x \in \partial B_\sigma \end{cases},$$

to gradient funkcjonału LAGRANGE'A dany będzie relacją

$$\delta F[\mathbf{u}, \mathbf{u}'] = \langle \{grad F_L[\mathbf{u}]\}^T, \{\mathbf{u}'\} \rangle, \quad (2.34)$$

przy czym

$$\{grad F_L[u_i]\} = \begin{cases} -E_{ijkl} u_{k,lj} - \rho F_i & x \in B \\ p_i - p_i^* & x \in \partial B_\sigma \end{cases}. \quad (2.35)$$

W punkcie krytycznym, gdzie  $\{grad F_L\} = \{0\}$ , otrzymamy

$$\begin{cases} E_{ijkl} u_{k,lj} + \rho F_i = 0 & x \in B \\ p_i = \sigma_{ij} u_j = p_i^* & x \in \partial B_\sigma \end{cases}. \quad (2.36)$$

Zatem wyznaczenie punktu krytycznego na drodze minimalizacji funkcjonału LAGRANGE'A, jest równoznaczne z rozwiązaniem równań przemieszczeniowych sprężystości przy uwzględnieniu statycznych warunków brzegowych.

Niekiedy dla opisu problemu brzegowego liniowej teorii sprężystości korzysta się z innego zestawu równań, a mianowicie (2.8), (2.11) i (2.12) przy czym zakłada się, że spełnione są związki geometryczne (2.9) i kinematyczne warunki brzegowe (2.13). Otrzymujemy wówczas równania:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} - \rho F_i = 0 & x \in B \\ u_{(i,j)} - J_{ijkl} \sigma_{kl} = 0 & x \in B \\ p_i - p_i^* = \sigma_{ij} n_j - p_i^* = 0 & x \in \partial B_\sigma \end{cases}. \quad (2.37)$$

Zapisując powyższe zależności w postaci równania macierzowego, otrzymujemy

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & -(\dots)_{,j} & 0 \\ \frac{1}{2}[(\dots)_{,j} + (\delta_{ij}\dots)] & -J_{ijkl}(\delta_{ik}\delta_{jl}\dots) & 0 \\ n_j & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.38)_1$$

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{cases} u_i & x \in B \\ \sigma_{ij} & x \in B \\ u_i & x \in \partial B_\sigma \end{cases}, \quad \{\mathbf{f}\} = \begin{cases} -\rho F_i & x \in B \\ 0 & x \in B \\ -p_i^* & x \in \partial B_\sigma \end{cases}. \quad (2.38)_2$$

Definiując iloczyn skalarny w postaci

$$\langle \{\mathbf{u}\}^T, \{\mathbf{v}\} \rangle = \int_B (u_1 v_1 + u_2 v_2) dV + \int_{\partial B} u_3 v_3 dA, \quad (2.39)$$

sprawdzamy, czy operator liniowy  $[\mathbf{A}]$  jest potencjalny. W tym celu obliczamy wartość wyrażenia

$$\begin{aligned} & \langle \{[\mathbf{A}]^T, \{\mathbf{u}\}\}^T, \{\mathbf{u}'\} \rangle - \langle \{[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}'\}\}^T, \{\mathbf{u}\} \rangle = \\ & = \int_B [(-\sigma_{ij,j})u'_i - (-\sigma'_{ij,j})u_i + (u_{(i,j)} - J_{ijkl}\sigma_{kl})\sigma'_{ij} + \\ & - (u'_{(i,j)} - J_{ijkl}\sigma'_{kl})\sigma_{ij}] + \int_{\partial B_\sigma} (p_i u'_i - p'_i u_i) dA = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Wykorzystano tu zależność

$$\begin{aligned} \int_B (-\sigma_{ij,j}u'_i + \sigma_{ij,j}u_i) dV &= \int_{\partial B_\sigma} [(-\sigma_{ij}n_j)u'_i + (\sigma'_{ij}n_j)u_i] dA + \\ &+ \int_B (\sigma_{ij}u'_{i,j} - \sigma'_{ij}u_{i,j}) dV. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ponieważ operator  $[\mathbf{A}]$  jest potencjalny, zatem istnieje funkcjonal dany zależnością

$$\begin{aligned} F[\{\mathbf{u}\}] &= F[u_i, \sigma_{ij}] = \frac{1}{2} \langle \{[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}\}^T, \{\mathbf{u}\} \rangle + \langle \{\mathbf{f}\}^T, \{\mathbf{u}\} \rangle = \\ &= \int_B \left( \sigma_{ij} u_{(i,j)} - \frac{1}{2} J_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} - \rho F_i u_i \right) dV - \int_{\partial B_\sigma} p_i^* u_i dA. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Jako zmienne niezależne występują tu: trzy składowe wektora przemieszczenia  $u_i$  i sześć składowych tensora naprężenia  $\sigma_{ij}$ . Funkcjonał ten zwany jest funkcjonałem REISSNERA ( $F[u_i, \sigma_{ij}] = F_R$ ). Dziedzina funkcjonału REISSNERA ma postać

$$D_F = \{u_i(x) \in C^1(B), \sigma_{ij}(x) \in C^1(B): u_i = u_i^*, x \in \partial B_u\}. \quad (2.43)$$

Po wyznaczeniu, na drodze minimalizacji funkcjonału  $F_R$ , przemieszczeń  $u_i$  i naprężeń  $\sigma_{ij}$ , odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  wyznaczamy ze związków geometrycznych.

## 2.7. Uogólnienie funkcjonału liniowej sprężystości na zadania lepkosprężystości

Przedstawione funkcjonały można przystosować do zagadnień lepkosprężystości, formułując formę dwuliniową w postaci

$$\langle f \otimes g \rangle = \int_B f * dg dV,$$

gdzie  $*$  – oznacza całkę STIELTIESA o właściwościach (2.17), oraz postępując podobnie jak w punkcie 2.2. Wtedy

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{H-W} &= \int_B \left[ \frac{1}{2} E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} * d\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} * d(u_{(i,j)} - \varepsilon_{ij}) - F_i * du_i \right] dV + \\ &\quad - \int_{\partial B_\sigma} p_i^* * du_i dA + \int_{\partial B_u} (-u_i + u_i^*) * dp_i dA, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\tilde{F}_L = \int_B \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} * du_{k,l} * du_{i,j} - F_i * du_i \right) dV - \int_{\partial B_\sigma} p_i^* * du_i dA, \quad (2.45)$$

oraz

$$\begin{aligned} \tilde{F}_R = & \int_B \left( \sigma_{ij} * du_{(i,j)} - \frac{1}{2} J_{ijkl} * d\sigma_{kl} * d\sigma_{ij} - F_i * du_i \right) dV + \\ & - \int_{\partial B_\sigma} p_i^* * du_i dA. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Funkcjonały (2.44) – (2.46) mają podobne zastosowania w poszukiwaniu rozwiązań przybliżonych liniowej teorii lepkosprężystości jak ich odpowiedniki (2.26), (2.29) i (2.42) w problemach liniowej sprężystości.

## 2.8. Funkcjonał dla problemu wymiany ciepła w ośrodku ciągłym

Jeżeli rozpatrujemy problem przepływu ciepła w ciele stałym (np. w zagadnieniach obróbki termicznej elementów betonowych, bądź w teorii naprężeń cieplnych), to korzystamy najczęściej z następującej postaci równania przepływu ciepła (dla zagadnień nieustalonych):

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - DT(x,t)_{,ii} = Q(x,t), \quad x \in B, \quad t > 0, \quad (2.47)$$

przy warunkach brzegowych

$$T(x,t) = T^*(x,t), \quad x \in \partial B_T, \quad t > 0, \quad (2.48)$$

$$T(x,t)_{,i} n_i = q^*(x,t), \quad x \in \partial B_q, \quad t > 0, \quad (2.49)$$

i warunku początkowym

$$T(x,t) = T_0(x), \quad x \in B, \quad t = 0, \quad (2.50)$$

gdzie:  $T$  jest poszukiwaną temperaturą,  $Q$  – źródłem ciepła,  $D$  – współczynnikiem przepływu ciepła,  $T^*$  – temperaturą na brzegu ciała,  $q^*$  –

strumieniem ciepła na brzegu ciała,  $T_0$  – rozkładem temperatury w chwili początkowej procesu.

Postać równania (2.47) (równanie typu parabolicznego) jest niezbyt dogodna do ujęcia wariacyjnego. Dlatego też, dokonamy na równaniach (2.47)–(2.49) transformacji LAPLACE’A, z wykorzystaniem warunku początkowego

$$p\bar{T}(x, p) - DT_{,ii}(x, p) = \bar{Q}(x, p) + T_0(x) = \bar{Q}^*(x), \quad (2.47)_1$$

$$\bar{T}(x, p) = \bar{T}^*(x, p), \quad (2.48)_1$$

$$\bar{q} = \bar{T}_{,i}(x, p)n_i = \bar{q}^*(x, p), \quad (2.49)_1$$

gdzie

$$T(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-pt} dt, \quad (2.51)$$

zaś  $p$  jest parametrem przekształcenia.

Następnie zapiszmy układ równań (2.47)<sub>1</sub> – (2.49)<sub>1</sub> w postaci następującego równania macierzowego:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{f}\} = \{0\}, \quad x \in \bar{B}, \quad (2.52)$$

gdzie

$$[\mathbf{A}] \equiv \begin{bmatrix} p(\dots) - D(\dots)_{,ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D \\ 0 & D & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\{\mathbf{u}\} \equiv \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{q} \\ \bar{T} \end{bmatrix} \begin{matrix} x \in B \\ x \in B_T, \\ x \in B_q \end{matrix}, \quad \{\mathbf{f}\} \equiv \begin{bmatrix} -\bar{Q}^* \\ D\bar{T}^* \\ -D\bar{q}^* \end{bmatrix} \begin{matrix} x \in B \\ x \in B_T, \\ x \in B_q \end{matrix}$$

zdefiniujmy iloczyn skalarny w postaci

$$\langle \{\mathbf{u}\}^T, \{\mathbf{v}\} \rangle \equiv \int_B u_1 v_1 dV + \int_{B_T} u_2 v_2 dA + \int_{B_q} u_3 v_3 dA, \quad (2.54)$$

oraz sprawdźmy wartość wyrażenia

$$\begin{aligned}
& \left\langle \{[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\}\}^T, \{\mathbf{u}'\} \right\rangle - \left\langle \{[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}'\}\}^T, \{\mathbf{u}\} \right\rangle = \\
& = \int_B [(p\bar{T} - D\bar{T}_{,ii})\bar{T}'_i + (p\bar{T}' - D\bar{T}'_{,ii})\bar{T}] dV + \\
& + D \int_{B_T} [(-\bar{T}\bar{q}') - (-\bar{T}'\bar{q})] dA + D \int_{B_q} [(\bar{q}\bar{T}') + (\bar{q}'\bar{T})] dA = 0,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

gdzie wykorzystano zależność

$$\begin{aligned}
& \int_B (-\bar{T}_{,ii}\bar{T}' + \bar{T}'_{,ii}\bar{T}) dV = \int_{\partial B_\sigma} (-\bar{T}_{,i}\bar{T}'n_i + \bar{T}'_{,i}\bar{T}n_i) dA + \\
& - \int_B (-\bar{T}_{,i}\bar{T}'_{,i} + \bar{T}'_{,i}\bar{T}_{,i}) dV = \int_{\partial B_T} (-\bar{q}\bar{T}' + \bar{q}'\bar{T}) dA + \\
& + \int_{\partial B_q} (-\bar{q}\bar{T}' + \bar{q}'\bar{T}) dA.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Ponieważ z (2.55) wynika, że operator  $[A]$  jest potencjalny, to istnieje potencjał  $F$  tego operatora dany zależnością

$$\begin{aligned}
F[\bar{T}] &= \frac{1}{2} \left\langle \{[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}\}^T, \{\mathbf{u}\} \right\rangle + \left\langle \{\mathbf{f}\}, \{\mathbf{u}\} \right\rangle = \\
& + \int_B \left( \frac{1}{2} p\bar{T}^2 - \frac{1}{2} D\bar{T}_{,ii}\bar{T} - \bar{Q}^*\bar{T} \right) dV + \\
& + D \int_{\partial B_T} \left( -\frac{1}{2} \bar{T} + \bar{T}^* \right) \bar{q} dA + \int_{\partial B_q} \left( -\frac{1}{2} \bar{q} + \bar{q}^* \right) \bar{T} dA,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

którą po wykorzystaniu twierdzenia o dywergencji



$$\begin{aligned}
\int_B \bar{T}_{,ii} \bar{T} dV &= \int_{\partial B} \bar{T}_{,i} n_i \bar{T} dA - \int_B (\bar{T}_{,i})^2 dV = \\
&= - \int_B (\bar{T}_{,i})^2 dV + \int_{\partial B_T} \bar{q} \bar{T} dA + \int_{\partial B_q} \bar{q} \bar{T} dA
\end{aligned} \tag{2.58}$$

można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{aligned}
F[\bar{T}] &= \int_B \left[ \frac{1}{2} (p \bar{T}^2 + D \bar{T}_{,i}^2) - \bar{Q}^* \bar{T} \right] dV + \\
&+ D \int_{\partial B_T} (-\bar{T} + \bar{T}^*) \bar{q} dA - D \int_{\partial B_q} \bar{q}^* \bar{T} dA.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Konstruując rozwiązania przybliżone zakładamy, że spełniony jest warunek brzegowy (2.48)<sub>1</sub>, wówczas funkcjonal (2.59) przyjmuje postać

$$F[\bar{T}] = \int_B \left[ \frac{1}{2} (p \bar{T}^2 + D \bar{T}_{,i}^2) - \bar{Q}^* \bar{T} \right] dV - D \int_{\partial B_q} \bar{q}^* \bar{T} dA. \tag{2.60}$$

Funkcjonały (2.59) i (2.60) można wykorzystać do wyznaczania przybliżonego rozkładu pola temperatury jak i koncentracji migrującego składnika (np. rozkładu wilgotności w dojrzewających elementach betonowych). W tym drugim przypadku funkcję  $T(x, t)$  (temperaturę) należy zastąpić funkcją  $C(x, t)$  (koncentracją).

### 3. UOGÓLNIONE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

W klasycznych ujęciach fizyki matematycznej, rozwiązania zadań brzegowych dla równań LAPLACE'A, przewodnictwa cieplnego czy też propagacji fal były traktowane oddzielnie. Tworzono specjalne metody postępowania przy ich rozwiązywaniu. Inaczej postępowano np. z równaniami eliptycznymi, a inaczej z parabolicznymi. Sytuacja ta nie zachęcała do powszechnego stosowania uzyskiwanych w tym zakresie rozwiązań w zastosowaniach technicznych. Tymczasem użycie transformat FOURIERA i LAPLACE'A w zakresie dystrybucji temperowanych pozwala wyszczególnić tu równania traktować z jednolitego punktu widzenia. Na tej drodze uzyskuje się rozwiązania podstawowe dla dowolnych liniowych operatorów różniczkowych, a w tym i dla klasycznych równań fizyki matematycznej. Z rozwiązań tych można zbudować następną, dla zadań źródłowych, np. źródła ciepła, sił masowych itp.

W niniejszym rozdziale podano elementy teorii dystrybucji w ujęciu funkcjonalnym oraz transformacji FOURIER'A i LAPLACE'A. Uzyskane w tym zakresie wyniki pozwoliły podać rozwiązania podstawowe dla równań przewodności cieplnej, równań falowych oraz równań liniowej termosprężystości.

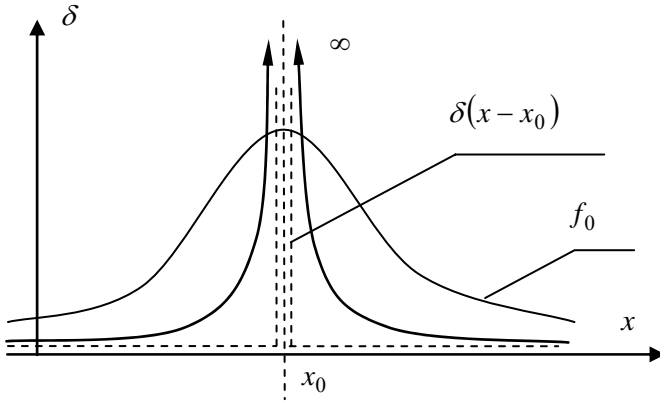
Pewne wielkości fizyczne jak np. obciążenie i moment skupiony nie mogą być przedstawione przy użyciu klasycznych funkcji znanych z podstawowych kursów matematyki. Tymczasem, z wielkości tych korzystano od dawna w mechanice. Podobnie było w innych działach fizyki, gdzie np. analizowano impulsy przyspieszeń, ładunki skupione itp. W związku z powyższym, powstała konieczność wprowadzenia tworu ogólniejszego od funkcji, który pozwoliłby z tego samego punktu widzenia analizować zarówno zagadnienia opisane klasycznie pojmovanymi funkcjami, jak i nieciągłe rozkłady różnych wielkości fizycznych. Wielkościami tymi są funkcje uogólnione albo dystrybucje. Przykładem dystrybucji jest tzw. „funkcja  $\delta$ ” o następujących właściwościach (rys. 3.1):

– dla dowolnej ciągłej funkcji  $\varphi(x)$  zachodzi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0),$$

$$- \delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0 \\ \infty & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$



Rys. 3.1

Żadna klasyczna funkcja nie posiada tych właściwości. Można jednak utworzyć taki ciąg funkcji np.:  $f_n(x) = \frac{n}{2}$  dla  $|x| \leq \frac{1}{n}$ ,  $f_n(x) = 0$  dla  $|x| \geq \frac{1}{n}$ , że dla dowolnej funkcji ciągłej  $\varphi(x)$  zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (3.2)$$

Ciąg taki nazywamy ciągiem tworzącym dla funkcji  $\delta$ . W wielu zagadnieniach fizyki matematycznej, np. przy analizie zadań mechaniki dla obciążeń skupionych, można budować ciągi tworzące dla funkcji  $\delta$ , po czym przejść do granicy. Takie podejście komplikuje rozważania tak, jak systematyczne obliczanie pochodnych jako granicy ilorazów różnicowych w miejsce rutynowego obliczania pochodnych.

Stworzono więc teorię dystrybucji, której elementy w funkcjonalowym ujęciu przedstawimy w niniejszym rozdziale. W zagadnieniach fizyki matematycznej teoria dystrybucji służy do poszukiwania rozwiązań podstawowych równań różniczkowych. Ogólność tego podejścia pozwoliła na uzyskanie nowych rozwiązań zadań fizyki.

### 3.1. Funkcje podstawowe

Dystrybucją nazywać będziemy każdy liniowy i ciągły funkcjonal określony na przestrzeni funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych. Sprecyzowanie pojęcia dystrybucji wymagać będzie wprowadzenia pewnej ogólnej

klasy funkcji zwanych funkcjami podstawowymi, na których określone będą funkcjonały wyznaczające poszczególne dystrybucje:

### Określenie 3.1.

Nośnikiem  $\text{supp}\varphi$  funkcji  $\varphi$  określonej na  $U \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy domknięcie w  $U$  zbioru punktów  $x \in U$ , dla których  $\varphi(x) \neq 0$ .

### Określenie 3.2.

Zbiór nieskończenie wiele razy różniczkowalnych funkcji w  $\mathbb{R}^n$  nazywamy przestrzenią funkcji podstawowych  $D$  (rys. 3. 2), jeżeli ciąg funkcji  $\varphi_k \in D$  jest zbieżny do funkcji  $\varphi \in D$  wtedy, gdy spełnione są warunki:

- istnieje taka liczba  $R > 0$ , że  $\text{supp}\varphi_j \subset U_R$ ,  $j = 1, 2, \dots$
- dla każdego ciągu  $\varphi_k$ ,

$$D^m \varphi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} D^m \varphi(x) \text{ jednostajnie w } \mathbb{R}^n$$

gdzie:

$$U_R = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < R\},$$

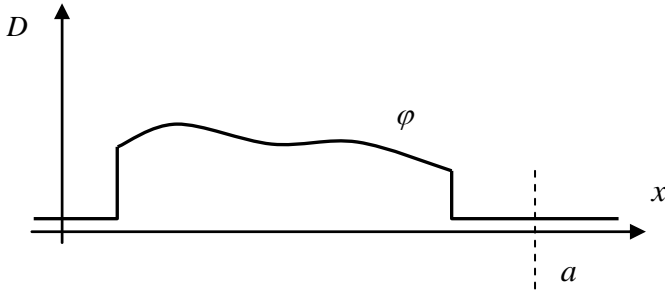
$m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ ,  $m_i \geq 0$  – dowolne liczby całkowite,

$$|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

$$D^m f(x) = \frac{\partial^{|m|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}.$$

Układ  $m$  nazywamy wielowskaźnikiem.

W dalszych rozważaniach korzystać będziemy również z pewnej specjalnej klasy dystrybucji - dystrybucji temperowanych. Dystrybucje te określone są na odmierzonej przestrzeni funkcji podstawowych.



Rys. 3.2

### Określenie 3.3.

Zbiór nieskończenie wiele razy różniczkowalnych funkcji w  $R^n$ , malejących dla  $|x| \rightarrow \infty$ , wraz ze wszystkimi pochodnymi, szybciej niż dowolna potęga  $|x|^{-1}$ , nazwiemy zbiorem funkcji podstawowych i oznaczymy symbolem  $\mathcal{G}$ , jeżeli ciąg  $\{\varphi_k\}$  zbudowany z funkcji  $\varphi_k \in \mathcal{G}$  jest zbieżny do funkcji  $\varphi \in \mathcal{G}$  wtedy, gdy dla dowolnych  $\alpha$  i  $\beta$  zachodzi związek

$$x^\beta D^\alpha \{\varphi_k(x)\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) \text{ jednostajnie w } R^n,$$

gdzie

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \text{ są wielowskaźnikami,}$$

$$\text{i } x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n}.$$

Mamy więc do czynienia z dwoma różnymi przestrzeniami funkcji podstawowych  $\mathcal{G}$  i  $D$ , na których zostaną określone dystrybucje.

## 3.2. Dystrybucje

Oznaczmy symbolem  $\overline{D}$  zbiór wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych określonych na przestrzeni funkcji podstawowych  $D$ . Każdy z tych funkcjonałów wyznacza dystrybucję. Wartość funkcjonału  $f$  na funkcji podstawowej  $\varphi$  oznaczmy przez  $(f, \varphi)$ .

W podobny sposób określimy dystrybucje temperowaną jako liniowy i ciągły funkcjonal określony na przestrzeni funkcji podstawowych  $\mathcal{G}$ . Ich zbiór oznaczymy przez  $\overline{\mathcal{G}}$ .

Minimum wiadomości o algebrze dystrybucji sprowadza się do określenia równości dystrybucji, sumy i iloczynu.

Będziemy mówili, że dystrybucja  $f$  znika w obszarze  $G$ , jeśli  $(f, \varphi) = 0$  dla wszystkich funkcji  $\varphi$  należących do  $D$  z nośnikiem w  $G$ . Natomiast dystrybucje  $f_1$  i  $f_2$  nazywamy równymi w obszarze  $G$ , jeśli  $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$  dla wszystkich  $\varphi \in D$ .

Sumą dystrybucji  $f_1$  i  $f_2$  i ich iloczynem przez liczby  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  nazywamy dystrybucję

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \varphi) = \lambda_1 (f_1, \varphi) + \lambda_2 (f_2, \varphi). \quad (3.3)$$

Mówimy, że ciąg dystrybucji  $\{f_k\} \in \overline{D}$  jest zbieżny do dystrybucji  $f \in \overline{D}$ , jeżeli  $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$  przy  $k \rightarrow \infty$  dla dowolnej funkcji podstawowej  $\varphi \in D$ . Podobnie szereg dystrybucji  $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$  nazywamy szeregiem zbieżnym do dystrybucji  $f \in \overline{D}$ , jeżeli dla dowolnej funkcji podstawowej  $\varphi \in D$  szereg liczbowy  $\sum_{k=1}^{\infty} (f_k, \varphi)$  jest zbieżny do  $(f, \varphi)$ .

Wśród dystrybucji wydzielamy:

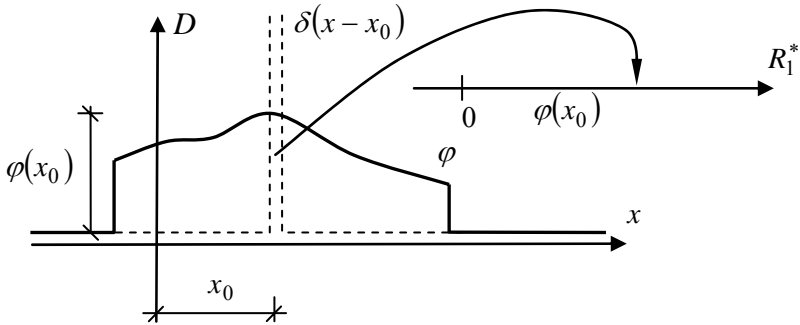
– dystrybucje regularne

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad (3.4)$$

gdzie  $f$  – jest funkcją lokalnie całkowaną w  $\mathbb{R}^n$ , oraz

– dystrybucje osobliwe, np.  $\delta$  – Diraca (rys. 3.3),

$$\begin{aligned} (\delta, \varphi) &= \varphi(0), & \varphi &\in D(\mathbb{R}^n), \\ (\delta_{x_0}, \varphi) &= (\delta(x - x_0), \varphi) = \varphi(x_0), & \varphi &\in D(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (3.5)$$



**Rys. 3.3.**

Iloczynem dystrybucji  $f \in \overline{D}$  oraz  $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  - funkcji nieskończenie różniczkowalnych i ciągłych jest dystrybucja określona następująco

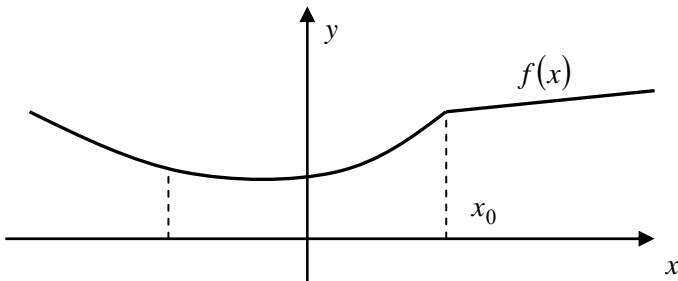
$$(hf, \varphi) = (f, h\varphi).$$

Jeżeli  $f$  jest dystrybucją regularną, to

$$(hf, \varphi) = \int h(x)f(x)\varphi(x)dx. \quad (3.6)$$

### 3.3. Różniczkowanie dystrybucji

W klasycznym ujęciu rachunku różniczkowego pochodną oblicza się jako granicę ilorazu różniczkowego. Istnieją więc przypadki funkcji, które w określonych punktach nie będą posiadały pochodnych, co przedstawiono np. na rys. 3.4.



**Rys. 3.4**

Tymczasem dystrybucyjne podejście zapewnia istnienie pochodnych dystrybucji dowolnie wysokiego rzędu.

Niech  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Wówczas analizując funkcjonal  $(f', \varphi)$

$$(f', \varphi) = \int f'(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D(D^1), \quad (3.7)$$

łatwo zauważyć, że po zastosowaniu wzoru na całkowanie przez części otrzymamy

$$(f', \varphi) = \int f'(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi').$$

Jeżeli  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , to

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int f(x)D^\alpha \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) \quad |\alpha| \leq k. \quad (3.8)$$

Powyższa równość daje podstawę do następującego określenia pochodnej  $D^\alpha f$  dystrybucji  $f$ .

### Określenie 3.4.

Pochodną  $D^\alpha f$  dowolnej dystrybucji  $f$  nazywamy funkcjonal

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad (3.9)$$

gdzie  $\alpha$  dowolny wielowskiąznik.

Jeżeli  $f$  jest dystrybucją regularną, to

$$\left( \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \varphi(x_1, \dots, x_n) \right) = (-1)^{|\alpha|} \int f(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx$$

W oparciu o definicję (3.4) można stwierdzić, że każda dystrybucja ma pochodne dowolnego rzędu, będące dystrybucjami, przy czym różniczkowanie jest przemienne. W szczególności każda funkcja lokalnie sumowalna ma pochodne dystrybucyjne dowolnie wysokiego rzędu. Pochodne te na ogół nie są funkcjami. W przypadku funkcji ciągłej mającej ciągłe pochodne, pochodne



dystrybucyjne pokrywają się z pochodnymi w sensie klasycznym. Podane wzory stanowią podstawę analizy dystrybucji.

### 3.4. Splot dystrybucji

Wprowadzenie pojęcia iloczynu splotowego dystrybucji poprzedzi określenie iloczynu kartezjańskiego dystrybucji  $f(x)$  i  $g(y)$ .

Niech  $f(x)$  będzie dystrybucją określoną na zbiorze funkcji  $\varphi \in D(\mathbb{R}^m)$ , a  $g(y)$  na zbiorze  $\beta \in D(\mathbb{R}^n)$ . Przez iloczyn prosty dystrybucji  $f$  i  $g$  rozumiemy dystrybucję określoną relacją

$$(f(x) \times g(y), \pi(x, y)) = (f(x), (g(y), \pi(x, y))) \quad (3.10)$$

gdzie  $\pi(x, y) \in D(\mathbb{R}^{m+n})$ .

Określmy teraz splot dystrybucji.

Ciąg funkcji  $\{\eta_k(x)\}$  należących do  $D(\mathbb{R}^n)$  nazywamy ciągiem zbieżnym do 1 w  $\mathbb{R}^n$ , jeżeli:

– dla dowolnego  $U_r$ ,  $U_r = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < r\}$  istnieje takie  $N$ , że  $\eta_k(x) = 1$  dla  $x \in U_r$ , oraz  $k \geq N$ ;

–  $|D^\alpha \eta_k(x)| \leq C_\alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha$  – dowolne.

Niech  $\{\eta_k(x, y)\}$ , będzie ciągiem funkcji należących do  $D(\mathbb{R}^{2n})$  zbieżnym do 1 w  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Niech  $f(x)$ ,  $g(y)$  będą dystrybucjami z  $\overline{D}(\mathbb{R}^n)$  takimi, że ciąg liczbowy

$$(f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) \quad (3.11)$$

ma granicę dla  $k \rightarrow \infty$ , którą oznaczamy

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x + y)).$$

Splotem  $f * g$  nazywamy funkcjonal

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= (f(x) \times g(y), \varphi(x + y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Jeżeli  $f * g$  istnieje, to istnieje  $g * f$  oraz  $f * g = g * f$ .

Zauważmy, że jeżeli  $f(x)$  jest dowolną dystrybucją to  $\delta * f = f$ . Dystrybucja  $\delta$  jest więc jednością iloczynu splotowego dystrybucji. Zachodzi ponadto  $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$ .

Natomiast splot dystrybucji  $f(x)$  z  $\delta(x-x_0)$  jest równoważny przesunięciu dystrybucji  $f(x)$  o  $x_0$

$$\delta(x-x_0) * f(x) = f(x-x_0). \quad (3.13)$$

Przytoczone wzory posiadają odpowiedniki w klasycznym rachunku splotu funkcji.

Wzór na różniczkowanie splotu ma postać

$$\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}$$

a w postaci ogólnej

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g. \quad (3.14)$$

### 3.5. Uogólnione rozwiązania równań różniczkowych

Analizować będziemy liniowe równanie różniczkowe  $m$ -tego rzędu o współczynnikach  $a_k(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$L(x, D)u = \sum_{|k|=0}^m a_k(x) D^k u(x) = f(x) \quad (3.15)$$

oraz  $f \in \overline{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Zauważmy, że dla dowolnego  $\varphi \in D(G)$

$$\begin{aligned} (L(x, D)u, \varphi) &= \left( \sum_{|k|=0}^m a_k D^k u, \varphi \right) = \sum_{|k|=0}^m (D^k u, \alpha_k \varphi) = \\ &= \sum_{|k|=0}^m (-1)^{|k|} (u, D^k (a_k \varphi)) = \left( u, \sum_{|k|=0}^m (-1)^{|k|} D^k (a_k \varphi) \right) = (u, \hat{L}(x, D)\varphi). \end{aligned}$$

### Określenie 3.5.

Rozwiązaniem dystrybucyjnym w obszarze  $\Gamma \subset R^n$  liniowego równania różniczkowego

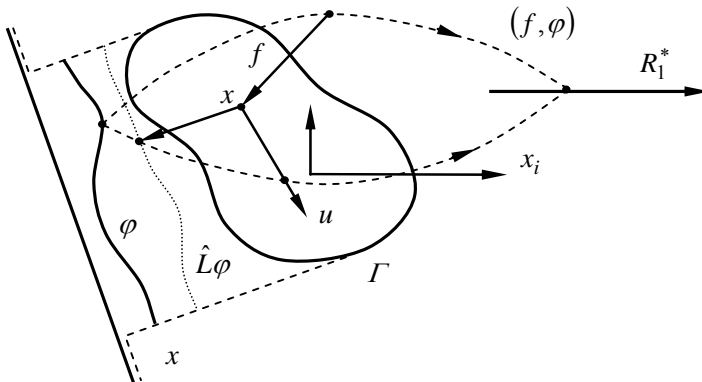
$$L(x, D)u = f \quad (3.16)$$

nazywamy każdą dystrybucję  $u$  spełniającą to równanie w  $\Gamma$  w sensie dystrybucyjnym (rys. 3.5), to znaczy dla dowolnej funkcji  $\varphi \in D$ , której nośnik zawarty jest w  $\Gamma$  zachodzi równość

$$(u, \hat{L}(x, D)\varphi) = (f, \varphi), \quad (3.17)$$

gdzie

$$\hat{L}(x, D)\varphi = \sum_{|k|=0}^m (-1)^{|k|} D^k (a_k \varphi). \quad (3.18)$$



Rys. 3.5

Zauważmy, że wprowadzone pojęcie rozwiązań dystrybucyjnych pozwala poszukiwać, np. w mechanice, rozwiązań zadań brzegowych wywołanych działaniem sił skupionych i momentu skupionego. W mechanice znane są sposoby wyznaczania przemieszczeń wywołanych działaniem jednostkowej siły skupionej. Noszą one nazwę linii czy też powierzchni wpływu. Okazuje się, że formalnie poprawne wyznaczenie tych powierzchni wymaga zastosowania aparatu formalnego teorii dystrybucji. Z drugiej strony, umiejętność poszukiwania powierzchni wpływu jest konieczne, szczególnie przy rozwiązywaniu bardziej złożonych zadań brzegowych.

Zadaniom tym w naszym ujęciu zagadnienia odpowiadają rozwiązania podstawowe, które definiuje:

### Określenie 3.6.

Rozwiązaniem podstawowym liniowego operatora różniczkowego

$$L(D) = \sum_{|k|=0}^m a_k D^k \quad \text{o stałych współczynnikach } a_k \text{ nazywamy dystrybucję}$$

$E \in \overline{D}(R^n)$  spełniającą równanie

$$L(D)E = \delta. \quad (3.19)$$

Okaże się dalej, że każdy liniowy operator różniczkowy posiada rozwiązanie podstawowe w klasie dystrybucji temperowanych. Natomiast dla dystrybucji  $f \in \overline{D}$  rozwiązanie  $u$  można przedstawić w formie splotu rozwiązania podstawowego i dystrybucji  $f$ , zgodnie ze wzorem

$$u = E * f. \quad (3.20)$$

Prawdziwym jest przy tym następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.1.** Równanie  $L(D)u = f$ , gdzie  $L(D) \neq 0$ , posiada rozwiązanie w klasie dystrybucji temperowanych  $\overline{\mathcal{D}}$ , dla każdego  $f \in \overline{\mathcal{D}}$ .

Twierdzenie to podał S. ŁOJASIEWICZ w 1959 r.

Można więc stwierdzić, że każdy niezerowy liniowy operator różniczkowy ze stałymi współczynnikami posiada rozwiązanie podstawowe temperowane.

Rozwiązanie podstawowe  $L(D)E = \delta(x)$  nie jest w ogólności jednoznaczne, jest ono wyznaczone z dokładnością do dystrybucji  $E_0$  spełniającej równanie  $L(D)E_0 = 0$ . Oczywiście zachodzi  $L(D)(E + E_0) = \delta(x)$ .

W następnych punktach wykażemy, że wyznaczenie dystrybucji  $E$  jest równoznaczne z rozwiązaniem równania  $L(-iu)F[E]=1$ , gdzie  $F[E]$  jest transformacją FOURIERA dystrybucji  $E$ .

### 3.6. Transformaty FOURIERA dystrybucji temperowanych

Transformacje FOURIERA wykorzystuje się w teorii równań różniczkowych do wyznaczania rozwiązań zadań brzegowych. Wiadomo przy tym, że nie wszystkie funkcje mają transformaty fourierowskie. Nie ma jej już np. funkcja stała. Natomiast w dystrybucyjnym ujęciu problemu każda dystrybucja temperowana posiada transformatę FOURIERA, która okazuje się być również dystrybucją temperowaną. Jest to więc z punktu widzenia równań fizyki matematycznej bardzo korzystna sytuacja, która pozwala w tej klasie dystrybucji dokonać optymalizacji poszukiwań rozwiązań równań różniczkowych.

W niniejszym punkcie przedstawimy ogólne właściwości transformat funkcji podstawowych, a w następnej kolejności przedstawimy transformaty dystrybucji.

Transformatę FOURIERA  $F[\varphi]$  funkcji podstawowej  $\varphi \in \mathcal{G}$  określają równości

$$F[\varphi] = \int \varphi(x) e^{i(\alpha, x)} dx = \hat{\varphi}(\alpha), \quad \text{gdzie } (\alpha, x) = \alpha_j x_j \quad (3.21)$$

lub

$$F[\varphi] = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int \varphi(x) e^{i(\alpha, x)} dx, \quad \varphi \in \mathcal{G}. \quad (3.21)_1$$

W zastosowaniach będziemy stosowali obie postacie transformat FOURIERA, które różnią się jedynie czynnikiem  $(\sqrt{2\pi})^{-n}$ .

Funkcja podstawowa  $\varphi(x)$  z definicji maleje dla  $|x| \rightarrow \infty$  szybciej niż dowolna potęga  $|x|^{-1}$ , stąd też jej transformatę można różniczkować dowolną ilość razy. Istotnie zachodzi

$$\begin{aligned} D^k F[\varphi](\alpha) &= D_\alpha^k \int \varphi(x) \exp i(\alpha, x) dx = \int (ix)^k \varphi(x) \exp i(\alpha, x) dx = \\ &= F[(ix)^k \varphi](\alpha), \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdzie

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2} \dots \partial \alpha_n^{k_n}}, \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad |k| = k_1 + \dots + k_n,$$

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Podobnie

$$F[D^k \varphi](\alpha) = \int D^k \varphi^{(\alpha)} \exp i(\alpha, x) dx = (-i\alpha)^k F[\varphi](\alpha). \quad (3.23)$$

Z zależności (3.22) i (3.23) wnosimy, że

$$\alpha^m D^k F[\varphi](\alpha) = \alpha^m F[(ix)^k \varphi](\alpha) = i^{|m|+|k|} F[D^m (x^k \varphi)](\alpha). \quad (3.24)$$

Z równości (3.24) wynika, że dla każdego  $m$  i  $k$  wielkość  $\alpha^m D^k F[\varphi](\alpha)$  jest ograniczona i zachodzi nierówność

$$\left| \alpha^m D^k F[\varphi](\alpha) \right| \leq \int \left| D^m (x^k \varphi) \right| dx, \quad (3.25)$$

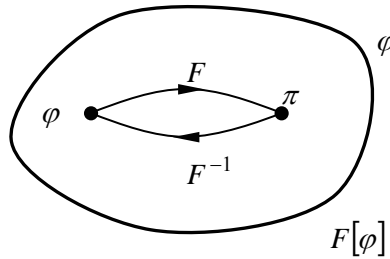
która oznacza, że  $F[\varphi] \in \mathcal{G}$ , czyli przekształcenie FOURIERA funkcji podstawowej  $\varphi$  jest przekształceniem w obrębie tej samej przestrzeni.

Z ogólnej, klasycznej teorii transformacji FOURIERA wiadomo, że jeśli transformacja FOURIERA funkcji  $\varphi \in \mathcal{G}$  jest funkcją różniczkowalną dowolną ilość razy w  $R^n$  to funkcję  $\varphi(x)$  można przedstawić przez jej transformaty  $F$  i  $F^{-1}$  relacją (rys. 3.6)

$$\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \quad (3.26)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 F^{-1}[\pi](x) &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \pi(\alpha) \exp[-i(\alpha, x)] d\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\pi](-x) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \pi(-\alpha) \exp i(\alpha, x) d\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\pi(-\alpha)].
 \end{aligned} \tag{3.27}$$



**Rys. 3.6**

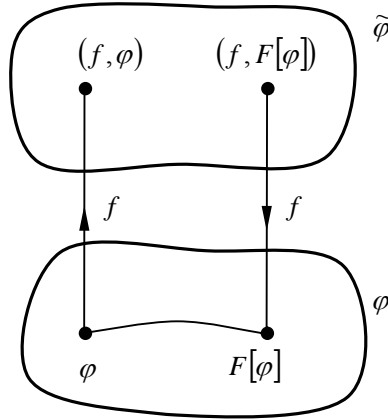
Z formuł (3.26) i (3.27) wynika, że każda z funkcji  $\varphi \in \mathcal{G}$  jest jednocześnie przekształceniem FOURIERA funkcji  $\pi = F^{-1}[\varphi]$  z  $\mathcal{G}$ ,  $\varphi = F(\pi)$ . Dodatkowo, dla  $F[\varphi] = 0$  zachodzi, że  $\varphi = 0$ . Rezultaty te dowodzą, że transformata FOURIERA przekształca  $\mathcal{G}$  w  $\mathcal{G}$  i przy tym wzajemnie jednoznacznie. Podobnie jest zawsze wykonalna operacja różniczkowania w zbiorze funkcji podstawowych i ich transformat należących znów do  $\mathcal{G}$ .

Możemy teraz wprowadzić przekształcenie FOURIERA dla dystrybucji temperowanych

### Określenie 3.7

Przekształceniem FOURIERA  $F[f]$  dystrybucji temperowanej  $f \in \overline{\mathcal{G}}$  (rys. 3.7) nazywamy dystrybucję określoną związkami

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in \mathcal{G}, \quad f \in \overline{\mathcal{G}}. \tag{3.28}$$

**Rys. 3.7**

Podobnie jak w relacji (3.27) określimy transformację odwrotną.

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \bar{\mathcal{G}}. \quad (3.29)$$

Określimy teraz związki zachodzące między transformatą  $F$  i  $F^{-1}$  dystrybucji  $f$ .

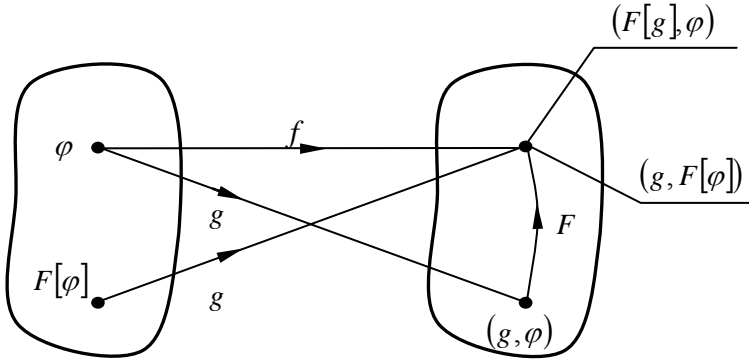
Będzie

$$\begin{aligned} (F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f]](-\alpha), \varphi) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](-\alpha), F[\varphi]) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f], F[\varphi](-\alpha)) = \\ &= (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi) = \\ &= (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F(F^{-1}[f]), \varphi). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Z przytoczonych zależności wynika, że każda dystrybucja temperowana  $f$  jest transformatą FOURIERA dystrybucji  $g$ , czyli  $f = F[g]$ , oraz  $g = F^{-1}[f]$  (rys. 3.8). Jeżeli więc  $F[f] = 0$  to i  $f = 0$ .

Podamy z kolei kilka podstawowych relacji określających najistotniejsze, z punktu widzenia zastosowań, właściwości transformacji dystrybucji temperowanych.





Rys. 3.8

Zachodzą równości

$$\begin{aligned}
 D^k F[f] &= F[(ix)^k f], & F[D^k f] &= (-i\alpha)^k F[f], \\
 F[f(x - x_0)] &= \exp[i(x_0, \alpha)] F[f], \\
 F[f(cx)] &= |c|^{-n} F[f]\left(\frac{\alpha}{c}\right), & c \neq 0, \\
 F[f(x) \cdot g(y)] &= F[f](\alpha) F[g](\beta), & F[fg] &= F[f] F[g].
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Przytoczone wzory są przydatne przy poszukiwaniu rozwiązań podstawowych równań fizyki matematycznej.

Można wykazać, że transformaty dystrybucji  $\delta(x)$  i stałej 1, ( $\delta, 1 \in \overline{\mathcal{G}}(R^n)$ ) mają postać

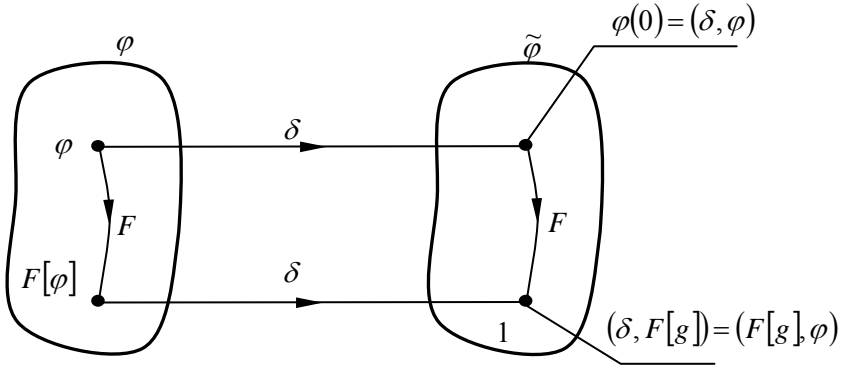
$$\begin{aligned}
 F[\delta(x - x_0)] &= \exp i(\alpha, x_0), & F[\delta] &= 1, \\
 F[1] &= (2\pi)^n \delta(\alpha), \\
 F[D^k \delta] &= (-i\alpha)^k, & F[x^\beta] &= (2\pi)^n (-i)^{|\beta|} D^\beta \delta(\alpha).
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Zależności (3.32) wynikają z wzorów (3.31) po podstawieniu w miejsce dystrybucji  $f$  dystrybucję  $\delta$  i wykorzystaniu jej właściwości.

Podamy teraz uzasadnienie wzorów (3.31):

– różniczkowanie transformaty dystrybucji

$$\begin{aligned}
 D^k F[f] &= (D^k F[f], \varphi) = (-1)^k (F[f], D^k \varphi) = (-1)^{|k|} (f, F[D^k \varphi]) = \\
 &= (-1)^{|k|} (f, (-ix)^k F[\varphi]) = ((ix)^k f, F[\varphi]) = (F[(ix)^k f], \varphi).
 \end{aligned}$$



Rys. 3.9

W szczególności, dla  $f = 1$  uzyskujemy

$$F[x^k] = (-1)^{|k|} D^k F(1) = (2\pi)^n (-i)^{|k|} D^k \delta(\alpha);$$

– transformata pochodnej dystrybucji

$$\begin{aligned} (F[D^k f], \varphi) &= (D^k f, F[\varphi]) = (-1)^{|k|} (f, D^k F[\varphi]) = \\ &= (-1)^{|k|} (f, F[(i\alpha)^k \varphi]) = \\ &= (-1)^{|k|} (F[f], (i\alpha)^k \varphi) = ((-i\alpha)^k F[f], \varphi); \end{aligned}$$

W szczególności, dla  $f = \delta$  będzie

$$F[D^k \delta] = (i\alpha)^k F[\delta] = (-i\alpha)^k;$$

– transformata przesuniętej dystrybucji

$$\begin{aligned} (F[f(x - x_0)], \varphi) &= (f(x - x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x - x_0)) = \\ &= (f, F[\varphi e^{i(x_0, \alpha)}]) = (F[f], e^{i(x_0, \alpha)} \varphi) = (e^{i(x_0, \alpha)} F[f], \varphi); \end{aligned}$$

– transformacja przy zmianie argumentu przez podobieństwo

$$\begin{aligned}(F[f(cx)], \varphi) &= (f(cx), F[\varphi]) = |c|^{-n} \left( f, F\left[\varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right] \right) = \\ &= (f, F[\varphi(cx)]) = (F[f], \varphi(c\alpha)) = |c|^{-n} \left( F[f]\left(\frac{\alpha}{c}\right), \varphi \right).\end{aligned}$$

### 3.7. Transformacje LAPLACE'A dystrybucji

Podamy z kolei jedno z uogólnień transformacji LAPLACE'A na dystrybucje. Podobnie jak w przypadku funkcji interesować nas będą dystrybucje  $f(x)$ , które znikają dla  $t < 0$  i takie, że  $f(x)\exp(-\sigma t) \in \bar{\mathcal{G}}$  dla każdego  $\sigma > a$ .

Zbiór dystrybucji o tych własnościach oznaczamy symbolem  $\bar{\mathcal{G}}_+(a)$  i są one podzbiorem dystrybucji  $\bar{D}(R^1)$ .

Jeżeli  $f(t)$  jest lokalnie całkowalną funkcją w  $R^1$  i  $f(t) = 0, t < 0$  oraz

$$|f(t)| \leq A \exp at \quad \text{przy } t \rightarrow \infty$$

to całkę

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad p = \sigma + i\omega \quad (3.33)$$

nazywamy transformacją LAPLACE'A funkcji  $f$ .

Wzór (3.33) w ujęciu przekształcenia FOURIERA przyjmuje postać

$$\bar{f}(p) = F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) \quad \sigma > a.$$

Zależność ta będzie podstawą do zdefiniowania przekształcenia LAPLACE'A funkcji uogólnionych.

#### Określenie 3.8.

Jeżeli dystrybucja  $f(x)$  spełnia warunek  $f(x)\exp(-\sigma t) \in \bar{\mathcal{G}}_+$ , to dla  $\sigma > a$  istnieje transformacja FOURIERA dystrybucji

$$\bar{f}(p) = F[f(t)\exp(-\sigma t)](-\omega) = 2\pi F^{-1}[f(t)\exp(-\sigma t)](\omega) \in \bar{\mathcal{G}} \quad (3.34)$$

którą określamy jako transformację LAPLACE'A dystrybucji  $f$ .

Zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned}
 f^m(t) &\leftrightarrow p^m \bar{f}(p), & \sigma > a, & \quad m = 0, l, \dots; \\
 (-t)^m f(t) &\leftrightarrow \bar{f}^m(p), & \sigma > a, & \quad m = 0, l, \dots; \\
 f(kt) &\leftrightarrow \frac{1}{k} \bar{f}\left(\frac{p}{k}\right), & \sigma > ka, & \quad k > 0; \\
 \delta(t) &\leftrightarrow 1; \\
 H(t) &\leftrightarrow \frac{1}{p}, & \sigma > 0; \\
 H(t)\exp(i\omega t) &\leftrightarrow \frac{1}{(p - i\omega)}, & \sigma > 0; \\
 H(t)\exp(-i\omega t) &\leftrightarrow \frac{1}{(p + i\omega)}, & \sigma > 0; \\
 H(t)\cos(\omega t) &\leftrightarrow p(p^2 + \omega^2)^{-1}, & \sigma > 0; \\
 H(t)\sin(\omega t) &\leftrightarrow \omega(p^2 + \omega^2)^{-1}, & \sigma > 0.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

### 3.8. Rozwiązania podstawowe równań różniczkowych zwyczajnych

Będziemy poszukiwali rozwiązań podstawowych dla typowych liniowych operatorów różniczkowych jednej zmiennej. Jak już podawaliśmy, rozwiązaniem dystrybucyjnym w obszarze  $G \subset R^n$  linowego równania różniczkowego  $L(x, D) = f(x)$ ,  $f \in \bar{D}$  nazywamy każdą dystrybucję  $u$ , spełniającą to równanie w sensie dystrybucyjnym, czyli

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi) \quad L(x, D) = \sum_{n=0}^l a_n D^n.$$

W oparciu o transformację LAPLACE'A dystrybucji i wzory (3.35), podamy rozwiązania podstawowe dla kilku liniowych operatorów postaci

$$L = \sum_{n=0}^m a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}.$$

**Przykład 3.1.**

Należy wyznaczyć rozwiązanie podstawowe  $E$  dla operatora  $\frac{d}{dt} + a$ , czyli

$$\frac{dE}{dt} + aE = \delta(t).$$

Posługując się wzorami na transformatę LAPLACE'A otrzymamy zależności

$$p\bar{E}(p) + a\bar{E}(p) = 1 \rightarrow \bar{E}(p) = \frac{1}{p+a} \rightarrow E(t) = H(t)e^{-at}.$$

**Przykład 3.2.**

Wyznaczyć rozwiązanie podstawowe  $E$  dla operatora  $\frac{d^2}{dt^2} + a^2$ , czyli

$$\frac{d^2E}{dt^2} + a^2E = \delta(t).$$

Zachodzą relacje

$$p^2\bar{E}(p) + a^2\bar{E}(p) = 1 \rightarrow \bar{E}(p) = \frac{1}{p^2 + a^2} \rightarrow E(t) = H(t)\frac{1}{a}\sin(at).$$

Podane w przykładach 3.1, 3.2 rozwiązania podstawowe wykorzystamy do poszukiwania rozwiązań równania przewodnictwa ciepła i równania falowego. Przytoczone rozwiązania staną się częścią rozwiązań podstawowych tych równań.

**Przykład 3.3.**

Należy wyznaczyć rozwiązanie podstawowe  $E$  dla operatorów

$$\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt}, \quad \frac{d^3}{dt^3} - a^3, \quad \frac{d^4}{dt^4} - a^4.$$

W wyniku zastosowania transformacji LAPLACE'A uzyskujemy następujące rozwiązania podstawowe  $E$

$$\frac{d^2 E}{dt^2} + a \frac{dE}{dt} = \delta \rightarrow E(t) = H(t)(1 - e^{-at}),$$

$$\frac{d^3 E}{dt^3} - a^3 E = \delta \rightarrow E(t) = \frac{H(t)}{3a^2} \left\{ e^{at} - e^{\frac{-at}{2}} \left[ \cos\left(\frac{a\sqrt{3}t}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{a\sqrt{3}t}{2}\right) \right] \right\},$$

$$\frac{d^4 E}{dt^4} - a^4 E = \delta \rightarrow E(t) = \frac{H(t)}{2a^2} [\sin(at) - \sin(at)].$$

### 3.9. Równanie przewodności cieplnej

Poszukiwać będziemy rozwiązania podstawowego dla  $n$ -wymiarowego równania przewodności cieplnej. Zagadnienie w przypadku  $n=3$  dotyczy może niestacjonarnych przepływów cieplnych wywołanych działaniem skupionego i impulsowego źródła ciepła  $\delta(x, t) = \delta(x)\delta(t)$ .

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia dystrybucji  $E = E(x, t)$  spełniającej równanie

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \nabla^2 E = \delta(x, t), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.40)$$

Posłużymy się tutaj transformacją FOURIERA dla dystrybucji temperowanych  $F_x[E] = \hat{E}(\alpha, t)$ . Otrzymamy

$$\begin{aligned} F_x \left[ \frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \nabla^2 E \right] &= F_x [\delta(x, t)] \rightarrow F_x \left[ \frac{\partial E}{\partial t} \right] - a^2 F_x [\nabla^2 E] = F_x [\delta(x)\delta(t)] \\ &= 1(\alpha)\delta(t), \end{aligned}$$

przy czym

$$F_x \left[ \frac{\partial E}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} F_x [E], \quad F_x [\nabla^2 E] = -|\alpha|^2 F_x [E], \quad |\alpha| = \sqrt{\alpha_i \alpha_i}.$$

Uzyskujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} + a^2 |\alpha|^2 \hat{E}(\alpha, t) = 1(\alpha) \delta(t), \text{ gdzie } \hat{E} = F_x[E]. \quad (3.41)$$

analogiczne jak równanie rozpatrywane w przykładzie 3.1 z poprzedniego punktu. Po podstawieniach  $a \rightarrow a^2 |\alpha|^2$  otrzymujemy jego rozwiązanie

$$\hat{E}(\alpha, t) = H(t) \exp(-a^2 |\alpha|^2 t).$$

Stosując do powyższego równania odwrotną transformację FOURIERA, uzyskujemy

$$E(x, t) = F_\alpha^{-1}[\hat{E}(\alpha, t)] = \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int \exp(-a^2 |\alpha|^2 t - i(\alpha, x)) d\alpha = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \quad (3.42)$$

Dystrybucja  $E(x, t)$  jest rozwiązaniem podstawowym dla  $n$ -wymiarowego równania przewodnictwa cieplnego. Oczywiście, jeżeli w miejsce punktowego źródła  $\delta(x, t)$  podstawimy czasowo-przestrzenny rozkład źródła ciepła  $\rho r(x, t)$  to rozwiązanie  $T(x, t)$  odpowiadające temu rozkładowi ma postać

$$T(x, t) = E * \rho r. \quad (3.43)$$

Wzór ten wynika z własności rozwiązania uogólnionego  $E$ . Zachodzi bowiem

$$\begin{aligned} L(D)E * \rho r &= \left( \sum_{|n|=0}^m a_n D^n E \right) * \rho r = \sum_{|n|=0}^m a_n D^n (E * \rho r) = \\ &= L(D)(E * \rho r), \end{aligned} \quad (3.44)$$

stąd

$$L(D)E = \delta \rightarrow L(D)E * \rho r = \rho r \text{ czyli } L(D)T = \rho r.$$

Przytoczony rezultat ma ogólny charakter, słuszny dla dowolnego liniowego równania różniczkowego.

### 3.10. Równanie falowe

Analizowane będą rozwiązania podstawowe operatora falowego  $\# = a^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , gdzie  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$   $i = 1, 2, \dots, n$ . Będziemy więc poszukiwali rozwiązania równania

$$\# E = \delta(x, t). \quad (3.45)$$

Stosując obustronnie do równania falowego przekształcenia FOURIERA  $F_x[f] = \hat{f}(\alpha, t)$  uzyskujemy równanie zwyczajne

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(\alpha, t)}{\partial t^2} + a^2 |\alpha|^2 \hat{E}(\alpha, t) = 1(\alpha) \delta(t), \quad (3.46)$$

którego rozwiązaniem, na podstawie przykładu (3.2), jest dystrybucja

$$E(x, t) = F_\alpha^{-1}[\hat{E}(\alpha, t)] = H(t) F_\alpha^{-1} \left[ \frac{\sin a|\alpha|t}{a|\alpha|} \right], \quad (3.47)$$

przy czym retransformata  $F_\alpha^{-1}$  wynosi

– dla  $n = 3$

$$F_\alpha^{-1} \left[ \frac{\sin a|\alpha|t}{a|\alpha|} \right] = \frac{1}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2), \quad (3.48)$$

stąd

$$E_3(x, t) = \frac{H(t)}{2\pi a} \delta((at)^2 - |x|^2); \quad (3.49)$$

– dla  $n = 2$

$$F_\alpha^{-1} \left[ \frac{\sin a|\alpha|t}{a|\alpha|} \right] \rightarrow E_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{(a^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad (3.50)$$

– dla  $n = 1$

$$F_\alpha^{-1} \left[ \frac{\sin a|\alpha|t}{a|\alpha|} \right] \rightarrow E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|). \quad (3.51)$$



Przytoczone rozwiązania można wykorzystać do szukania rozwiązań prostych, falowych zadań teorii sprężystości.

### 3.11. Równanie LAPLACE'A

Poszukujemy dystrybucji  $E(x)$  spełniającej równanie

$$\nabla^2 E(x) = \delta(x), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.52)$$

Stosując transformację FOURIERA, otrzymamy

$$-|\alpha|^2 F[E] = 1 \rightarrow \hat{E} = -\frac{1}{|\alpha|^2} \rightarrow E = -F^{-1}[|\alpha|^{-2}].$$

W wyniku przekształceń uzyskujemy rozwiązania podstawowe

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{dla } n = 2; \\ E(x) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} & \text{dla } n = 3. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Podobne rozwiązania mogą zostać wykorzystano do poszukiwania źródłowych stacjonarnych rozkładów temperatury, koncentracji itp.

### 3.12. Rozwiązania podstawowe równań termosprężystości

Równania liniowej termosprężystości stanowią uogólnienie równań przewodnictwa cieplnego i sprężystości. Stanowią więc najogólniejszy przypadek równań rozpatrywanych w tym rozdziale. Przyjmuje się w nich, że zarówno pole temperatury wpływa na stan naprężeń jak i odwrotnie - pole naprężeń oddziałuje na przepływy ciepła. W przypadku szczególnym, po pominięciu tego drugiego wpływu, otrzymujemy równania teorii naprężeń cieplnych w ciele sprężystym. W równaniach tych przyjmuje się, że znany rozkład temperatury wywołuje dystorsyjny stan naprężeń w ciele sprężystym. Warto podkreślić, że równania te mają szerokie zastosowanie w praktyce inżynierskiej.

Problemy termosprężystości opisują równania:

– bilansu pędu i krętu

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad (3.54)$$

– bilansu energii, z uwzględnieniem entropii  $S$

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} = \rho r - q_{i,i}; \quad (3.55)$$

oraz równania fizyczne określające:

– tensor naprężenia  $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij}; \quad (3.56)$$

– entropię

$$\rho S = \gamma \varepsilon_{ii} + c_\varepsilon \frac{\theta}{T_0}; \quad (3.57)$$

– strumień ciepła

$$q_i = -k \theta_{,i}; \quad (3.58)$$

W powyższych wzorach symbolami  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, \rho F_i, q_i, \theta, \mu, \lambda, \gamma = \alpha_T (3\lambda + 2\mu)$  oznaczono kolejno tensory naprężenia i odkształcenia, wektor przemieszczenia, sił masowych i strumienia ciepła, przyrost temperatury oraz stałe LAMEGO określające sprężyste własności ciała.

Przytoczone równania należy jeszcze uzupełnić związkami geometrycznymi

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (3.59)$$

łąjącymi tensor odkształceń z polami przemieszczeń.

Po podstawieniu równań fizycznych do bilansów z uwzględnieniem równań geometrycznych uzyskujemy następujący układ równań

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - (\mu + \lambda) u_{j,j} - \mu u_{i,jj} + \gamma \theta_{,i} = \rho F_i, \quad (3.60)$$

$$\eta u_{i,i} + \frac{1}{\chi} \dot{\theta} - \theta_{,ii} = \frac{\theta}{\chi},$$

gdzie

$$\chi = \frac{k}{c_\varepsilon}, \quad \eta = \frac{\gamma T_0}{k}, \quad Q = \frac{\rho r}{k},$$

przy czym  $k$  jest współczynnikiem przewodności cieplnej,  $c_\varepsilon$  – ciepłem właściwym przy stałym odkształceniu,  $\rho r$  – źródłem ciepła jednostki objętości ciała.

Równania powyższe są klasycznymi równaniami liniowej termosprężystości. Otrzymany układ 4 równań różniczkowych zapiszemy w postaci macierzowej

$$\mathbf{L}(\partial, \partial_t) \mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (3.61)$$

gdzie

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}(\partial, \partial_t) = \begin{bmatrix} \delta_{jk} (\rho \partial_{tt} - \mu \partial_{jj}) - (\lambda + \mu) \partial_{jk} & \gamma \partial_j \\ \gamma \partial_k \partial_t & \frac{1}{\chi} \partial_t - \partial_{tt} \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{v}^T = [u_1, u_2, u_3, \theta], \quad \mathbf{F}^T = \left[ \rho F_1, \rho F_2, \rho F_3, \frac{\theta}{\chi} \right].$$

Będziemy teraz poszukiwali rozwiązań podstawowych operatora termosprężystości i jego przypadków szczególnych, a głównie operatora teorii naprężeń cieplnych i sprężystości. Problem formułujemy następująco: należy znaleźć

dystrybucję  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}^T = [E_1, E_2, E_3, E_4] = [E_k, E_4]$ ) spełniającą równanie

$$\mathbf{L}(\partial, \partial_t)\mathbf{E} = \boldsymbol{\delta}, \quad (3.63)$$

gdzie  $\boldsymbol{\delta}^T = [\delta(x)\delta(t), \delta(x)\delta(t), \delta(x)\delta(t), \delta(x)\delta(t)]$ ,  $\boldsymbol{\delta} = \delta(x)\delta(t) \mathbf{I}$ ,

$\mathbf{I}$  – jest macierzą jednostkową. Zauważmy, że w odróżnieniu od poprzednio analizowanych równań „skalarowych” musimy w tym przypadku wyznaczyć macierz niezależnych dystrybucji temperowanych – rozwiązania powyższego równania.

W pierwszej kolejności podamy kilka pomocniczych wzorów pozwalających określać transformaty FOURIERA w zadaniu, a następnie podamy rozwiązania podstawowe dla statycznego przypadku termosprężystości i teorii sprężystości.

W odróżnieniu od poprzednich zadań nie będziemy tu stosowali przekształceń LAPLACE’A, ale transformatę FOURIERA zgodnie z zależnością

$$F[f(x, t)] = \hat{f}(\alpha, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(x, t) \exp(-i(x_i \alpha_i + t\tau)) dx dt, \quad (3.64)$$

gdzie  $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

Transformację odwrotną określa wyrażenie

$$f(x, t) = F^{-1}[\hat{f}(\alpha, \tau)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{f}(\alpha, \tau) \exp(i(x_i \alpha_i + t\tau)) d\alpha d\tau. \quad (3.65)$$

Pozostają prawdziwe wyrażenia na transformacje pochodnych

$$F[D_k f] = i\alpha_k \hat{f}(\alpha, \tau), \quad F[D_t f] = i\tau \hat{f}(\alpha, \tau) \quad (3.66)$$

oraz splotu

$$f * g = \int f(x - x', t - t') g(x', t') dx' dt' \xrightarrow{F} (2\pi)^2 \hat{f}(\alpha, \tau) \hat{g}(\alpha, \tau).$$

Posługiwać się będziemy również następującymi wzorami

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\delta(t)}{|x|} \exp(-i(x_j \alpha_j + t\tau)) dx dt &= \frac{1}{\pi|\alpha|^2}, \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int |x| \delta(t) \exp(-i(x_j \alpha_j + t\tau)) dx dt &= -\frac{2}{\pi|\alpha|^4}, \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Gamma(x,t) \exp(-i(x_j \alpha_j + t\tau)) dx dt &= \frac{\omega}{(2\pi)^2 (|\alpha|^2 + i\omega\tau)}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

gdzie  $|x| = \sqrt{(x_j x_j)}$ ,  $|\alpha| = \sqrt{(\alpha_j \alpha_j)}$ ,  $\omega = \frac{1}{\chi} + \frac{\gamma\eta}{\lambda + 2\mu}$

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \exp\left(\frac{(-\omega|x|^2)}{4t}\right) \left(4\pi \frac{t}{\omega}\right)^{-\frac{3}{2}} & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

Funkcje  $\Gamma$  oraz  $(4\pi|x|)^{-1}$  są przy tym rozwiązaniami podstawowymi równania LAPLACE'A oraz równania przewodnictwa. Spełniać więc muszą równania

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( -\frac{1}{4\pi|x|} \right) &= \delta(x), \\ \frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\omega} \nabla^2 \Gamma(x,t) &= \delta(x)\delta(t). \end{aligned}$$

Przystąpimy teraz do wyznaczenia rozwiązania podstawowego dla statycznych równań sprzężonej termosprężystości

$$\begin{aligned} -(\lambda + \mu)u_{j,ji} - \mu u_{i,jj} + \gamma\theta_{,i} &= \rho F_i, \\ \eta \dot{u}_{i,i} + \frac{1}{\chi} \dot{\theta} - \theta_{,ii} &= \frac{Q}{\chi}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

które w zapisie macierzowym dla rozwiązania podstawowego ma postać

$$\mathbf{A}(\partial, \partial_t) \mathbf{E}(x,t) = \delta(x,t) \mathbf{I}, \quad (3.69)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\delta_{jk} \mu \Delta - (\lambda + \mu) \partial_{jk} & \gamma \partial_j \\ \eta \partial_{kt} & \frac{1}{\chi} \partial_t - \Delta^2 \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$\partial_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \partial_{kt} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial t}, \quad \delta_{jk} \text{ delta KRONECKERA.}$$

Po wykonaniu transformacji FOURIERA na równaniu (3.69) zgodnie z wzorem (3.64) otrzymamy

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha_i, \tau) \hat{\mathbf{E}}(\alpha_i, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \mathbf{I},$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową, a  $\hat{\mathbf{A}}(\alpha_i, \tau)$  wynosi

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha_i, \tau) = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \mu |\alpha|^2 + (\lambda + \mu) \alpha_i \alpha_j & i \gamma \alpha_j \\ -\eta \alpha_j \tau & |\alpha|^2 + \frac{i}{\chi} \tau \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Wyznacznik macierzy  $\hat{\mathbf{A}}(\alpha_i, \tau)$  przyjmie wartość

$$\det(\hat{\mathbf{A}}(\alpha_i, \tau)) = \mu^2 (\lambda + 2\mu) |\alpha|^6 (|\alpha|^2 + i\tau\omega),$$

gdzie  $\omega = \frac{1}{\chi} + \frac{\eta\gamma}{\lambda + 2\mu}$ .

Możemy z kolei wyznaczyć macierz  $\hat{\mathbf{E}}(\alpha_i, \tau)$ , której postać jest następująca:

$$\hat{\mathbf{E}}(\alpha_i, \tau) = \begin{bmatrix} \hat{E}_{ij}(\alpha, \tau) & \hat{E}_{i4}(\alpha, \tau) \\ \hat{E}_{4j}(\alpha, \tau) & \hat{E}_{44}(\alpha, \tau) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned}\hat{E}_{ij}(\alpha, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2|\alpha|^2} \left( \delta_{ij} - \frac{(\lambda + \mu)(|\alpha|^2 + i\tau\omega_0)\alpha_i\alpha_j}{(\lambda + 2\mu)(|\alpha|^2 + i\tau\omega)\alpha|^2} \right), \\ \hat{E}_{i4}(\alpha, \tau) &= \frac{-1}{4\pi^2} \left( \frac{i\gamma\alpha_j}{(\lambda + 2\mu)\alpha|^2(|\alpha|^2 + i\tau\omega)} \right), \\ \hat{E}_{4j}(\alpha, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\eta\tau\alpha_j}{(\lambda + 2\mu)\alpha^2(|\alpha|^2 + i\tau\omega)} \right), \\ \hat{E}_{44}(\alpha, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|\alpha|^2 + i\tau\omega}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\chi} + \frac{\eta\gamma}{\lambda + \mu}.\end{aligned}$$

Wykorzystując z kolei wzór na retransformację (3.65) oraz relacje (3.66) i (3.67) uzyskujemy macierz rozwiązań podstawowych

$$\mathbf{E}(x, t) = \begin{bmatrix} E_{ij}(x, t) & E_{i4}(x, t) \\ E_{4j}(x, t) & E_{44}(x, t) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}E_{ij}(x, t) &= \frac{\delta(t)\delta_{ij}}{4\pi\mu|x|} - \frac{(\lambda + \mu)\omega_0\delta(t)}{8\pi\mu\omega(\lambda + 2\mu)} \partial_{ij}|x| + \\ &+ \frac{(\lambda + \mu)\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{4\pi\mu\omega(\lambda + 2\mu)} \partial_{ij} \int \frac{\Gamma(y, t)}{|x - y|} dy, \\ E_{i4}(x, t) &= -\frac{\gamma}{4\pi\omega(\lambda + 2\mu)} \partial_i \int \frac{\Gamma(y, t)}{|x - y|} dy, \\ E_{4j}(x, t) &= -\frac{\eta}{4\pi\omega(\lambda + 2\mu)} \partial_j \left( \frac{\delta(t)}{|x|} - \frac{4\pi}{\omega} \Gamma(x, t) \right), \\ E_{44}(x, t) &= \frac{1}{\omega} \Gamma(x, t).\end{aligned} \quad (3.73)$$

Określona wzorami (3.72) i (3.73) macierz rozwiązań podstawowych zawiera 16 niezależnych dystrybucji i może posłużyć do rozwiązywania źródłowych (źródło ciepła, siły masowe) zagadnień w sprzężonej termosprężystości, zgodnie z relacją

$$\mathbf{v} = \mathbf{E}(x, t) * \mathbf{F}, \quad (3.74)$$

gdzie  $\mathbf{v}^T = [u_i, \theta]$ ,  $\mathbf{F}^T = \left[ \rho F_i, \frac{Q}{\chi} \right]$ .

Przypadkiem szczególnym równań termosprężystości są równania przemieszczeniowe teorii sprężystości. Mają one postać

$$\rho \ddot{u}_i - (\lambda + \mu) u_{j,ji} - \mu u_{i,ij} = \rho F_i \quad (3.75)$$

i opisują dynamiczne problemy mechaniki ciał sprężystych. Rozwiązania podstawowe uzyskamy w tym przypadku z równania macierzowego

$$\mathbf{H}(\partial_t, \partial) \mathbf{E}(x, t) = \delta(x) \delta(t) \mathbf{I}, \quad (3.76)$$

które otrzymujemy z równania (3.75) po dokonaniu podstawienia  $\rho \mathbf{F} = \delta(x) \delta(t) \mathbf{I}$ . Macierz  $H_{ij}$  ma postać

$$H_{ij} = \delta_{ij} (\rho \partial_{tt} - \mu \partial_{kk}) - (\lambda + \mu) \partial_{ij}. \quad (3.77)$$

Po wykonaniu na równaniu (3.75) transformacji FOURIERA, zgodnie z wzorem (3.64), określeniu transformaty  $\hat{\mathbf{H}}$ , wyznacznika  $\det \hat{\mathbf{H}}$  i wyznaczeniu z równania

$$\hat{\mathbf{H}}(\alpha_i, \tau) \hat{\mathbf{E}}(\alpha_i, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \mathbf{I}$$

transformaty macierzy rozwiązań fundamentalnych  $\hat{\mathbf{E}}(\alpha_i, \tau)$ , dokonujemy retransformacji, otrzymując



$$E_{ij}(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left[ \frac{\delta(\gamma_b)}{b^2|x|} \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{|x|^3} \left( \frac{\delta(\gamma_a)}{a^2} - \frac{\delta(\gamma_b)}{b^2} \right) + \right. \\ \left. + t \left( \frac{\delta_{ij}}{|x|^3} - \frac{3x_j x_k}{|x|^5} \right) (\varepsilon(\gamma_b) - \varepsilon(\gamma_a)) \right], \quad (3.78)$$

gdzie

$$a = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_a = t - \frac{|x|}{a}, \quad \gamma_b = t - \frac{|x|}{b},$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Wzory te określają macierz rozwiązań podstawowych dla dynamicznych równań teorii sprężystości.

Na podstawie macierzy  $E_{ij}(x, t)$  można znaleźć rozwiązanie dla dowolnego rozkładu czasowo-przestrzennego siły masowej  $\rho\mathbf{F}$  zgodnie z relacją

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} * \rho\mathbf{F} \quad \text{lub} \quad u_i(x, t) = \int_{R^4} E_{ij}(x - x', t - t') \rho F_j(x', t') dx' dt', \quad (3.79)$$

gdzie  $*$  jest symbolem iloczynu splotowego w  $R^4$ , a  $dx' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$ .

Wzór (3.79) jest podobny do relacji (3.43) i (3.44) z punktu 9 i wynika z ogólnych własności rozwiązań podstawowych równań różniczkowych fizyki matematycznej.

Zależność (3.79) może być również wykorzystywana do poszukiwania rozwiązań równań teorii naprężeń cieplnych w ciele sprężystym. Wystarczy w tym celu wykorzystać analogię DUHAMELA-NEUMANNA i wprowadzić uogólnioną siłę masową  $\rho F_i' = \rho F_i - \gamma \theta_{,i}$ . Otrzymamy wtedy rozwiązanie

$$u_i(x, t) = \int_{R^4} E_{ij}(x - x', t - t') [\rho F_j(x', t') - \gamma \theta_{,j}(x', t')] dx' dt'$$

dla dowolnego rozkładu pola przyrostu temperatur  $\theta$  w ciele sprężystym. Oczywiście pole  $\theta$  musi spełniać równanie przewodnictwa cieplnego.

W nieco bardziej złożony sposób poszukuje się rozwiązań podstawowych w analogicznych zagadnieniach lepkosprężystości. Podane w ostatnich czterech punktach rozwiązania podstawowe dla typowych równań fizyki matematycznej można dalej uogólnić podając takie same rozwiązania dla zagadnień półprzestrzeni, czy też zadania CAUCHY'EGO. We wszystkich tych przypadkach aparat formalny transformat FOURIERA i LAPLACE'A dystrybucji temperowanych pozwala na algorytmizację poszukiwania rozwiązań podstawowych i to niezależnie od stopnia wymiaru przestrzeni, w której szuka się tego rozwiązania. Jest to jedna z największych zalet tego sposobu postępowania. Uzyskuje się więc wyniki, które mogą służyć do jakościowego badania rozwiązań równań fizyki matematycznej. Natomiast uwzględnienie złożonych warunków początkowo-brzegowych, typowych dla zastosowań technicznych omawianych równań, wymaga użycia metod numerycznych. Tym niemniej, wyniki uzyskane dla półprzestrzeni pozwalają już na jakościową ocenę większości zadań technicznych wynikających z rozwiązywania zadań brzegowych równań fizyki matematycznej.

## LITERATURA

- [1] DOMAŃSKI Z., PISKOREK A.: Matrices of fundamental solutions for the system of quasistatic equations of thermoelasticity and the system of dynamic equations of thermal stresses, Archives of Mechanics. vol. 23, 2, 1971
- [2] LUSTERNIK K.A., SOBOLEW W.I.: Elementy analizy funkcjonalnej, PWN Warszawa 1959
- [3] MARCINOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych, PWN Warszawa 1972
- [4] MARCZUK G.I.: Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej, PWN Warszawa 1983
- [5] MICHLIN S.G., SAMARSKI A.A.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych, PWN Warszawa 1972
- [6] MIKUSIŃSKI J., SIKORSKI R.: Elementarna teoria dystrybucji, PWN Warszawa 1969
- [7] ODEN J.T., REDDY J.N.: Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer Verlag, Berlin 1976
- [8] SZMYDT Z.: Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe, PWN Warszawa 1972
- [9] TICHONOW A.N., SAMARSKI A.A.: Równania fizyki matematycznej. PWN Warszawa 1959
- [10] WŁADIMIROW W.S. red.: Zbiór zadań z metod matematycznych fizyki, PWN Warszawa 1979
- [11] WŁADIMIROW W.S.: Urownienia matematiceskoj fizyki, Moskwa 1976 (ros.)

## **PROBLEMY FIZYKI MATEMATYCZNEJ**

W monografii zaprezentowano wybrane zagadnienia współczesnej fizyki matematycznej przy uwzględnieniu ich aplikacyjnego charakteru. Przedstawiono sposoby formułowania zadań brzegowych w przypadku takich problemów technicznych jak: dyfuzja masy, przewodzenie ciepła, przewodzenie prądu elektrycznego, stan naprężeń i odkształceń ciał sprężystych. Omówiono wariacyjne problemy mechaniki i termomechaniki ciał sprężystych i lepkosprężystych przy wykorzystaniu podstawowych definicji i pojęć z zakresu analizy funkcjonalnej, a w szczególności teorii operatorów potencjalnych (twierdzenie WAINBERGA). Zaprezentowano sposób wyznaczania rozwiązań fundamentalnych w przypadku eliptycznych (sprężystość), parabolicznych (przewodzenie ciepła) i hiperbolicznych (dynamiczna termosprężystość) równań różniczkowych fizyki.

## **PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS**

In the monograph one discussed the problems of present-day mathematical physics also in aspects of its applications. One presented formulations of boundary problems employed in a description of such technical problems like: mass diffusion, heat conduction, electric conduction and state of stress and strain in an elastic body. The authors discussed the variational problems of mechanics and thermomechanics for elastic and viscoelastic bodies using basic definitions and concepts of functional analysis, especially theory of potential operators (WAINBERG'S theorem). They presented a way of determination of fundamental solutions with a use of theory of distribution in the elliptical (elasticity), parabolic (heat conduction) and hyperbolic (dynamic thermoelasticity) cases of differential equations of physics.