

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

254

Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski



Redaktorzy naukowi

Krzysztof Jajuga

Wanda Ronka-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2012

Recenzenci: Diarmuid Bradley, Jan Czekaj, Marek Gruszczyński, Jacek Lisowski, Paweł Miłobędzki,
Włodzimierz Szkutnik, Mirosław Szreder, Adam Szyszka, Waldemar Tarczyński,
Stanisław Wieteska, Tomasz Wiśniewski

Redaktor Wydawnictwa: Aleksandra Śliwka

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,

The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa

www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2012

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-293-2

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Barbara Będowska-Sójka: Zastosowanie zmienności zrealizowanej i modeli typu ARCH w wyznaczaniu wartości zagrożonej	11
Jacek Bialek: Zastosowanie statystycznych indeksów łańcuchowych do oceny przeciętnego zwrotu grupy OFE	23
Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz: Zastosowanie modelu logitowego i modelu regresji Coxa w analizie zmian cen akcji spółek giełdowych w wyniku kryzysu finansowego	33
Katarzyna Byrka-Kita: Premia z tytułu kontroli na polskim rynku kapitałowym – wyniki badań	42
Krzysztof Echaust: Analiza przekroczeń wysokości depozytów zabezpieczających na podstawie kontraktów futures notowanych na GPW w Warszawie.	52
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Rentowność inwestycji na rynku regulowanym i w alternatywnym systemie obrotu w Polsce	61
Daniel Iskra: Wartość zagrożona instrumentu finansowego szacowana przedziałowo	74
Bogna Janik: Analiza stóp zwrotu z inwestycji w indeksy akcji spółek społecznie odpowiedzialnych	83
Paweł Kliber: Niestacjonarność aktywności transakcyjnej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie	93
Krzysztof Kowalke: Ocena przydatności rekomendacji giełdowych opartych na metodzie DCF na przykładzie spółek budowlanych	103
Mieczysław Kowerski: Modele selekcji próby stóp dywidend spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie	113
Dominik Krężolek: Granica efektywności portfeli inwestycyjnych a indeks ogona rozkładu stopy zwrotu – analiza empiryczna na przykładzie GPW w Warszawie	124
Monika Kubik-Kwiatkowska: Znaczenie raportów finansowych dla wyceny spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie SA	133
Agnieszka Majewska: Wycena opcji menedżerskich – wybrane problemy ...	142
Sebastian Majewski: Pomiar nastroju inwestycyjnego jako metoda wspomagająca strategię inwestycyjne	152
Piotr Manikowski: Cykle ubezpieczeniowe w Europie Środkowej	162

Artur Mikulec: Metody oceny wyników inwestycyjnych przy braku normalności rozkładu stóp zwrotu	171
Joanna Olbryś: Tarcie w procesach transakcyjnych i jego konsekwencje	181
Andrzej Paliński: Spłata zadłużenia kredytowego w ujęciu teoriogrowym	190
Monika Papież, Stanisław Wanat: Modele autoregresji i wektorowej autoregresji w prognozowaniu podstawowych zmiennych charakteryzujących rynek ubezpieczeń działu II	199
Daniel Papla: Przykład zastosowania metod analizy wielowymiarowej w analizie zarażania rynków finansowych	209
Tomasz Pisula: Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do prognozowania upadłości przedsiębiorstw	219
Agnieszka Przybylska-Mazur: Wybrane reguły nastawione na cel a prognozowanie wskaźnika inflacji	235
Paweł Siarka: Wykorzystanie modeli scoringowych w bankowości komercyjnej	246
Rafał Siedlecki: Struktura kapitału w cyklu życia przedsiębiorstwa	262
Anna Sroczyńska-Baron: Wybór portfela akcji z wykorzystaniem narzędzi teorii gier	271
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Zastosowania kopuli niesymetrycznych w modelowaniu ekonomicznym	281
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Zastosowanie estymatora k -to-rekordowego do szacowania wartości narażonej na ryzyko	289
Piotr Staszewicz: Multi entry framework for financial and risk reporting	298
Anna Szymańska: Czynniki decydujące o wyborze ubezpieczyciela w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych AC	310
Sławomir Śmiech, Wojciech Zysk: Oceny ratingowe jako element konkurencyjności wybranych systemów gospodarczych – weryfikacja na przykładzie agencji Fitch	323
Rafał Tuzimek: Wpływ wypłat dywidendy na wartość akcji spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie	333
Jacek Welc: Rewersja do średniej dynamiki przychodów oraz rentowności spółek a zmiany relatywnej dynamiki zysków	347
Ryszard Węgrzyn: Zastosowanie delty „wolnej od modelu” w hedgingu opcyjnym	356
Stanisław Wieteska: Wyładowania atmosferyczne jako element ryzyka w ubezpieczeniach majątkowo-osobowych w polskim obszarze klimatycznym	367
Alicja Wolny-Dominiak: Modelowanie liczby szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych w przypadku występowania dużej liczby zer	381

Summaries

Barbara Będowska-Sójka: Modeling value-at-risk when realized volatility and ARCH-type models are used.....	22
Jacek Bialek: The application of chain indices to evaluate the average rate of return of a group of Open Pension Funds.....	32
Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz: The application of the logit model and the Cox regression model in the analysis of financial crisis related price changes of listed companies' shares	41
Katarzyna Byrka-Kita: Control premium on Polish capital market – empirical evidence	51
Krzysztof Echaust: Analysis of margin exceedances on the basis of futures contracts quoted on the Warsaw Stock Exchange.....	60
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Return on investment on a regulated market and multilateral trading facility in Poland	73
Daniel Iskra: Confidence interval for Value at Risk.....	82
Bogna Janik: Analysis of rates of return on investments in equity SRI indices	92
Paweł Kliber: Non-stationarity in transaction activity on the Warsaw Stock Exchange.....	102
Krzysztof Kowalke: Assessment of the usefulness of Stock Exchange recommendations based on the DCF method on the example of construction companies.....	112
Mieczysław Kowerski: The sample selection models of dividend yield of companies quoted on the Warsaw Stock Exchange.....	123
Dominik Krężolek: The efficient frontier of investment portfolios and the tail index of distribution of returns – an empirical analysis on the WSE	132
Monika Kubik-Kwiatkowska: Value relevance of financial reporting on the Warsaw Stock Exchange.....	141
Agnieszka Majewska: The value of employee stock options – selected problems.....	151
Sebastian Majewski: Measuring of investment sentiment as a method of supporting investment strategies.....	161
Piotr Manikowski: Insurance cycles in Central Europe.....	170
Artur Mikulec: Investment performance evaluation methods in the absence of normality of the rates of return.....	180
Joanna Olbryś: Friction in trading processes and its implications	189
Andrzej Paliński: The game theoretic approach to bank credit repayment....	198
Monika Papież, Stanisław Wanat: The application of autoregressive models and vector autoregressive models in forecasting basic variables on the non-life insurance market	208

Daniel Papla: Example of using multidimensional methods in analyzing the contagion on the financial markets	218
Tomasz Pisula: Application of artificial neural networks for forecasting corporate bankruptcy	234
Agnieszka Przybylska-Mazur: Selected targeting rules and forecasting inflation rate	245
Paweł Siarka: The use of scoring models in commercial banking.....	261
Rafał Siedlecki: The structure of capital in the company life cycle	270
Anna Sroczyńska-Baron: The choice of shares portfolio based on the theory of games.....	280
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Asymmetric copulas applications in economic modelling.....	288
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Value-at-Risk estimation using ‘ k -th record’ estimator	297
Piotr Staszewicz: Zapis poczwórny jako mechanizm pozwalający na integrację sprawozdawczości finansowej i ostrożnościowej	309
Anna Szymańska: Factors determining a choice of an insurer in case of motor hull insurance	322
Sławomir Śmiech, Wojciech Zysk: Assessments of rating as part of competitiveness of selected economies – verification on the example of Fitch agency	332
Rafał Tuzimek: Effect of dividend payments on the value of shares listed on the Warsaw Stock Exchange	346
Jacek Welc: Impact of mean-reversion of sales growth and profitability on the relative growth of corporate earnings	355
Ryszard Węgrzyn: Application of model free delta to option hedging	366
Stanisław Wieteska: Lightning as an element of risk in non-life insurance in the Polish area of climate.....	380
Alicja Wolny-Dominiak: Zero-inflated claim count modeling in automobile insurance. Case Study	390

Michał Stachura, Barbara Wodecka

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

ZASTOSOWANIA KOPULI NIESYMETRYCZNYCH W MODELOWANIU EKONOMICZNYM

Streszczenie: Wielowymiarowa analiza danych ekonomicznych w wielu przypadkach musi uwzględniać fakt niewymierności badanych czynników. Taką swoistą asymetrię danych daje się modelować przy użyciu kopuli niesymetrycznych. W opracowaniu przedstawiona jest pewna procedura tworzenia dwuwymiarowych kopuli niesymetrycznych. Procedura ta zilustrowana jest analizą przykładowych danych empirycznych, w przypadku których – na podstawie stosownego testu statystycznego – uprzednio rozpoznana została asymetria. Mimo znacznej złożoności modeli bazujących na kopulach niesymetrycznych i pewnych trudności stąd wynikających, odnotować należy ich zdecydowaną przewagę w sensie większej adekwatności merytorycznej i elastyczności dopasowania w porównaniu z tradycyjnie używanymi modelami bazującymi na kopulach archimedesowych.

Słowa kluczowe: asymetria składowych wektora losowego, kopula archimedesowa, kopula niesymetryczna.

1. Wstęp

Z natury samej rzeczy w badaniach ekonomicznych najczęściej nie jest zasadna, a niekiedy jest wręcz niemożliwa, wyizolowana analiza ustalonego zjawiska, czyniona przez rozważenie rozkładu odpowiadającej mu zmiennej losowej. Konieczne jest bowiem uwzględnienie występowania wielu – różnie rozumianych i definiowanych – współzależności. Zatem dane zjawisko należy badać wspólnie z innymi czynnikami i prowadzić analizę wielowymiarową.

W tym względzie użyteczne okazują się kopule, które można traktować jako uogólnienie klasycznych, liczbowych współczynników korelacji zmiennych losowych, takich jak współczynniki Pearsona, Spearmana czy Kendalla. Co ważne, kopule, dając możliwość badania różnych typów zależności pomiędzy rozkładami brzegowymi wielowymiarowych wektorów losowych, są narzędziem nie tylko bardzo efektywnym, ale i w ostatnim czasie coraz bardziej popularnym.

Zauważyć należy, że powszechnie postulowane dążenie do prostoty konstruowanego modelu teoretycznego oraz pewne trudności natury estymacyjnej (w przypadku nawet mało skomplikowanych postaci funkcyjnych kopuli) sprawiają, że w praktyce niestety używane są w zasadzie tylko kopule symetryczne, a do tego najczęściej je-

dynie archimedesowe. Dzieje się tak również dlatego, że w przypadku wielu kopuli archimedesowych istnieją:

- a) wzory analityczne funkcji pomocniczych niezbędnych m.in. przy procedurach symulacyjnych czy też estymacyjnych,
 - b) gotowe programy i pakiety obliczeniowe,
- co wespół skutkuje znaczną prostotą i szybkością obliczeniową.

Stosowanie kopuli symetrycznych stoi jednak w jawnej sprzeczności z naturą wielu zjawisk ekonomicznych, w przypadku których nie może być mowy o wymienności (w sensie wzajemnej zastępowalności) modelowanych czynników.

Podkreślić należy, że symetria wektora losowego (X_1, \dots, X_k) rozumiana jest tu jako symetria kopuli (w sensie wymienności jej argumentów) łączącej współrzędne tego wektora, czyli wektor (X_1, \dots, X_k) nazywany jest symetrycznym, jeżeli $(F_1(X_1), \dots, F_k(X_k)) \sim (F_{\tau(1)}(X_{\tau(1)}), \dots, F_{\tau(k)}(X_{\tau(k)}))$ dla dowolnej permutacji τ , gdzie F_i są dystrybuantami brzegowymi, a symbol „ \sim ” oznacza równość rozkładów wektorów losowych.

Wobec powyższych uwag bardziej zasadne jest stosowanie kopuli niesymetrycznych. Jednakże w ich przypadku jawią się pewne problemy. Mianowicie same kopule wyrażone są bardziej skomplikowanymi wzorami funkcyjnymi niż kopule symetryczne. W konsekwencji mają na ogół większą liczbę parametrów, co sprawia kłopot np. w toku estymacji. Kolejny mankament stanowi generalny brak wzorów analitycznych funkcji pomocniczych (np. funkcji kwantylowych warunkowych rozkładów brzegowych), które są stosowane i w symulacji, i w estymacji. Fakt ten sprawia, że wydłużają się procesy symulacji i estymacji szczególnie, ponieważ wymagają one stosowania procedur numerycznych.

Mimo zgrubnie nakreślonych problemów, wskazane jest stosowanie kopuli niesymetrycznych, choć wybór „złotego środka” pomiędzy prostotą a wystarczającym stopniem adekwatności modelu teoretycznego może sprawić wiele kłopotu i sam w sobie jest osobnym, niebagatelnym wyzwaniem.

Wobec powyżej nakreślonych kwestii zasadniczym celem opracowania jest przytoczenie wybranej konstrukcji kopuli niesymetrycznych oraz wskazanie niektórych możliwości ich praktycznego zastosowania. Wszystkie dalsze rozważania dotyczą – dla uzyskania przejrzystości – przypadku dwuwymiarowego, jednak nie ogranicza on ich ogólności.

2. Kopule niesymetryczne – konstrukcja, estymacja, symulacja

Spośród wielu możliwości opisanych w literaturze w opracowaniu prezentowany jest szczególnie przypadek ogólniejszej metody konstrukcji dwuwymiarowych kopuli niesymetrycznych zaproponowanej w pracy [Durante 2009]. Zgodnie z wynikami podanymi w tej pracy (wnioski 3 i 4, s. 387-388) kopulę niesymetryczną można utworzyć, jak następuje.

Niech $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będą funkcjami rosnącymi takimi, że $f(1) = g(1) = 1$ oraz $f(0) \neq 1 \neq g(0)$, a ponadto niech funkcje $x \rightarrow x/f(x)$ i $x \rightarrow x/g(x)$ będą rosnące na przedziale $(0, 1]$. Wówczas dla dowolnej pary kopuli A i B funkcja $C_{f,g} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dana wzorem:

$$C_{f,g}(x, y) = A(x/f(x), x/g(x)) \cdot B(f(x), g(y)) \quad (1)$$

także jest kopulą.

Z kolei po ograniczeniu się do funkcji postaci $f(x) = x^\alpha$ $g(x) = x^\beta$ z parametrami $\alpha, \beta \in (0, 1)$ takimi, że $\alpha \neq 1/2$ lub $\beta \neq 1/2$, uzyskuje się kopulę

$$C_{\alpha,\beta}(x, y) = A(x^{1-\alpha}, y^{1-\beta}) \cdot B(x^\alpha, y^\beta), \quad (2)$$

która jest niesymetryczna.

W dalszym ciągu opracowania za kopulę A przyjęta jest kopula Claytona. Jest to kopula archimedesowa dana wzorem $C_\gamma(x, y) = (x^{-\gamma} + y^{-\gamma} - 1)^{-1/\gamma}$, gdzie $\gamma > 0$ jest parametrem. Z kolei za kopulę B przyjęta jest tzw. kopula przetrwania Claytona, czyli: $\hat{C}_\gamma(x, y) = x + y - 1 + C_\gamma(1-x, 1-y)$, która nie jest archimedesowa ze względu na brak łączności. Dobór typu kopuli jest arbitralny. Natomiast użycie kopuli przetrwania podyktowane jest faktem, że kopula Claytona ma niezerowy dolny współczynnik zależności ekstremalnych (równy $2^{-1/\gamma}$) i zerowy górny, z kolei w przypadku kopuli przetrwania wartości tych współczynników są zamienione. Dzięki temu w kopuli utworzonej na podstawie wzoru (2), a wyrażonej jako:

$$C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) = C_\gamma(x^{1-\alpha}, y^{1-\beta}) \cdot \hat{C}_\delta(x^\alpha, y^\beta) = (x^{(\alpha-1)\gamma} + y^{(\beta-1)\gamma} - 1)^{-1/\gamma} \cdot (x^\alpha + y^\beta - 1 + ((1-x^\alpha)^{-\delta} + (1-y^\beta)^{-\delta} - 1)^{-1/\delta}), \quad (3)$$

oba współczynniki zależności ekstremalnych są niezerowe, choć niestety nie dają się one w prosty sposób wyrazić wzorami w zależności od parametrów $\alpha, \beta \in (0, 1)$ i $\gamma, \delta > 0$.

Dla kopuli danej wzorem (3) – i ogólnie dla kopuli niesymetrycznych – brak jest swoistych procedur estymacji i symulacji. Konieczne jest więc stosowanie metod najogólniejszych, a ze względu na nadmieniony częsty brak wzorów analitycznych stosownych funkcji pomocniczych nieuniknione są metody numeryczne.

Wobec tego w przypadku symulacji rozkładów o danej kopuli C postępuje się w następujący sposób. Najpierw generuje się niezależnie wartości v_1, v_2 z rozkładu jednostajnego na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, a następnie podstawia się: $u_1 = v_1$ oraz $u_2 = G^{[-1]}(v_2 | u_1)$, gdzie $G^{[-1]}$ jest uogólnioną funkcją odwrotną dystrybuanty wa-

runkowego rozkładu brzegowego, czyli funkcji $G(t | u_1) = \mathbb{P}(U_2 \leq t | U_1 = u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, t)$ (por. np. [Heilpern 2007]). W dalszej części opracowania stosowana jest ta procedura i wymaga ona numerycznego znajdowania wartości funkcji $G^{[-1]}$.

Z kolei w przypadku estymacji parametrów kopuli niesymetrycznych zastosowanie znajdują takie metody, jak: a) metoda największej wiarygodności i jej modyfikacje, b) minimalizacja odległości dystrybuanty teoretycznej od empirycznej, c) minimalizacja odległości teoretycznej funkcji Kendalla od stosownego odpowiednika empirycznego. Najczęściej jednak i te metody wymagają użycia procedur numerycznych. W ciągu dalszym użyta jest numeryczna metoda największej wiarygodności.

3. Przykład empiryczny¹

Aby pokazać, że postulat braku symetrii jest nie tylko ideą teoretyczną, warto przyjrzeć się prezentowanej poniżej analizie przykładowych danych empirycznych.

Pod rozwagę wzięte zostały szeregi czasowe długości $n = 50, 100, 200, 500, 1000, 1500$ zwrotów logarytmicznych dziennych kursów średnich wybranych walut (CHF, CZK, EUR, GBP, HUF, JPY, USD²) względem złotego notowanych w NBP z okresów o różnych dniach początkowych (zależnie od n) i stałym dniu końcowym – 29 lipca 2011 r. Na podstawie wszystkich par różnych kursów i wszystkich przyjętych długości n utworzono dwuwymiarowe szeregi czasowe, traktowane jako realizacje dwuwymiarowych zmiennych losowych. Utworzone tak realizacje zweryfikowano ze względu występowanie w nich symetrii.

Weryfikację symetrii realizacji dwuwymiarowych zmiennych losowych przeprowadzono przy użyciu testu γ opisanego w pracy [Levin 1993], oryginalnie zaproponowanego do badania jednorodności wielu (nie tylko dwu) rozkładów wielowymiarowych. Test ten został zaadaptowany do badania symetrii w ten sposób, że weryfikuje się jednorodność $2n$ -elementowej próby S złożonej z połączonych n -elementowych prób S_1, S_2 złożonych z realizacji odpowiednio wektorów $(F_X(X), F_Y(Y))$ i $(F_Y(Y), F_X(X))$, przy czym zamiast F_X i F_Y użyte są odpowiednie empiryczne dystrybuanty brzegowe.

W tej sytuacji statystyka testowa redukuje się do postaci $\gamma_n = \sqrt{\frac{2}{n}}(\theta_1 + \theta_2 - n)$, gdzie θ_i oznacza liczbę elementów próby S_i , dla których najbliższy (w sensie dowolnie ustalonej metryki³) element (różny od niego samego) z próby S także leży

¹ Wszystkie prezentowane obliczenia oraz wykresy wykonane są w środowisku obliczeniowym R.

² Powszechnie stosowane skróty: CHF, CZK, EUR, GBP, HUF, JPY, USD oznaczają odpowiednio: franka szwajcarskiego, koronę czeską, euro, funta brytyjskiego, forinta węgierskiego, jena japońskiego i dolara amerykańskiego.

³ W opracowaniu użyta jest metryka euklidesowa.

w próbie S_i . Wiadomo wtedy również, że $\mathbb{E}(\gamma_n) = -\frac{\sqrt{2n}}{2n-1}$ oraz że odchylenie standardowe statystyki γ_n jest ograniczone z góry przez $\sqrt{2}$. Fakty te pozwalają na przyjmowanie hipotezy o symetrii rozkładu, gdy wartość statystyki testowej wpada do przedziału $(-\frac{\sqrt{2n}}{2n-1} - \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2n}}{2n-1} + \sqrt{2})^4$.

Po przeprowadzeniu testu symetrii wszystkich par kursów stwierdza się występowanie symetrii jedynie w nielicznych przypadkach: CZK-USD, EUR-JPY dla $n = 50$ (9,52% wszystkich przypadków); CHF-HUF, CZK-EUR, EUR-JPY, GBP-JPY dla $n = 100$ (19,05%); CZK-JPY, EUR-JPY dla $n = 200$ (9,52%); CHF-HUF, CZK-JPY, GBP-USD, HUF JPY dla $n = 500$ (19,05%); CZK-HUF, CZK-JPY, CZK-USD dla $n = 1000$ (14,29%); CHF-CZK, CHF-EUR, CHF-HUF, CZK-EUR, CZK-HUF, EUR-HUF dla $n = 1500$ (28,57%).

Ponadto okazuje się, że 8 par walut (CHF-GBP, CHF-JPY, CHF-USD, CZK-GBP, CZK-EUR, CZK-USD, HUF-USD, JPY-USD) charakteryzuje stały (bez względu na wartość n) brak symetrii.

Jak widać na podstawie przeprowadzonego testu, zjawisko asymetrii danych istnieje i powinno być przez modele teoretyczne uwzględnione.

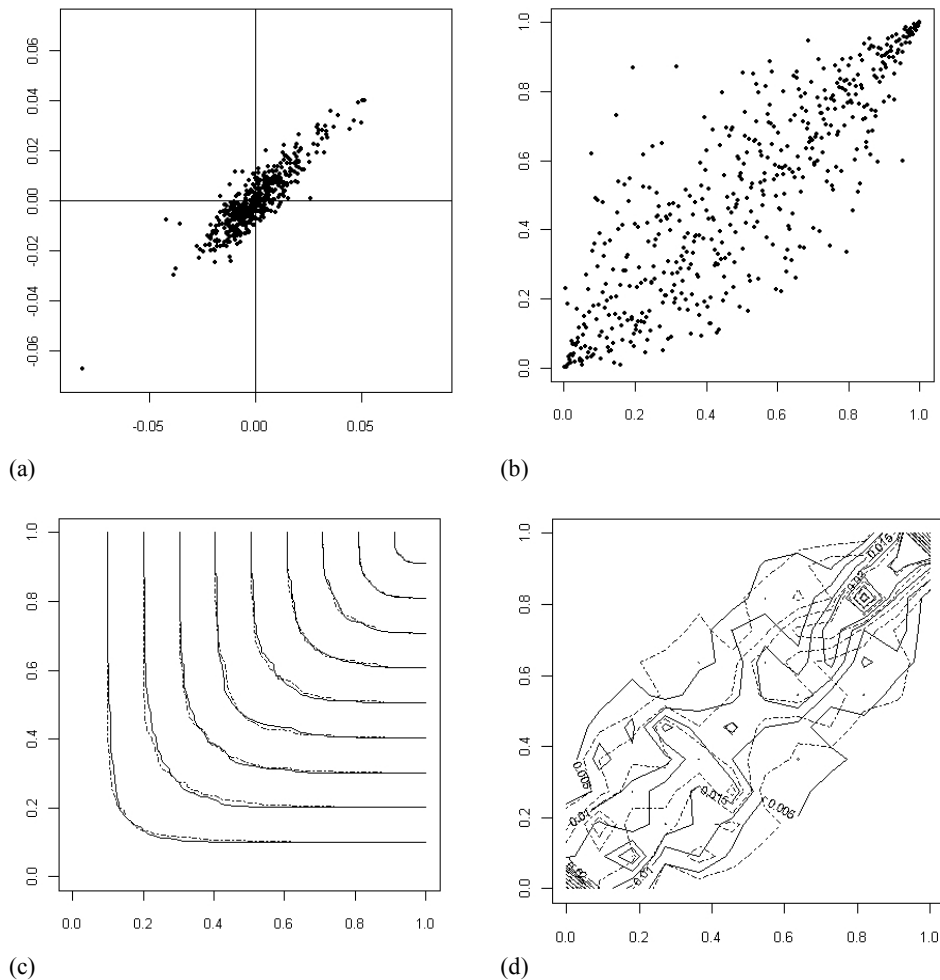
W dalszym ciągu uwaga skupiona jest na przykładowej parze JPY-USD dla $n = 500$. Wykresy na rys. 1 prezentują kolejno: (a) – diagram korelacyjny zwrotów logarytmicznych kursów obu walut (realizacja wektora (X, Y)), (b) – diagram korelacyjny zwrotów logarytmicznych pozbawionych empirycznych rozkładów brzegowych (realizacja wektora $(F_X(X), F_Y(Y))$), (c) – poziomice kopuli empirycznych dla pary JPY-USD (linie ciągłe) i USD-JPY (linie przerywane), (d) – poziomice gęstości zadanych przez kopule empiryczne dla par jak poprzednio.

Warto zaobserwować, jak zwodnicza może być wzrokowa ocena występowania symetrii. Ani diagram korelacyjny z wykresu (a), ani poziomice kopuli empirycznych z wykresu (c) w ogóle nie sugerują występowania asymetrii. Co więcej, „kopulowy” wykres korelacyjny (b) jedynie nieznacznie sugeruje brak symetrii ze względu na fakt, że więcej pustego pola znajduje się przy punkcie $(1, 0)$ aniżeli przy punkcie $(0, 1)$. Dopiero poziomice gęstości zadanych przez kopule z wykresu (d) wskazują na występowanie asymetrii w na tyle znacznym stopniu, że daje się to wychwycić.

Dla tej samej pary walut, przy użyciu numerycznej metody największej wiarygodności, wyestymowano parametry kopuli teoretycznej danej wzorem (3) aproksymującej rozrzut punktów z wykresu (b) z rys. 1. W efekcie uzyskano następujące

⁴ Przedział ten został dobrany arbitralnie ze względu na brak pełnego rozpoznania rozkładu statystyki testowej. W konsekwencji nie może być mowy o wyborze poziomu istotności przeprowadzanego testu.

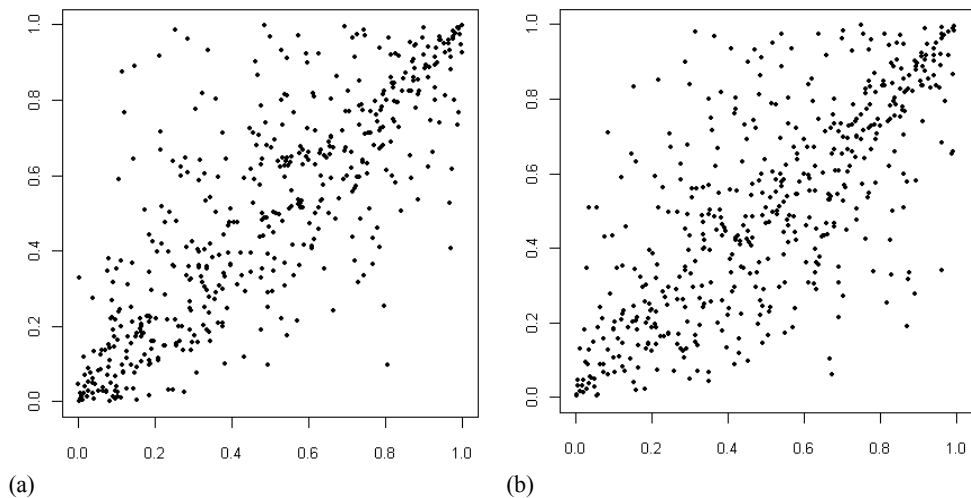
wartości: $\hat{\alpha} = 0,4661731$; $\hat{\beta} = 0,4077852$; $\hat{\gamma} = 2,9771430$; $\hat{\delta} = 4,5035469$, które wyraźnie wskazują zarówno na brak symetrii, jak i na dodatnie dolny oraz górny współczynniki zależności ekstremalnych.



Rys. 1. Zależność między kursami JPY i USD dla $n = 500$

Źródło: opracowanie własne.

W celu zobrazowania jakości dopasowania wyestymowanej kopuli dokonano zgodnie z jej rozkładem symulacji kilku 500-elementowych prób, spośród których dwie zaprezentowane są na wykresach na rys. 2.



Rys. 2. Przykładowe wysymulowane próby dla $n = 500$

Źródło: opracowanie własne.

Warto zauważyć – mimo oczywistej zawodności oceny wzrokowej – że wykresy te są bardzo podobne do wykresu (b) z rys. 1, bowiem w okolicach punktów $(0, 0)$, $(1, 1)$ pojawiają się ostrza wskazujące na występowanie zależności ekstremalnych, zaś w okolicach punktów $(1, 0)$ i $(0, 1)$ pojawia się pusta przestrzeń, której na dodatek więcej znajduje się przy punkcie $(1, 0)$. Pewnym jednak odstępstwem od wykresu danych empirycznych jest w przypadku danych symulowanych większy stopień rozproszenia punktów od przekątnej w kierunku punktów $(1, 0)$ i $(0, 1)$.

4. Podsumowanie

W podsumowaniu należy zwrócić uwagę na kilka ogólnych kwestii, które prezentowana przykładowa analiza danych jedynie egzemplifikowała.

- Zjawisko asymetrii danych istnieje i powinno być ujęte w modelach teoretycznych, o ile tylko są ku temu przesłanki. Zwłaszcza, że za pomocą testów statystycznych jest je niezwykle łatwo wykryć lub potwierdzić.
- Kopule dają możliwość uwzględnienia w modelu nadmienionej asymetrii. Dobitnie sugeruje to rozważony przykład dotyczący pary kursów dolara i jena względem złotego. Bowiem jedyna analizowana – do tego arbitralnie wybrana – kopuła niesymetryczna zdaje się dawać zadowalające efekty, a co najważniejsze – wyraźnie wychwytuje asymetrię danych. Widać stąd, że w przypadku badań szczegółowych wnikliwszy dobór modelu dałby z pewnością zdecydowanie lepsze efekty.

- Złożoność modeli z kopułami asymetrycznymi i w konsekwencji złożoność procedur estymacyjnych oraz symulacyjnych są niebagatelne. Niemniej jednak nie powinny być czynnikiem przesądającym o zaniechaniu stosowania tych modeli. Co więcej, zgrubna analiza danych rzeczywistych, przeprowadzona w opracowaniu, pozwala na stwierdzenie istnienia konieczności głębszego rozpoznania obszaru modelowania za pomocą kopuli niesymetrycznych oraz potrzeby rozwijania w tym zakresie stosownych procedur zarówno analitycznych, jak i głównie numerycznych.

Literatura

- Durante F., *Construction of non-exchangeable bivariate distribution functions*, „Stat Papers” 2009, no 50.
- Heilpern S., *Funkcje łączące*, AE we Wrocławiu, Wrocław 2007.
- Levin A.Yu., *On a consistent multidimensional non-parametric test for homogeneity*, „Russ. Math. Surv.” 1993, vol. 48.
- Liebscher E., *Construction of asymmetric multivariate copulas*, „J. Multivariate Anal.” 2008, no 99.
- Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.
- R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

ASYMMETRIC COPULAS APPLICATIONS IN ECONOMIC MODELLING

Summary: In many cases, multidimensional analysis of economic data must take into consideration non-exchangeability of deliberated factors. Such a peculiar data asymmetry may be modelled with use of asymmetric copulas. In the paper a specific procedure of 2-dimensional asymmetric copula construction is presented and, additionally, illustrated with an analysis of exemplary empirical data, asymmetry of which was previously identified on the basis of a proper test. Despite complexity of asymmetric copula models and some further difficulties caused by them, the presented analysis reveals much higher accuracy and elasticity of asymmetric copula models in comparison with the traditional Archimedean ones.

Keywords: asymmetry of random vector entries, Archimedean copula, asymmetric copula.