

Wybrane zagadnienia matematyki



Karol Selwat



seria wydawnicza

Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy



Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy

Karol Selwat

Wybrane zagadnienia matematyki

Legnica 2011

Karol Selwat, Wydział Zarządzania i Informatyki PWSZ im. Witelona w Legnicy
e-mail: SelwatK@pwsz-legnica.eu

Rada Wydawnicza:

dr inż. Edward Puchała (przewodniczący), prof. dr hab. inż. Jerzy Pietkiewicz, dr hab. Krystyna Choma-Moryl, dr hab. inż. Aleksander Zgrzywa, ks dr Bogusław Drożdż, dr Jan Wojtaś, dr Romuald Łuczyński, dr Jan Budka, dr n. med. Jarosław Goldman, dr Piotr Niemiec, mgr Joanna Żółtańska, mgr Mirosław Szczypiorski, mgr Łukasz Gajewski

Recenzent: prof. zw. dr hab. Tadeusz Galanc

Korekta: Krystyna Gajaszek, Waldemar Gajaszek

Projekt okładki: Adam Chamera

Skład komputerowy w systemie \LaTeX wykonał autor.

Współpraca przy wykonaniu rysunków: Agnieszka Selwat.

Przygotowanie do druku:

Waldemar Gajaszek, Halina Kawa
Stowarzyszenie na Rzecz Rozwoju
Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy
„Wspólnota Akademicka”
ul. Sejmowa 5A, 59-220 Legnica
tel. 76 723 21 20, tel./fax 76 723 29 04, www.wa.legnica.edu.pl

Wydawca:

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy
ul. Sejmowa 5A, 59-220 Legnica
tel. 76 723 22 80 do 83
pwsz@pwsz.legnica.edu.pl, www.pwsz.legnica.edu.pl

Wydanie drugie poprawione.

© Copyright by Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy.

Wszystkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej publikacji nie może być powielana ani rozpowszechniana za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych bez uprzedniego wyrażenia zgody przez wydawcę.

ISBN 978-83-61389-33-0

Spis treści

Spis rysunków	8
Od Autora	10

I. Elementy wstępu do matematyki

Rozdział 1. Elementy logiki matematycznej i rachunku zdań	13
1.1. Zdania logiczne i funktory	13
1.2. Formy zdaniowe	15
1.3. Kwantyfikatory	16
Rozdział 2. Elementy teorii mnogości	18
2.1. Podstawowe definicje	18
2.2. Relacje między zbiorami	19
2.3. Zbiory liczbowe	20
2.4. Działania na zbiorach	20
2.5. Podstawowe prawa działań na zbiorach	22

II. Elementy analizy matematycznej

Rozdział 3. Wstęp do teorii funkcji	27
3.1. Podstawowe pojęcia	27
3.2. Podstawowe własności funkcji	28
3.3. Działania na funkcjach	34
3.4. Funkcja wykładnicza	36
3.5. Funkcja logarytmiczna	38
3.6. Funkcje cyklometryczne	41
3.7. Funkcje elementarne	44
Rozdział 4. Ciągi liczbowe i ich granice	47
4.1. Podstawowe definicje	47
4.2. Podstawowe własności ciągów liczbowych	48
4.3. Kapitalizacja prosta i kapitalizacja złożona	49
4.4. Granica ciągu	51
4.5. Twierdzenia o granicach ciągów	54
4.6. Kapitalizacja ciągła	60
4.7. Efektywna stopa procentowa	61
Rozdział 5. Szeregi liczbowe	62

5.1. Podstawowe definicje i przykłady	62
5.2. Kryteria zbieżności szeregu	63
Rozdział 6. Granice funkcji	65
6.1. Podstawowe definicje	65
6.2. Twierdzenia o granicach funkcji	68
6.3. Asymptoty funkcji	72
Rozdział 7. Ciągłość funkcji	76
7.1. Podstawowe definicje i przykłady	76
7.2. Twierdzenia o funkcjach ciągłych	80
Rozdział 8. Pochodne funkcji	82
8.1. Podstawowe definicje	82
8.2. Prosta styczna do wykresu funkcji	84
8.3. Różniczka funkcji	86
8.4. Pochodna jako funkcja	86
8.5. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego	88
8.5.1. Reguły różniczkowania	88
8.5.2. Pochodna logarytmiczna	89
8.5.3. Reguły de L'Hospitala	90
8.6. Ekonomiczna interpretacja pochodnej	92
8.7. Elastyczność funkcji	93
8.8. Stopa wzrostu funkcji	94
8.9. Twierdzenia o wartości średniej	95
8.10. Pochodne wyższych rzędów	98
8.11. Rozwinięcia funkcji według Taylora i Maclaurina	99
Rozdział 9. Badanie zmienności funkcji	105
9.1. Monotoniczność funkcji	105
9.2. Ekstrema lokalne funkcji	107
9.3. Ekstrema globalne funkcji	112
9.4. Wypukłość i wklęsłość funkcji	116
9.5. Punkt przegięcia funkcji	119
9.6. Badanie przebiegu zmienności funkcji	123
9.7. Badanie funkcji ekonomicznych	125
Rozdział 10. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej	130
10.1. Całka nieoznaczona	130
10.2. Reguły całkowania	131
10.3. Całkowanie funkcji wymiernych	136
10.3.1. Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju	139
10.3.2. Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju	139
10.4. Całka oznaczona	145
10.4.1. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej	148
10.5. Podstawowe twierdzenia o całkach oznaczonych	149
10.5.1. Całkowe twierdzenie o wartości średniej	152

10.6. Zastosowania całek oznaczonych	154
10.6.1. Zastosowanie całek oznaczonych w geometrii	154
10.6.2. Zastosowanie całek oznaczonych w ekonomii	157
10.7. Całki niewłaściwe	158
10.7.1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju	159
10.7.2. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju	163
III. Elementy algebry liniowej	
Rozdział 11. Macierze i wyznaczniki	167
11.1. Podstawowe definicje	167
11.2. Działania na macierzach	169
11.3. Własności działań na macierzach	172
11.4. Wyznacznik macierzy	174
11.4.1. Obliczanie wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego	174
11.4.2. Rozwinięcie wyznacznika według Laplace'a	176
11.4.3. Podstawowe własności wyznacznika	177
11.5. Macierz odwrotna	178
11.5.1. Podstawowe własności macierzy odwrotnej	181
11.6. Algorytm Gaussa	182
11.6.1. Metoda bezwyznacznikowa obliczania macierzy odwrotnej	184
11.7. Rozszerzony algorytm Gaussa	185
Rozdział 12. Układy równań liniowych	187
12.1. Podstawowe definicje	187
12.2. Metody rozwiązywania układów Cramera	188
12.2.1. Wzór Cramera	188
12.2.2. Metoda macierzy odwrotnej	190
12.2.3. Metoda eliminacji Gaussa	191
12.3. Metoda eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań liniowych	193
12.4. Zastosowania układów równań liniowych	196
12.4.1. Model przepływów międzygałęziowych Leontiewa	197
IV. Elementy geometrii analitycznej	
Rozdział 13. Geometria analityczna w przestrzeni trójwymiarowej	200
13.1. Wektory	200
13.1.1. Iloczyn skalarny wektorów	202
13.1.2. Długość wektora	203
13.1.3. Odległość punktów	203
13.1.4. Miara kąta między wektorami	204
13.1.5. Prostopadłość i równoległość wektorów	205
13.1.6. Współpłaszczyznowość wektorów	206
13.1.7. Iloczyn wektorowy	208
13.1.8. Własności iloczynu skalarnego i iloczynu wektorowego	210
13.1.9. Iloczyn mieszany trójki wektorów	211
13.1.10. Własności iloczynu mieszanego	212

13.2. Płaszczyzny	212
13.2.1. Równanie normalne płaszczyzny	212
13.2.2. Równanie ogólne płaszczyzny	213
13.2.3. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty niewspółliniowe	214
13.2.4. Równania parametryczne płaszczyzny	214
13.3. Proste	215
13.3.1. Równania krawędziowe prostej	215
13.3.2. Równania parametryczne prostej	216
13.3.3. Równania kierunkowe prostej	218
13.4. Odległość punktu od prostej lub płaszczyzny	218
13.5. Wzajemne położenia dwóch płaszczyzn	220
13.5.1. Kąty	221
13.5.2. Odległości	222
13.6. Wzajemne położenia prostej i płaszczyzny	222
13.6.1. Kąty	222
13.6.2. Odległości	223
13.7. Wzajemne położenia dwóch prostych	224
13.7.1. Kąty	225
13.7.2. Odległości	225

V. Elementy algebry abstrakcyjnej

Rozdział 14. Liczby zespolone	227
14.1. Konstrukcja liczb zespolonych	227
14.2. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych	230
14.3. Działania na liczbach zespolonych	231
14.4. Własności działań w zbiorze liczb zespolonych	233
14.5. Sprzężenie liczby zespolonej	233
14.5.1. Własności sprzężenia liczb zespolonych	234
14.6. Moduł liczby zespolonej	235
14.6.1. Własności modułu liczby zespolonej	236
14.7. Argument liczby zespolonej	238
14.7.1. Własności argumentu liczby zespolonej	241
14.8. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	242
14.8.1. Własności liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej	244
14.8.2. Wzór de Moivre'a	245
14.8.3. Wzory Eulera	246
14.9. Pierwiastkowanie liczb zespolonych	247
14.9.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka zespolonego	249
Rozdział 15. Wielomiany zespolone	251
15.1. Podstawowe określenia	251
15.2. Pierwiastki wielomianów zespolonych	254
15.3. Rozkład wielomianu na czynniki nierozkładalne	256
15.3.1. Rozkład wielomianu rzeczywistego na czynniki nierozkładalne	257

Rozdział 16. Zespólone funkcje wymierne	259
16.1. Podstawowe określenia	259
16.2. Rozkład zespolonej funkcji wymiernej na ułamki proste	260
Bibliografia	262

Spis rysunków

3.1.	Zbiór wartości funkcji	28
3.2.	Wykres funkcji liniowej i wykres funkcji kwadratowej	29
3.3.	Funkcje monotoniczne	30
3.4.	Wykres funkcji parzystej i wykres funkcji nieparzystej	32
3.5.	Wykres funkcji okresowej	33
3.6.	Złożenie funkcji	35
3.7.	Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = (\frac{1}{2})^x$	36
3.8.	Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$	37
3.9.	Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	40
3.10.	Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_2 x$	40
3.11.	Wykres funkcji $f(x) = \arcsin x$	42
3.12.	Wykres funkcji $f(x) = \arccos x$	43
3.13.	Wykres funkcji $f(x) = \arctg x$	43
3.14.	Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arccot} x$	44
3.15.	Wykres funkcji „część całkowita”	46
4.1.	Ilustracja pojęcia granicy właściwej ciągu	51
4.2.	Wykres funkcji $f(x) = e^x$	59
4.3.	Wykres funkcji $f(x) = \ln x$	59
6.1.	Asymptota pionowa funkcji	73
6.2.	Asymptoty ukośne funkcji	73
7.1.	Lewostronna i prawostronna ciągłość funkcji w punkcie	77
7.2.	Ciągłość funkcji w punkcie	77
8.1.	Prosta styczna do wykresu funkcji	85
8.2.	Geometryczna interpretacja twierdzenia Rolle’a	95
8.3.	Geometryczna interpretacja twierdzenia Lagrange’a	97
9.1.	Szkic wykresu funkcji $y = 3x^2 - 60x + 225$	106
9.2.	Wykres funkcji $f(x) = x^3$	107
9.3.	Minimum lokalne funkcji i maksimum lokalne funkcji	108
9.4.	Szkic wykresu funkcji $y = -3x^2 + 6x$	110
9.5.	Ekstrema globalne funkcji ciągłej na przedziale domkniętym	112
9.6.	Szkic wykresu funkcji $y = 3x^2 + 8x + 5$	113
9.7.	Wypukłość funkcji	117

9.8.	Wklęsłość funkcji	117
9.9.	Wykresy funkcji rosnących w sposób wypukły lub wklęsły	118
9.10.	Wypukłość funkcji w terminach prostej stycznej	118
9.11.	Wklęsłość funkcji w terminach prostej stycznej	119
9.12.	Punkt przegięcia	120
9.13.	Szkic wykresu funkcji $y = 12x^2 - 72x + 96$	121
9.14.	Wykres funkcji $f(x) = x \ln x$	125
9.15.	Krzywa logistyczna	129
10.1.	Geometryczna interpretacja sumy całkowitej Riemanna	147
10.2.	Geometryczna interpretacja całki oznaczonej funkcji nieujemnej	149
10.3.	Geometryczna interpretacja całki oznaczonej funkcji niedodatniej	149
10.4.	Geometryczna interpretacja wartości średniej funkcji w przedziale	153
10.5.	Pole obszaru pomiędzy krzywymi $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$	154
10.6.	Obszar między krzywymi $y = -x^2 + 5x + 14$ oraz $y = x^2 - 5x + 6$	155
10.7.	Krzywa wykresu funkcji na przedziale domkniętym	156
10.8.	Pewna bryła obrotowa	157
11.1.	Schemat Falka mnożenia macierzy	171
11.2.	Metoda Sarrusa	175
13.1.	Interpretacja geometryczna \mathbb{R}^3	201
13.2.	Wektory prostopadłe i wektory równoległe	205
13.3.	Wektory współpłaszczyznowe	206
13.4.	Płaszczyzna rozpięta na dwóch wektorach nierównoległych	207
13.5.	Równoległoscian zbudowany na trzech wektorach	208
13.6.	Iloczyn wektorowy	209
13.7.	Płaszczyzna prostopadła do wektora \vec{n}	213
13.8.	Prosta zadana krawędziowo	215
13.9.	Prosta zadana parametrycznie	216
13.10.	Rzutowanie na płaszczyznę i rzutowanie na prostą	219
13.11.	Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny	223
14.1.	Płaszczyzna zespolona według Hamiltona	230
14.2.	Płaszczyzna zespolona według Gaussa	231
14.3.	Sprzężenie liczby zespolonej	234
14.4.	Geometryczna interpretacja modułu liczby zespolonej	236
14.5.	Zbiór rozwiązań nierówności $ z - 3i \leq 2$	237
14.6.	Kąt skierowany dodatnio i kąt skierowany ujemnie	238
14.7.	Kąt skierowany i jego miara łukowa	239
14.8.	Argument liczby zespolonej	240
14.9.	Znaki wartości funkcji trygonometrycznych	240
14.10.	Ogólne postacie miar łukowych kątów	241
14.11.	Zbiór rozwiązań nierówności $\frac{\pi}{6} < \arg\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{5}{6}\pi$	242
14.12.	Zbiór pierwiastków czwartego stopnia z liczby -1	248
14.13.	Zbiór pierwiastków n -tego stopnia z liczby z	249

Od Autora

Książka *Wybrane zagadnienia matematyki* jest adresowana głównie do studentów Wydziału Zarządzania i Informatyki Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, powstała ona bowiem z uwzględnieniem moich doświadczeń nabytych w ciągu ostatnich 12 lat podczas wykładów i ćwiczeń ze studentami specjalności i kierunków wchodzących obecnie w skład tego wydziału. Ponadto głównymi odbiorcami książki są studenci I roku kierunku ochrona środowiska na Wydziale Administracji PWSZ im. Witelona w Legnicy. Ponieważ prezentowane wybrane zagadnienia matematyki pojawiają się w standardach kształcenia dla studiów pierwszego stopnia kierunków: ekonomia, zarządzanie, zarządzanie i inżynieria produkcji, informatyka oraz ochrona środowiska, to możliwe jest również wykorzystanie niniejszego opracowania przez studentów tych kierunków na innych uczelniach wyższych, głównie w państwowych wyższych szkołach zawodowych. Ponadto książka może służyć absolwentom studiów pierwszego stopnia wyżej wymienionych kierunków jako usystematyzowane podsumowanie zdobytej wiedzy.

Pierwsza część książki omawia elementy wstępu do matematyki, tj. elementy logiki matematycznej, rachunku zdań i teorii mnogości. W drugiej części przedstawiono podstawy analizy matematycznej funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej: ciągi i szeregi liczbowe, granice i ciągłość funkcji, rachunek różniczkowy i rachunek całkowy. Trzecia część zajmuje się wybranymi zagadnieniami algebry liniowej, tj. macierzami, wyznacznikami oraz układami równań liniowych. Czwarta część to podstawy geometrii analitycznej w przestrzeni trójwymiarowej: wektory i działania na nich, równania płaszczyzny i prostej, kąty i odległości w przestrzeni. Ostatnia część prezentuje elementy algebry abstrakcyjnej, tj. liczby zespolone oraz zespolone wielomiany i funkcje wymierne.

Powyższe zagadnienia prezentowane są w sposób niemalże elementarny, dostosowany do poziomu wiedzy matematycznej przeciętnego absolwenta szkoły ponadgimnazjalnej, który wybrał jeden ze wspomnianych kierunków studiów. Teorię ograniczono do niezbędnego minimum, w szczególności pomijając dowody twierdzeń, faktów i wzorów, jeśli nie wynikały one bezpośrednio z toku prezentacji. Przedstawione przykłady ilustrują kluczowe pojęcia oraz zastosowania ważniejszych twierdzeń. Ponadto zaprezentowane są podstawowe zastosowania podanych metod matematycznych w zarządzaniu, ekonomii i technice.

Autorzy większości dotychczas dostępnych opracowań wychodzą z założenia,

że przystępujący do kursów matematyki czytelnicy posiadają wiedzę matematyczną na poziomie rozszerzonym liceum ogólnokształcącego sprzed kilku lat. Niestety, postępujące obniżanie standardów wymagań egzaminacyjnych na maturze z matematyki powoduje, że poziom nauczania matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych również się obniża. W konsekwencji powstała znaczna rozbieżność pomiędzy poziomem wiedzy matematycznej przeciętnego absolwenta szkoły ponadgimnazjalnej a poziomem tej wiedzy niezbędnym do rozpoczęcia kursów matematycznych na I roku studiów wyższych. Dlatego też w mojej książce starałem się przedstawić prezentowany materiał w sposób zrozumiały dla każdego wspomnianego na wstępie odbiorcy książki. W razie konieczności przypominałem odpowiednie zagadnienia matematyczne z poprzednich etapów edukacji. Mam nadzieję, że znacznie ułatwi to Czytelnikom poznawanie opisywanych zagadnień matematyki wyższej.

W drugim wydaniu poprawiono drobne błędy, zauważone po ukazaniu się wydania pierwszego.

Karol Selwat

Część I

Elementy wstępu do matematyki

Rozdział 1

Elementy logiki matematycznej i rachunku zdań

Aby móc wysłuchać jakiegokolwiek wykładu z matematyki wyższej, trzeba znać, przynajmniej w podstawowym zakresie, język matematyczny. Ten rozdział ma na celu przedstawienie podstaw tego języka. Używaną notację kwantyfikatorów przyjęto za [17].

1.1. Zdania logiczne i funktory

Podstawowym elementem każdego języka potocznego jest zdanie. Jednakże nie każde zdanie potoczne jest zdaniem w sensie matematycznym. W języku matematyki podstawowym elementem jest zdanie logiczne.

Definicja 1.1.1. *Zdanie logiczne* to zdanie oznajmujące, o którym możemy powiedzieć, czy jest prawdziwe, czy fałszywe. Jeśli zdanie logiczne jest prawdziwe, to przypisujemy mu wartość logiczną 1, w przeciwnym przypadku przypisujemy mu wartość logiczną 0.

Przykład 1.1.2. Zdanie „Warszawa to stolica Polski” jest zdaniem logicznym o wartości logicznej 1, zaś zdanie „Woda jest sucha” – zdaniem logicznym o wartości logicznej 0. Natomiast zdania „Idź do domu!” oraz „Która godzina?” nie są zdaniem logicznymi.

Proste zdania logiczne oznaczamy zwyczajowo małymi literami: p , q , r , s itd. Podobnie jak w naszym języku ojczystym ze zdań prostych można tworzyć zdania złożone (używając do tego celu różnych spójników), tak i w logice z prostych zdań logicznych możemy tworzyć złożone zdania logiczne. Używamy do tego celu *spójników logicznych* zwanych inaczej *funktorami logicznymi*.

Wyróżniamy następujące funktory logiczne:

- *negacja* (*zaprzeczenie*), oznaczana symbolem \neg , np. $\neg p$ (czytamy: „negacja p ” lub „nieprawda, że p ”)
- *alternatywa* („lub logiczne”), oznaczana symbolem \vee , np. $p \vee q$ (czytamy: „ p lub q ”, „alternatywa zdań p oraz q ”)
- *koniunkcja* („i logiczne”), oznaczana symbolem \wedge , np. $p \wedge q$ (czytamy: „ p i q ”, „koniunkcja zdań p oraz q ”)

- *implikacja* („jeżeli... , to...”), oznaczana symbolem \Rightarrow , np. $p \Rightarrow q$ (czytamy: „ p implikuje q ”, „jeżeli p , to q ”)
- *równoważność* („wtedy i tylko wtedy, gdy”), oznaczana symbolem \iff , np. $p \iff q$ (czytamy: „ p jest równoważne q ”, „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ”)

W przypadku implikacji $p \Rightarrow q$ mówimy, że zdanie p jest *poprzednikiem implikacji*, zaś zdanie q – *następnikiem implikacji*. W tym momencie warto zauważyć, że większość twierdzeń matematycznych jest sformułowana w postaci implikacji (lub ewentualnie równoważności). Dla twierdzenia postaci $p \Rightarrow q$ mówimy, że zdanie p jest *założeniem*, natomiast zdanie q – *wnioskiem* lub *tezą*.

Przy wyznaczaniu wartości logicznych zdań złożonych posługujemy się zamieszczoną poniżej tabelą 1.1.

Tabela 1.1. Wartości logiczne zdań złożonych

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

Na przykładzie powyższej tabeli można zauważyć, że część logicznych zdań złożonych w niektórych sytuacjach bywa prawdziwa, w innych zaś fałszywa – w zależności od wartości logicznych swoich zdań składowych. W dalszym ciągu spośród wszystkich logicznych zdań złożonych będziemy wyróżniać tzw. prawa logiczne.

Definicja 1.1.3. *Prawo logiczne* to zdanie logiczne złożone, które jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań je tworzących. Prawo logiczne zwiemy inaczej *tautologią*.

Twierdzenie 1.1.4 (podstawowe prawa logiczne).

$p \vee \neg p$	(prawo wyłączonego środka),
$\neg(p \wedge \neg p)$	(prawo sprzeczności),
$\neg(\neg p) \iff p$	(prawo podwójnego zaprzeczenia),
$(p \wedge p) \iff p$	(prawo idempotentności koniunkcji),
$(p \vee p) \iff p$	(prawo idempotentności alternatywy),
$p \vee q \iff q \vee p$	(prawo przemienności alternatywy),
$p \wedge q \iff q \wedge p$	(prawo przemienności koniunkcji),
$p \vee (p \wedge q) \iff p$	(prawo absorpcji),
$p \wedge (p \vee q) \iff p$	(prawo absorpcji),
$\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$	(prawo de Morgana zaprzeczenia alternatywy),

$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$	(prawo de Morgana zaprzeczenia koniunkcji),
$\neg(p \Rightarrow q) \iff (p \wedge \neg q)$	(prawo zaprzeczenia implikacji),
$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(prawo przechodniości implikacji),
$(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$	(prawo transpozycji),
$(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$	(prawo łączności alternatywy),
$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$	(prawo łączności koniunkcji),
$[p \wedge (q \vee r)] \iff [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	(rozdzielność koniunkcji względem alternatywy),
$[p \vee (q \wedge r)] \iff [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	(rozdzielność alternatywy względem koniunkcji).

Przy zapisywaniu praw logicznych należy zwrócić baczną uwagę na położenie nawiasów – inne ich położenie da nam inne zdanie logiczne, które nie musi być tautologią.

Sprawdzanie, czy podane zdanie logiczne złożone jest tautologią, odbywa się za pomocą tzw. *metody zero-jedynkowej*. W metodzie tej odtwarzamy proces tworzenia danego zdania złożonego, wychodząc od zdań prostych i aplikując kolejno spójniki logiczne. Równocześnie oceniamy wartości logiczne powstałych zdań złożonych.

Przykład 1.1.5. Sprawdźmy, czy zdanie $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$ jest prawem logicznym.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Widzimy zatem, że to zdanie logiczne jest zawsze prawdziwe, czyli jest tautologią.

Nieco szerszy punkt widzenia zdań logicznych oraz funktorów zostanie przedstawiony w dygresji na stronie 24.

1.2. Formy zdaniowe

W języku matematycznym nie każde wyrażenie oznajmujące jest zdaniem logicznym. Dla pewnych wyrażeń nie możemy jednoznacznie określić ich wartości logicznej. Na przykład równanie $x^2 - 6x + 8 = 0$ jest zdaniem prawdziwym dla $x = 2$ lub $x = 4$, natomiast zdaniem fałszywym dla dowolnej innej liczby rzeczywistej. Równanie powyższe jest przykładem formy zdaniowej.

Definicja 1.2.1. *Forma zdaniowa zmiennej x* to wyrażenie zawierające zmienną x , które staje się zdaniem logicznym dopiero po zastąpieniu x nazwą pewnego elementu. Formę zdaniową nazywamy inaczej *predykatem*.

Formy zdaniowe zmiennej x będziemy oznaczać $\varphi(x)$, $p(x)$, $q(x)$ itp.

Analogicznie definiuje się formy zdaniowe wielu zmiennych.

Przykład 1.2.2. Formami zdaniowymi zmiennej x są na przykład następujące wyrażenia: „ x jest liczbą pierwszą”, „ x jest liczbą parzystą”, „ $x < 1$ ”, „ $x \neq 0$ ”, „ $3x^2 - 5x + 1 \leq 0$ ”.

Z formami zdaniowymi mieliśmy już do czynienia od dawna, a na pewno od momentu, kiedy zaczęliśmy rozwiązywać równania i nierówności z jedną niewiadomą. Teraz takie rozwiązywanie możemy dostrzec w nowym świetle: rozwiązując równanie ze zmienną x (jest ono oczywiście przykładem formy zdaniowej), ustalamy, dla jakich wartości x staje się ono zdaniem logicznym prawdziwym, a dla jakich – fałszywym. Takie rozumowanie doprowadzi nas do zastosowania form zdaniowych przy definiowaniu zbiorów w podrozdziale 2.1.

1.3. Kwantyfikatory

W języku matematycznym bardzo często występują sformułowania typu „dla każdego”, „dla wszystkich” lub, z drugiej strony, „dla pewnego”, „istnieje”. Takie sformułowania nazywamy kwantyfikatorami.

Na potrzeby przykładów wprowadźmy oznaczenia: \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych, \mathbb{R} – zbiór liczb rzeczywistych.

Definicja 1.3.1. Wyrażenie „dla każdego” nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym (dużym)* i oznaczamy przez \forall .

Przykład 1.3.2. Zdanie „Każda liczba ujemna jest mniejsza od 1” możemy zapisać skrótowo

$$\forall x(x < 0 \Rightarrow x < 1).$$

Definicja 1.3.3. Wyrażenie „istnieje” nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym (małym)* i oznaczamy przez \exists .

Przykład 1.3.4. Zdanie „Istnieje liczba niemniejsza niż 1” zapisujemy symbolicznie jako

$$\exists x(x \geq 1).$$

W części książek można się spotkać z innymi oznaczeniami kwantyfikatorów: kwantyfikator ogólny jest oznaczany \wedge , zaś kwantyfikator szczegółowy jest oznaczany \vee .

Kwantyfikatorów używamy do zapisu zarówno zdań logicznych, jak i form zdaniowych.

Przykład 1.3.5. Zapiszmy symbolicznie zdanie logiczne „Wszystkie liczby naturalne są dodatnie”.

$$(\forall x \in \mathbb{N})(x > 0).$$

Takie zdanie jest oczywiście zdaniem prawdziwym.

Przykład 1.3.6. Zdanie „Równanie $x^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych”, czyli inaczej „Istnieje liczba rzeczywista, która jest rozwiązaniem równania $x^2 + 1 = 0$ ”, zapisujemy symbolicznie jako

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 1 = 0).$$

To zdanie logiczne jest oczywiście fałszywe.

Przykład 1.3.7. Wyrażenie $x \geq 1$ jest oczywiście formą zdaniową zmiennej x . Po dodaniu odpowiedniego kwantyfikatora staje się ona zdaniem logicznym prawdziwym: $(\exists x \in \mathbb{R})(x \geq 1)$ lub zdaniem logicznym fałszywym: $(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 1)$.

Przykład 1.3.8. Formę zdaniową „Liczba x jest liczbą naturalną parzystą” możemy zapisać „ $x = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ ”, czyli używając kwantyfikatora szczegółowego jako

$$(\exists k \in \mathbb{N})(x = 2k).$$

Na powyższych przykładach można zaobserwować pewną prawidłowość.

Fakt 1.3.9. Po odpowiednim dodaniu kwantyfikatora forma zdaniowa jednej zmiennej staje się zdaniem logicznym. Po odpowiednim dodaniu kwantyfikatora forma zdaniowa dwóch zmiennych staje się formą zdaniową jednej zmiennej itp.

Formy zdaniowe i kwantyfikatory stosowane są przy symbolicznym formułowaniu twierdzeń matematycznych, o czym przekonamy się nieraz w dalszej części książki. Inne zastosowanie form zdaniowych i kwantyfikatorów to definiowanie zbiorów.

Rozdział 2

Elementy teorii mnogości

Teoria mnogości jest inaczej zwana teorią zbiorów. Pojęcie zbioru pojawiło się już na lekcjach matematyki w gimnazjum, a później w szkole ponadgimnazjalnej. Przypomnijmy, że pojęcie zbioru jest pojęciem pierwotnym, czyli nie podaje się jego definicji. Na poprzednich etapach edukacji mówiono o podstawowych działaniach na zbiorach, lecz przedstawiano je zazwyczaj w sposób opisowy, najczęściej z użyciem owalnych diagramów. W tym rozdziale przedstawimy podstawy teorii zbiorów w sposób możliwie najbardziej ścisły.

2.1. Podstawowe definicje

Przypomnijmy, że zbiory oznaczamy zwyczajowo dużymi literami, np. A , B , X , zaś elementy tych zbiorów – małymi literami, np. a , b , x .

Fakt, że element x należy do zbioru A , zapisujemy jako $x \in A$.

Fakt, że element x nie należy do zbioru A , zapisujemy jako $x \notin A$ lub inaczej $\neg(x \in A)$.

Widzimy zatem, że podstawową formą zdaniową w teorii zbiorów jest forma zdaniowa $x \in A$, gdzie A jest pewnym zbiorem.

Przypomnijmy, że zbiory możemy definiować na trzy sposoby:

1. przez podanie słownego opisu zbioru – np. $A =$ zbiór liczb naturalnych, nie większych niż 4,
2. poprzez wypisanie elementów zbioru – np. $A = \{1, 2, 3, 4\}$,
3. z zastosowaniem rachunku zdań (tj. za pomocą form zdaniowych, funktorów i kwantyfikatorów) – np. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$.

Ogólny schemat definiowania zbiorów z wykorzystaniem form zdaniowych jest następujący:

Niech $\varphi(x)$ oznacza formę zdaniową zmiennej x . Zapis $\{x : \varphi(x)\}$ oznacza „te elementy, które po podstawieniu w miejsce x powodują, że forma $\varphi(x)$ staje się zdaniem logicznym prawdziwym”. Wszystkie takie elementy tworzą pewien zbiór, który będziemy oznaczać A_φ . Tym samym wyjaśniliśmy sposób definiowania zbiorów za pomocą zapisu $A_\varphi = \{x : \varphi(x)\}$.

Warto zwrócić uwagę na to, że sposób definiowania zbioru przez wypisanie jego elementów jest w pełni skuteczny tylko w przypadku *zbioru skończonego*, tj. zbioru, którego liczbę elementów można ustalić. W przypadku przeciwnym, tzn.

w przypadku *zbioru nieskończonego*, musimy użyć wielokropka przy wypisywaniu elementów. Prześledźmy to na kolejnym przykładzie.

Przykład 2.1.1. Wykorzystując przykład 1.3.8, mamy

1. $B =$ zbiór liczb naturalnych parzystych,
2. $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$,
3. $B = \{x \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})(x = 2k)\}$.

Spośród wszystkich zbiorów wyróżnia się dwa szczególne zbiory.

Definicja 2.1.2. Zbiór skończony, który nie posiada żadnych elementów, nazywamy *zbiorem pustym* i oznaczamy \emptyset .

Definicja 2.1.3. Zbiór wszystkich elementów nazywamy *uniwersum* lub *prze-strzenią* i oznaczamy \mathcal{U} .

2.2. Relacje między zbiorami

Pomiędzy zbiorami mogą zachodzić różne relacje, tzn. zależności. W matematyce szkolnej przedstawiono opisowo relacje zawierania i równości zbiorów. Poniżej przedstawimy ścisły zapis tych relacji.

Definicja 2.2.1. Zbiór A zawiera się w zbiorze B , co oznaczamy $A \subset B$, jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B , tzn.

$$(\forall x \in \mathcal{U})(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Mówimy także, że zbiór A jest *podzbiorem* zbioru B .

Definicja 2.2.2. Zbiór A jest *równy* zbiorowi B , co oznaczamy $A = B$, jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i każdy element zbioru B jest elementem zbioru A , tzn.

$$(\forall x \in \mathcal{U})(x \in A \iff x \in B).$$

Zapis $A \subseteq B$ oznacza fakt, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B lub jest równy temu zbiorowi.

Definicja 2.2.3. Jeśli zbiór A jest podzbiorem zbioru B , różnym od zbioru B , tzn. jeśli $A \subset B$ oraz $A \neq B$, to zbiór A nazywamy *podzbiorem właściwym* zbioru B . Fakt ten zapisujemy krótko $A \subsetneq B$.

Przykładowe relacje między zbiorami są przedstawione w fakcie 2.3.1.

Używając rachunku zdań, możemy także zapisać, kiedy dany zbiór jest zbiorem pustym lub całym uniwersum.

Fakt 2.2.4. Zbiór C jest zbiorem pustym, tzn. $C = \emptyset$, jeżeli

$$(\forall x \in \mathcal{U})(\neg(x \in C)).$$

Fakt 2.2.5. Zbiór D jest całym uniwersum, tzn. $D = \mathcal{U}$, jeżeli

$$(\forall x \in \mathcal{U})(x \in D).$$

2.3. Zbiory liczbowe

Najbardziej interesującymi dla nas zbiorami są *zbiory liczbowe*, tzn. zbiory, których elementami są liczby. Przypomnijmy najważniejsze zbiory liczbowe, które pojawiły się w dotychczasowej edukacji matematycznej. Przy okazji podamy oficjalne oznaczenia tych zbiorów.

Najwcześniej w edukacji szkolnej pojawiają się liczby naturalne. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy literą \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Następnie pojawiają się liczby całkowite. Zbiór wszystkich liczb całkowitych oznaczamy literą \mathbb{Z} .

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Kolejny jest zbiór wszystkich liczb wymiernych, oznaczany literą \mathbb{Q} .

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : x = \frac{p}{q} \wedge p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}.$$

Wszystkie liczby poznane w ramach edukacji szkolnej, to liczby rzeczywiste. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy literą \mathbb{R} . Te liczby, które nie są wymierne, nazywamy liczbami niewymiernymi. Zbiór wszystkich liczb niewymiernych zapisujemy jako $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (znaczenie znaku \setminus wyjaśnimy w następnym podrozdziale).

Fakt 2.3.1. Pomiędzy najważniejszymi zbiorami liczbowymi zachodzą następujące relacje

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

2.4. Działania na zbiorach

Na zbiorach można wykonywać pewne działania. W gimnazjum i szkole ponadgimnazjalnej te działania przedstawia się zazwyczaj opisowo, przy użyciu owalnych diagramów reprezentujących zbiory i wyniki działań na tych zbiorach. W tej części przedstawimy ścisłe definicje działań na zbiorach oraz ich wyników. Ponadto wprowadzimy działanie mnożenia kartezjańskiego zbiorów.

Dodawanie zbiorów

Operacja dodawania zbiorów jest inaczej nazywana *sumowaniem mnogościowym*.

Definicja 2.4.1. *Sumą mnogościową zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B . Sumę zbiorów A oraz B oznaczamy $A \cup B$.*

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{U} : x \in A \vee x \in B\}.$$

Mnożenie mnogościowe zbiorów

Definicja 2.4.2. *Iloczynem mnogościowym zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą równocześnie do zbioru A i do zbioru B . Iloczyn zbiorów A oraz B oznaczamy $A \cap B$.*

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Iloczyn zbiorów jest inaczej nazywany *częścią wspólną* tych zbiorów.

Odejmowanie zbiorów

Definicja 2.4.3. *Różnicą mnogościową zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A oraz B oznaczamy $A \setminus B$ lub $A - B$.*

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge \neg(x \in B)\}.$$

Dopełnianie zbioru

Definicja 2.4.4. *Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór wszystkich elementów, które nie należą do zbioru A . Dopełnienie zbioru A oznaczamy A^c lub A' .*

$$A^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{U} : \neg(x \in A)\}.$$

Fakt 2.4.5. Dopełnienie zbioru A jest różnicą uniwersum \mathcal{U} oraz tego zbioru, tzn.

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A.$$

Mnożenie kartezjańskie zbiorów

Definicja 2.4.6. *Iloczynem kartezjańskim zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych par (x, y) , takich że $x \in A$ oraz $y \in B$. Iloczyn kartezjański zbiorów A oraz B oznaczamy $A \times B$.*

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

$$(x, y) \in A \times B \iff [x \in A \wedge y \in B].$$

Iloczyn kartezjański zbioru A z samym sobą zwyczajowo zapisujemy jako

$$A^2 \stackrel{\text{def}}{=} A \times A.$$

Podobnie dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ czynników}}.$$

Przykład 2.4.7. Dla najważniejszych zbiorów liczbowych (patrz podrozdział 2.3) mamy przykładowo

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} &= \mathbb{Z}, \\ \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} &= \mathbb{N}, \\ \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} &= \emptyset, \\ \mathbb{Q}^c &= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} &= \mathbb{R}^2 \quad (\text{płaszczyzna}), \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &= \mathbb{R}^3 \quad (\text{przestrzeń trójwymiarowa}). \end{aligned}$$

Znając pojęcie iloczynu mnogościowego zbiorów, możemy zdefiniować pojęcie zbiorów rozłącznych.

Definicja 2.4.8. Mówimy, że dwa zbiory A oraz B są *rozłączne*, jeśli ich iloczyn jest zbiorem pustym, tzn. $A \cap B = \emptyset$.

Przykład 2.4.9. Klasycznym przykładem zbiorów rozłącznych są dany zbiór A i jego dopełnienie A^c . W szczególności: zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych.

Korzystając z rachunku zdań, fakt rozłączności zbiorów A oraz B możemy zapisać jako

$$(\forall x \in \mathcal{U})[\neg(x \in A \cap B)],$$

czyli inaczej jako

$$(\forall x \in \mathcal{U})[\neg(x \in A \wedge x \in B)].$$

Podobne zapisy pojawią się w następnym podrozdziale, przy okazji uzasadniania praw działań na zbiorach.

2.5. Podstawowe prawa działań na zbiorach

W twierdzeniu 1.1.4 pojawiły się niektóre prawa logiczne, inaczej zwane prawami rachunku zdań. W bieżącej części sformułujemy analogiczne prawa rachunku zbiorów.

Twierdzenie 2.5.1 (podstawowe prawa działań na zbiorach).

Dla dowolnych zbiorów A , B oraz C prawdziwe są następujące równości:

$A \cap A = A$	(idempotentność mnożenia zbiorów),
$A \cup A = A$	(idempotentność dodawania zbiorów),
$A \cup B = B \cup A$	(przemienność dodawania zbiorów),
$A \cap B = B \cap A$	(przemienność mnożenia zbiorów),
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(łączność dodawania zbiorów),
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(łączność mnożenia zbiorów),
$A \cup (A \cap B) = A$	(absorpcja),
$A \cap (A \cup B) = A$	(absorpcja),
$A \cup A^c = \mathcal{U}$	(pochłanianie),
$A \cap A^c = \emptyset$	(pochłanianie),
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(I prawo de Morgana dla zbiorów),
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	(II prawo de Morgana dla zbiorów),
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(rozdzielność mnożenia zbiorów względem ich dodawania),
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(rozdzielność dodawania zbiorów względem ich mnożenia).

Przykład 2.5.2. Sprawdźmy, że dla dwóch dowolnych zbiorów A , B prawdziwe jest zdanie $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Korzystając z definicji równości zbiorów, otrzymujemy, że dane zdanie jest prawdziwe, jeśli

$$(\forall x \in \mathcal{U})(x \in (A \cup B)^c \iff x \in (A^c \cap B^c)).$$

W dalszym ciągu zajmiemy się formą zdaniową zmiennej x postaci

$$x \in (A \cup B)^c \iff x \in (A^c \cap B^c).$$

Korzystając kolejno z definicji dopełnienia, iloczynu oraz sumy zbiorów, otrzymujemy formy zdaniowe

$$\begin{aligned} \neg(x \in A \cup B) &\iff (x \in A^c \wedge x \in B^c), \\ \neg(x \in A \vee x \in B) &\iff (\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)). \end{aligned}$$

Zamiast formy zdaniowej „ $x \in A$ ” zapiszmy „ p ”, zamiast formy „ $x \in B$ ” zapiszmy „ q ”. Otrzymamy w ten sposób logiczne zdanie złożone

$$\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q).$$

W przykładzie 1.1.5 pokazaliśmy, że takie zdanie logiczne jest tautologią. Zatem wymienione poprzednio formy zdaniowe stają się prawdziwymi zdaniami logicznymi po podstawieniu w miejsce x dowolnego elementu uniwersum \mathcal{U} . Tym samym dowiedliśmy prawdziwości zdania

$$(\forall x \in \mathcal{U})(x \in (A \cup B)^c \iff x \in (A^c \cap B^c)),$$

czyli również zdania

$$(\forall A, B \subseteq \mathcal{U})(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Definicja 2.5.3. *Rodzina zbiorów* nazywamy zbiór, którego elementami są zbiory.

Przykładem rodziny zbiorów jest rodzina wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru $X \subseteq \mathcal{U}$, a w szczególności rodzina podzbiorów uniwersum \mathcal{U} .

Dygresja

Na zakończenie rozdziału poświęconego elementom teorii mnogości warto zrobić małą dygresję i spojrzeć na tę teorię z szerszego punktu widzenia. Na początek zdefiniujemy pojęcie *algebry Boole'a*.

Definicja 2.5.4. Niech w zbiorze \mathcal{B} określone są dwa działania dwuargumentowe \cup i \cap oraz działanie jednoargumentowe \sim . Ponadto niech są wyróżnione dwa różne elementy „0” oraz „1”. Zbiór \mathcal{B} nazywamy *algebrą Boole'a*, jeśli dla dowolnych $a, b, c \in \mathcal{B}$ spełnione są warunki:

$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$	(łączność działania \cup),
$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$	(łączność działania \cap),
$a \cup b = b \cup a$	(przemienność działania \cup),
$a \cap b = b \cap a$	(przemienność działania \cap),
$a \cup (a \cap b) = a$	(absorpcja),
$a \cap (a \cup b) = a$	(absorpcja),
$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$	(rozdzielność,
$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$	działań),
$a \cup \sim a = 1$	(pochłanianie),
$a \cap \sim a = 0$	(pochłanianie).

Podstawy teorii algebry Boole'a przedstawił matematyk angielski George Boole (1815–1864) w swym opracowaniu *An Investigation of the Laws of Thought* z 1854 roku.

Z twierdzenia 2.5.1 wynika następujący fakt:

Fakt 2.5.5. Rodzina wszystkich podzbiorów uniwersum \mathcal{U} wraz z działaniami dwuargumentowymi dodawania i mnożenia mnogościowego zbiorów, z działaniem jednoargumentowym dopełniania zbioru oraz z wyróżnionymi elementami \emptyset oraz \mathcal{U} jest algebrą Boole'a.

Fakt 2.5.6. Algebrą Boole'a jest również dwuelementowy zbiór wartości logicznych $\{0, 1\}$ z działaniami alternatywy, koniunkcji i negacji oraz wyróżnionymi elementami $[p \wedge \neg p]$ i $[p \vee \neg p]$. Algebra ta stanowi teoretyczną podstawę elektroniki cyfrowej.

Osoby zainteresowane tematem algebr Boole'a odsyłamy np. do [24].

Koniec dygresji

Część II

Elementy analizy matematycznej

Rozdział 3

Wstęp do teorii funkcji

Pojęcie funkcji wystąpiło już w edukacji matematycznej z zakresu gimnazjum i szkoły ponadgimnazjalnej. Pojawiły się tam również podstawowe własności funkcji oraz elementarne działania na funkcjach. W niniejszym rozdziale uporządkujemy i sformalizujemy te podstawowe wiadomości z teorii funkcji. Ponadto wprowadzimy nowe rodzaje działań na funkcjach – złożenie funkcji oraz odwracanie funkcji. Omówimy nowe dla większości abiturientów szkół ponadgimnazjalnych typy funkcji – funkcje wykładnicze, logarytmiczne oraz cyklometryczne.

3.1. Podstawowe pojęcia

Definicja 3.1.1. Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi x ze zbioru X przypisuje dokładnie jeden element y ze zbioru Y .

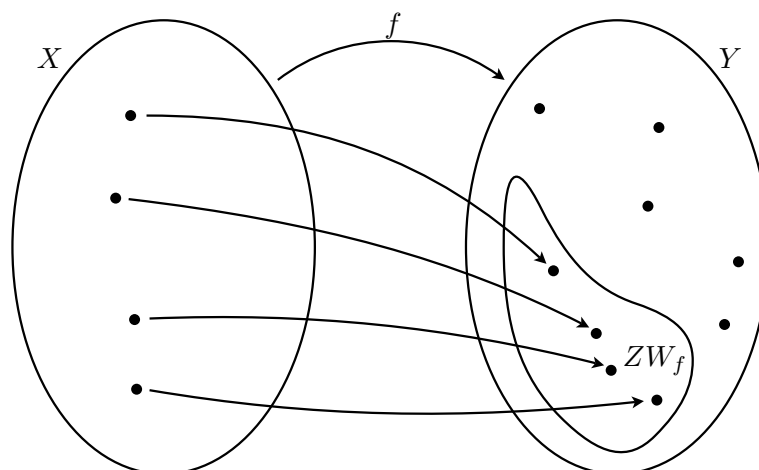
Przykład 3.1.2. Przez M oznaczymy zbiór wszystkich matek, zaś przez D zbiór wszystkich dzieci. Przyporządkowanie „jest matką dziecka”, które matce $m \in M$ przypisuje jej dziecko $d \in D$, nie jest funkcją (wszak jedna matka może mieć więcej niż jedno dziecko). Natomiast przyporządkowanie „jest dzieckiem matki”, które dziecku $d \in D$ przypisuje jego matkę $m \in M$ jest funkcją.

Fakt, że elementowi x jest przypisany element y , zapisujemy krótko $y = f(x)$, co odczytujemy „ y jest wartością funkcji f dla argumentu x ”. Zamiast pisać „funkcja f ze zbioru X w zbiór Y ”, piszemy krótko $f: X \rightarrow Y$. Przypomnijmy, że zbiór X nazywamy *zbiorem argumentów* lub *dziedziną funkcji f* i oznaczamy często D_f . Natomiast zbiór Y to *przeciwdziedzina funkcji f* .

Definicja 3.1.3. Zbiór wartości ZW_f funkcji f to podzbiór przeciwdziedziny (tzn. $ZW_f \subseteq Y$), określony warunkiem

$$ZW_f = \{y \in Y : (\exists x \in X) y = f(x)\}.$$

Różnica między przeciwdziedziną a zbiorem wartości funkcji widoczna jest na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1. Zbiór wartości funkcji

W dotychczasowej edukacji matematycznej wykres funkcji określano jako jeden ze sposobów przedstawienia funkcji liczbowej, jako „graficzną interpretację funkcji”. Poniżej podamy ścisłą definicję wykresu funkcji.

Definicja 3.1.4. Wykresem graph_f funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$, określony warunkiem

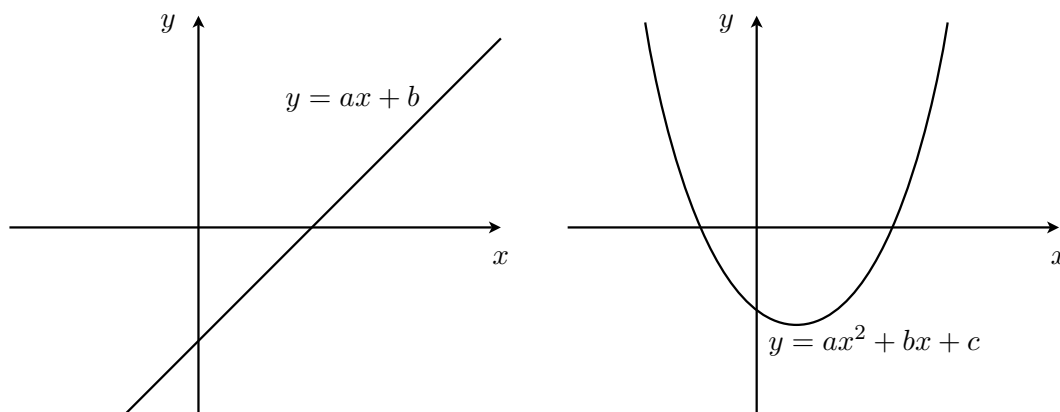
$$\text{graph}_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times Y : x \in X \wedge y = f(x)\}.$$

W przypadku funkcji f rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej, tzn. funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subseteq \mathbb{R}$, wykres graph_f jest podzbiorem \mathbb{R}^2 , czyli płaszczyzny.

Przykład 3.1.5. Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest prosta na płaszczyźnie. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, jest parabola. Przykładowe wykresy funkcji liniowej i funkcji kwadratowej przedstawiono na rysunku 3.2.

3.2. Podstawowe własności funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej

Do podstawowych własności funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej, tzn. funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subseteq \mathbb{R}$, należą ograniczoność, monotoniczność, różnowartościowość, parzystość oraz okresowość. Poniżej podamy ścisłe definicje tych własności. Zaczniemy jednakże od zdefiniowania równości funkcji oraz funkcji „na”.



Rysunek 3.2. Wykres funkcji liniowej i wykres funkcji kwadratowej

Definicja 3.2.1. Funkcja f jest tożsamościowo równa funkcji g , jeśli dziedziny tych funkcji są takie same oraz dla każdego argumentu wartości tych funkcji są równe, tzn. jeśli

$$D_f = D_g = D \quad \wedge \quad (\forall x \in D)f(x) = g(x).$$

Tożsamościową równość funkcji oznaczamy $f \equiv g$.

Definicja 3.2.2. Mówimy, że funkcja f jest funkcją ze zbioru X na zbiór Y , co oznaczamy $f: X \xrightarrow{\text{na}} Y$, jeśli zbiór wartości ZW_f tej funkcji jest równy jej przeciwdziedzinie Y , tzn.

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x).$$

Przykład 3.2.3. Rozważmy funkcję liczbową $f(x) = x^5 + \sqrt{3}$. Oczywiście jej przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, tzn. $Y = \mathbb{R}$. Jak łatwo sprawdzić, dowolna liczba rzeczywista jest wartością funkcji f , tzn. $ZW_f = \mathbb{R}$. Zatem funkcja $f(x) = x^5 + \sqrt{3}$ jest funkcją „na”.

Definicja 3.2.4. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją ograniczoną z góry, jeśli

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X) f(x) \leq M.$$

Przykład 3.2.5. Rozważmy funkcję $f(x) = \sin x$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$. Ponieważ

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \sin x \leq 1,$$

to dana funkcja jest ograniczona z góry, na przykład przez liczbę 1.

Definicja 3.2.6. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją ograniczoną z dołu, jeśli

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in X) f(x) \geq m.$$

Przykład 3.2.7. Rozważmy funkcję $f(x) = \sin x$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$. Oczywiście

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \sin x \geq -1.$$

Zatem dana funkcja jest ograniczona z dołu, np. przez liczbę -1 .

Definicja 3.2.8. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją *ograniczoną*, jeśli jest ograniczona zarówno z góry, jak i z dołu.

Przykład 3.2.9. Ponieważ

$$(\forall x \in \mathbb{R}) -1 \leq \sin x \leq 1,$$

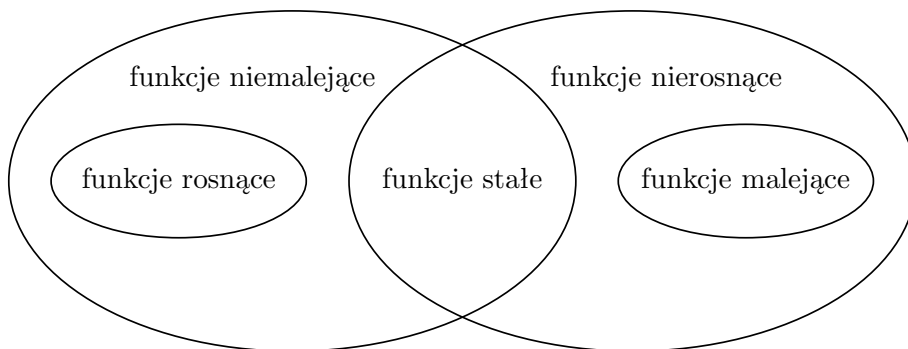
to funkcja $f(x) = \sin x$ jest funkcją ograniczoną.

Definicja 3.2.10. Niech dana będzie funkcja $f: X \rightarrow Y$ oraz niech $A \subseteq X$ będzie przedziałem. Funkcja f jest na przedziale A

- *rosnąca*, jeśli $(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$,
- *niemalejąca*, jeśli $(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$,
- *malejąca*, jeśli $(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$,
- *nierosnąca*, jeśli $(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$,
- *stała*, jeśli $(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)]$.

Definicja 3.2.11. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest *monotoniczna* na przedziale $A \subseteq X$, jeśli jest na tym przedziale rosnąca lub niemalejąca, lub malejąca, lub nierosnąca, lub stała.

Relacje pomiędzy zbiorami poszczególnych typów funkcji monotonicznych przedstawione są na rysunku 3.3.



Rysunek 3.3. Funkcje monotoniczne

Przykład 3.2.12. Uzasadnijmy, że funkcja $f(x) = 3x - 4$ jest monotoniczna na zbiorze liczb rzeczywistych, tzn. na przedziale A dla $A = \mathbb{R}$.

Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz $x_1 < x_2$. Otrzymujemy kolejno:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & < & x_2, & / \cdot 3, \\ 3x_1 & < & 3x_2, & / - 4, \\ 3x_1 - 4 & < & 3x_2 - 4, \\ f(x_1) & < & f(x_2). \end{array}$$

Pokazaliśmy, że

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)],$$

czyli że $f(x) = 3x - 4$ jest funkcją rosnącą na \mathbb{R} .

Definicja 3.2.13. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy funkcją *różnowartościową na przedziale* $A \subseteq X$, jeśli

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Czasami wygodniej jest stosować warunek równoważny

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy funkcją *różnowartościową*, jeśli jest różnowartościowa na całej swej dziedzinie.

Przykład 3.2.14. Uzasadnijmy, że funkcja $f(x) = x^3$ jest różnowartościowa na zbiorze \mathbb{R} . Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz $x_1 \neq x_2$. Wówczas

$$x_1 - x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \neq 0.$$

W konsekwencji

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2) \neq 0.$$

Pokazaliśmy, że

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Zatem funkcja $f(x) = x^3$ jest różnowartościowa na zbiorze \mathbb{R} .

Definicja 3.2.15. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją *parzystą*, jeśli

$$(\forall x \in X) [-x \in X \wedge f(-x) = f(x)].$$

Przykład 3.2.16. Uzasadnijmy, że funkcja $f(x) = \cos 2x + \cos x$ jest funkcją parzystą. Oczywiście $X = D_f = \mathbb{R}$. Ponadto $(\forall x \in \mathbb{R})(-x \in \mathbb{R})$. Korzystając z wzoru trygonometrycznego $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, otrzymujemy, że

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\cos(-x) = \cos x \wedge \cos(-2x) = \cos 2x).$$

Pokazaliśmy zatem, że

$$(\forall x \in \mathbb{R}) [-x \in \mathbb{R} \wedge \cos(-2x) + \cos(-x) = \cos 2x + \cos x],$$

czyli że dana funkcja jest parzysta.

Definicja 3.2.17. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją *nieparzystą*, jeśli

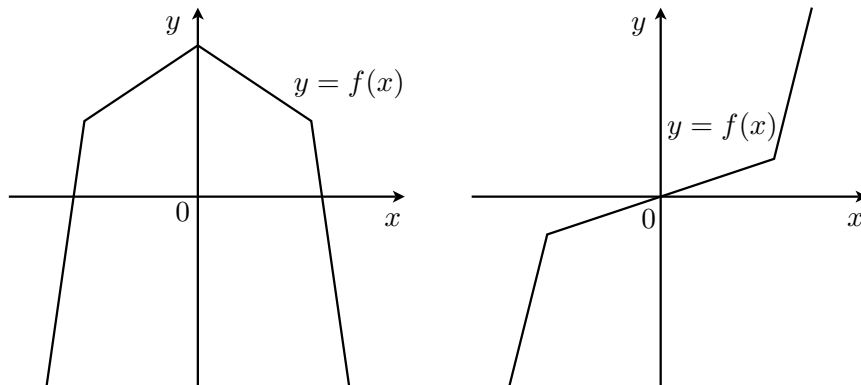
$$(\forall x \in X) [-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)].$$

Przykład 3.2.18. Przykładem funkcji nieparzystej jest funkcja $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Graficznie własność parzystości funkcji można interpretować następująco.

Fakt 3.2.19. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy . Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem środka O układu współrzędnych.

Przykładowe wykresy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej przedstawiono na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4. Wykres funkcji parzystej i wykres funkcji nieparzystej

Definicja 3.2.20. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy funkcją *okresową*, jeśli

$$(\exists T > 0)(\forall x \in X) [(x + T) \in X \wedge f(x + T) = f(x)].$$

Najmniejszą liczbę dodatnią T o wyżej wymienionych własnościach nazywamy *okresem* funkcji f .

Przykład 3.2.21. Klasycznymi przykładami funkcji okresowych są funkcje trygonometryczne. Funkcje $f(x) = \sin x$ oraz $f(x) = \cos x$ mają okres $T = 2\pi$, podczas gdy okres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ oraz $f(x) = \operatorname{ctg} x$ wynosi $T = \pi$.

Z okresowości funkcji trygonometrycznych wynikają m.in. następujące wzory, z których będziemy korzystali niejednokrotnie w dalszej części książki:

Twierdzenie 3.2.22. Dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są następujące równości:

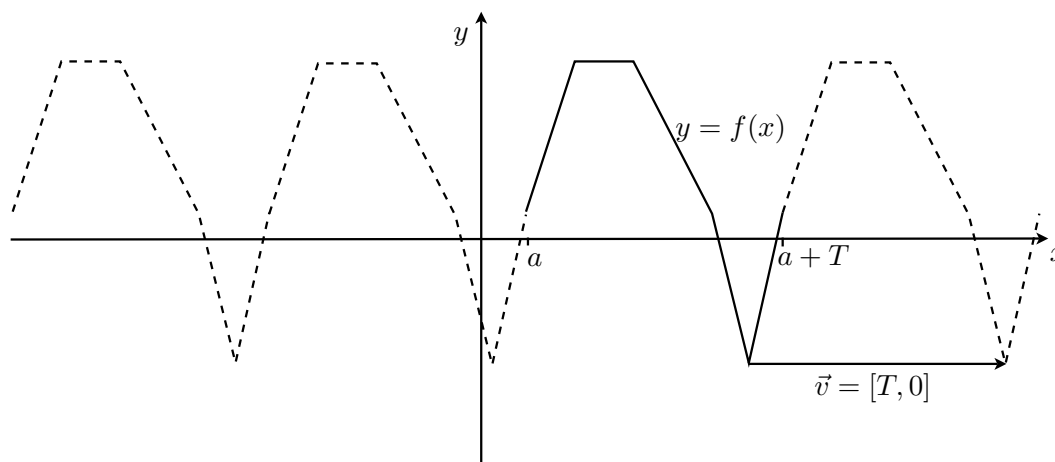
$$(3.2.1) \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$(3.2.2) \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$(3.2.3) \quad \operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \text{dla } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbb{Z},$$

$$(3.2.4) \quad \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x \quad \text{dla } x \neq n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbb{Z}.$$

Własność okresowości funkcji można sformułować w zdaniu „Wykres funkcji okresowej jest powtarzalny”. Oznacza to, że dla funkcji okresowej o okresie T wystarczy narysować fragment jej wykresu dla argumentów z przedziału długości T , np. z przedziału $(a, a + T)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Następnie ten fragment należy przesunąć równolegle o wektor $\vec{v} = [T, 0]$, potem znów o ten sam wektor itd. Z drugiej strony narysowany fragment wykresu należy sukcesywnie przesuwać o wektor $-\vec{v} = [-T, 0]$, aż do otrzymania wykresu funkcji f na całej jej dziedzinie. Przykładowy wykres funkcji okresowej pokazano na rysunku 3.5.



Rysunek 3.5. Wykres funkcji okresowej

Przykład 3.2.23. Uzasadnimy, że funkcja $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ jest funkcją okresową o okresie $T = 2\pi$. Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$. Musimy pokazać, że

$$(\forall x \in \mathbb{R}) [(x + 2\pi) \in \mathbb{R} \wedge f(x + 2\pi) = f(x)].$$

Oczywiście prawdą jest, że

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x + 2\pi) \in \mathbb{R}.$$

Wyznamy $f(x + 2\pi)$. Korzystając z równości (3.2.1), dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= 2 \sin(x + 2\pi) + \sin 2(x + 2\pi) = \\ &= 2 \sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = \\ &= 2 \sin x + \sin 2x = f(x). \end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że dana funkcja jest okresowa.

3.3. Działania na funkcjach

W edukacji matematycznej z zakresu gimnazjum i szkoły ponadgimnazjalnej pojawiły się podstawowe działania na funkcjach – działania arytmetyczne. Na początek przypomnijmy definicje wyników tych działań.

Definicja 3.3.1 (działania arytmetyczne na funkcjach).

Jeśli funkcje f oraz g mają wspólną dziedzinę $D_f = D_g = D$, to sumę, różnicę, iloczyn oraz iloraz tych funkcji definiujemy następująco:

— suma funkcji

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \quad \text{gdzie } x \in D,$$

— różnica funkcji

$$(f - g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - g(x), \quad \text{gdzie } x \in D,$$

— iloczyn funkcji

$$(f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x), \quad \text{gdzie } x \in D,$$

— iloraz funkcji

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{gdzie } x \in D \setminus \{x : g(x) = 0\}.$$

Oprócz działań arytmetycznych na funkcjach można wykonywać działania składania funkcji oraz odwracania funkcji. Poniżej wprowadzimy definicje tych działań.

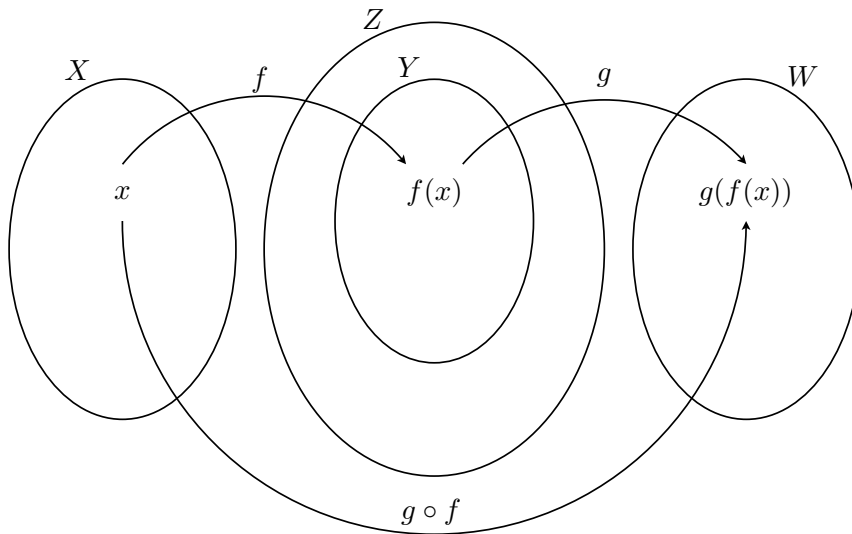
Definicja 3.3.2 (złożenie funkcji).

Niech będą dane dwie funkcje $f: X \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow W$, gdzie $Y \subseteq Z$. *Złożeniem funkcji f oraz g nazywamy funkcję $g \circ f: X \rightarrow W$, określoną wzorem*

$$(3.3.1) \quad (g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

Złożenie funkcji nazywamy inaczej *superpozycją funkcji*. Zapis $g \circ f$ czytamy „ g złożone z f ”. Funkcję f nazywamy *funkcją wewnętrzną*, zaś funkcję g – *funkcją zewnętrzną* złożenia $g \circ f$.

Pojęcie złożenia funkcji jest zilustrowane na rysunku 3.6.



Rysunek 3.6. Złożenie funkcji

Przykład 3.3.3. Rozważmy funkcje $f(x) = \sin x$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$, oraz $g(x) = x^2$, gdzie $D_g = \mathbb{R}$. Dokonajmy złożenie $g \circ f$ oraz $f \circ g$. Korzystając ze wzoru (3.3.1), otrzymujemy

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2, \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2. \end{aligned}$$

Przy okazji zauważmy, że

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \mathbb{R}, & ZW_{g \circ f} &= [0, 1], \\ D_{f \circ g} &= \mathbb{R}, & ZW_{f \circ g} &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Definicja 3.3.4 (funkcja odwrotna).

Niech $f: X \rightarrow Y$ będzie funkcją „na” i różnowartościową na przedziale $A \subseteq X$. *Funkcją odwrotną* do funkcji f na przedziale A nazywamy funkcję f^{-1} , określoną wzorem

$$(3.3.2) \quad f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \quad \text{dla dowolnego } x \in A.$$

Przykład 3.3.5. Znajdźmy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = x^3$. Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$. Na początek zauważmy, że funkcja f jest różnowartościowa na całym zbiorze \mathbb{R} (patrz przykład 3.2.14). Ponadto funkcja f jest funkcją „na”, gdyż dowolna liczba rzeczywista jest sześcianem jakiejś innej liczby rzeczywistej, tzn. $ZW_f = Y = \mathbb{R}$. Zatem istnieje funkcja odwrotna f^{-1} . Korzystając ze wzoru (3.3.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = x &\iff y = x^3, & / \sqrt[3]{}, \\ & \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}, \\ & \sqrt[3]{y} = x. \end{aligned}$$

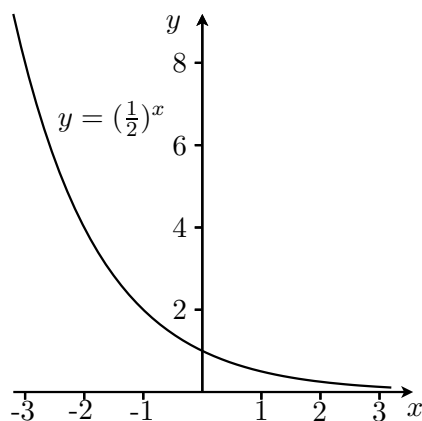
Zatem funkcja odwrotna do $f(x) = x^3$ jest zadana wzorem $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, gdzie $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

3.4. Funkcja wykładnicza

W tym podrozdziale przedstawimy definicję i podstawowe własności funkcji wykładniczej. Ponadto podamy ogólny schemat rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych.

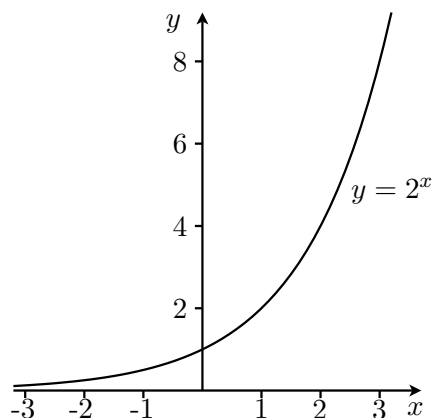
Definicja 3.4.1. Funkcją wykładniczą o podstawie a , gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, nazywamy funkcję postaci $f(x) = a^x$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzeczywistych, tzn. $D_f = \mathbb{R}$.

Przykład 3.4.2. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ przedstawiono na rysunku 3.7.



Rysunek 3.7. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Przykład 3.4.3. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$ przedstawiono na rysunku 3.8.

Rysunek 3.8. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$

Wykres funkcji wykładniczej nazywamy *krzywą wykładniczą*.

Fakt 3.4.4. Krzywa wykładnicza $y = a^x$, gdzie $a \in (0, 1)$, ma kształt zbliżony do krzywej wykładniczej $y = (\frac{1}{2})^x$. Krzywa wykładnicza $y = a^x$, gdzie $a > 1$, ma kształt zbliżony do krzywej wykładniczej $y = 2^x$.

Z wykresów możemy odczytać własności funkcji wykładniczej.

Twierdzenie 3.4.5 (własności funkcji wykładniczej).

Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, ma następujące własności:

- $D_f = \mathbb{R}$,
- $ZW_f = (0, +\infty)$,
- jest funkcją ograniczoną z dołu,
- dla $a \in (0, 1)$ jest funkcją malejącą na całej dziedzinie,
- dla $a > 1$ jest funkcją rosnącą na całej dziedzinie,
- jest funkcją różnowartościową,
- jej wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, 1)$.

Z własności funkcji wykładniczej wynika ogólny schemat rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych.

Twierdzenie 3.4.6. Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz dowolnych funkcji f i g prawdziwe są następujące równoważności:

$$(3.4.1) \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x),$$

$$(3.4.2) \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x) \quad \text{gdy } a \in (0, 1),$$

$$(3.4.3) \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x) \quad \text{gdy } a > 1.$$

Przykład 3.4.7. Rozwiążemy równanie wykładnicze $2^x = 8$. Korzystając ze wzoru (3.4.1), mamy

$$\begin{aligned} 2^x &= 8, \\ 2^x &= 2^3, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Przykład 3.4.8. Rozwiążmy nierówność wykładniczą $3^x < 27$. Korzystając ze wzoru (3.4.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} 3^x &< 27, \\ 3^x &< 3^3, \\ x &< 3. \end{aligned}$$

Przykład 3.4.9. Rozwiążmy nierówność wykładniczą $(\frac{1}{3})^x > \frac{1}{9}$. Korzystając ze wzoru (3.4.2), dostajemy

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^x &> \frac{1}{9}, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x &> \left(\frac{1}{3}\right)^2, \\ x &< 2. \end{aligned}$$

Więcej przykładów rozwiązań równań i nierówności wykładniczych można znaleźć np. w [23].

3.5. Funkcja logarytmiczna

W tym podrozdziale przedstawimy definicję i podstawowe własności funkcji logarytmicznej. Ponadto podamy ogólny schemat rozwiązywania równań i nierówności logarytmicznych. Najpierw przedstawimy jednak pojęcie logarytmu, wprowadzone do matematyki w XVII wieku przez matematyka szkockiego Johna Nepera oraz matematyka angielskiego Henry'ego Briggsa.

Z różnowartościowości funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $a > 0$, $a \neq 1$ wynika, że dla dowolnej liczby dodatniej b istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista c , taka że $a^c = b$.

Definicja 3.5.1. *Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a , gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę a , żeby otrzymać liczbę b , tzn.*

$$(3.5.1) \quad \log_a b = c \iff a^c = b, \quad \text{gdzie } a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Przykład 3.5.2. $\log_2 8 = 3$, $\log_5 1 = 0$, $\log_7 7 = 1$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$.

Logarytmy przy podstawie 10 nazywamy *logarytmami dziesiętnymi*. Logarytmy dziesiętne odgrywają istotną rolę w obliczeniach inżynierskich.

Twierdzenie 3.5.3 (własności logarytmów).

Niech $a > 0$, $a \neq 1$, $b, c > 0$. Wówczas

$$(3.5.2) \quad \log_a 1 = 0,$$

$$(3.5.3) \quad \log_a a = 1,$$

$$(3.5.4) \quad a^{\log_a b} = b,$$

$$(3.5.5) \quad \log_a b^c = c \cdot \log_a b,$$

$$(3.5.6) \quad \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c,$$

$$(3.5.7) \quad \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c,$$

$$(3.5.8) \quad \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}, \quad \text{gdzie } b > 0, b \neq 1.$$

Wzór (3.5.8) zwany jest *wzorem na zamianę podstawy logarytmu*. Własności logarytmów pozwoliły skonstruować suwak logarytmiczny – przyrząd, który ułatwiał wykonywanie obliczeń przybliżonych i który był w powszechnym użyciu aż do lat sześćdziesiątych XX wieku.

Znając pojęcie logarytmu, możemy rozwiązywać nieco trudniejsze równania i nierówności wykładnicze.

Przykład 3.5.4. Rozwiążmy nierówność wykładniczą $3^x < 14$. Korzystając z własności (3.5.4) oraz ze wzoru (3.4.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} 3^x &< 14, \\ 3^x &< 3^{\log_3 14}, \\ x &< \log_3 14. \end{aligned}$$

Znając pojęcie logarytmu, możemy także zdefiniować funkcję logarytmiczną.

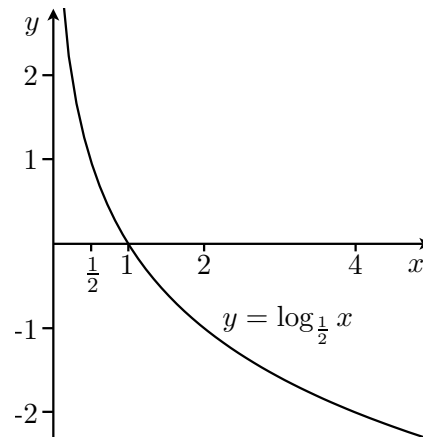
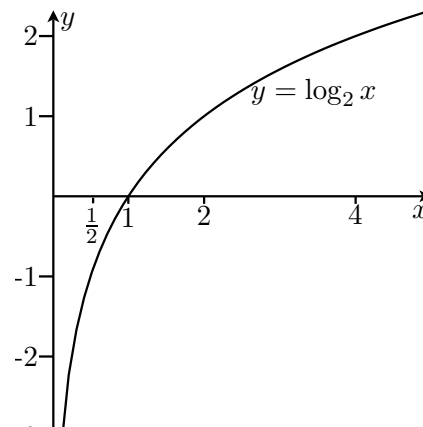
Definicja 3.5.5. Funkcją logarytmiczną o podstawie a , gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, nazywamy funkcję $f(x) = \log_a x$, gdzie $x > 0$.

Przykład 3.5.6. Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ przedstawiono na rysunku 3.9.

Przykład 3.5.7. Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_2 x$ przedstawiono na rysunku 3.10.

Wykres funkcji logarytmicznej nazywamy *krzywą logarytmiczną*.

Fakt 3.5.8. Krzywa logarytmiczna $y = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1)$, ma kształt zbliżony do krzywej logarytmicznej $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Krzywa logarytmiczna $y = \log_a x$, gdzie $a > 1$, ma kształt zbliżony do krzywej logarytmicznej $y = \log_2 x$.

Rysunek 3.9. Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ Rysunek 3.10. Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_2 x$

Z wykresów możemy odczytać własności funkcji logarytmicznej.

Twierdzenie 3.5.9 (własności funkcji logarytmicznej).

Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, ma następujące własności:

- $D_f = (0, +\infty)$,
- $ZW_f = \mathbb{R}$,
- dla $a \in (0, 1)$ jest funkcją malejącą na całej dziedzinie,
- dla $a > 1$ jest funkcją rosnącą na całej dziedzinie,
- jest funkcją różnowartościową,
- jej wykres przecina oś Ox w punkcie $(1, 0)$.

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna są ściśle ze sobą związane.

Twierdzenie 3.5.10. Niech $a > 0$, $a \neq 1$. Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$, gdzie $x > 0$, jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$.

Z własności funkcji logarytmicznej wynika ogólny schemat rozwiązywania równań i nierówności logarytmicznych.

Twierdzenie 3.5.11. Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz dowolnych funkcji dodatnich f i g prawdziwe są następujące równoważności

$$(3.5.9) \quad \log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x),$$

$$(3.5.10) \quad \log_a f(x) < \log_a g(x) \iff f(x) > g(x) \quad \text{gdy } a \in (0, 1),$$

$$(3.5.11) \quad \log_a f(x) < \log_a g(x) \iff f(x) < g(x) \quad \text{gdy } a > 1.$$

Przykład 3.5.12. Rozwiążmy nierówność logarytmiczną

$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 - \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 3.$$

Na początek musimy założyć, że $x^2 > 0 \wedge x > 0$. Założenie to jest równoważne założeniu $x > 0$. Korzystając z własności (3.5.7) oraz wzoru (3.5.10), otrzymujemy kolejno

$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 - \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 3,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{x} \right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 3,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 3,$$

$$x \leq 3.$$

Uwzględniając założenie, otrzymujemy rozwiązanie danej nierówności: $x \in (0, 3]$.

Więcej przykładów rozwiązań równań i nierówności logarytmicznych można znaleźć np. w [23].

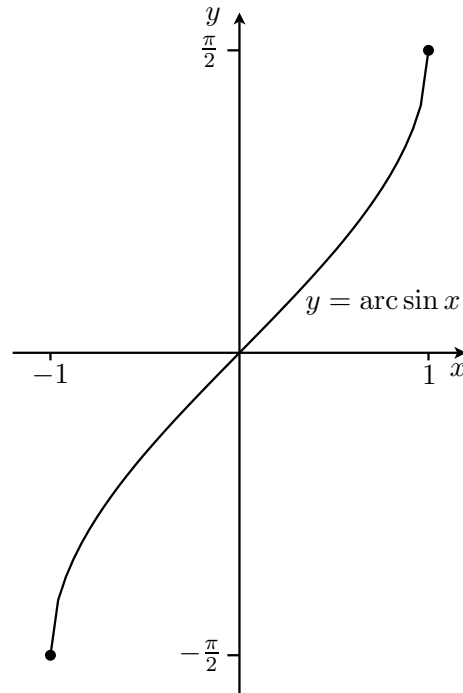
3.6. Funkcje cyklometryczne

W bieżącym podrozdziale omówimy klasę funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych, zwaną klasą *funkcji cyklometrycznych* lub inaczej *funkcji kołowych*. Osoby, które nie znają funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, odsyłamy np. do [3] lub [23].

Rozważmy funkcję $f(x) = \sin x$ z dziedziną ograniczoną do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oraz z przeciwdziedziną ograniczoną do przedziału $[-1, 1]$, to znaczy funkcję $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. Łatwo zauważyć, że taka funkcja jest funkcją różnowartościową i funkcją „na”. Istnieje zatem funkcja odwrotna do tej funkcji.

Definicja 3.6.1. Funkcją *arkus sinus* nazywamy funkcję odwrotną do funkcji $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, tzn. funkcję $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ określoną warunkiem

$$\arcsin x = y \iff x = \sin y \quad \text{dla } x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rysunek 3.11. Wykres funkcji $f(x) = \arcsin x$

Wykres funkcji $f(x) = \arcsin x$ przedstawiono na rysunku 3.11.

Podobnie definiujemy funkcje odwrotne do pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Definicja 3.6.2. Funkcją *arkus cosinus* nazywamy funkcję odwrotną do funkcji $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, tzn. funkcję $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ określoną warunkiem

$$\arccos x = y \iff x = \cos y \quad \text{dla } x \in [-1, 1], y \in [0, \pi].$$

Definicja 3.6.3. Funkcją *arkus tangens* nazywamy funkcję odwrotną do funkcji $\operatorname{tg}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, tzn. funkcję $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ określoną warunkiem

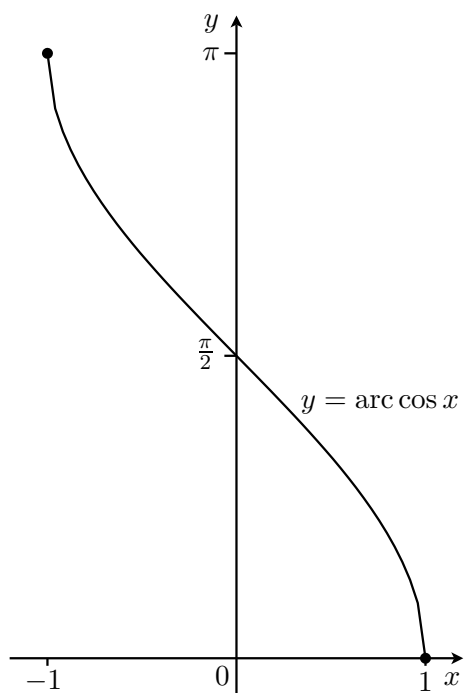
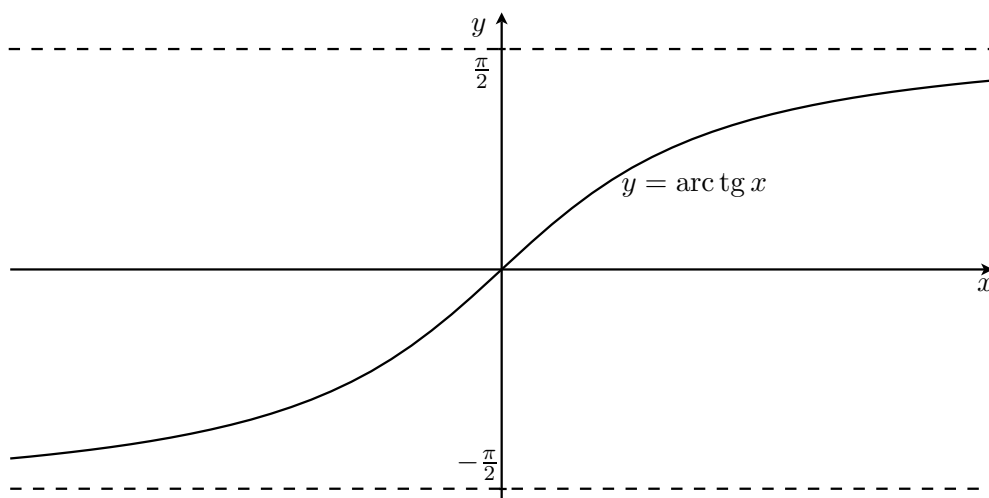
$$\operatorname{arctg} x = y \iff x = \operatorname{tg} y \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Definicja 3.6.4. Funkcją *arkus cotangens* nazywamy funkcję odwrotną do funkcji $\operatorname{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, tzn. funkcję $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ określoną warunkiem

$$\operatorname{arctg} x = y \iff x = \operatorname{ctg} y \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, y \in (0, \pi).$$

Wykresy funkcji arkus cosinus, arkus tangens oraz arkus cotangens przedstawione są odpowiednio na rysunkach 3.12, 3.13 i 3.14.

Podobnie jak między funkcjami trygonometrycznymi, tak i między funkcjami cyklometrycznymi zachodzą pewne związki. Niektóre z nich przedstawiamy poniżej.

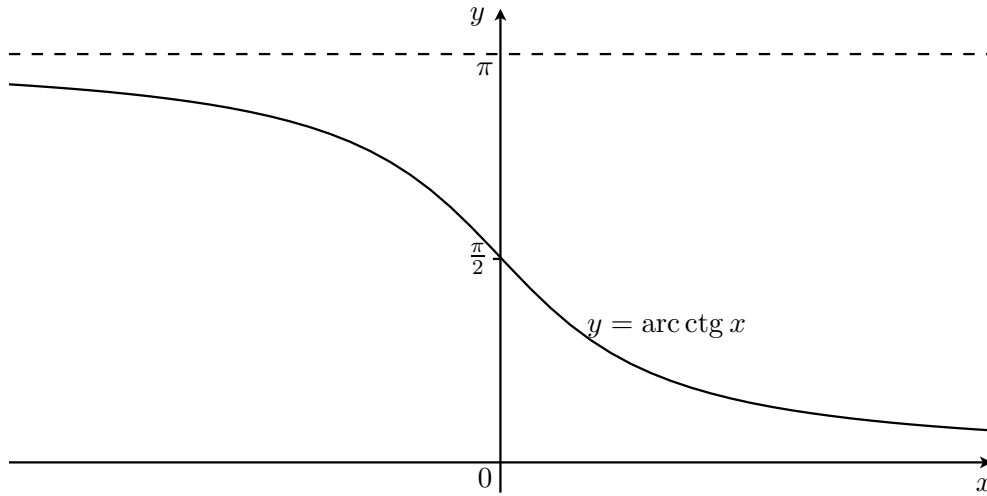
Rysunek 3.12. Wykres funkcji $f(x) = \arccos x$ Rysunek 3.13. Wykres funkcji $f(x) = \arctan x$

Twierdzenie 3.6.5. Dla dowolnego $x \in [-1, 1]$ prawdziwe są następujące tożsamości

$$(3.6.1) \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$(3.6.2) \quad \arcsin x = -\arcsin(-x),$$

$$(3.6.3) \quad \arccos x = \pi - \arccos(-x).$$

Rysunek 3.14. Wykres funkcji $f(x) = \text{arc ctg } x$

Twierdzenie 3.6.6. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące tożsamości

$$(3.6.4) \quad \text{arc tg } x + \text{arc ctg } x = \frac{\pi}{2},$$

$$(3.6.5) \quad \text{arc tg } x = -\text{arc tg}(-x).$$

Ponadto jeżeli $y \in \mathbb{R}$ oraz $xy < 1$, to

$$(3.6.6) \quad \text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \text{arc tg } \frac{x + y}{1 - xy}.$$

3.7. Funkcje elementarne

Definicja 3.7.1. Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje następujących typów:

- funkcja stała, tzn. funkcja postaci

$$f(x) = c, \quad \text{gdzie } c \text{ to ustalona liczba rzeczywista,}$$
- funkcja potęgowa, tzn. funkcja postaci

$$f(x) = x^\alpha, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R} \text{ jest ustalone,}$$
- funkcja wykładnicza, tzn. funkcja postaci

$$f(x) = a^x, \quad \text{gdzie } a > 0, a \neq 1,$$
- funkcja logarytmiczna, tzn. funkcja postaci

$$f(x) = \log_a x, \quad \text{gdzie } a > 0, a \neq 1, x > 0,$$
- funkcje trygonometryczne, tzn. funkcje

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x,$$

$$f(x) = \text{tg } x, \quad f(x) = \text{ctg } x,$$
- funkcje cyklometryczne, tzn. funkcje

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x, & f(x) &= \arccos x, \\ f(x) &= \operatorname{arctg} x, & f(x) &= \operatorname{arccotg} x. \end{aligned}$$

Definicja 3.7.2. *Funkcjami elementarnymi* nazywamy te funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą działań arytmetycznych oraz operacji składania funkcji, stosowanych skończoną ilość razy.

Przykład 3.7.3. *Funkcje wielomianowe*, czyli funkcje postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dziedzina każdej funkcji wielomianowej jest zbiór \mathbb{R} . Liczbę n nazywamy *stopniem wielomianu* W .

Przykład 3.7.4. *Funkcje wymierne*, czyli funkcje postaci

$$f(x) = \frac{W(x)}{V(x)},$$

gdzie $W(x), V(x)$ są funkcjami wielomianowymi oraz $V \neq 0$. Jeśli stopień wielomianu W jest mniejszy niż stopień wielomianu V , to funkcję wymierną f nazywamy *właściwą*.

Przykład 3.7.5. Funkcja „wartość bezwzględna”, tzn. funkcja $|x| = \sqrt{x^2}$, określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

W dalszych częściach książki skoncentrujemy swą uwagę właśnie na funkcjach elementarnych.

Definicja 3.7.6. *Funkcją nieelementarną* nazywamy każdą funkcję, która nie jest elementarna.

Przykładem funkcji nieelementarnej jest funkcja „część całkowita”. Funkcja ta ma zastosowanie m.in. w teorii granic ciągów (patrz przykłady 4.4.2 oraz 4.4.3). Zainteresowanych innymi przykładami funkcji nieelementarnych odsyłamy np. do [4] lub [7].

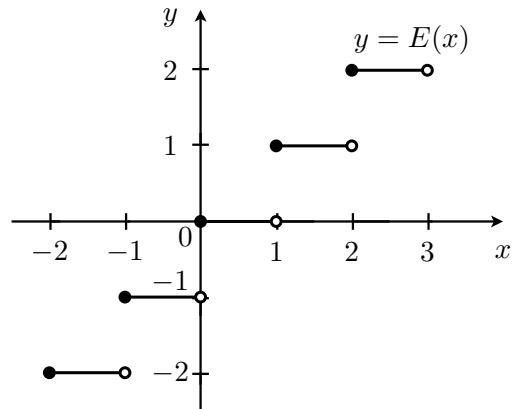
Definicja 3.7.7. *Częścią całkowitą* $E(x)$ z liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od x , tzn. spełniającą warunek

$$E(x) \leq x < E(x) + 1, \quad E(x) \in \mathbb{Z}.$$

Oznaczenie E pochodzi od pierwszej litery francuskiego słowa *entier*, oznaczającego *całość*.

Przykład 3.7.8. $E(10) = 10$, $E(\frac{1}{2}) = 0$, $E(2\frac{3}{4}) = 2$, $E(-1\frac{1}{3}) = -2$.

Definicja 3.7.9. *Funkcją „część całkowita”* nazywamy funkcję $x \mapsto E(x)$, czyli funkcję, która liczbie rzeczywistej x przypisuje jej część całkowitą $E(x)$.



Rysunek 3.15. Wykres funkcji „część całkowita”

Fragment wykresu funkcji „część całkowita” przedstawiono na rysunku 3.15. Jak widać na wykresie, funkcja ta jest przykładem funkcji przedziałami stałej.

Warto wspomnieć, że w różnych językach programowania występują dwie funkcje, przypisujące danej liczbie rzeczywistej „bliską” jej liczbę całkowitą. Funkcja `ceil` zwraca najmniejszą liczbę całkowitą, większą lub równą podanej liczbie, natomiast funkcja `floor` zwraca największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą podanej liczbie. Oczywiście funkcja `floor` jest tożsama z funkcją „część całkowita”.

Rozdział 4

Ciągi liczbowe i ich granice

Pojęcie ciągu liczbowego pojawiło się już na lekcjach matematyki w szkole ponadgimnazjalnej. Zgodnie ze standardami wymagań egzaminacyjnych uczeń zdający egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym umie rozwiązywać zadania, w których: wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym, bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny czy geometryczny, stosuje wzór na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym. Pojęcie granicy ciągu i podstawowe metody jej obliczania wystąpiły jedynie na zajęciach z matematyki na poziomie rozszerzonym. W tym rozdziale przedstawimy podstawy teorii ciągów liczbowych i ich granic w sposób szerszy niż w szkole ponadgimnazjalnej.

4.1. Podstawowe definicje

Jak zwykle rozpoczniemy od przedstawienia podstawowych definicji.

Definicja 4.1.1. *Ciągiem liczbowym* nazywamy funkcję rzeczywistą określoną na całym zbiorze liczb naturalnych lub na dowolnym podzbiórze tego zbioru, tzn. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{N}$.

Jeśli ciąg jest określony na skończonym podzbiórze zbioru liczb naturalnych, to nazywamy go *ciągami skończonym*; w przeciwnym przypadku mówimy o *ciągu nieskończonym*. Zwyczajowo wartość ciągu dla liczby naturalnej n nazywamy *n -tym wyrazem* tego ciągu i oznaczamy a_n (zamiast: $a(n)$).

Oznaczenia: (a_n) – ciąg,
 $\{a_n\}$ – zbiór wyrazów ciągu.

Ciąg można określić za pomocą trzech różnych sposobów:

1. opisowo – np. (a_n) – ciąg kolejnych naturalnych potęg liczby 2,
2. wzorem – np. $a_n = 2^n$,
3. rekurencyjnie – tzn. podając pierwszy wyraz ciągu oraz zależność między wyrazami $(n + 1)$ -szym oraz n -tym, np.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 && \text{– pierwszy wyraz ciągu,} \\ a_{n+1} &= 2 \cdot a_n && \text{– } (n + 1)\text{-szy wyraz ciągu wyrażony przez wyraz } n\text{-ty.} \end{aligned}$$

4.2. Podstawowe własności ciągów liczbowych

Jedną z podstawowych własności ciągów liczbowych – monotoniczność – przedstawiono już w szkole ponadgimnazjalnej. Jednakże wtedy definicje typów ciągów monotonicznych były wyłącznie opisowe. W tym podrozdziale przedstawimy symboliczny zapis stosownych definicji oraz wprowadzimy pojęcia ciągu ograniczonego i ciągu różnowartościowego.

Monotoniczność ciągu

Definicja 4.2.1. Ciąg (a_n) jest ciągiem

- *rosnącym*, jeśli

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_{n+1} > a_n,$$
- *niemalejącym*, jeśli

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_{n+1} \geq a_n,$$
- *malejącym*, jeśli

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_{n+1} < a_n,$$
- *nierosnącym*, jeśli

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_{n+1} \leq a_n,$$
- *stałym*, jeśli

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} = a_n.$$

Definicja 4.2.2. Ciąg (a_n) jest *ciągami monotonicznymi*, jeśli jest ciągiem rosnącym lub niemalejącym, lub malejącym, lub nierosnącym, lub stałym.

Uwaga 4.2.3. Ciąg monotoniczny, zdefiniowany za pomocą definicji 4.2.1, jest czasami zwany *ciągami monotonicznymi od pewnego miejsca*.

Przykład 4.2.4. Zbadajmy monotoniczność ciągu $a_n = n^2 + 3n - 2$.

Najpierw wyznaczmy $(n + 1)$ -szy wyraz tego ciągu.

$$a_{n+1} = (n + 1)^2 + 3(n + 1) - 2 = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - 2 = n^2 + 5n + 2.$$

Teraz obliczmy różnicę $a_{n+1} - a_n$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 5n + 2 - (n^2 + 3n - 2) = n^2 + 5n + 2 - n^2 - 3n + 2 = 2n + 4 > 0.$$

Otrzymaliśmy zatem, że

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} - a_n > 0,$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} > a_n.$$

Zatem ciąg $a_n = n^2 + 3n - 2$ jest ciągiem rosnącym.

Ograniczoność ciągu

Definicja 4.2.5. Ciąg (a_n) jest *ograniczony z dołu*, jeśli

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq m.$$

Przykład 4.2.6. Ciąg $a_n = \cos \frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, np. przez -1 , gdyż

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \cos \frac{1}{n} \geq -1.$$

Definicja 4.2.7. Ciąg (a_n) jest *ograniczony z góry*, jeśli

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq M.$$

Przykład 4.2.8. Ciąg $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest ograniczony z góry, np. przez 3 , ponieważ

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3.$$

Definicja 4.2.9. Ciąg (a_n) nazywamy *ciągami ograniczonym*, jeśli jest on ograniczony zarówno z dołu, jak i z góry.

Przykład 4.2.10. Ciąg $a_n = \sin \frac{1}{n}$ jest ciągiem ograniczonym, gdyż z ograniczoności funkcji sinus (patrz przykład 3.2.9) mamy

$$(\forall n \in \mathbb{N}) -1 \leq \sin \frac{1}{n} \leq 1.$$

Różnowartościowość ciągu

Definicja 4.2.11. Ciąg (a_n) jest *różnowartościowy*, jeśli

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m) a_n \neq a_m.$$

Przykład 4.2.12. Rozważmy ciąg $a_n = 2^n$.

Ponieważ $a_m = 2^m$ oraz $2^n \neq 2^m$ dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ takich, że $n \neq m$, to otrzymujemy

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m) a_n \neq a_m.$$

Zatem ciąg $a_n = 2^n$ jest ciągiem różnowartościowym.

4.3. Kapitalizacja prosta i kapitalizacja złożona

Przedstawione w szkole ponadgimnazjalnej elementarne przykłady ciągów, tzn. ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, mają swoje zastosowanie w zagadnieniu oprocentowania lokat pieniężnych. Ciąg arytmetyczny jest stosowany przy kapitalizacji prostej, zaś ciąg geometryczny – przy kapitalizacji złożonej.

Kapitalizacja prosta, czyli inaczej oprocentowanie proste, polega na tym, że odsetki nie podlegają oprocentowaniu, tzn. dochód z kapitału początkowego w danym okresie czasu nie jest uwzględniany przy obliczaniu dochodu w następnych okresach. Innymi słowy: dochód oblicza się tylko od kapitału początkowego.

Fakt 4.3.1. Jeśli przez K_0 oznaczymy kapitał początkowy, zaś przez r – stopę procentową, tj. wielkość, która mówi nam ile procent danej kwoty wynosi oprocentowanie na pewien okres czasu, to kapitał końcowy K po n okresach oszczędzania wyraża się wzorem

$$(4.3.1) \quad K = K_0 + (r \cdot K_0)n = K_0(1 + rn).$$

Przykład 4.3.2. Chcemy ulokować 1000 zł na 5 lat przy kapitalizacji prostej z roczną stopą procentową 10%. Korzystając ze wzoru (4.3.1) oraz następujących danych

$$K_0 = 1000, \quad r = 10\%, \quad n = 5,$$

wyznaczamy kapitał końcowy K .

$$K = 1000(1 + 10\% \cdot 5) = 1000 \left(1 + \frac{10}{100} \cdot 5\right) = 1000 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1000 \cdot \frac{3}{2} = 1500.$$

Kapitał końcowy po 5 latach wyniesie zatem 1500 zł.

Kapitalizacja złożona, czyli inaczej oprocentowanie składane, polega na tym, że odsetki podlegają kapitalizacji (oprocentowaniu), tzn. dochód w danym okresie czasu oblicza się od kapitału początkowego, powiększonego o odsetki z poprzednich okresów.

Fakt 4.3.3. Niech K_0 oznacza kapitał początkowy, k – ilość podokresów (okresów podstawowych) kapitalizacji odsetek w ciągu roku ($k \in \mathbb{N}$), r_k – stopę nominalną, tj. roczną stopę procentową przy k -krotnej kapitalizacji w ciągu roku, natomiast i_k – stopę proporcjonalną do okresu podstawowego, tzn. $i_k = \frac{r_k}{k}$. Wówczas kapitał końcowy po n latach oszczędzania będzie wynosił

$$(4.3.2) \quad K = K_0 \left(1 + \frac{r_k}{k}\right)^{kn} = K_0(1 + i_k)^{kn}.$$

Przykład 4.3.4. Lokujemy 1000 zł na 5 lat przy półrocznej kapitalizacji odsetek z nominalną stopą procentową 10%. Korzystając ze wzoru (4.3.2) oraz danych

$$K_0 = 1000, \quad k = 2, \quad n = 5, \quad r_k = 10\%, \quad i_k = 5\%,$$

obliczamy kapitał końcowy K .

$$K = 1000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{2 \cdot 5} = 1000 \cdot \left(\frac{105}{100}\right)^{10} \approx 1000 \cdot 1,6289 = 1628,9.$$

Zatem kapitał końcowy po 5 latach wyniesie około 1628,9 zł.

Kolejny rodzaj kapitalizacji odsetek – kapitalizacja ciągła – oraz ściśle kryterium porównywania lokat pieniężnych zostaną przedstawione w podrozdziałach 4.6 oraz 4.7.

4.4. Granica ciągu

Jeżeli mamy dany nieskończony ciąg (a_n) i pominiemy w nim skończoną liczbę początkowych wyrazów, to o pozostałych wyrazach mówimy, że stanowią *prawie wszystkie wyrazy ciągu* (a_n) . Teraz możemy wprowadzić definicję granicy ciągu liczbowego.

Definicja 4.4.1. Ciąg (a_n) ma *granice właściwą* g , gdzie $g \in \mathbb{R}$, jeżeli dla każdego dodatniego, dowolnie małego ε prawie wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Fakt ten zapisujemy symbolicznie

$$\lim a_n = g \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) |a_n - g| < \varepsilon.$$

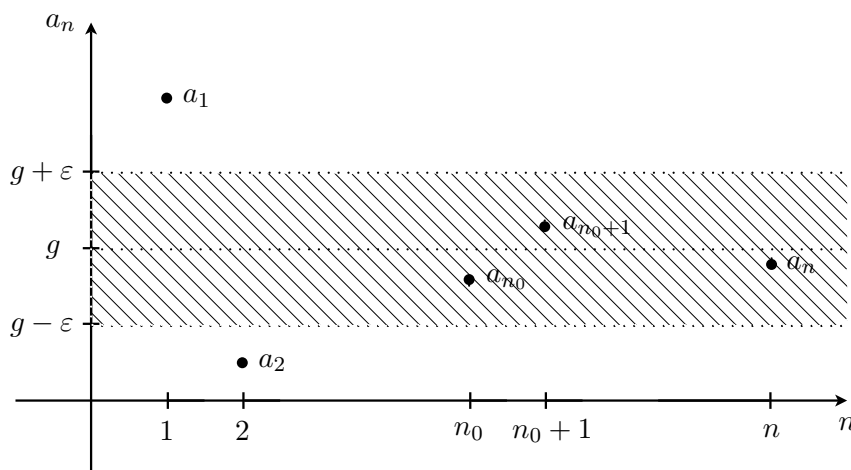
Mówimy także, że *ciąg* (a_n) *dąży do* g , co zapisujemy $a_n \rightarrow g$.

Wyrażenie \lim jest skrótem łacińskiego słowa *limes*, czyli *granica*.

Przyglądnijmy się nierówności z wartością bezwzględną, która występuje w definicji 4.4.1.

$$\begin{aligned} |a_n - g| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon, \\ &\iff -\varepsilon + g < a_n < \varepsilon + g, \\ &\iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem fakt, że $\lim a_n = g$, oznacza, że dla dowolnego danego $\varepsilon > 0$ wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , począwszy od wyrazu a_{n_0} , znajdują się w przedziale $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Sytuację taką można zilustrować najlepiej na wykresie ciągu (a_n) . Geometryczna interpretacja granicy właściwej ciągu jest przedstawiona na rysunku 4.1.



Rysunek 4.1. Ilustracja pojęcia granicy właściwej ciągu

Aby uzasadnić z definicji, że dany ciąg (a_n) ma granicę właściwą równą g , dla podanego (dowolnego) $\varepsilon > 0$ trzeba znaleźć liczbę naturalną n_0 , która jest najmniejszym naturalnym rozwiązaniem nierówności $|a_n - g| < \varepsilon$.

Przykład 4.4.2. Pokażemy z definicji, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = 1 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left| \frac{n+3}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Najpierw rozwiążemy nierówność

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+3}{n+1} - 1 \right| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} \right| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{n+3 - (n+1)}{n+1} \right| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{n+3 - n - 1}{n+1} \right| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{2}{n+1} \right| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{2}{n+1} > 0$, to otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n+1} &< \varepsilon, & / \cdot (n+1) &> 0, \\ 2 &< \varepsilon(n+1), \\ 2 &< \varepsilon \cdot n + \varepsilon, \\ -\varepsilon \cdot n &< \varepsilon - 2, & / : (-\varepsilon) &< 0, \\ n &> -1 + \frac{2}{\varepsilon}, \\ n &> \frac{2}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Definiujemy $n_0 = E\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right) + 1$. Tak określone n_0 jest liczbą całkowitą. Aby $n_0 \in \mathbb{N}$, trzeba założyć, że

$$\frac{2}{\varepsilon} - 1 \geq 0 \iff 2 \geq \varepsilon \iff 0 < \varepsilon \leq 2.$$

Dla $\varepsilon > 2$ mamy $\frac{2}{\varepsilon} - 1 < 0$ i wówczas możemy przyjąć $n_0 = 1$.

Znaleźliśmy zatem $n_0 \in \mathbb{N}$, które jest najmniejszym naturalnym rozwiązaniem nierówności $\left| \frac{n+3}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

$$n_0 = \begin{cases} E\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right) + 1 & \text{dla } 0 < \varepsilon \leq 2, \\ 1 & \text{dla } \varepsilon > 2. \end{cases}$$

Przykład 4.4.3. Pokażemy z definicji, że $\lim \frac{1}{n^3} = 0$:

$$\lim \frac{1}{n^3} = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left| \frac{1}{n^3} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Dla danego (dowolnego) $\varepsilon > 0$ trzeba znaleźć liczbę naturalną n_0 , która jest najmniejszym naturalnym rozwiązaniem nierówności $\left| \frac{1}{n^3} - 0 \right| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{1}{n^3} - 0 \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{1}{n^3} \right| < \varepsilon.$$

Ponieważ $\frac{1}{n^3} > 0$, więc otrzymujemy nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} < \varepsilon, & \quad / \cdot n^3 > 0, \\ 1 < \varepsilon \cdot n^3, & \quad / : \varepsilon > 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} < n^3, & \quad / \sqrt[3]{}, \\ \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}} < n, & \\ n > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}. & \end{aligned}$$

Definiujemy $n_0 = E\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}\right) + 1$. Wiemy, że $n_0 \in \mathbb{Z}$. Aby $n_0 \in \mathbb{N}$ trzeba założyć, że

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}} \geq 0 \iff \frac{1}{\varepsilon} \geq 0 \quad / \cdot \varepsilon > 0 \iff 1 \geq 0 \text{ (tożsamość)}.$$

Zatem aby $n_0 \in \mathbb{N}$, wystarczy przyjąć $\varepsilon > 0$.

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy zatem $n_0 = E\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}\right) + 1, n_0 \in \mathbb{N}$. Tak zdefiniowane n_0 jest najmniejszym naturalnym rozwiązaniem nierówności $\left| \frac{1}{n^3} - 0 \right| < \varepsilon$.

Poza granicą właściwą (skończoną) ciąg może posiadać granicę niewłaściwą (nieskończoną).

Definicja 4.4.4. Ciąg (a_n) ma *granicę niewłaściwą* $+\infty$, jeżeli dla każdego dodatniego, dowolnie dużego ε prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są niemniejsze od ε . Fakt ten zapisujemy symbolicznie

$$\lim a_n = +\infty \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_n \geq \varepsilon.$$

Równoważnie mówimy, że *ciąg* (a_n) *dąży do* $+\infty$, co zapisujemy $a_n \rightarrow +\infty$.

Definicja 4.4.5. Ciąg (a_n) ma *granice niewłaściwą* $-\infty$, jeżeli dla każdego dodatniego, dowolnie dużego ε prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są niewiększe od $-\varepsilon$. Fakt ten można zapisać symbolicznie

$$\lim a_n = -\infty \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_n \leq -\varepsilon.$$

Równoważnie mówimy, że *ciąg (a_n) dąży do $-\infty$* , co zapisujemy $a_n \rightarrow -\infty$.

Przykład 4.4.6. $\lim \sqrt{n} = \infty$; $\lim (-n^2 + n - 1) = -\infty$.

Definicja 4.4.7. Ciąg, który ma granicę właściwą lub granicę niewłaściwą, nazywamy *ciągami zbieżnymi*.

Twierdzenie 4.4.8. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Wiele ciągów nie posiada w ogóle granicy.

Definicja 4.4.9. Ciąg, który nie posiada ani granicy właściwej, ani granicy niewłaściwej, nazywamy *ciągami rozbieżnymi*.

Przykład 4.4.10. Ciąg naprzemienny $a_n = (-1)^n$ jest rozbieżny.

4.5. Twierdzenia o granicach ciągów

W niniejszym podrozdziale zapoznamy się z paroma technikami wyznaczania granic ciągów. Zaczniemy od twierdzeń najprostszych.

Twierdzenie 4.5.1. $\lim \frac{a}{n^k} = 0$, gdzie $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 4.5.2. $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, gdzie $a > 0$.

Twierdzenie 4.5.3. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Twierdzenie 4.5.4 (o granicach ciągu geometrycznego).

Niech dany będzie ciąg geometryczny $a_n = q^n, q \neq 0$ (tzn. $a_1 = q$). Wówczas

$$\lim q^n = \begin{cases} \infty & \text{dla } q > 1, \\ 1 & \text{dla } q = 1, \\ 0 & \text{dla } |q| < 1, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } q \leq -1. \end{cases}$$

Przykład 4.5.5.

- $\lim 2^n = \infty$,
- $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$,
- $\lim (-1)^n$ – nie istnieje.

Bardzo szeroki zakres zastosowań mają poniższe twierdzenia pozwalające wyznaczać granice ciągów będących wynikami działań arytmetycznych na ciągach o już znanych granicach.

Twierdzenie 4.5.6 (o arytmetyce granic właściwych ciągów).

Jeżeli $\lim a_n = g$ oraz $\lim b_n = h$, gdzie $g, h \in \mathbb{R}$, to

$$(4.5.1) \quad \lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = g + h,$$

$$(4.5.2) \quad \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = g - h,$$

$$(4.5.3) \quad \lim (a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n) = g \cdot h,$$

$$(4.5.4) \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{g}{h}, \text{ gdzie } b_n \neq 0, h \neq 0,$$

$$(4.5.5) \quad \lim a_n^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n} = g^h, \text{ o ile obie strony równości mają sens.}$$

Przykład 4.5.7. Obliczmy granicę $\lim \frac{n^2+2n+1}{3n^3-n+2}$.

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^3 - n + 2} &= \lim \frac{n^3 \left(\frac{n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{3n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3} + \frac{2}{n^3} \right)} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} \stackrel{(4.5.4)}{=} \\ &\stackrel{(4.5.4)}{=} \frac{\lim \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim \left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \right)} \stackrel{(4.5.1)}{\stackrel{(4.5.2)}{=}} \frac{\lim \frac{1}{n} + \lim \frac{2}{n^2} + \lim \frac{1}{n^3}}{\lim 3 - \lim \frac{1}{n^2} + \lim \frac{2}{n^3}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{0}{3} = 0. \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.5.8 (o arytmetyce granic niewłaściwych ciągów).

Jeżeli $\lim a_n = g$, gdzie $g \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = +\infty$, $\lim c_n = -\infty$ oraz $\lim d_n = 0$, to

$$(4.5.6) \quad \lim (a_n \pm b_n) = \pm\infty,$$

$$(4.5.7) \quad \lim (a_n \pm c_n) = \mp\infty,$$

$$(4.5.8) \quad \lim (b_n - c_n) = +\infty,$$

$$(4.5.9) \quad \lim (c_n - b_n) = -\infty,$$

$$(4.5.10) \quad \lim (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} -\infty & \text{jeśli } g < 0, \\ +\infty & \text{jeśli } g > 0, \end{cases}$$

$$(4.5.11) \quad \lim (a_n \cdot c_n) = \begin{cases} +\infty & \text{jeśli } g < 0, \\ -\infty & \text{jeśli } g > 0, \end{cases}$$

$$(4.5.12) \quad \lim (b_n \cdot c_n) = -\infty,$$

$$(4.5.13) \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n}{c_n} = 0,$$

$$(4.5.14) \quad \lim \frac{a_n}{d_n} = \begin{cases} -\infty & \text{jeśli } g > 0, d_n < 0, \\ +\infty & \text{jeśli } g > 0, d_n > 0, \\ +\infty & \text{jeśli } g < 0, d_n < 0, \\ -\infty & \text{jeśli } g < 0, d_n > 0, \end{cases}$$

$$(4.5.15) \quad \lim a_n^{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 0 \leq g < 1, \\ +\infty & \text{jeśli } g > 1, \end{cases}$$

$$(4.5.16) \quad \lim a_n^{c_n} = \begin{cases} +\infty & \text{jeśli } 0 < g < 1, \\ 0 & \text{jeśli } g > 1, \end{cases}$$

$$(4.5.17) \quad \lim b_n^{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } g < 0, \\ +\infty & \text{jeśli } g > 0, \end{cases}$$

$$(4.5.18) \quad \lim b_n^{c_n} = 0,$$

$$(4.5.19) \quad \lim b_n^{-c_n} = +\infty.$$

Przypadki nie uwzględnione w twierdzeniach 4.5.6 i 4.5.8 o arytmetyce granic ciągów to przypadki tzw. symboli (wyrażeń) nieoznaczonych.

Definicja 4.5.9. Symbolami nieoznaczonymi nazywamy następujące wyrażenia

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0} \right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right], \quad [0^0], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0].$$

Wartość symboli nieoznaczonych nie jest ściśle określona, lecz zależy od postaci ciągów je tworzących. Sytuację taką rozważmy na przykładzie symbolu $\left[\frac{0}{0} \right]$. Weźmy dwa ciągi $(x_n), (y_n)$ spełniające warunki $\lim x_n = 0, \lim y_n = 0$.

$$x_n = \frac{1}{n^2}, \quad y_n = \frac{1}{n^3}; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{1}{n^2} \cdot n^3 = \lim n = \infty.$$

$$x_n = \frac{a}{n^2}, \quad a > 0, \quad y_n = \frac{1}{n^2}; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{a \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim a = a > 0.$$

$$x_n = \frac{1}{n^3}, \quad y_n = \frac{1}{n^2}; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{n^3} \cdot n^2 = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad y_n = \frac{1}{n^2}; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\frac{(-1)^n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot n^2 = \lim (-1)^n.$$

Jak wiemy z przykładu 4.4.10, granica $\lim (-1)^n$ nie istnieje.

Zatem granica ilorazu $\frac{x_n}{y_n}$ może przyjmować różne wartości lub wręcz nie istnieć. Dlatego też symbol $\left[\frac{0}{0} \right]$ jest symbolem nieoznaczonym.

Przykład 4.5.10. Obliczmy granicę $\lim (\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 3})$, która jest przykładem symbolu nieoznaczonego $[\infty - \infty]$.

Korzystając z twierdzenia 4.5.8 o arytmetyce granic niewłaściwych ciągów, mamy

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 3}) &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 3})(\sqrt{n^2 + 3} + \sqrt{n^2 - 3})}{\sqrt{n^2 + 3} + \sqrt{n^2 - 3}} = \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 3})^2 - (\sqrt{n^2 - 3})^2}{\sqrt{n^2 + 3} + \sqrt{n^2 - 3}} = \\ &= \lim \frac{n^2 + 3 - (n^2 - 3)}{\sqrt{n^2 + 3} + \sqrt{n^2 - 3}} = \\ &= \lim \frac{6}{\sqrt{n^2 + 3} + \sqrt{n^2 - 3}} \stackrel{(4.5.8)}{\stackrel{(4.5.13)}}{=} 0. \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.5.11 (o trzech ciągach).

Dane są trzy ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) , takie że:

- i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_n \leq b_n \leq c_n$,
- ii) $\lim a_n = \lim c_n = g$, gdzie $g \in \mathbb{R}$.

Wówczas $\lim b_n = g$.

Przykład 4.5.12. Obliczmy granicę $\lim \sqrt[n]{3^n + 5^n}$.

Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{array}{l} 0 \leq 3^n, \quad / + 5^n, \quad 3^n \leq 5^n, \quad / + 5^n, \\ 5^n \leq 3^n + 5^n, \quad / \sqrt{}, \quad \text{oraz} \quad 3^n + 5^n \leq 5^n + 5^n, \quad / \sqrt{}, \\ \sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \quad \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n}. \end{array}$$

W konsekwencji

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n}.$$

Wyznamy granice ciągów najmniejszego i największego.

$$\lim \sqrt[n]{5^n} = \lim 5 = 5,$$

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[n]{5^n + 5^n} &= \lim \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{5^n} = \left(\lim \sqrt[n]{2} \right) \cdot \left(\lim \sqrt[n]{5^n} \right) \stackrel{\text{z tw. 4.5.2}}{=} \\ &= 1 \cdot 5 = 5. \end{aligned}$$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5$.

Twierdzenie 4.5.13 (o dwóch ciągach).

Dane są dwa ciągi (a_n) , (b_n) , takie że:

- i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_n \leq b_n$,
- ii) $\lim a_n = +\infty$.

Wówczas $\lim b_n = +\infty$.

Jeśli ciągi (a_n) , (b_n) spełniają warunek i) oraz warunek

- ii)' $\lim b_n = -\infty$,

to wówczas $\lim a_n = -\infty$.

Przykład 4.5.14. Obliczmy granicę $\lim (2 + (-1)^n) \cdot n$.

Przyпускаjąc, że ciąg ten ma granicę niewłaściwą $+\infty$. Oznaczmy zatem $b_n = (2 + (-1)^n) \cdot n$. Musimy znaleźć odpowiedni ciąg (a_n) .

$$\begin{aligned} -1 &\leq (-1)^n \leq 1, & / + 2 & \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \\ 1 &\leq 2 + (-1)^n \leq 3, & / \cdot n > 0, \\ \text{i)} \quad n &\leq (2 + (-1)^n) \cdot n \leq 3n. \end{aligned}$$

Przyjmijmy zatem, że $a_n = n$.

$$\text{ii)} \quad \lim a_n = \lim n = +\infty.$$

Zatem z twierdzenia o dwóch ciągach $\lim (2 + (-1)^n) \cdot n = +\infty$.

Poniżej prezentujemy twierdzenie, które umożliwi nam zdefiniowanie jednej z najważniejszych stałych w matematyce.

Twierdzenie 4.5.15 (o ciągu monotonicznym i ograniczonym).

Jeżeli ciąg (a_n) jest niemalejący i ograniczony z góry, to ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej. Podobnie, jeżeli ciąg (a_n) jest nierosnący i ograniczony z dołu, to ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej.

Przykład 4.5.16. Rozpatrujemy ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Ciąg (e_n) jest ograniczony z góry np. przez 3 (patrz przykład 4.2.8). Ponadto ciąg ten jest ciągiem niemalejącym, tzn.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Zatem z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym ciąg (e_n) posiada granicę właściwą.

Definicja 4.5.17. Liczbą Eulera nazywamy stałą $e \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Liczbę e wprowadził w 1736 r. matematyk, fizyk i astronom szwajcarski Leonhard Euler (1707–1783).

Fakt 4.5.18. Liczba Eulera jest liczbą niewymierną, $e \approx 2,7182818285$.

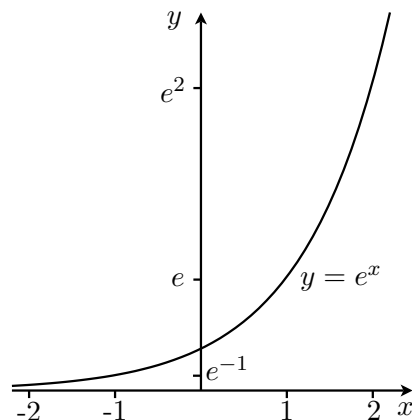
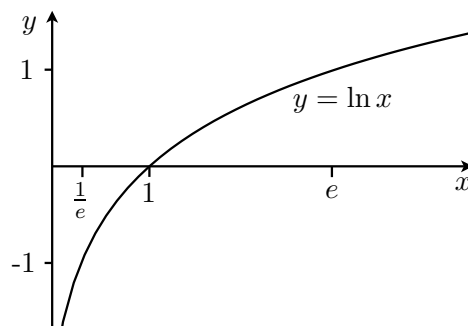
Definicja 4.5.19. Funkcję wykładniczą o podstawie e nazywamy *funkcją eksponencjalną* lub krótko *eksponensem*.

$$\exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x.$$

Wykres funkcji eksponencjalnej przedstawiono na rysunku 4.2.

Definicja 4.5.20. Logarytm przy podstawie e nazywamy *logarytmem naturalnym*. Funkcję logarytmiczną o podstawie e nazywamy *funkcją logarytm naturalny*.

$$\ln x \stackrel{\text{def}}{=} \log_e x, \quad \text{gdzie } x > 0.$$

Rysunek 4.2. Wykres funkcji $f(x) = e^x$ Rysunek 4.3. Wykres funkcji $f(x) = \ln x$

Wykres funkcji logarytm naturalny przedstawiono na rysunku 4.3.

Przypomnijmy, że z twierdzenia 3.5.10 wynika, iż funkcja eksponencjalna oraz funkcja logarytm naturalny są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

Twierdzenie 4.5.21 (o ciągach z granicą e).

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Jeżeli ciąg (a_n) spełnia jeden z warunków:

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$ oraz $\lim a_n = +\infty$ lub

b) $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n < 0$ oraz $\lim a_n = -\infty$,

to wówczas

$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^\alpha.$$

Przykład 4.5.22. Wyznaczmy granicę $\lim \left(\frac{2n+4}{2n+2}\right)^{2n}$.

$$\lim \left(\frac{2n+4}{2n+2}\right)^{2n} = \lim \left(\frac{2(n+2)}{2(n+1)}\right)^{2n} = \lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{2n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right)^{2n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1 \cdot \frac{2n}{n+1}} = \\
&= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^2.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z twierdzenia 4.5.21 o ciągach z granicą e , z faktu, że

$$\lim \frac{2n}{n+1} = \lim \frac{2n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

oraz ze wzoru (4.5.5).

4.6. Kapitalizacja ciągła

Znając pojęcie liczby Eulera, możemy omówić kolejny rodzaj oprocentowania lokat – oprocentowanie ciągłe.

Załóżmy, że przy oprocentowaniu złożonym (patrz fakt 4.3.3) prowadzimy kapitalizację odsetek w sposób nieustanny, „ciągły”, tzn. ilość k kapitalizacji odsetek w ciągu roku rośnie w nieskończoność (tzn. $k \rightarrow \infty$). Oznaczmy przez K_k ciąg kapitałów końcowych przy kapitalizacji złożonej z k -krotną kapitalizacją odsetek w ciągu roku. Wówczas kapitał końcowy K przy kapitalizacji ciągłej jest granicą ciągu K_k .

$$K = \lim K_k = \lim K_0 \cdot \left(1 + \frac{r_c}{k} \right)^{k \cdot n} = K_0 \cdot \left[\lim \left(1 + \frac{r_c}{k} \right)^k \right]^n = K_0 \cdot e^{r_c \cdot n}.$$

Zatem otrzymaliśmy wzór na kapitał końcowy po n latach oszczędzania przy kapitalizacji ciągłej.

Fakt 4.6.1. Niech K_0 oznacza kapitał początkowy, zaś r_c – roczną stopę procentową przy ciągłej kapitalizacji odsetek. Wówczas kapitał końcowy po n latach oszczędzania będzie wynosił

$$(4.6.1) \quad K = K_0 \cdot e^{r_c \cdot n}.$$

Przykład 4.6.2. Lokujemy 1000 zł na 5 lat przy ciągłej kapitalizacji odsetek z roczną stopą procentową 10%. Korzystając ze wzoru (4.6.1) oraz danych

$$K_0 = 1000, \quad r_c = 10\%, \quad n = 5,$$

obliczamy kapitał końcowy K .

$$K = 1000 \cdot e^{\frac{10}{100} \cdot 5} = 1000 \cdot e^{\frac{1}{2}} = 1000 \cdot \sqrt{e} \approx 1648,72$$

Zatem kapitał końcowy po 5 latach wyniesie około 1648,72 zł.

4.7. Efektywna stopa procentowa

Efektywna stopa procentowa stanowi najlepsze kryterium porównania różnych wariantów oprocentowania złożonego lub ciągłego. Im większa efektywna stopa procentowa, tym korzystniejszy dla nas wariant oprocentowania.

Definicja 4.7.1. *Efektywna stopa procentowa* r_{ef} to roczna stopa procentowa, równoważna stopie i_k proporcjonalnej do okresu podstawowego (patrz fakt 4.3.3).

Fakt 4.7.2. Dla kapitalizacji złożonej, gdzie k – ilość kapitalizacji w ciągu roku, r_k – nominalna stopa procentowa, efektywna stopa procentowa wyraża się wzorem

$$(4.7.1) \quad r_{\text{ef}} = (1 + i_k)^k - 1 = \left(1 + \frac{r_k}{k}\right)^k - 1.$$

Natomiast dla kapitalizacji ciągłej, gdzie r_c – roczna stopa procentowa, mamy

$$(4.7.2) \quad r_{\text{ef}} = e^{r_c} - 1.$$

Przykład 4.7.3. Porównajmy efektywne stopy procentowe przy kapitalizacji złożonej z półroczną kapitalizacją odsetek i nominalną stopą procentową 10% oraz przy kapitalizacji ciągłej z roczną stopą procentową 10%.

Dla kapitalizacji złożonej mamy $r_k = 10\%$, $k = 2$. Zatem z wzoru (4.7.1) otrzymujemy

$$r_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{1}{20}\right)^2 - 1 = \left(\frac{21}{20}\right)^2 - 1 = 0,1025.$$

Dla kapitalizacji ciągłej jest $r_c = 10\%$. Zatem z wzoru (4.7.2) dostajemy

$$r_{\text{ef}} = e^{\frac{10}{100}} - 1 = e^{\frac{1}{10}} - 1 = \sqrt[10]{e} - 1 \approx 0,105171.$$

Jak widać powyżej efektywna stopa procentowa jest większa dla kapitalizacji ciągłej, a zatem w tym przykładzie korzystniejsze jest oprocentowanie ciągłe.

Dla przypomnienia:

W przykładach 4.3.3 oraz 4.6.2 mieliśmy przy kapitale początkowym $K_0 = 1000$ zł po 5 latach oszczędzania kapitały końcowe równe odpowiednio $K \approx 1628,9$ zł przy kapitalizacji złożonej oraz $K \approx 1648,72$ zł przy kapitalizacji ciągłej.

Rozdział 5

Szeregi liczbowe

Teoria granic ciągów liczbowych prowadzi m.in. do pojęcia szeregu liczbowego. W tym rozdziale przedstawimy podstawy teorii szeregów liczbowych. W szczególności podamy twierdzenia pochodzące od matematyków Jeana Le Rond D'Alemberta (1717–1783), Augustina Louisa Cauchy'ego (1789–1857) oraz Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716).

5.1. Podstawowe definicje i przykłady

Definicja 5.1.1. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczbowym. Granicę ciągu (S_n) n -tych sum częściowych

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

nazywamy *szeregiem liczbowym* i oznaczamy symbolem $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Liczbę a_k nazywa-

my k -tym wyrazem szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Definicja 5.1.2. Szereg liczbowy jest *zbieżny*, gdy istnieje granica właściwa $\lim S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$, natomiast *rozbieżny* – w przeciwnym wypadku.

Przykład 5.1.3 (szereg geometryczny).

Szereg geometryczny to szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, gdzie q to ustalona liczba rzeczywista ($q \in \mathbb{R}$). Szereg geometryczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Przykład 5.1.4 (szereg harmoniczny).

Szereg harmoniczny rzędu α to szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, gdzie α to ustalona liczba rzeczywista ($\alpha \in \mathbb{R}$). Szereg harmoniczny rzędu α jest zbieżny dla $\alpha > 1$, rozbieżny dla $\alpha \leq 1$.

Przykład 5.1.5 (liczba Eulera jako szereg).

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

W dalszej części rozdziału przedstawimy warunki, które muszą być spełnione, aby dany szereg był zbieżny.

Twierdzenie 5.1.6 (warunek konieczny zbieżności szeregu).

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim a_n = 0$.

Przykład 5.1.7. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ jest rozbieżny, ponieważ $\lim 2^n = +\infty$.

5.2. Kryteria zbieżności szeregu

Kryteria zbieżności szeregu to inaczej warunki dostateczne (wystarczające) na to, aby dany szereg był zbieżny. Poniżej przedstawimy trzy takie kryteria.

Twierdzenie 5.2.1 (kryterium ilorazowe d'Alemberta).

Jeżeli $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie $g \in \mathbb{R}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$, natomiast rozbieżny, gdy $g > 1$.

Twierdzenie 5.2.2 (kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego).

Jeżeli $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = g$, gdzie $g \in \mathbb{R}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$, natomiast rozbieżny, gdy $g > 1$.

Fakt 5.2.3. Dla $g = 1$ powyższe kryteria nie orzekają o zbieżności szeregu.

Przykład 5.2.4. Dla ustalonego $x > 0$ zbadajmy zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Zastosujmy kryterium d'Alemberta:

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \lim \frac{x^{n+1}}{(n!)(n+1)} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim \frac{x}{n+1} = 0 < 1.$$

Zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla dowolnego $x > 0$.

Powyższy przykład można łatwo uogólnić do następującego faktu.

Fakt 5.2.5. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla dowolnej ustalonej liczby rzeczywistej x . Ponadto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Przykład 5.2.6. Zbadajmy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^c}{c^n}$ dla ustalonego $c > 1$.

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left|\frac{n^c}{c^n}\right|} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^c}{c^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^c}}{\sqrt[n]{c^n}} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^c}{c} = \frac{1^c}{c} = \frac{1}{c} < 1.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^c}{c^n}$, gdzie $c > 1$, jest szeregiem zbieżnym.

Twierdzenie 5.2.7 (kryterium Leibniza).

Jeśli ciąg (a_n) , gdzie $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest ciągiem nierosnącym oraz $\lim a_n = 0$, to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.

Przykład 5.2.8. Ponieważ ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest nierosnącym ciągiem liczb dodatnich oraz $\lim \frac{1}{n} = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny, podczas gdy szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Warte wspomnienia jest również kryterium całkowe, które mówi że zbieżność danego szeregu liczbowego jest równoważna zbieżności pewnej całki niewłaściwej pierwszego rodzaju. Podstawy teorii całek niewłaściwych zostaną przedstawione w podrozdziale 10.7. Osoby zainteresowane teorią szeregów liczbowych odsyłamy do literatury, np. do [4], [9] lub [20].

Rozdział 6

Granice funkcji

W niniejszym rozdziale będziemy rozpatrywać jedynie funkcje rzeczywiste jednej zmiennej rzeczywistej, tzn. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Omówimy pojęcie „ciągowej” granicy funkcji pochodzące od matematyka niemieckiego Heinricha Eduarda Heinego (1821–1881). W tym momencie warto wspomnieć o istnieniu równoważnej, „otoczeniowej” definicji granicy funkcji, autorstwa Augustina Louisa Cauchy’ego (1789–1857). Zainteresowanych podejściem Cauchy’ego odsyłamy np. do [4], [7] lub [20].

6.1. Podstawowe definicje

Aby zdefiniować pojęcie granicy funkcji, potrzebne nam będzie najpierw pojęcie sąsiedztwa.

Definicja 6.1.1. *Sąsiedztwem:*

— punktu x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, nazywamy zbiór

$$S(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \text{ dla pewnego } \delta > 0,$$

— lewostronnym punktu x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, nazywamy zbiór

$$S(x_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0) \text{ dla pewnego } \delta > 0,$$

— prawostronnym punktu x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, nazywamy zbiór

$$S(x_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, x_0 + \delta) \text{ dla pewnego } \delta > 0,$$

— plus nieskończoności nazywamy zbiór

$$S(+\infty) \stackrel{\text{def}}{=} (M, +\infty) \text{ dla pewnego } M \in \mathbb{R},$$

— minus nieskończoności nazywamy zbiór

$$S(-\infty) \stackrel{\text{def}}{=} (-\infty, M) \text{ dla pewnego } M \in \mathbb{R}.$$

W dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu przez \square będziemy oznaczać jeden z elementów zbioru $\{x_0, x_0^-, x_0^+, +\infty, -\infty\}$, gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, natomiast przez Δ będziemy oznaczać jeden z elementów zbioru $\{g, +\infty, -\infty\}$, gdzie $g \in \mathbb{R}$.

Definicja 6.1.2 (Heinego granicy funkcji).

Niech dziedzina D_f funkcji f spełnia warunek $S(\square) \subseteq D_f$. Granica funkcji f przy x dążącym do \square wynosi Δ , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \Delta$, jeśli

$$(\forall(x_n), \{x_n\} \subset S(\square)) [(\lim x_n = \square) \Rightarrow (\lim f(x_n) = \Delta)].$$

Ponieważ \square oznacza jeden z elementów zbioru pięcioelementowego, zaś Δ – jeden z elementów zbioru trójelementowego, powyższy ogólny zapis definicji granicy funkcji uwzględnia $5 \cdot 3 = 15$ różnych przypadków szczególnych.

Fakt 6.1.3 (nazewnictwo przypadków szczególnych definicji Heinego granicy funkcji). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}$.

Jeżeli:

- $\square = x_0$, to mówimy, że funkcja f ma granicę w punkcie x_0 ,
- $\square = x_0^-$, to mówimy, że funkcja f ma granicę lewostronną w punkcie x_0 ,
- $\square = x_0^+$, to mówimy, że funkcja f ma granicę prawostronną w punkcie x_0 ,
- $\square = +\infty$, to mówimy, że funkcja f ma granicę w $+\infty$,
- $\square = -\infty$, to mówimy, że funkcja f ma granicę w $-\infty$.

Jeżeli:

- $\Delta = g$, to mówimy, że funkcja f ma granicę właściwą g ,
- $\Delta = +\infty$, to mówimy, że funkcja f ma granicę niewłaściwą $+\infty$,
- $\Delta = -\infty$, to mówimy, że funkcja f ma granicę niewłaściwą $-\infty$.

Przykład 6.1.4. Przy wykorzystaniu definicji Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie uzasadnimy, że $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + 5x - 7) = -3$.

Skoro $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$, to $f(x_n) = 2x_n^3 - 3x_n^2 + 5x_n - 7$. Podstawiając w definicji 6.1.2 powyższe $f(x_n)$, $\square = 1$ oraz $\Delta = -3$, otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + 5x - 7) = -3 \iff (\forall(x_n), \{x_n\} \subset S(1)) [(\lim x_n = 1) \Rightarrow (\lim (2x_n^3 - 3x_n^2 + 5x_n - 7) = -3)].$$

Weźmy zatem dowolny ciąg (x_n) , taki że $\{x_n\} \subset S(1)$ oraz $\lim x_n = 1$. Wówczas, korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim (2x_n^3 - 3x_n^2 + 5x_n - 7) &= \lim (2x_n^3) - \lim (3x_n^2) + \lim 5x_n - \lim 7 = \\ &= (\lim 2) \cdot (\lim x_n^3) - (\lim 3) \cdot (\lim x_n^2) + (\lim 5) \cdot (\lim x_n) - \lim 7 = \\ &= 2 \cdot (\lim x_n)^3 - 3 \cdot (\lim x_n)^2 + 5 \cdot (\lim x_n) - 7 = \\ &= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 7 = 2 - 3 + 5 - 7 = -3, \end{aligned}$$

co kończy dowód, że $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + 5x - 7) = -3$.

Pomiędzy granicą funkcji f w punkcie x_0 a granicami jednostronnymi tej funkcji w tym punkcie zachodzi bardzo ważny związek.

Twierdzenie 6.1.5. Granica funkcji f w punkcie x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie granice jednostronne w tym punkcie i są one sobie równe, tzn. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Przykład 6.1.6. Korzystając z definicji Heinego granic jednostronnych funkcji w punkcie, łatwo uzasadnić, że $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Zatem na mocy powyższego twierdzenia granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje.

Granice podstawowych funkcji elementarnych będziemy znajdowali, korzystając z wykresów tych funkcji. Poniżej przedstawimy parę przykładów takich granic.

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ (patrz rysunek 3.7), wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ (patrz rysunek 3.8) oraz faktu 3.4.4, otrzymujemy następujący fakt o granicach funkcji wykładniczych.

Fakt 6.1.7 (niektóre granice funkcji wykładniczych).

$$(6.1.1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } a \in (0, 1), \\ 0 & \text{gdy } a > 1. \end{cases}$$

$$(6.1.2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a \in (0, 1), \\ +\infty & \text{gdy } a > 1. \end{cases}$$

W szczególności

$$(6.1.3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (patrz rysunek 3.9), wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ (patrz rysunek 3.10) oraz faktu 3.5.8, dostajemy następujący fakt o granicach funkcji logarytmicznych.

Fakt 6.1.8 (niektóre granice funkcji logarytmicznych).

$$(6.1.4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } a \in (0, 1), \\ -\infty & \text{gdy } a > 1. \end{cases}$$

$$(6.1.5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } a \in (0, 1), \\ +\infty & \text{gdy } a > 1. \end{cases}$$

W szczególności

$$(6.1.6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \arctg x$ (patrz rysunek 3.13), mamy następujący fakt.

Fakt 6.1.9 (niektóre granice funkcji arkus tangens).

$$(6.1.7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

Granice pozostałych funkcji elementarnych będziemy obliczać, korzystając z różnych twierdzeń o granicach funkcji.

6.2. Twierdzenia o granicach funkcji

W niniejszym podrozdziale zapoznamy Czytelnika z paroma technikami wyznaczania granic funkcji. Tak jak to było w przypadku granic ciągów, zaczniemy od twierdzeń najprostszych.

Twierdzenie 6.2.1. Niech $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^k} = 0.$$

Analogonem twierdzenia 4.5.21 o ciągach z granicą e jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.2.2. Jeżeli $\alpha \in \mathbb{R}$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą oraz dana funkcja f spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = +\infty$, to

$$(6.2.1) \quad \lim_{x \rightarrow \square} \left(1 + \frac{\alpha}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^\alpha.$$

Twierdzenie 6.2.3. Dla dowolnej funkcji f , spełniającej warunek $S(\square) \subseteq D_f$, mamy

$$(6.2.2) \quad \lim_{x \rightarrow \square} (-f(x)) = - \lim_{x \rightarrow \square} f(x).$$

Odpowiednikiem twierdzeń 4.5.6 oraz 4.5.8 o arytmetyce granic ciągów jest poniższe twierdzenie o arytmetyce granic funkcji.

Twierdzenie 6.2.4 (o arytmetyce granic funkcji).

Niech $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = f$, $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = g$, gdzie $f, g \in \mathbb{R}$, oraz $\lim_{x \rightarrow \square} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \square} z(x) = +\infty$. Wówczas:

$$(6.2.3) \quad \lim_{x \rightarrow \square} (f(x) \pm g(x)) = f \pm g,$$

$$(6.2.4) \quad \lim_{x \rightarrow \square} (f(x) \cdot g(x)) = f \cdot g,$$

$$(6.2.5) \quad \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}, \text{ o ile } g(x) \neq 0, g \neq 0,$$

$$(6.2.6) \quad \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{gd}y f > 0, g = 0, g(x) > 0, \\ -\infty & \text{gd}y f < 0, g = 0, g(x) > 0, \\ -\infty & \text{gd}y f > 0, g = 0, g(x) < 0, \\ +\infty & \text{gd}y f < 0, g = 0, g(x) < 0, \end{cases}$$

$$(6.2.7) \quad \lim_{x \rightarrow \square} f(x)^{g(x)} = f^g, \text{ jeżeli obie strony równości mają sens,}$$

$$(6.2.8) \quad \lim_{x \rightarrow \square} (f(x) + h(x)) = +\infty,$$

$$(6.2.9) \quad \lim_{x \rightarrow \square} (f(x) - h(x)) = -\infty,$$

$$(6.2.10) \quad \lim_{x \rightarrow \square} (f(x) \cdot h(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{gd}y f > 0, \\ -\infty & \text{gd}y f < 0, \end{cases}$$

$$(6.2.11) \quad \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{h(x)} = 0,$$

$$(6.2.12) \quad \lim_{x \rightarrow \square} \frac{h(x)}{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{gd}y f > 0, \\ -\infty & \text{gd}y f < 0, \end{cases}$$

$$(6.2.13) \quad \lim_{x \rightarrow \square} f(x)^{h(x)} = \begin{cases} 0 & \text{gd}y 0 \leq f < 1, f(x) > 0, \\ +\infty & \text{gd}y f > 1, \end{cases}$$

$$(6.2.14) \quad \lim_{x \rightarrow \square} h(x)^{f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{gd}y f < 0, \\ +\infty & \text{gd}y f > 0, \end{cases}$$

$$(6.2.15) \quad \lim_{x \rightarrow \square} (h(x) + z(x)) = \lim_{x \rightarrow \square} (h(x) \cdot z(x)) = \lim_{x \rightarrow \square} h(x)^{z(x)} = +\infty.$$

Uwaga 6.2.5. Korzystając z faktu, że $-(+\infty) = -\infty$ i $-(-\infty) = +\infty$, oraz z twierdzenia 6.2.3, można łatwo zapisać odpowiedniki wzorów (6.2.8) – (6.2.15) dla przypadków: $\lim_{x \rightarrow \square} h(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow \square} z(x) = -\infty$.

Przykład 6.2.6. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{x^3+2x-1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{x^3+2x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^3(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})} \stackrel{(6.2.5)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})} \stackrel{(6.2.3)}{=} \\ &\stackrel{(6.2.3)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{0+0+0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Przypadki nieujęte w twierdzeniu 6.2.4 o arytmetyce granic funkcji to przypadki symboli (wyrażeń) nieoznaczonych:

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [0^0], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0].$$

Podobnie jak to było w przypadku ciągów (patrz strona 56) wartość symboli nieoznaczonych nie jest ściśle określona, lecz zależy od postaci funkcji je tworzących. Dla każdego symbolu nieoznaczonego można podać przykłady funkcji takich, że granica odpowiedniego wyrażenia funkcyjnego (np. dla $[\infty - \infty]$ – różnicy tych funkcji; dla $[0 \cdot \infty]$ – iloczynu tych funkcji, itd.) będzie przyjmować różne wartości lub wręcz nie istnieć.

Poniższe twierdzenie prezentuje konstruktywne podejście do obliczania granic niektórych wyrażeń nieoznaczonych. Techniki, które pozwolą wyznaczać granice dowolnych wyrażeń nieoznaczonych (m.in. twierdzenie 8.5.12 – reguły de L'Hospitala), zostaną zaprezentowane w części 8.5.3 na stronie 90. Warto zauważyć, że granica pewnego wyrażenia nieoznaczonego typu $[1^\infty]$ wystąpiła także we wzorze (6.2.1).

Twierdzenie 6.2.7 (o granicach podstawowych wyrażeń nieoznaczonych).

$$(6.2.16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left[\frac{0}{0}\right] = 1,$$

$$(6.2.17) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \left[\frac{0}{0}\right] = 1,$$

$$(6.2.18) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \left[\frac{0}{0}\right] = \ln a, \text{ gdzie } a > 0,$$

$$(6.2.19) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0.$$

Przykład 6.2.8. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x} \stackrel{(6.2.16)}{=} \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5}.$$

Przykład 6.2.9. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x} \left[\frac{0}{0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1 - 4^x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^x - 1}{x} - \frac{4^x - 1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{x} \stackrel{(6.2.18)}{=} \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Kolejne twierdzenie to uogólnienie twierdzenia 4.5.11 o trzech ciągach.

Twierdzenie 6.2.10 (o trzech funkcjach).

Jeżeli funkcje f , g , h spełniają następujące warunki:

- i) $(\forall x \in S(\square)) f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
- ii) $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \lim_{x \rightarrow \square} h(x) = g$, gdzie $g \in \mathbb{R}$,

to wówczas $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = g$.

Przykład 6.2.11. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin^2 x$.

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1, \\ 0 &\leq \sin^2 x \leq 1, \quad / \cdot \frac{1}{x}, \\ 0 &\leq \frac{1}{x} \cdot \sin^2 x \leq \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Zatem

$$(\forall x \in (0, +\infty)) \quad 0 \leq \frac{1}{x} \cdot \sin^2 x \leq \frac{1}{x}.$$

Ponieważ ponadto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 0 &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} &= 0, \end{aligned}$$

to na mocy twierdzenia o trzech funkcjach $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin^2 x = 0$.

Poniższe twierdzenie jest analogonem twierdzenia 4.5.13 o dwóch ciągach.

Twierdzenie 6.2.12 (o dwóch funkcjach).

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- i) $(\forall x \in S(\square)) f(x) \leq g(x)$,
- ii) $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = +\infty$,

to wtedy $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = +\infty$.

Jeśli funkcje f i g spełniają warunek i) oraz warunek

- ii)' $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = -\infty$,

to wówczas $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = -\infty$.

Przykład 6.2.13. Obliczmy granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 1 + \cos x)$.

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos x, & / + 1, \\ 0 &\leq 1 + \cos x, & / + 2^x, \\ 2^x &\leq 2^x + 1 + \cos x. \end{aligned}$$

Zatem

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 2^x \leq 2^x + 1 + \cos x.$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = +\infty,$$

to na mocy twierdzenia o dwóch funkcjach $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 1 + \cos x) = +\infty$.

6.3. Asymptoty funkcji

W niniejszym podrozdziale omówimy zastosowanie teorii granic funkcji do wyznaczania asymptot wykresu funkcji.

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definicja 6.3.1. Prosta $x = x_0$ jest *asymptotą pionową lewostronną* funkcji f , jeżeli

$$(6.3.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Prosta $x = x_0$ jest *asymptotą pionową prawostronną* funkcji f , jeżeli

$$(6.3.2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$$

Prosta $x = x_0$ jest *asymptotą pionową (obustronną)* funkcji f , jeśli jest równocześnie jej asymptotą lewostronną i prawostronną.

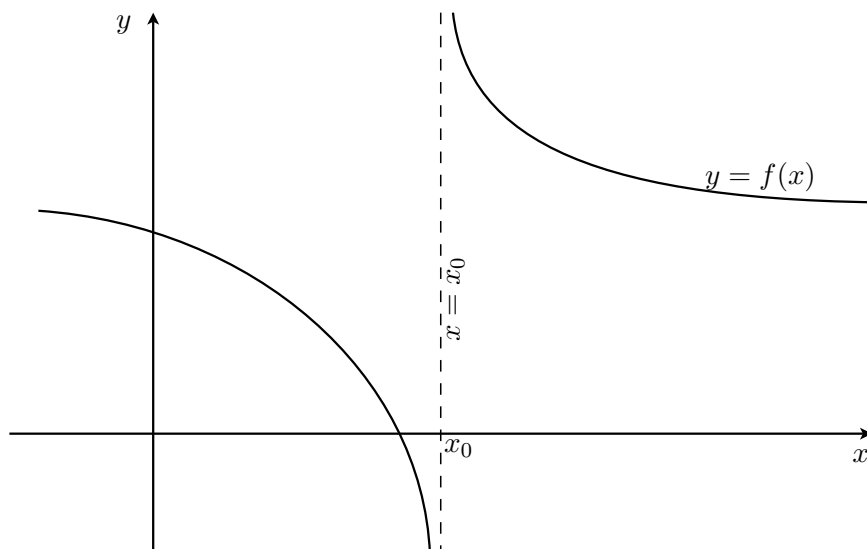
Przykład wykresu funkcji, która posiada asymptotę pionową, przedstawiono na rysunku 6.1.

Fakt 6.3.2. Funkcja elementarna może mieć asymptoty pionowe jedynie w skończonych końcach przedziałów określoności.

Definicja 6.3.3. Prosta $y = a_+x + b_+$ jest *asymptotą ukośną* funkcji f w $+\infty$, jeśli

$$(6.3.3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (a_+x + b_+)] = 0.$$

Jeśli $a_+ = 0$, to asymptotę nazwiemy *asymptotą poziomą* w $+\infty$.



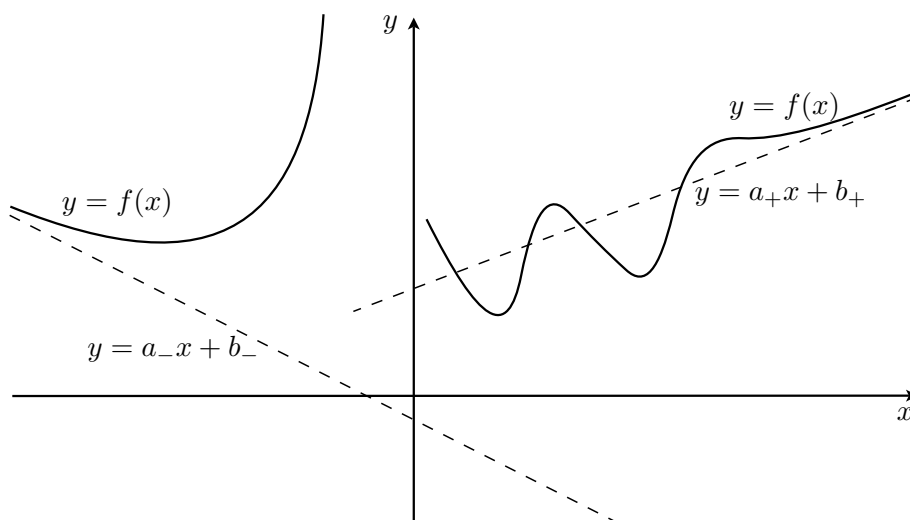
Rysunek 6.1. Asymptota pionowa funkcji

Definicja 6.3.4. Prosta $y = a_-x + b_-$ jest *asymptotą ukośną* funkcji f w $-\infty$, jeśli

$$(6.3.4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (a_-x + b_-)] = 0.$$

Jeśli $a_- = 0$, to asymptotę nazwiemy *asymptotą poziomą* w $-\infty$.

Przykład wykresu funkcji, która posiada asymptoty ukośne, przedstawiono na rysunku 6.2.



Rysunek 6.2. Asymptoty ukośne funkcji

Twierdzenie 6.3.5. Współczynniki asymptot ukośnych funkcji f wyrażają się wzorami

$$(6.3.5) \quad a_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a_+x],$$

$$(6.3.6) \quad a_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_-x],$$

o ile granice po prawych stronach powyższych równości są granicami właściwymi.

Przykład 6.3.6. Wyznamy wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x+5}$.

Ponieważ $x + 5 \neq 0 \iff x \neq -5$, otrzymujemy, że

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty).$$

1. Asymptoty pionowe.

Jedynym kandydatem na asymptotę pionową jest prosta $x = -5$. Wyznamy granice jednostronne funkcji f w punkcie -5 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x+1}{x+5} = \frac{-4}{0^-} \stackrel{(6.2.6)}{=} +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x+1}{x+5} = \frac{-4}{0^+} \stackrel{(6.2.6)}{=} -\infty. \end{aligned}$$

Ponieważ spełnione są oba warunki (6.3.1) oraz (6.3.2), to prosta $x = -5$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji f .

2. Asymptoty ukośne:

a) w $+\infty$.

Wyznamy granice, pojawiające się w równaniach (6.3.5).

$$\begin{aligned} a_+ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+5} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{5}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x}} = \frac{0+0}{1+0} = 0, \end{aligned}$$

$$b_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a_+x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{5}{x})} = 1.$$

Z powyższego wynika, że prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą funkcji f w $+\infty$.

b) w $-\infty$.

Wyznamy granice, pojawiające się w równaniach (6.3.6).

$$\begin{aligned} a_- &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x+5} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{5}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x}} = \frac{0+0}{1+0} = 0, \end{aligned}$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_-x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{5}{x})} = 1.$$

Z powyższego wynika, że prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą funkcji f w $-\infty$.

Rozdział 7

Ciągłość funkcji

W niniejszym rozdziale omówimy pojęcie ciągłości funkcji.

7.1. Podstawowe definicje i przykłady

Na początek zdefiniujemy pojęcie otoczenia.

Definicja 7.1.1. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. *Otoczeniem:*

— punktu x_0 nazywamy zbiór

$$O(x_0) = S(x_0) \cup \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ dla pewnego } \delta > 0,$$

— lewostronnym punktu x_0 nazywamy zbiór

$$O(x_0^-) = S(x_0^-) \cup \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0] \text{ dla pewnego } \delta > 0,$$

— prawostronnym punktu x_0 nazywamy zbiór

$$O(x_0^+) = S(x_0^+) \cup \{x_0\} = [x_0, x_0 + \delta) \text{ dla pewnego } \delta > 0.$$

Definicja 7.1.2 (funkcji jednostronnie ciągłej w punkcie).

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0^-)$, tzn. $O(x_0^-) \subseteq D_f$. Funkcja f jest *lewostronnie ciągła w punkcie* x_0 , jeśli

$$(7.1.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

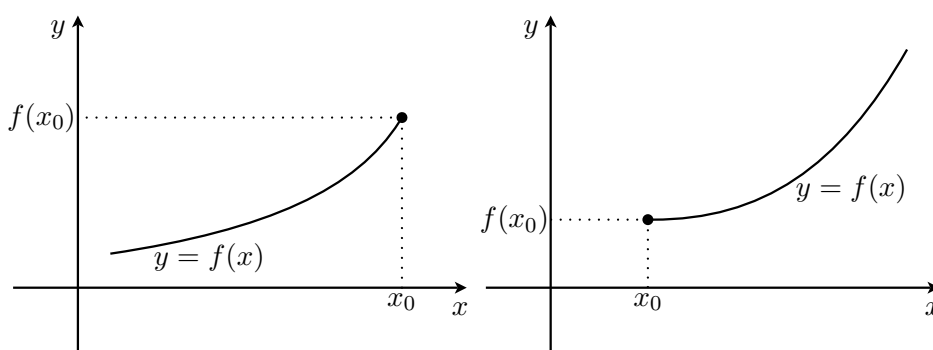
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0^+)$, tzn. $O(x_0^+) \subseteq D_f$. Funkcja f jest *prawostronnie ciągła w punkcie* x_0 , jeśli

$$(7.1.2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

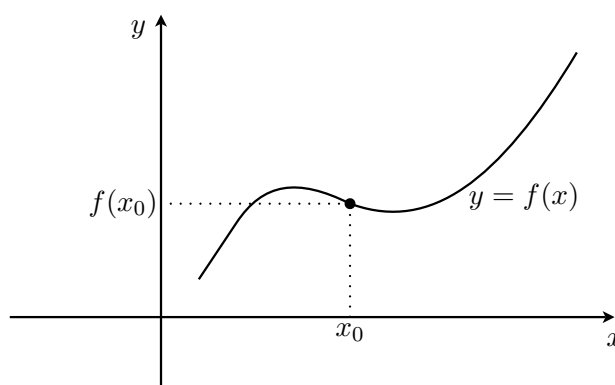
Pojęcia funkcji lewostronnie ciągłej w punkcie oraz funkcji prawostronnie ciągłej w punkcie są zilustrowane na rysunku 7.1.

Definicja 7.1.3 (funkcji ciągłej w punkcie).

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu



Rysunek 7.1. Lewostronna i prawostronna ciągłość funkcji w punkcie



Rysunek 7.2. Ciągłość funkcji w punkcie

$O(x_0)$, tzn. $O(x_0) \subseteq D_f$. Funkcja f jest *ciągła w punkcie* x_0 , jeśli jest w tym punkcie ciągła lewostronnie i prawostronnie, tzn. jeśli

$$(7.1.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Pojęcie funkcji ciągłej w punkcie jest zobrazowane na rysunku 7.2.

Przykład 7.1.4. Dobierzmy parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax} & \text{dla } x < 0, \\ 2 & \text{dla } x = 0, \\ x + 3b & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Konieczne jest założenie, że $a \neq 0$. Podstawiając $x_0 = 0$ do warunku (7.1.3), otrzymujemy

$$(7.1.4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

Najpierw trzeba obliczyć każdą ze stron powyższej równości.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin x}{x} \stackrel{(6.2.16)}{=} \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3b) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \lim_{x \rightarrow 0^+} 3b = 0 + 3b = 3b, \\ f(0) &= 2.\end{aligned}$$

Podstawiając powyższe rezultaty do równości (7.1.4), otrzymujemy podwójne równanie

$$\frac{1}{a} = 3b = 2,$$

które zapisujemy w postaci równoważnego układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = 3b \\ 3b = 2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest oczywiście para $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$.

Zatem dana funkcja f jest ciągła w $x_0 = 0$ dla $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$.

Warto zauważyć, że dzięki twierdzeniu 6.1.5 prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.1.5. Niech $x_0 \in D_f$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(7.1.5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Przykład 7.1.6. Uzasadnijmy ciągłość funkcji $f(x) = 1 - 2x + 3x^2$ w punkcie x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Trzeba pokazać, że warunek (7.1.5) jest spełniony dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$, czyli że

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) \lim_{x \rightarrow x_0} (1 - 2x + 3x^2) = 1 - 2x_0 + 3x_0^2.$$

Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie, mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - 2x + 3x^2) = 1 - 2x_0 + 3x_0^2 &\iff \\ (\forall (x_n), \{x_n\} \subset S(x_0)) \left[(\lim x_n = x_0) \Rightarrow \left(\lim (1 - 2x_n + 3x_n^2) = 1 - 2x_0 + 3x_0^2 \right) \right].\end{aligned}$$

Weźmy zatem dowolny ciąg (x_n) , taki że $\{x_n\} \subset S(x_0)$ oraz $\lim x_n = x_0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\lim (1 - 2x_n + 3x_n^2) &= \lim 1 - (\lim 2) \cdot (\lim x_n) + (\lim 3) \cdot (\lim x_n)^2 = \\ &= 1 - 2x_0 + 3x_0^2,\end{aligned}$$

co kończy dowód ciągłości funkcji $f(x) = 1 - 2x + 3x^2$ w punkcie x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definicja 7.1.7. Funkcja f jest *ciągła* w zbiorze $A \subseteq D_f$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, tzn.

$$(\forall x_0 \in A) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcja jest *ciągła*, jeśli jest ciągła w całej swojej dziedzinie.

Graficznie pojęcie funkcji ciągłej można interpretować następująco: jeśli funkcja jest ciągła, to jej wykres nie posiada żadnych „dziur” czy „skoków”. Wykres funkcji ciągłej w przedziale można narysować bez odrywania ręki od rysunku.

Twierdzenia przedstawione poniżej dostarczają wiele przykładów funkcji ciągłych.

Twierdzenie 7.1.8. Podstawowe funkcje elementarne są funkcjami ciągłymi (w swoich dziedzinach).

Twierdzenie 7.1.9. Suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi (w swoich dziedzinach).

Twierdzenie 7.1.10 (o ciągłości funkcji odwrotnej).

Niech funkcja f będzie rosnąca (lub malejąca) i ciągła w pewnym przedziale X . Wówczas w odpowiednim przedziale $Y = f(X)$ wartości tej funkcji istnieje funkcja odwrotna f^{-1} , która także jest rosnąca (malejąca) i ciągła.

Z trzech powyższych twierdzeń wynika bezpośrednio twierdzenie następujące.

Twierdzenie 7.1.11 (o ciągłości funkcji elementarnych).

Funkcje elementarne są funkcjami ciągłymi (w swoich dziedzinach).

Przykład 7.1.12. Rozpatrzmy funkcję elementarną $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Ponieważ $1-x^2 \geq 0 \iff x \in [-1, 1]$, to funkcja f jest funkcją ciągłą w przedziale $[-1, 1]$.

Przykład 7.1.13. Funkcja elementarna $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ jest dobrze określona przy założeniu $\sin^2 x \neq 0$. Ponieważ

$$\sin^2 x \neq 0 \iff \sin x \neq 0 \iff x \neq k \cdot \pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

to funkcja f jest funkcją ciągłą w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Skoro wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach, to przykładów funkcji nieciągłych należałoby szukać wśród funkcji nieelementarnych.

Przykład 7.1.14 (funkcji nieciągłej).

Rozpatrzmy funkcję „część całkowita” (patrz definicja 3.7.9 na stronie 45). Dziedziną tej funkcji jest oczywiście cały zbiór liczb rzeczywistych. Korzystając z wykresu (patrz rysunek 3.15), zauważamy, że w punktach postaci $x_0 = k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, warunek (7.1.3) ciągłości funkcji w punkcie nie jest spełniony. Zatem funkcja „część całkowita” nie jest funkcją ciągłą (w całej swej dziedzinie).

7.2. Twierdzenia o funkcjach ciągłych

W niniejszym podrozdziale przedstawimy najważniejsze twierdzenia o funkcjach ciągłych, łącznie z ich podstawowymi aplikacjami. Twierdzenia te pochodzą od matematyka niemieckiego Karla Weierstrassa (1815–1897) oraz matematyka francuskiego Jeana Gastona Darboux (1842–1917).

Twierdzenie 7.2.1 (Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej).

Funkcja f określona i ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest na tym przedziale ograniczona, tzn.

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in [a, b]) m \leq f(x) \leq M.$$

Przykład 7.2.2. Funkcja $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$, określona na przedziale $[0, 10]$, jest ciągła. Z powyższego twierdzenia Weierstrassa wynika, że funkcja ta jest ograniczona, czyli

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in [0, 10]) m \leq 3x^2 + 5x - 4 \leq M.$$

Twierdzenie 7.2.3 (Weierstrassa o osiągnięciu kresów).

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to funkcja ta osiąga na tym przedziale swoją wartość najmniejszą i swoją wartość największą, tzn.

$$\begin{aligned} (\exists c \in [a, b])(\forall x \in [a, b]) f(x) \geq f(c) & \text{ – wartość najmniejsza,} \\ (\exists d \in [a, b])(\forall x \in [a, b]) f(x) \leq f(d) & \text{ – wartość największa.} \end{aligned}$$

Twierdzenie Weierstrassa o osiągnięciu kresów znajduje swoje zastosowanie przy uzasadnianiu rozwiązywalności zagadnień ekstremalnych (optymalizacyjnych).

Przykład 7.2.4. Koszt użytkowania autobusu w ciągu godziny wyraża się wzorem empirycznym $K(v) = a + b \cdot v^3$ (dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$), w zależności od prędkości jazdy v . Funkcja K jest funkcją ciągłą, zadaną na przedziale domkniętym $[0, v_{\max}]$, gdzie v_{\max} to maksymalna prędkość autobusu. Z twierdzenia Weierstrassa o osiągnięciu kresów wynika, że istnieje prędkość $v_o \in [0, v_{\max}]$ taka, że koszt $K(v_o)$ jest minimalny. Taką prędkość v_o będziemy nazywali prędkością optymalną. Aby wyznaczyć dokładną wartość prędkości optymalnej, będziemy potrzebowali umiejętności wyznaczania ekstremów globalnych funkcji. Procedurę wyznaczania takich ekstremów przedstawimy w części 9.3.

Kolejne twierdzenie mówi nam o przyjmowaniu przez funkcję ciągłą wszystkich wartości pośrednich.

Twierdzenie 7.2.5 (Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich).

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) \neq f(b)$, to dla każdego ω pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $x_0 \in (a, b)$, takie że $f(x_0) = \omega$. Jeżeli ponadto funkcja f jest rosnąca lub malejąca, to argument x_0 jest wyznaczony jednoznacznie.

Bezpośrednim wnioskiem z powyższego twierdzenia jest twierdzenie o miejscach zerowych funkcji ciągłej.

Twierdzenie 7.2.6 (Darboux o miejscach zerowych).

Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i na końcach tego przedziału przyjmuje wartości różnych znaków. Wówczas funkcja f posiada w przedziale (a, b) miejsce zerowe, tzn.

$$(\exists x_0 \in (a, b)) f(x_0) = 0.$$

Jeżeli ponadto funkcja f jest na przedziale $[a, b]$ rosnąca lub malejąca, to ww. miejsce zerowe jest jedyne w tym przedziale.

Przykład 7.2.7. Uzasadnimy, że równanie $x \cdot \sin x = 7$ ma tylko jedno rozwiązanie w przedziale $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$.

Rozpatrujemy funkcję $f(x) = x \cdot \sin x - 7$, która jest funkcją ciągłą w \mathbb{R} , a w szczególności w przedziale $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$. Wyznamy wartości tej funkcji na końcach tego przedziału.

Ponieważ $\sin(\frac{5\pi}{2}) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= 2\pi \cdot \sin(2\pi) - 7 = 2\pi \cdot 0 - 7 = -7 < 0, \\ f\left(\frac{5\pi}{2}\right) &= \frac{5\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - 7 = \frac{5\pi}{2} \cdot 1 - 7 = \frac{5\pi}{2} - 7 > 0. \end{aligned}$$

Zatem z twierdzenia Darboux o miejscach zerowych wynika, że w przedziale $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$ funkcja f posiada miejsce zerowe, tzn.

$$\left(\exists x_0 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)\right) f(x_0) = x_0 \cdot \sin x_0 - 7 = 0.$$

W konsekwencji

$$\left(\exists x_0 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)\right) x_0 \cdot \sin x_0 = 7,$$

czyli równanie $x \cdot \sin x = 7$ ma w przedziale $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$ rozwiązanie x_0 .

Zauważmy ponadto, że w przedziale $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$ zarówno funkcja $x \mapsto x$, jak i funkcja $x \mapsto \sin x$ są funkcjami rosnącymi. W konsekwencji również funkcja $f(x) = x \cdot \sin x - 7$ jest w tym przedziale rosnąca. Zatem miejsce zerowe x_0 jest jedynym miejscem zerowym funkcji f w przedziale $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$. Z powyższego wynika, że równanie $x \cdot \sin x = 7$ ma w przedziale $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$ tylko jedno rozwiązanie x_0 .

Rozdział 8

Pochodne funkcji

W niniejszym rozdziale omówimy pojęcie pochodnej funkcji. Dział matematyki zajmujący się pochodnymi funkcji nazywamy rachunkiem różniczkowym funkcji.

8.1. Podstawowe definicje

W dalszym ciągu zakładamy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ i że funkcja f jest określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$.

Definicja 8.1.1 (ilorazu różnicowego).

Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 nazywamy wyrażenie

$$(8.1.1) \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

gdzie Δx to przyrost zmiennej niezależnej (argumentu) x .

Przy założeniu $\Delta x = x - x_0$ powyższa definicja jest równoważna z definicją:

$$(8.1.2) \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definicja 8.1.2 (pochodnej jednostronnej w punkcie).

Pochodną właściwą lewostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$(8.1.3) \quad f'_-(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pochodną właściwą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$(8.1.4) \quad f'_+(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definicja 8.1.3 (pochodnej właściwej w punkcie).

Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$(8.1.5) \quad f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

czyli granicę ilorazu różnicowego funkcji f w punkcie x_0 przy przyroście argumentu dążącym do 0.

Definicja 8.1.4 (funkcji różniczkowalnej w punkcie).

Jeżeli funkcja f posiada pochodną właściwą w punkcie x_0 , to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

W tym momencie warto nadmienić, iż w rachunku różniczkowym rozpatruje się również pochodne jednostronne niewłaściwe oraz pochodną niewłaściwą funkcji w punkcie. My jednakże będziemy zajmowali się wyłącznie pochodnymi właściwymi.

Przykład 8.1.5. Sprawdźmy, czy funkcja $f(x) = \sin x$ ma pochodną właściwą w punkcie x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Korzystając ze wzoru

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

otrzymujemy iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\sin(\overbrace{x_0 + \Delta x}^{\alpha}) - \sin(\underbrace{x_0}_{\beta})}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(\frac{2x_0 + \Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \\ &= \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \end{aligned}$$

Następnie obliczamy granicę tego ilorazu różnicowego:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \stackrel{(6.2.16)}{=} \\ &\stackrel{(6.2.16)}{=} \cos\left(x_0 + \frac{0}{2}\right) \cdot 1 = \cos x_0 = f'(x_0). \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że funkcja $f(x) = \sin x$ jest różniczkowalna w dowolnym punkcie x_0 , gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, a ponadto $f'(x_0) = \cos x_0$.

Podobnie jak to było w przypadku granicy funkcji w punkcie (patrz twierdzenie 6.1.5) czy też ciągłości funkcji w punkcie (patrz definicja 7.1.3), pomiędzy pochodnymi jednostronnymi a pochodną funkcji w punkcie zachodzi ścisły związek.

Twierdzenie 8.1.6. Pochodna właściwa funkcji f w punkcie x_0 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne właściwe jednostronne tej funkcji w tym punkcie i są one sobie równe. Wtedy

$$(8.1.6) \quad f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Przykład 8.1.7. Sprawdźmy, czy funkcja $f(x) = |x - 3|$ ma pochodną właściwą w punkcie $x_0 = 3$. Wyznaczamy iloraz różnicowy funkcji f w tym punkcie.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|(3 + \Delta x) - 3| - |3 - 3|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Ponieważ

$$|\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x & \text{dla } \Delta x < 0, \\ \Delta x & \text{dla } \Delta x \geq 0, \end{cases}$$

najpierw musimy wyznaczyć pochodne jednostronne.

Pochodna lewostronna w $x_0 = 3$ wynosi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 = f'_-(3).$$

Pochodna prawostronna w $x_0 = 3$ wynosi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 1 = 1 = f'_+(3).$$

Jak widać, pochodne właściwe jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = 3$ istnieją, ale niestety są od siebie różne ($f'_-(3) \neq f'_+(3)$), czyli pochodna właściwa funkcji $f(x) = |x - 3|$ w punkcie $x_0 = 3$ nie istnieje.

Warunkiem koniecznym istnienia pochodnej właściwej funkcji f w punkcie $x_0 \in D_f$ jest ciągłość tej funkcji w tym punkcie, tzn. prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.1.8. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D_f$, to f jest ciągła w x_0 .

Funkcja ciągła w danym punkcie nie musi być w tym punkcie różniczkowalna, czego dowodem jest poniższy przykład.

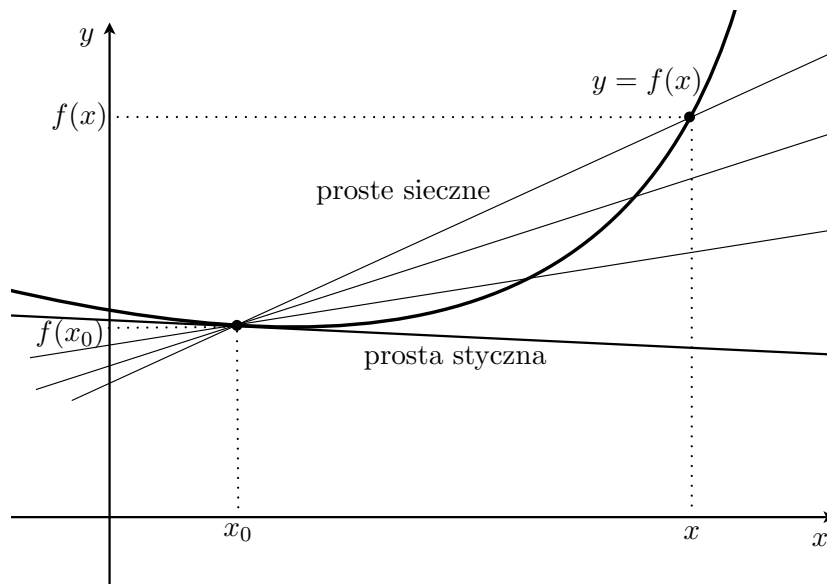
Przykład 8.1.9. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = |x - 3|$ oraz punkt $x_0 = 3 \in D_f$. Jak łatwo sprawdzić, funkcja f jest w punkcie x_0 ciągła. Niestety, jak pokazuje przykład 8.1.7, funkcja f w tym punkcie nie posiada pochodnej właściwej.

8.2. Prosta styczna do wykresu funkcji

W dalszym ciągu zastosujemy pojęcie pochodnej właściwej funkcji w punkcie do wyznaczania równania prostej stycznej do wykresu tej funkcji. Najpierw przytoczymy dokładną definicję prostej stycznej.

Definicja 8.2.1. Niech funkcja f będzie ciągła w punkcie x_0 oraz niech otoczenie $O(x_0)$ zawiera się w D_f . Prosta styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ to prosta będąca granicznym położeniem prostych siecznych wykresu tej funkcji przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x, f(x))$, przy x dążącym do x_0 .

Przykładowa prosta styczna do wykresu funkcji jest przedstawiona na rysunku 8.1.



Rysunek 8.1. Prosta styczna do wykresu funkcji

Twierdzenie 8.2.2. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to równanie prostej stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest postaci

$$(8.2.1) \quad y = f'(x_0) \cdot x + [f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0].$$

Przykład 8.2.3. Napiżemy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dla $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Najpierw wyznaczmy poszczególne wielkości występujące w równaniu (8.2.1). Skorzystamy przy tym z równości $[\sin]'(x_0) = \cos x_0$ dla $x_0 \in \mathbb{R}$, którą pokazaliśmy w przykładzie 8.1.5:

$$f(x_0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Podstawiając powyższe do równania (8.2.1), otrzymujemy szukane równanie prostej stycznej

$$y = 0 \cdot x + \left[1 - 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y = 1.$$

8.3. Różniczka funkcji

W niniejszym podrozdziale zastosujemy pochodną właściwą funkcji w punkcie do przybliżania wartości funkcji w punkcie.

Definicja 8.3.1. Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie x_0 . *Różniczką funkcji f w punkcie x_0 przy danym przyroście argumentu Δx nazywamy wyrażenie*

$$(8.3.1) \quad df(x_0, \Delta x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Różniczkę stosuje się do obliczeń przybliżonych.

Twierdzenie 8.3.2. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to dla każdego $x_0 + \Delta x \in D_f$ prawdziwa jest równość

$$(8.3.2) \quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0, \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Przykład 8.3.3. Wyznamy przybliżoną wartość wyrażenia $\sin 0,03$.

Przyjmując $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ i $\Delta x = 0,03$ oraz wiedząc, że $[\sin]'(x_0) = \cos x_0$ dla $x_0 \in \mathbb{R}$, z równania (8.3.2), otrzymujemy

$$\sin(0 + 0,03) = \sin 0,03 \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot 0,03 = 0 + 1 \cdot 0,03 = 0,03.$$

Warto zauważyć, że otrzymane przybliżenie $\sin 0,03 \approx 0,03$ niewiele różni się od przybliżenia $\sin 0,03 \approx 0,0299955$, otrzymanego na kalkulatorze firmy CASIO.

Dokładniejsze przybliżenia wartości funkcji w punkcie będzie można otrzymać, korzystając z tzw. rozwinięcia funkcji według Taylora. Rozwinięcie to zostanie przedstawione w podrozdziale 8.11.

8.4. Pochodna jako funkcja

W bieżącym podrozdziale rozszerzymy pojęcie różniczkowalności w punkcie do pojęcia różniczkowalności w zbiorze oraz wprowadzimy pojęcie funkcji pochodnej.

Definicja 8.4.1. Funkcję f , która jest różniczkowalna w każdym punkcie x_0 zbioru $A \subseteq D_f$, nazywamy *funkcją różniczkowalną w zbiorze A* .

Przykład 8.4.2. Jak pokazał przykład 8.1.5, funkcja $f(x) = \sin x$ jest różniczkowalna w zbiorze \mathbb{R} liczb rzeczywistych.

Warto zauważyć, że z twierdzenia 8.1.6 wynika następujący fakt:

Fakt 8.4.3. Jeśli dziedziną funkcji jest rozłączną sumą przedziałów domkniętych, to na końcach każdego takiego przedziału funkcja nie jest różniczkowalna.

Definicja 8.4.4. Niech A będzie maksymalnym zbiorem, w którym funkcja f jest różniczkowalna. Funkcją pochodną funkcji f nazywamy funkcję $f': A \rightarrow \mathbb{R}$, która argumentowi x_0 przypisuje $f'(x_0)$, tzn. funkcję $x_0 \mapsto f'(x_0)$.

W dalszym ciągu będziemy używali zamiennie terminów „funkcja pochodna funkcji f ” lub „pochodna funkcji f ”. W tabeli 8.1 przedstawiamy funkcje pochodne podstawowych funkcji elementarnych. Jeśli nie założono inaczej, to przyjmujemy że $x \in \mathbb{R}$.

Tabela 8.1. Funkcje pochodne podstawowych funkcji elementarnych

Funkcja i jej funkcja pochodna	Założenia i uwagi
$[c]' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	Zakres zmienności x zależy od α : dla $\alpha \in \mathbb{N}$ $x \in \mathbb{R}$ dla $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ $x \neq 0$ dla $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \alpha < 0$ $x > 0$ dla $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \alpha > 0$ $x \geq 0$ dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $x > 0$
$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$[e^x]' = e^x$	
$[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
$[\ln x]' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$[\sin x]' = \cos x$	
$[\cos x]' = -\sin x$	
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\cos x \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$[\operatorname{ctg} x]' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$	$\sin x \neq 0 \iff x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$[\operatorname{arc} \sin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$[\operatorname{arc} \cos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$[\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$	
$[\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x]' = \frac{-1}{1+x^2}$	

8.5. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego

W niniejszym podrozdziale zaprezentujemy ważniejsze twierdzenia rachunku różniczkowego.

8.5.1. Reguły różniczkowania

Przedstawimy tutaj twierdzenia, które pozwolą nam wyznaczyć funkcję pochodną dowolnej funkcji elementarnej.

Twierdzenie 8.5.1 (o arytmetyce pochodnych).

Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w zbiorze $A \subseteq D_f \cap D_g$ oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas dla każdego $x \in A$

$$(8.5.1) \quad [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]' = \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x),$$

$$(8.5.2) \quad [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$(8.5.3) \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ o ile } g(x) \neq 0.$$

Własność (8.5.1) nazywamy *liniowością pochodnej*, wzór (8.5.2) zwiemy wzorem na *pochodną iloczynu*, zaś wzór (8.5.3) – wzorem na *pochodną ilorazu*.

Przykład 8.5.2. Wyznamy pochodną wielomianu $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$. Korzystając ze wzoru (8.5.1) oraz tabeli 8.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} [2x^3 + 3x^2 - 5x + 7]' &= [2x^3]' + [3x^2]' - [5x]' + [7]' = \\ &= 2[x^3]' + 3[x^2]' - 5[x]' + [7]' = \\ &= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 6x - 5. \end{aligned}$$

Przykład 8.5.3. Wyznamy pochodną funkcji $f(x) = x^2 \cdot \sin x$. Korzystając ze wzoru (8.5.2) oraz tabeli 8.1, otrzymujemy

$$[x^2 \cdot \sin x]' = [x^2]' \cdot \sin x + x^2 \cdot [\sin x]' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x.$$

Przykład 8.5.4. Wyznamy pochodną funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x}$. Korzystając ze wzoru (8.5.3) oraz tabeli 8.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left[\frac{\ln x}{\operatorname{tg} x} \right]' &= \frac{[\ln x]' \cdot \operatorname{tg} x - \ln x \cdot [\operatorname{tg} x]'}{(\operatorname{tg} x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x - \ln x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{\ln x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{x \cdot \operatorname{tg} x} - \frac{\ln x}{\operatorname{tg}^2 x} - \ln x. \end{aligned}$$

Twierdzenie 8.5.5 (o pochodnej funkcji złożonej).

Jeżeli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x , a funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $g(x)$, to funkcja $f \circ g$ jest różniczkowalna w punkcie x oraz

$$(8.5.4) \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Przykład 8.5.6. Wyznamy pochodną funkcji $f(x) = \sin 7x$. Z tabeli 8.1 wiemy, że $[\sin u]' = \cos u$ oraz $[7x]' = 7$. Korzystając ze wzoru (8.5.4), otrzymujemy

$$[\sin 7x]' = [\sin]'(7x) \cdot [7x]' = \cos 7x \cdot 7 = 7 \cos 7x.$$

Przykład 8.5.7. Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{\cos x^2}$. Ponieważ $[x^2]' = 2x$, $[\cos u]' = -\sin u$ oraz $[\sqrt[3]{t}]' = [t^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$, to korzystając ze wzoru (8.5.4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} [\sqrt[3]{\cos x^2}]' &= [\sqrt[3]{}]'(\cos x^2) \cdot [\cos]'(x^2) \cdot [x^2]' = \frac{1}{3}(\cos x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x = \\ &= -\frac{2}{3}x \cdot \sin x^2 \cdot (\cos x^2)^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Odpowiednikiem twierdzenia 7.1.10 o ciągłości funkcji odwrotnej jest twierdzenie następujące:

Twierdzenie 8.5.8 (o pochodnej funkcji odwrotnej).

Niech funkcja f będzie rosnąca (lub malejąca) i różniczkowalna w przedziale X oraz niech $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w odpowiednim przedziale $Y = f(X)$ wartości funkcji f oraz dla każdego $y = f(x)$ zachodzi równość

$$(8.5.5) \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Przykład 8.5.9. Wyznamy pochodną funkcji odwrotnej do funkcji $f(x) = e^x$. Ponieważ funkcja f jest rosnąca, dodatnia i różniczkowalna w zbiorze \mathbb{R} oraz $[e^x]' = e^x$, to dla każdego $y > 0$, $y = e^x$ mamy

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Zauważmy tutaj, że z twierdzenia 3.5.10 funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = e^x$ jest funkcja $f(x) = \ln x$ i powyższy rezultat jest zgodny ze wzorem $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $x > 0$ z tabeli 8.1.

8.5.2. Pochodna logarytmiczna

Rozważmy funkcje złożone postaci $f(x)^{g(x)}$, gdzie $f(x) > 0$, oraz postaci $\log_{f(x)} g(x)$, gdzie $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$ oraz $g(x) > 0$. Pierwsza z tych funkcji

nie jest ani funkcją potęgową (wykładnik jest zmienny), ani wykładniczą (podstawa jest zmienna). Druga funkcja nie jest funkcją logarytmiczną (podstawa jest zmienna). Aby wyznaczyć pochodne powyższych funkcji, trzeba zastosować tzw. pochodną logarytmiczną. Najpierw przekształcimy powyższe funkcje zgodnie z tożsamościami

$$(8.5.6) \quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)},$$

$$(8.5.7) \quad \log_{f(x)} g(x) = \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)},$$

a dopiero później obliczymy ich pochodne.

Przykład 8.5.10. Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^x$. Wykorzystując wzory (8.5.6), (8.5.4) oraz (8.5.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} x^x &= e^{x \cdot \ln x}, \\ [x^x]' &= [e^{x \cdot \ln x}]' = e^{x \cdot \ln x} \cdot [x \cdot \ln x]' = e^{x \cdot \ln x} ([x]' \cdot \ln x + x \cdot [\ln x]') = \\ &= e^{x \cdot \ln x} \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = e^{x \cdot \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1). \end{aligned}$$

Przykład 8.5.11. Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = \log_x 7$. Wykorzystując wzory (8.5.7) oraz (8.5.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \log_x 7 &= \frac{\ln 7}{\ln x}, \\ [\log_x 7]' &= \left[\frac{\ln 7}{\ln x} \right]' = \frac{[\ln 7]' \cdot \ln x - \ln 7 \cdot [\ln x]'}{(\ln x)^2} = \frac{0 \cdot \ln x - \ln 7 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-\ln 7}{x \cdot \ln^2 x}. \end{aligned}$$

8.5.3. Reguły de L'Hospitala

W bieżącej części książki przedstawiamy zapowiadane już na stronie 70 techniki wyznaczania granic dowolnych wyrażeń nieoznaczonych. Zaczniemy od twierdzenia, które pozwala obliczyć granice wyrażeń nieoznaczonych typów $\left[\frac{0}{0} \right]$ oraz $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Tak jak w rozdziale 6 przyjmijmy, że \square oznacza jeden z elementów zbioru $\{x_0, x_0^-, x_0^+, +\infty, -\infty\}$, gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 8.5.12 (reguły de L'Hospitala).

Niech funkcje f i g spełniają następujące warunki:

- i) istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
- ii) $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = 0$, gdzie $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(\square)$.

Wtedy

$$(8.5.8) \quad \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jeśli funkcje f i g spełniają warunek i) oraz warunek

ii)' $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \infty$,
to wówczas

$$(8.5.9) \quad \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Miejsca, w których stosujemy jedną z reguł de L'Hospitala, (8.5.8) lub (8.5.9), oznaczamy zwyczajowo za pomocą litery H umieszczonej nad znakiem równości, tzn. „ $\stackrel{H}{=}$ ”.

Przykład 8.5.13. Wyznaczmy granicę wyrażenia nieoznaczonego $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ typu $\left[\frac{0}{0} \right]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \left[\frac{0}{0} \right] &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{[\sin 3x]'}{[\sin 5x]'} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x \cdot [3x]'}{\cos 5x \cdot [5x]'} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cdot \cos 3x}{5 \cdot \cos 5x} = \\ &= \frac{3 \cdot \cos 3\pi}{5 \cdot \cos 5\pi} = \frac{3 \cdot (-1)}{5 \cdot (-1)} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Przykład 8.5.14. Wyznaczmy granicę wyrażenia nieoznaczonego $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ typu $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Warto zauważyć, że niniejszym uzasadniliśmy prawdziwość wzoru (6.2.19).

W przypadku wyrażenia nieoznaczonego jednego z pozostałych typów, tzn. $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, przed zastosowaniem reguł de L'Hospitala należy przekształcić to wyrażenie do postaci spełniającej założenia twierdzenia 8.5.12. Na przykład dla wyrażenia typu $[0 \cdot \infty]$ należy iloczyn zamienić na iloraz, zgodnie z tożsamością

$$(8.5.10) \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Iloraz w tożsamości (8.5.10) będzie już wyrażeniem typu $\left[\frac{0}{0} \right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Dla wyrażenia typu $[0^0]$, $[1^\infty]$ lub $[\infty^0]$ należy najpierw zastosować tożsamość (8.5.6) i otrzymać wyrażenie typu $[0 \cdot \infty]$, a następnie należy zastosować tożsamość (8.5.10).

Przykład 8.5.15. Wyznaczmy granicę wyrażenia nieoznaczonego $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ typu $[0 \cdot \infty]$. Korzystając z tożsamości (8.5.10), otrzymujemy

$$x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

Teraz możemy zastosować regułę de L'Hospitala dla symbolu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} [0 \cdot \infty] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[e^{\frac{1}{x}}]'}{[\frac{1}{x}]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot [\frac{1}{x}]'}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.\end{aligned}$$

Przykład 8.5.16. Wyznaczmy granicę wyrażenia nieoznaczonego typu $[\infty - \infty]$ na przykładzie wyrażenia $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) [\infty - \infty] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x \cdot \ln x - (x-1)}{(x-1) \cdot \ln x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot \ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x} \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x \cdot \ln x - x + 1]'}{[(x-1) \cdot \ln x]'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{H}}{=} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[\ln x]'}{[\ln x + \frac{x-1}{x}]'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1 \cdot x - (x-1) \cdot 1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x-x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

8.6. Ekonomiczna interpretacja pochodnej

W niniejszym podrozdziale przedstawimy ekonomiczną interpretację pojęć: iloraz różnicowy, pochodna właściwa funkcji w punkcie oraz funkcja pochodna danej funkcji.

Niech x będzie wielkością produkcji, gdzie $x \in [0, +\infty)$, oraz niech funkcja K określa wielkość kosztów w zależności od x , $K: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Załóżmy, że K jest funkcją różniczkowalną, że obecna produkcja wynosi x_0 jednostek i że chcemy wyprodukować dodatkowych Δx jednostek.

Definicja 8.6.1. *Kosztem przeciętnym (średnim)* wytworzenia każdej z dodatkowych jednostek produktu nazywamy iloraz różnicowy

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)}{\Delta x}.$$

Definicja 8.6.2. *Kosztem krańcowym*, odpowiadającym wielkości produkcji x_0 jednostek nazywamy pochodną właściwą funkcji K w punkcie x_0 , czyli granicę właściwą $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x_0)$.

Definicja 8.6.3. Funkcją kosztów krańcowych nazywamy funkcję pochodną K' .

Fakt 8.6.4. Zwiększając produkcję o Δx jednostek w stosunku do poziomu x_0 , zwiększamy koszty w przybliżeniu o $\Delta K \approx K'(x_0) \cdot \Delta x$ jednostek monetarnych. Przyjmując $\Delta x = 1$, otrzymujemy, że koszt $\Delta_1 K$ wytworzenia dodatkowej jednostki produktu wynosi w przybliżeniu

$$(8.6.1) \quad \Delta_1 K \approx K'(x_0).$$

Przykład 8.6.5. Funkcja kosztów zadana jest wzorem $K(x) = 3000 + 50x - 0,01x^3$, gdzie $x \geq 0$. Funkcja kosztów krańcowych wyraża się zatem wzorem

$$K'(x) = 50 - 0,01 \cdot 3x^2 = 50 - 0,03x^2.$$

Dla $x_0 = 10$ jednostek mamy $K'(10) = 50 - 0,03 \cdot 10^2 = 47$, zaś dla $x_0 = 20$ jednostek jest $K'(20) = 50 - 0,03 \cdot 20^2 = 38$.

Zatem przybliżony koszt wytworzenia dodatkowej jednostki produktu dla poziomu wyjściowego 10 jednostek wynosi 47 zł, a dla poziomu wyjściowego 20 jednostek wynosi 38 zł.

Parę innych możliwości interpretacji wielkości ekonomicznych x , K oraz K' przedstawiono w tabeli 8.2.

Tabela 8.2. Inne ekonomiczne interpretacje pochodnej funkcji

x	K	K'
cena	popyt	popyt krańcowy
wydajność	wynagrodzenie	wynagrodzenie krańcowe
sprzedaż	utarg (dochód)	utarg (dochód) krańcowy

8.7. Elastyczność funkcji

Niech dodatnia wielkość ekonomiczna f zależy w sposób różniczkowalny od dodatniej wielkości ekonomicznej x .

Definicja 8.7.1. Elastycznością funkcji f w punkcie x_0 nazywamy wyrażenie

$$E_{x_0} f = \frac{x_0}{f(x_0)} \cdot f'(x_0).$$

Twierdzenie 8.7.2. Jeżeli przyrostowi zmiennej x o $s\%$, licząc od poziomu x_0 , odpowiada przyrost funkcji f o $q\%$, to

$$q \approx s \cdot E_{x_0} f.$$

Fakt 8.7.3. Elastyczność funkcji f określa w przybliżeniu procentową zmianę wartości tej funkcji w punkcie x_0 przy zmianie wielkości x o 1% .

Definicja 8.7.4. Funkcja f jest w punkcie x_0

— *elastyczna*, jeśli zmiana wielkości x ma duży wpływ na zmianę f , tzn.

$$|E_{x_0}f| > 1,$$

— *nieelastyczna*, jeśli zmiana wielkości x ma mały wpływ na zmianę f , tzn.

$$|E_{x_0}f| < 1,$$

— *neutralna*, jeśli $|E_{x_0}f| = 1$.

Przykład 8.7.5. Niech funkcja kosztów będzie zadana wzorem $K(x) = 3000 + 50x - 0,01x^3$, $x \geq 0$. Korzystając z przykładu 8.6.5, mamy

$$K'(x) = 50 - 0,03x^2, \quad K'(20) = 38.$$

Ponadto dla $x_0 = 20$ otrzymujemy $K(20) = 3920$ oraz

$$E_{x_0}K = \frac{20}{K(20)} \cdot K'(20) = \frac{20}{3920} \cdot 38 \approx 0,1939.$$

Zatem jeżeli produkcja wzrośnie o 1%, to jej koszt wzrośnie o ok. 0,1939%. W konsekwencji koszt jest nieelastyczny względem wielkości produkcji.

Przykład 8.7.6. Wyznamy elastyczność funkcji potęgowej $f(x) = c \cdot x^\alpha$, gdzie $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ponieważ $f'(x) = [c \cdot x^\alpha]' = c \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, otrzymujemy

$$E_{x_0}f = \frac{x_0}{f(x_0)} \cdot f'(x_0) = \frac{x_0}{c \cdot x_0^\alpha} \cdot c \cdot \alpha \cdot x_0^{\alpha-1} = \alpha.$$

Pokazaliśmy zatem, że elastyczność funkcji potęgowej jest stała. Dlatego też często posługujemy się funkcją potęgową w badaniach ekonomicznych.

8.8. Stopa wzrostu funkcji

W ekonomii często rozważa się funkcje przedstawiające proces zmian pewnych wielkości w czasie. Niech wielkość ekonomiczna f zmienia się w zależności od czasu t i niech $t \in [0, T]$. Ponadto założymy, że funkcja f jest funkcją różniczkowalną i że Δt oznacza przyrost czasu.

Definicja 8.8.1. Stopą wzrostu $S_{t_0}f$ funkcji f w momencie t_0 nazywamy wyrażenie

$$S_{t_0}f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t \cdot f(t_0)} = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}.$$

Fakt 8.8.2. Stopa wzrostu jest w przybliżeniu równa procentowej zmianie wartości funkcji f przy przyroście czasu o 0,01 jednostki.

Przykład 8.8.3. Wyznamy stopę wzrostu funkcji wykładniczej postaci $f(t) = c \cdot a^t$, gdzie $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ponieważ $f'(t) = [c \cdot a^t]' = c \cdot a^t \cdot \ln a$, otrzymujemy

$$S_{t_0}f = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} = \frac{c \cdot a^{t_0} \cdot \ln a}{c \cdot a^{t_0}} = \ln a.$$

Widzimy zatem, że stopa wzrostu funkcji wykładniczej jest stała.

Do pojęcia stopy wzrostu wrócimy przy okazji omawiania tzw. funkcji logistycznej w rozdziale 9.7.

8.9. Twierdzenia o wartości średniej

W niniejszym podrozdziale przedstawimy dwa twierdzenia o wartości średniej, pochodzące od matematyków francuskich Michela Rolle'a (1652–1719) i Josepha Louisa de Lagrange'a (1736–1813). Drugie twierdzenie pozwoli nam sformułować twierdzenie 9.1.1 o warunkach dostatecznych monotoniczności funkcji różniczkowalnej.

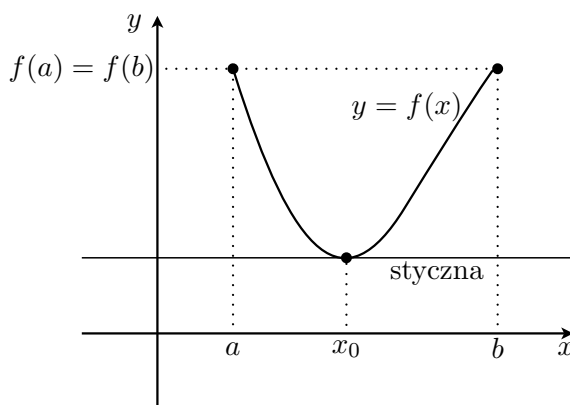
Twierdzenie 8.9.1 (Rolle'a).

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz na końcach przedziału przyjmuje te same wartości, tzn. $f(a) = f(b)$, to wtedy w przedziale (a, b) istnieje miejsce zerowe pochodnej f' , tzn. istnieje argument $x_0 \in (a, b)$, taki że $f'(x_0) = 0$.

Teza twierdzenia Rolle'a posiada następującą interpretację geometryczną: jeżeli dla pewnego $x_0 \in (a, b)$ mamy $f'(x_0) = 0$, to prosta styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, czyli prosta

$$y = f'(x_0) \cdot x + [f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0] = f(x_0)$$

jest prostą poziomą, tzn. równoległą do osi Ox . Sytuację taką przedstawiono na rysunku 8.2.



Rysunek 8.2. Geometryczna interpretacja twierdzenia Rolle'a

Przykład 8.9.2. Uzasadnijmy, że na wykresie funkcji $f(x) = |x - 1|^3$ na przedziale $(0, 2)$ istnieje taki punkt, w którym styczna do tego wykresu jest pozioma.

Funkcja $f(x) = |x - 1|^3$ jest funkcją ciągłą w zbiorze \mathbb{R} , a w szczególności w przedziale $[0, 2]$. Ponieważ

$$|x - 1| = \begin{cases} -(x - 1) = -x + 1 & \text{dla } x - 1 < 0 \iff x < 1, \\ x - 1 & \text{dla } x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1, \end{cases}$$

to otrzymujemy

$$f(x) = |x - 1|^3 = \begin{cases} (-x + 1)^3 & \text{dla } x < 1, \\ (x - 1)^3 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

Wyznamy teraz funkcję pochodną funkcji f .

Dla $x < 1$ zachodzi

$$f'(x) = [(-x + 1)^3]' = 3(-x + 1)^2 \cdot (-1) = -3(-x + 1)^2.$$

Dla $x = 1$ mamy

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 0,$$

ponieważ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-x + 1)^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[-(x - 1)]^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)^3}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x - 1)^2 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Dla $x > 1$ mamy

$$f'(x) = [(x - 1)^3]' = 3(x - 1)^2 \cdot 1 = 3(x - 1)^2.$$

Zatem możemy zapisać, że

$$f'(x) = \begin{cases} -3(-x + 1)^2 & \text{dla } x < 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1, \\ 3(x - 1)^2 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Wobec powyższego f jest funkcją różniczkowalną w zbiorze \mathbb{R} , w szczególności w przedziale $(0, 2)$. Wyznamy wartości funkcji f na końcach tego przedziału.

$$\begin{aligned} f(0) &= |0 - 1|^3 = |-1|^3 = 1^3 = 1, \\ f(2) &= |2 - 1|^3 = |1|^3 = 1^3 = 1. \end{aligned}$$

Zatem $f(0) = f(2)$ i tym samym spełnione są wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a. Po zastosowaniu tego twierdzenia możemy stwierdzić, iż na wykresie funkcji $f(x) = |x - 1|^3$ na przedziale $(0, 2)$ istnieje taki punkt, w którym styczna do wykresu jest prostą równoległą do osi Ox .

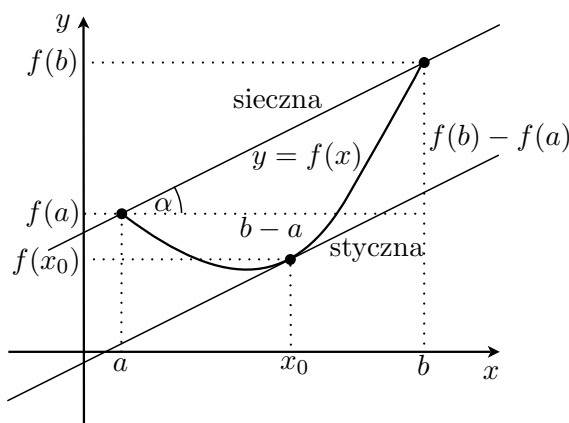
Uogólnieniem twierdzenia Rolle'a jest twierdzenie Lagrange'a.

Twierdzenie 8.9.3 (Lagrange'a).

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) , to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że

$$(8.9.1) \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tezę twierdzenia Lagrange'a można interpretować geometrycznie następująco: Rozpatrujemy wykres funkcji f na przedziale $[a, b]$. Liczba $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg} \alpha$ to współczynnik kierunkowy prostej siecznej, przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Liczba $f'(x_0)$ to współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Zatem równość $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ oznacza, że te dwie proste są równoległe. Sytuację taką przedstawiono na rysunku 8.3.



Rysunek 8.3. Geometryczna interpretacja twierdzenia Lagrange'a

Przykład 8.9.4. Znajdźmy w przedziale $[-1, 3]$ taki punkt x_0 , aby styczna do krzywej $y = f(x) = x^2 + 3x + 7$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ była równoległa do siecznej łączącej końce tej krzywej na tym przedziale.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = x^2 + 3x + 7$ jest funkcją ciągłą w zbiorze \mathbb{R} , a w szczególności w przedziale $[-1, 3]$. Ponadto $f'(x) = [x^2 + 3x + 7]' = 2x + 3$, czyli f jest funkcją różniczkowalną w zbiorze \mathbb{R} , w szczególności w przedziale $(-1, 3)$. Skoro założenia twierdzenia Lagrange'a są spełnione, to istnieje punkt $x_0 \in (-1, 3)$, taki że

$$(8.9.2) \quad f'(x_0) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 + 3 \cdot 3 + 7 = 9 + 9 + 7 = 25, \\ f(-1) &= (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 7 = 1 - 3 + 7 = 5, \end{aligned}$$

to z równania (8.9.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2x_0 + 3 &= \frac{25 - 5}{4}, \\ 2x_0 + 3 &= \frac{20}{4}, \\ 2x_0 + 3 &= 5, \\ 2x_0 &= 2, \quad / : 2, \\ x_0 &= 1. \end{aligned}$$

Ponadto $f(x_0) = f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 7 = 11$. Zatem równoległa do prostej stycznej łączącej końce krzywej $y = x^2 + 3x + 7$ na przedziale $[-1, 3]$ jest prosta styczna do tej krzywej w punkcie $(1, 11)$.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Lagrange'a jest twierdzenie 9.1.1 o warunkach dostatecznych monotoniczności funkcji różniczkowalnej, które zaprezentujemy w podrozdziale 9.1.

8.10. Pochodne wyższych rzędów

W tym podrozdziale zakładamy, że $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wprowadzimy tutaj pojęcie funkcji pochodnej n -tego rzędu.

Definicja 8.10.1. Pochodną właściwą n -tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x_0) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x_0), \\ f^{(1)}(x_0) &\stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0), \\ f^{(n)}(x_0) &\stackrel{\text{def}}{=} [f^{(n-1)}]'(x_0) \text{ dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Definicja 8.10.2. Funkcję f , która posiada pochodną właściwą n -tego rzędu $f^{(n)}(x_0)$ w każdym punkcie x_0 zbioru A , nazywamy n -krotnie różniczkowalną w zbiorze A .

Definicja 8.10.3. Niech A_n będzie maksymalnym zbiorem, w którym funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna. Funkcję $f^{(n)}: A_n \rightarrow \mathbb{R}$, która x_0 przypisuje $f^{(n)}(x_0)$, nazywamy *funkcją pochodną n -tego rzędu* (lub krótko: *n -tą pochodną*) funkcji f .

Notacja: Zwyczajowo zamiast $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ piszemy odpowiednio f'' , f''' , f^{iv} .

Przykład 8.10.4. Obliczmy pochodną trzeciego rzędu funkcji $f(x) = \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \\ f''(x) &= [f'(x)]' = [(1+x)^{-1}]' = (-1) \cdot (1+x)^{-2} \cdot 1 = -(1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= [f''(x)]' = [-(1+x)^{-2}]' = -(-2) \cdot (1+x)^{-3} \cdot 1 = 2 \cdot (1+x)^{-3} = \\ &= \frac{2}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

Na zakończenie zauważmy, że $D_f = D_{f'} = D_{f''} = D_{f'''} = (-1, +\infty)$.

Przykład 8.10.5. Obliczmy pochodną trzeciego rzędu funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{e^x}{x} \right]' = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \\ f''(x) &= \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right]' = \frac{[e^x(x-1)]' \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} = \\ &= \frac{[e^x(x-1) + e^x] \cdot x^2 - e^x(2x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{e^x \cdot x \cdot x^2 - e^x(2x^2 - 2x)}{x^4} = \\ &= \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4}, \\ f'''(x) &= \left[\frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4} \right]' = \\ &= \frac{[e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)]' \cdot x^4 - e^x(x^3 - 2x^2 + 2x) \cdot 4x^3}{x^8} = \\ &= \frac{[e^x(x^3 - 2x^2 + 2x) + e^x(3x^2 - 4x + 2)] \cdot x^4 - e^x(4x^6 - 8x^5 + 8x^4)}{x^8} = \\ &= \frac{e^x(x^3 + x^2 - 2x + 2) \cdot x^4 - e^x(4x^6 - 8x^5 + 8x^4)}{x^8} = \\ &= \frac{e^x(x^7 + x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 4x^6 + 8x^5 - 8x^4)}{x^8} = \\ &= \frac{e^x(x^7 - 3x^6 + 6x^5 - 6x^4)}{x^8} = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{x^4}. \end{aligned}$$

Na zakończenie zauważmy, że $D_f = D_{f'} = D_{f''} = D_{f'''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8.11. Rozwinięcia funkcji według Taylora i Maclaurina

W tym podrozdziale przedstawimy rozwinięcia funkcji pochodzące od matematyka angielskiego Brooka Taylora (1685–1731) oraz matematyka szkockiego Colina Maclaurina (1698–1746). Rozwinięcia te pozwolą przedstawić dowolną

„dostatecznie porządną” funkcję jako sumę pewnego wielomianu i pewnej „małej” reszty. Przedstawienia takie będziemy wykorzystywali do tworzenia wzorów przybliżonych oraz szacowania wartości różnych wyrażeń funkcyjnych. Dokładność takich szacowań będzie dowolna i dzięki temu znacznie lepsza niż dokładność uzyskana przy stosowaniu różniczki funkcji (patrz podrozdział 8.3).

Twierdzenie 8.11.1 (Taylora).

Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jeżeli funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 , to dla każdego $x \in O(x_0)$ istnieje punkt c pomiędzy x_0 i x , taki że

$$(8.11.1) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Równość (8.11.1) nazywamy *wzorem Taylora*.

Definicja 8.11.2. Wielomian

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

nazywamy *wielomianem Taylora rzędu $(n-1)$ funkcji f w punkcie x_0* .

Fakt 8.11.3. Wielomian Taylora rzędu $(n-1)$ jest wielomianem stopnia $(n-1)$ zmiennej x .

Definicja 8.11.4. Wyrażenie

$$R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazywamy *n -tą resztą Lagrange’a funkcji f w punkcie x_0* .

Fakt 8.11.5. Przy $x \rightarrow x_0$ n -ta reszta Lagrange’a jest wielkością nieskończenie małą w porównaniu z wyrażeniem $(x - x_0)^n$, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Uwaga 8.11.6. Jeśli w twierdzeniu 8.11.1 i definicji 8.11.2 przyjmimy $x_0 = 0$, to otrzymamy odpowiednio *wzór Maclaurina* oraz *wielomian Maclaurina rzędu $(n-1)$ funkcji f* .

Przykład 8.11.7. Napiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 3$ oraz punktu $x_0 = 0$, czyli de facto wzór Maclaurina dla tej funkcji. Przypomnijmy, że $D_f = (-1, +\infty)$.

Mamy $f(0) = \ln(1 + 0) = \ln 1 = 0$. Korzystając z przykładu 8.10.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1, \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f''(0) &= \frac{-1}{(1+0)^2} = -1, \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f'''(c) &= \frac{2}{(1+c)^3}. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe do wzoru (8.11.1), otrzymujemy

$$\begin{aligned} (8.11.2) \quad \ln(1+x) &= 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{2}{3!}(x-0)^3 = \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{(1+c)^3 \cdot 6}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3(1+c)^3}x^3, \end{aligned}$$

gdzie c leży pomiędzy 0 oraz x .

Fakt 8.11.8. Rozwinięcie funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ według Maclaurina jest postaci

$$(8.11.3) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+c)^n},$$

gdzie $x \in (-1, +\infty)$, c leży pomiędzy 0 oraz x , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Przykład 8.11.9. Napiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$, punktu $x_0 = 1$ oraz $n = 3$. Przypomnijmy, że $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Mamy $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$. Korzystając z przykładu 8.10.5, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x-1)}{x^2}, & f'(1) &= \frac{e^1(1-1)}{1^2} = 0, \\ f''(x) &= \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4}, & f''(1) &= \frac{e^1(1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1)}{1^4} = \frac{e \cdot 1}{1} = e, \\ f'''(x) &= \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{x^4}, & f'''(c) &= \frac{e^c(c^3 - 3c^2 + 6c - 6)}{c^4}. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe do wzoru (8.11.1), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x}{x} &= e + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e^c(c^3 - 3c^2 + 6c - 6)}{c^4 \cdot 3!}(x-1)^3 = \\
 &= e + \frac{e}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{e^c(c^3 - 3c^2 + 6c - 6)}{6c^4}(x-1)^3 = \\
 &= e + \frac{e}{2}x^2 - ex + \frac{e}{2} + \frac{e^c(c^3 - 3c^2 + 6c - 6)}{6c^4}(x-1)^3 = \\
 &= \underbrace{\frac{e}{2}x^2 - ex + \frac{3}{2}e}_{\text{wielomian Taylora stopnia 2}} + \underbrace{\frac{e^c(c^3 - 3c^2 + 6c - 6)}{6c^4}(x-1)^3}_{\text{3-cia reszta Lagrange'a}},
 \end{aligned}$$

gdzie c leży pomiędzy 1 oraz x .

Tak jak wspominaliśmy na początku podrozdziału, wzory Taylora i Maclaurina są stosowane w zagadnieniach aproksymacyjnych, np. przy tworzeniu wzorów przybliżonych i szacowaniu ich dokładności.

Przykład 8.11.10. Oszacujmy dokładność wzoru przybliżonego

$$(8.11.4) \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } |x| < \frac{1}{10}.$$

Z równości (8.11.2) otrzymujemy, że błąd tego wzoru przybliżonego wynosi

$$\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| = \left| \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3(1+c)^3}x^3\right) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{3(1+c)^3}x^3 \right|,$$

gdzie c jest pewną liczbą pomiędzy 0 oraz x . Taka liczba spełnia oczywiście nierówność $|c| < \frac{1}{10}$, co w konsekwencji daje

$$\begin{array}{rcccl}
 -\frac{1}{10} & < & c & < & \frac{1}{10}, & / + 1, \\
 \frac{9}{10} & < & 1+c & < & \frac{11}{10}, & / ()^3, \\
 \left(\frac{9}{10}\right)^3 & < & (1+c)^3 & < & \left(\frac{11}{10}\right)^3, \\
 \frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)^3} & > & \frac{1}{(1+c)^3} & > & \frac{1}{\left(\frac{11}{10}\right)^3}.
 \end{array}$$

Teraz możemy przystąpić do szacowania błędu wzoru (8.11.4).

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{3(1+c)^3}x^3 \right| &= \left| \frac{1}{3} \right| \cdot \left| \frac{1}{(1+c)^3} \right| \cdot |x^3| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{1}{(1+c)^3} \right| \cdot |x|^3 < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)^3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{3 \cdot 9^3} = \frac{1}{2187} \approx 0,00045725.
 \end{aligned}$$

Możemy zatem stwierdzić, że błąd wzoru przybliżonego (8.11.4) wynosi co najwyżej $\frac{1}{2187}$.

Wzory Taylora i Maclaurina wykorzystywane są również do obliczania przybliżonych wartości wyrażeń zadaną, ale dowolną dokładnością.

Przykład 8.11.11. Wyznamy przybliżenie wartości wyrażenia $\ln 1,1$ z dokładnością do 10^{-4} . Do wzoru (8.11.3) podstawiamy $x = 0,1$ i otrzymujemy

$$\ln 1,1 = \underbrace{(0,1) - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{(0,1)^{n-1}}{n-1}}_{P_{n-1}} + (-1)^{n+1} \frac{(0,1)^n}{n(1+c)^n},$$

gdzie c jest pewną liczbą pomiędzy 0 oraz 0,1. Jeżeli jako wartość wyrażenia $\ln 1,1$ przyjmiemy P_{n-1} , to błąd takiego przybliżenia będzie oczywiście wynosił $\left| (-1)^{n+1} \frac{(0,1)^n}{n(1+c)^n} \right|$. Musimy zatem znaleźć takie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, żeby spełniona była nierówność

$$(8.11.5) \quad \left| (-1)^{n+1} \frac{(0,1)^n}{n(1+c)^n} \right| < 10^{-4}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} 0 &< c < 0,1, & / + 1, \\ 1 &< 1+c < 1,1, & / ()^n, \\ 1 &< (1+c)^n < (1,1)^n, \\ 1 &> \frac{1}{(1+c)^n} > \frac{1}{(1,1)^n}, \end{aligned}$$

to po lewej stronie nierówności (8.11.5) otrzymujemy

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{(0,1)^n}{n(1+c)^n} \right| = \frac{(0,1)^n}{n(1+c)^n} < \frac{(0,1)^n}{n}.$$

Zamiast nierówności (8.11.5) rozwiązujemy więc nierówność

$$\begin{aligned} \frac{(0,1)^n}{n} &< 10^{-4}, \\ \frac{1}{10^n \cdot n} &< \frac{1}{10^4}, \\ 10^n \cdot n &> 10^4, \\ n &\geq 4. \end{aligned}$$

Zatem aby dokładność przybliżenia $\ln 1,1 \approx P_{n-1}$ wynosiła 10^{-4} , należy przyjąć $n \geq 4$.

Wyznamy wartość przybliżoną dla $n = 4$.

$$\ln 1,1 \approx \underbrace{(0,1) - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3}}_{P_{4-1} = P_3} = \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} = \frac{300 - 15 + 1}{3000} = \frac{286}{3000}.$$

Przybliżenie wartości wyrażenia $\ln 1,1$ z dokładnością do 10^{-4} wynosi więc

$$\ln 1,1 \approx \frac{286}{3000} = 0,095(3).$$

Rozdział 9

Badanie zmienności funkcji

W tym rozdziale przedstawimy zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji. Przy pomocy pochodnych funkcji możemy badać takie jej cechy jak: monotoniczność, ekstrema lokalne i globalne, wypukłość czy też punkty przegięcia. Znajomość tych cech pozwoli nam później sporządzić dokładny szkic wykresu danej funkcji.

9.1. Monotoniczność funkcji

Monotoniczność funkcji na danym przedziale (patrz definicja 3.2.10) możemy ustalić, badając znak pierwszej pochodnej tej funkcji.

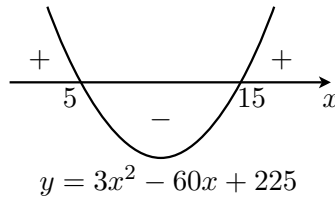
Twierdzenie 9.1.1 (warunki dostateczne monotoniczności funkcji).

Niech A oznacza dowolny przedział otwarty i niech funkcja f będzie różniczkowalna w A . Jeżeli dla każdego $x \in A$

- $f'(x) = 0$, to funkcja f jest na przedziale A stała,
- $f'(x) > 0$, to funkcja f jest na przedziale A rosnąca,
- $f'(x) \geq 0$, to funkcja f jest na przedziale A niemalejąca,
- $f'(x) < 0$, to funkcja f jest na przedziale A malejąca,
- $f'(x) \leq 0$, to funkcja f jest na przedziale A nierosnąca.

Przykład 9.1.2. Wyznamy przedziały monotoniczności funkcji wielomianowej $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$. Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$. Zbadajmy pochodną funkcji f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^3 - 30x^2 + 225x]' = 3x^2 - 60x + 225, & D_{f'} &= \mathbb{R}, \\ f'(x) = 0 &\iff 3x^2 - 60x + 225 = 0, & / : 3, \\ & & x^2 - 20x + 75 &= 0, \\ \Delta &= (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 75 = 400 - 300 = 100, & \sqrt{\Delta} &= 10, \\ x_1 &= \frac{20 - 10}{2} = 5, & x_2 &= \frac{20 + 10}{2} = 15. \end{aligned}$$

Rysunek 9.1. Szkic wykresu funkcji $y = 3x^2 - 60x + 225$

Korzystając ze szkicu wykresu funkcji $f'(x) = 3x^2 - 60x + 225$ (patrz rysunek 9.1), otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x \in (-\infty, 5) \text{ lub } x \in (15, +\infty), \\ f'(x) < 0 &\iff x \in (5, 15). \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$ jest rosnąca na przedziałach $(-\infty, 5)$ oraz $(15, +\infty)$, zaś malejąca – na przedziale $(5, 15)$.

Przykład 9.1.3. Wyznamy przedziały monotoniczności funkcji zadanej wzorem $f(x) = e^x(x+1)$. Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$. Zbadamy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = [e^x(x+1)]' = e^x \cdot (x+1) + e^x \cdot 1 = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2), \quad D_{f'} = \mathbb{R}.$$

Ponieważ $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$, mamy

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff e^x(x+2) = 0 \iff x+2 = 0 \iff x = -2, \\ f'(x) > 0 &\iff e^x(x+2) > 0 \iff x+2 > 0 \iff x > -2, \\ f'(x) < 0 &\iff e^x(x+2) < 0 \iff x+2 < 0 \iff x < -2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(x) = e^x(x+1)$ jest rosnąca na przedziale $(-2, +\infty)$, zaś malejąca – na przedziale $(-\infty, -2)$.

Przykład 9.1.4. Wyznamy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. Przy założeniu $x > 0 \wedge x \neq 1$ otrzymujemy $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty) = (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Badamy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = \left[\frac{x}{\ln x} \right]' = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, \quad D_{f'} = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Ponieważ $(\forall x \in D_f) \ln^2 x > 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \iff \ln x - 1 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e, \\ f'(x) > 0 &\iff \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0 \iff \ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e, \\ f'(x) < 0 &\iff \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} < 0 \iff \ln x - 1 < 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e. \end{aligned}$$

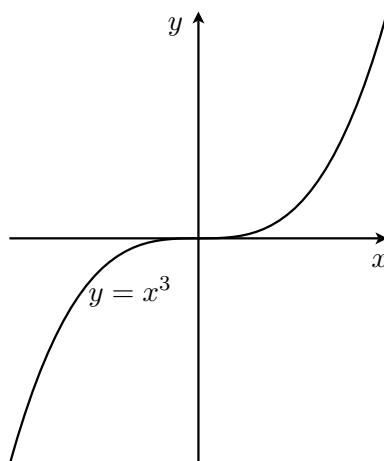
Z powyższego wynika, że funkcja $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ jest rosnąca na przedziale $(e, +\infty)$, zaś malejąca – na przedziałach $(0, 1)$ oraz $(1, e)$.

Fakt 9.1.5. Jeżeli $(\forall x \in A) f'(x) \geq 0$ [lub $(\forall x \in A) f'(x) \leq 0$] oraz równość $f'(x) = 0$ zachodzi jedynie dla skończonej ilości argumentów, to funkcja f jest na przedziale A rosnąca [lub malejąca, odpowiednio].

Przykład 9.1.6. Rozważmy funkcję $f(x) = x^3$. Oczywiście $f'(x) = 3x^2$. Ponieważ

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \neq 0, \quad f'(0) = 0,$$

to $f(x) = x^3$ jest funkcją rosnącą na \mathbb{R} (patrz rysunek 9.2).



Rysunek 9.2. Wykres funkcji $f(x) = x^3$

9.2. Ekstrema lokalne funkcji

W tej części książki wprowadzimy pojęcie ekstremów lokalnych funkcji oraz zastosujemy rachunek różniczkowy do wyznaczania tych ekstremów. Przypomnijmy, że otoczenie $O(x_0)$ punktu x_0 to przedział otwarty $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$ (patrz definicja 7.1.1).

Definicja 9.2.1 (ekstrema lokalne funkcji).

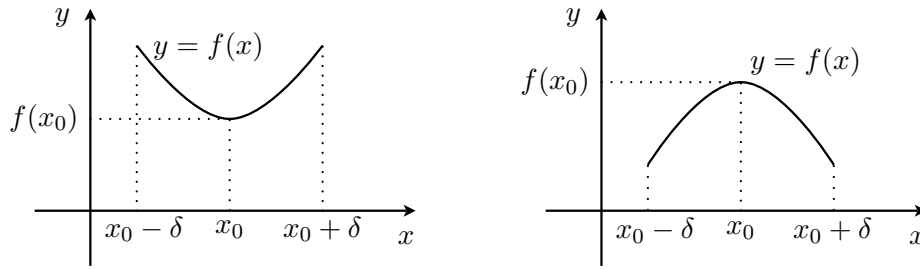
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ *minimum lokalne*, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0) \subseteq D_f$, takie że

$$(\forall x \in O(x_0)) f(x) \geq f(x_0).$$

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ *maksimum lokalne*, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0) \subseteq D_f$, takie że

$$(\forall x \in O(x_0)) f(x) \leq f(x_0).$$

Pojęcia minimum i maksimum lokalnego funkcji posiadają interpretację geometryczną przedstawioną na rysunku 9.3.



Rysunek 9.3. Minimum lokalne funkcji i maksimum lokalne funkcji

Na początku sformułujemy twierdzenie, które pozwoli nam znaleźć te argumenty funkcji różniczkowalnej, które będą kandydatami na jej ekstrema lokalne. Autorem tego twierdzenia jest matematyk francuski Pierre de Fermat (1601–1665).

Twierdzenie 9.2.2 (Fermata, warunek konieczny ekstremum lokalnego). Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 i jest w tym punkcie różniczkowalna, to x_0 jest miejscem zerowym funkcji pochodnej funkcji f , tzn. $f'(x_0) = 0$.

Definicja 9.2.3. Niech $x_0 \in D_{f'}$. Jeżeli $f'(x_0) = 0$, to punkt x_0 nazywamy *punktem stacjonarnym* funkcji f .

Warto zauważyć, że twierdzenie Fermata nie wspomina o tych punktach, w których funkcja posiada ekstrema lokalne i równocześnie nie jest różniczkowalna. Powracając do przykładu 8.1.7, możemy stwierdzić, że funkcja $f(x) = |x - 3|$, która w punkcie $x_0 = 3$ nie jest różniczkowalna, posiada w tym punkcie minimum lokalne. Dlatego też przy typowaniu kandydatów na ekstrema lokalne funkcji będziemy posługiwali się następującym faktem.

Fakt 9.2.4. Funkcja *może mieć* ekstrema lokalne *tylko* w tych punktach, w których jej pochodna równa się zero lub nie istnieje.

Kiedy już ustalimy, które argumenty funkcji mogą być punktami jej ekstremów lokalnych, każdego z tych kandydatów trzeba poddać weryfikacji przy pomocy jednego z twierdzeń 9.2.5 lub 9.2.8 o warunkach dostatecznych istnienia ekstremum (w przypadku punktów stacjonarnych funkcji) lub przy pomocy innych środków (w przypadku punktów, w których funkcja nie posiada pochodnej właściwej).

Twierdzenie 9.2.5 (I warunek dostateczny ekstremum lokalnego).

Niech funkcja f będzie różniczkowalna w otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 . Jeżeli spełnione są warunki:

- i) punkt x_0 jest punktem stacjonarnym funkcji f ,
- ii) przy przejściu przez x_0 pochodna f' zmienia znak z „+” na „-”,

to funkcja f posiada w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Jeżeli spełnione są warunek i) oraz warunek

ii)' przy przejściu przez x_0 pochodna f' zmienia znak z „-” na „+”, to funkcja f posiada w punkcie x_0 minimum lokalne.

Sformułowanie „przy przejściu przez x_0 pochodna f' zmienia znak z «+» na «-»” należy rozumieć w ten sposób, że w pewnym sąsiedztwie lewostronnym $S(x_0^-)$ punktu x_0 pochodna jest dodatnia oraz w pewnym sąsiedztwie prawostronnym $S(x_0^+)$ punktu x_0 pochodna jest ujemna. Analogicznie należy rozumieć sformułowanie z warunku ii)'.

Przykład 9.2.6. Znajdźmy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = e^x + e^{-x}$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$. Zbadajmy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = [e^x + e^{-x}]' = e^x - e^{-x}.$$

Ponieważ $D_{f'} = \mathbb{R}$, to nie ma argumentów, dla których f' nie istnieje. Zatem jedynymi kandydatami na punkty ekstremów lokalnych funkcji f są jej punkty stacjonarne.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff e^x - e^{-x} = 0, \\ &e^x = e^{-x}, \\ &x = -x, \\ x + x &= 0, \\ 2x &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

W konsekwencji jedynym kandydatem na punkt ekstremum lokalnego jest $x = 0$. Zbadajmy znak pochodnej f' w sąsiedztwie 0.

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\iff e^x - e^{-x} < 0 \iff e^x < e^{-x} \iff x < -x \iff x < 0, \\ f'(x) > 0 &\iff e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x \iff x > 0. \end{aligned}$$

Możemy zatem stwierdzić, że przy przejściu przez $x = 0$ pochodna f' zmienia znak z „-” na „+”, czyli że w punkcie $x = 0$ funkcja f ma minimum lokalne równe $f(0) = e^0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2$.

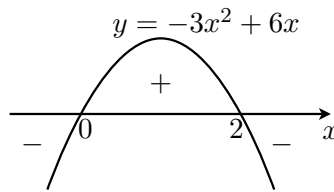
Przykład 9.2.7. Znajdźmy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$. Wyznaczymy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = [-x^3 + 3x^2 - 4]' = -3x^2 + 6x, \quad D_{f'} = \mathbb{R}.$$

Zatem jedynymi kandydatami na punkty ekstremów lokalnych funkcji f będą miejsca zerowe pochodnej f' .

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -3x^2 + 6x = 0, \\ &-3x(x - 2) = 0, \\ &-3x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 0, \\ &x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Zbadajmy znak pochodnej f' w otoczeniach punktów stacjonarnych f . Wykorzystamy w tym celu szkic wykresu f' (patrz rysunek 9.4).



Rysunek 9.4. Szkic wykresu funkcji $y = -3x^2 + 6x$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -3x^2 + 6x > 0 \iff x \in (0, 2), \\ f'(x) < 0 &\iff -3x^2 + 6x < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

Zatem przy przejściu przez $x = 0$ pochodna f' zmienia znak z „ $-$ ” na „ $+$ ”, czyli dla $x = 0$ funkcja f posiada minimum lokalne równe $f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$. Natomiast przy przejściu przez $x = 2$ pochodna f' zmienia znak z „ $+$ ” na „ $-$ ”, czyli dla $x = 2$ funkcja f posiada maksimum lokalne równe $f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$.

Aby móc zastosować drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji, należy wyznaczyć pochodne wyższych rzędów tej funkcji.

Twierdzenie 9.2.8 (II warunek dostateczny ekstremum lokalnego).

Niech funkcja f będzie n -krotnie różniczkowalna w otoczeniu $O(x_0)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli spełnione są warunki:

- i) $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
- ii) $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- iii) n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$,

to funkcja f posiada w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Jeżeli zamiast warunku ii) jest spełniony warunek

- ii)' $f^{(n)}(x_0) > 0$,

to funkcja f posiada w punkcie x_0 minimum lokalne.

Po małej modyfikacji powyższe twierdzenie pozwala nam orzec, że dany punkt nie jest punktem ekstremum lokalnego funkcji.

Fakt 9.2.9. Jeśli w warunku iii) twierdzenia 9.2.8 mamy „ n jest liczbą nieparzystą”, to funkcja f w punkcie x_0 nie posiada ekstremum lokalnego.

Przykład 9.2.10. Znajdźmy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^{100} + 2x^{50}$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$. Wyznamy najpierw n -tą pochodną funkcji f , gdzie $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 100x^{99} + 100x^{49}, \\ f''(x) &= 100 \cdot 99 \cdot x^{98} + 100 \cdot 49 \cdot x^{48}, \\ f'''(x) &= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot x^{97} + 100 \cdot 49 \cdot 48 \cdot x^{47}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \begin{cases} a_n \cdot x^{100-n} + b_n \cdot x^{50-n} & \text{dla } n \leq 50 \text{ i pewnych stałych } a_n, b_n \in \mathbb{N}, \\ c_n \cdot x^{100-n} & \text{dla } 51 \leq n \leq 100 \text{ i pewnej stałej } c_n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla } n > 100. \end{cases} \end{aligned}$$

Zauważmy, że $(\forall n \in \mathbb{N}) D_{f^{(n)}} = \mathbb{R}$, czyli że jedynymi kandydatami na ekstrema lokalne będą punkty stacjonarne funkcji f . Wyznamy te punkty.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 100x^{99} + 100x^{49} = 0, \\ &100x^{49}(x^{50} + 1) = 0, \\ &100x^{49} = 0 \quad \text{lub} \quad x^{50} + 1 = 0, \\ &x = 0 \quad \text{lub} \quad x \in \emptyset \quad (\text{równanie sprzeczne}). \end{aligned}$$

Zatem jedynym punktem stacjonarnym jest $x = 0$. Pamiętając, że

$$\begin{aligned} f^{(49)}(x) &= a_{49} \cdot x^{51} + b_{49} \cdot x, \\ f^{(50)}(x) &= a_{50} \cdot x^{50} + b_{50}, \end{aligned}$$

wyznamy wartości pochodnych kolejnych rzędów w tym punkcie.

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, \\ f''(0) &= 0, \\ f'''(0) &= 0, \\ &\vdots \\ f^{(49)}(0) &= 0, \\ f^{(50)}(0) &= a_{50} \cdot 0^{50} + b_{50} = b_{50} = 100 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 1 = 100 \cdot 49!. \end{aligned}$$

Ponieważ $f^{(50)}(0) = 100 \cdot 49! > 0$ oraz $n = 50$ jest liczbą parzystą, to z twierdzenia 9.2.8 otrzymujemy, że w punkcie $x = 0$ funkcja f osiąga minimum lokalne, które jest równe $f(0) = 0^{100} + 2 \cdot 0^{50} = 0$.

9.3. Ekstrema globalne funkcji

Po zbadaniu ekstremów lokalnych kolejnym elementem badania przebiegu zmienności danej funkcji jest wyznaczenie ekstremów globalnych tej funkcji na zadanym zbiorze. Przy wyznaczaniu ekstremów globalnych będziemy korzystali m.in. z algorytmu wyznaczania ekstremów lokalnych.

Definicja 9.3.1 (ekstrema globalne funkcji na zbiorze).

Niech $A \subseteq D_f$ i $A \neq \emptyset$. Liczba $m \in \mathbb{R}$ jest *minimum globalnym funkcji f na zbiorze A* , jeśli

$$(\exists x_0 \in A) f(x_0) = m \quad \text{oraz} \quad (\forall x \in A) f(x) \geq m.$$

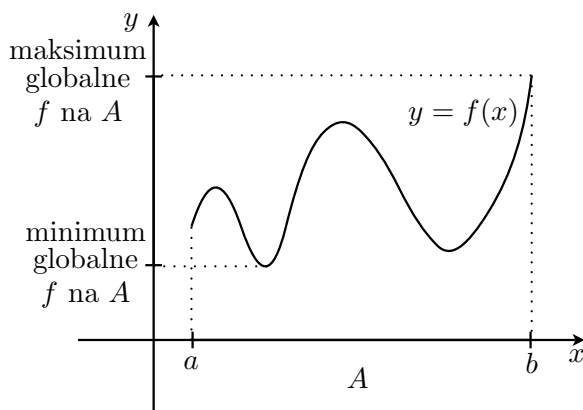
Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest *maksimum globalnym funkcji f na zbiorze A* , jeśli

$$(\exists x_0 \in A) f(x_0) = M \quad \text{oraz} \quad (\forall x \in A) f(x) \leq M.$$

Minimum globalne funkcji na zbiorze nazywamy inaczej *wartością najmniejszą tej funkcji na tym zbiorze*, zaś maksimum globalne na zbiorze – *wartością największą na zbiorze*. Warto zauważyć, że pojęcia wartości najmniejszej i największej funkcji na przedziale pojawiły się już w twierdzeniu 7.2.3 Weierstrassa o osiągnięciu kresów. Twierdzenie to mówi, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga swoje ekstrema globalne na tym przedziale. Teraz nauczymy się wyznaczać te ekstrema. Najpierw wykorzystamy następujący fakt:

Fakt 9.3.2. Ekstrema globalne funkcji ciągłej na przedziale domkniętym występują albo w jej ekstremach lokalnych, albo na końcach tego przedziału.

Przykładowy wykres funkcji ciągłej na przedziale domkniętym $A = [a, b]$, z zaznaczeniem minimum oraz maksimum globalnego tej funkcji na tym przedziale, przedstawiono na rysunku 9.5.



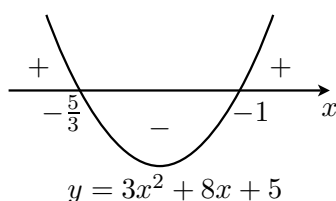
Rysunek 9.5. Ekstrema globalne funkcji ciągłej na przedziale domkniętym

Z faktu 9.3.2 wynika, że procedura wyznaczania ekstremów globalnych funkcji na danym przedziale będzie dwustopniowa: najpierw wyznaczmy ekstrema lokalne, które znajdują się w tym przedziale, a następnie porównamy ich wartości z wartościami funkcji na końcach przedziału. Najmniejsza z tych wartości będzie szukanym minimum globalnym, a największa będzie maksimum globalnym.

Przykład 9.3.3. Wyznaczmy ekstrema globalne funkcji $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ na przedziale $[-2, 1]$. Najpierw zbadamy ekstrema lokalne.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^3 + 4x^2 + 5x + 1]' = 3x^2 + 8x + 5, & D_{f'} &= D_f = \mathbb{R}, \\ f'(x) &= 0 \iff 3x^2 + 8x + 5 = 0, \\ \Delta &= 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4, & \sqrt{\Delta} &= 2, \\ x_1 &= \frac{-8 - 2}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}, & x_2 &= \frac{-8 + 2}{6} = -1. \end{aligned}$$

Na rysunku 9.6 jest przedstawiony szkic wykresu funkcji $y = 3x^2 + 8x + 5$. Z tego szkicu odczytamy znaki pochodnej f' w sąsiedztwie punktów stacjonarnych funkcji f .



Rysunek 9.6. Szkic wykresu funkcji $y = 3x^2 + 8x + 5$

Dla $x = -\frac{5}{3}$ pochodna zmienia znak z „+” na „-”, czyli funkcja f posiada maksimum lokalne równe

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{5}{3}\right) &= \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{3}\right) + 1 = -\frac{125}{27} + 4 \cdot \frac{25}{9} - \frac{25}{3} + 1 = \\ &= -\frac{125}{27} + \frac{300}{27} - \frac{225}{27} + \frac{27}{27} = -\frac{23}{27}. \end{aligned}$$

Dla $x = -1$ pochodna zmienia znak z „-” na „+”, czyli funkcja f posiada minimum lokalne równe

$$f(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + 5(-1) + 1 = -1.$$

Teraz wyznaczamy wartości funkcji f na końcach przedziału $[-2, 1]$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 4(-2)^2 + 5(-2) + 1 = -8 + 16 - 10 + 1 = -1, \\ f(1) &= 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1 = 11. \end{aligned}$$

Po porównaniu ze sobą otrzymanych wartości: $-\frac{23}{27}$, -1 , -1 oraz 11 możemy stwierdzić, że minimum globalne funkcji $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ na przedziale $[-2, 1]$ wynosi -1 , zaś maksimum globalne tej funkcji na tym przedziale wynosi 11 .

W tym miejscu warto odnotować, że przy wyznaczaniu ekstremów globalnych funkcji nie jest konieczne pełne badanie ekstremów lokalnych. Wystarczy obliczyć wartości funkcji we wszystkich punktach podejrzanych o ekstrema lokalne, tzn. we wszystkich punktach stacjonarnych oraz wszystkich punktach nieróżniczkowalności funkcji, należących do danego przedziału. Następnie należy porównać te wartości z wartościami funkcji na końcach przedziału: najmniejsza i największa spośród tych liczb będzie odpowiednio minimum i maksimum globalnym funkcji na danym przedziale.

Przykład 9.3.4. Wyznaczmy ekstrema globalne funkcji $f(x) = x^3|x + 2|$ na przedziale $[-4, 1]$. Najpierw wyznaczamy punkty podejrzane o ekstrema lokalne. Mamy oczywiście

$$f(x) = \begin{cases} x^3(-x-2) & \text{dla } x+2 < 0, \\ x^3(x+2) & \text{dla } x+2 \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} -x^4 - 2x^3 & \text{dla } x < -2, \\ x^4 + 2x^3 & \text{dla } x \geq -2. \end{cases}$$

Zbadajmy teraz różniczkowalność funkcji f w punkcie $x_0 = -2$. Ponieważ

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^4 + 2(-2)^3 = 16 + 2(-8) = 16 - 16 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x + 2}, \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x)}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^4 - 2x^3}{x + 2} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-4x^3 - 6x^2}{1} = \\ &= -4(-2)^3 - 6(-2)^2 = 32 - 24 = 8, \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^4 + 2x^3}{x + 2} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x^3 + 6x^2}{1} = \\ &= 4(-2)^3 + 6(-2)^2 = -32 + 24 = -8, \end{aligned}$$

to granica $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$ nie istnieje, czyli funkcja f nie posiada pochodnej właściwej w punkcie $x_0 = -2$. Dla $x \neq -2$ pochodną $f'(x)$ wyznaczamy łatwo za pomocą reguł różniczkowania.

$$f'(x) = \begin{cases} [-x^4 - 2x^3]' & \text{dla } x < -2, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } x = -2, \\ [x^4 + 2x^3]' & \text{dla } x > -2, \end{cases} = \begin{cases} -4x^3 - 6x^2 & \text{dla } x < -2, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } x = -2, \\ 4x^3 + 6x^2 & \text{dla } x > -2. \end{cases}$$

Teraz wyznaczamy punkty stacjonarne funkcji f .

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -4x^3 - 6x^2 = 0 \quad \text{dla } x < -2 \quad \text{lub} \quad 4x^3 + 6x^2 = 0 \quad \text{dla } x > -2, \\ &\quad -2x^2(2x + 3) = 0, \quad \quad \quad 2x^2(2x + 3) = 0, \\ &\quad -2x^2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 3 = 0, \quad \quad 2x^2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 3 = 0, \\ &\quad \quad \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{3}{2}, \quad \quad \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{3}{2}. \\ &\quad \quad \quad \text{(sprzeczne z } x < -2) \end{aligned}$$

Zatem kandydatami na punkty ekstremów lokalnych są $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ oraz $x = 0$.

Obliczmy wartości funkcji $f(x) = x^3|x + 2|$ we wszystkich tych punktach.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3|-2 + 2| = 0, \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3\left|-\frac{3}{2} + 2\right| = -\frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{27}{16}, \\ f(0) &= 0^3|0 + 2| = 0. \end{aligned}$$

Wyznaczmy wartości funkcji f na końcach przedziału $[-4, 1]$.

$$\begin{aligned} f(-4) &= (-4)^3|-4 + 2| = -64 \cdot 2 = -128, \\ f(1) &= 1^3|1 + 2| = 3. \end{aligned}$$

Po porównaniu wszystkich otrzymanych wartości stwierdzamy, że minimum globalne funkcji $f(x) = x^3|x + 2|$ na przedziale $[-4, 1]$ wynosi -128 , natomiast maksimum globalne tej funkcji na tym przedziale wynosi 3 .

Umiejętność wyznaczania ekstremów globalnych funkcji na zbiorze znajduje swe zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień optymalizacyjnych w problematyce decyzyjnej, np. przy wyznaczaniu optimum produkcyjnego (tzn. takiej wielkości produkcji, dla której zysk jest maksymalny), przy minimalizacji kosztów itp. Możemy teraz powrócić do przykładu 7.2.4 i wyznaczyć dokładną wartość prędkości optymalnej v_0 , której istnienie wykazaliśmy, korzystając z twierdzenia 7.2.3 Weierstrassa o osiągnięciu kresów.

Przykład 9.3.5. Koszt użytkowania autobusu w ciągu godziny wyraża się wzorem empirycznym $K(v) = a + bv^3$, gdzie a, b są stałymi dodatnimi, w zależności od prędkości jazdy $v \in [0, v_{\max}]$, gdzie v_{\max} to maksymalna prędkość autobusu. Przy jakiej prędkości autobus przejedzie dowolną drogę przy najmniejszych kosztach?

Niech autobus przejeżdża w czasie t godzin drogę s , gdzie $s > 0$. Pamiętając, że

$$v = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v},$$

otrzymujemy, że koszt przejechania drogi s wynosi

$$K_s(v) = t \cdot K(v) = t(a + bv^3) = \frac{s}{v}(a + bv^3) = s \left(\frac{a}{v} + bv^2 \right) \quad \text{dla } v > 0.$$

Wyznamy minimum globalne funkcji K_s na przedziale $(0, v_{\max}]$.

$$\begin{aligned} K'_s(v) &= \left[s \left(\frac{a}{v} + bv^2 \right) \right]' = s \left(-\frac{a}{v^2} + 2bv \right) = s \left(\frac{-a + 2bv^3}{v^2} \right) \quad \text{dla } v > 0, \\ K'_s(v) = 0 &\iff s \left(\frac{-a + 2bv^3}{v^2} \right) = 0 \iff \frac{-a + 2bv^3}{v^2} = 0 \iff -a + 2bv^3 = 0 \\ &\iff 2bv^3 = a \iff v^3 = \frac{a}{2b} \iff v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}, \\ K'_s(v) < 0 &\iff s \left(\frac{-a + 2bv^3}{v^2} \right) < 0 \iff -a + 2bv^3 < 0 \iff v < \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}, \\ K'_s(v) > 0 &\iff s \left(\frac{-a + 2bv^3}{v^2} \right) > 0 \iff -a + 2bv^3 > 0 \iff v > \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}. \end{aligned}$$

Przy przejściu przez $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$ pochodna $K'_s(v)$ zmienia znak z „-” na „+”, czyli funkcja K_s osiąga dla $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$ minimum lokalne. Ponieważ funkcja K_s jest malejąca na przedziale $(0, \sqrt[3]{\frac{a}{2b}})$ oraz rosnąca na przedziale $(\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}, v_{\max}]$, to powyższe minimum lokalne jest również minimum globalnym funkcji K_s na przedziale $(0, v_{\max}]$. Podsumowując, można stwierdzić, że koszty przejazdu dowolnej drogi są najmniejsze przy prędkości optymalnej $v_o = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$.

9.4. Wypukłość i wklęsłość funkcji

W tej części książki zdefiniujemy pojęcia funkcji wypukłej i funkcji wklęsłej. Ponadto zastosujemy rachunek różniczkowy do wyznaczania przedziałów wypukłości i wklęsłości danej funkcji.

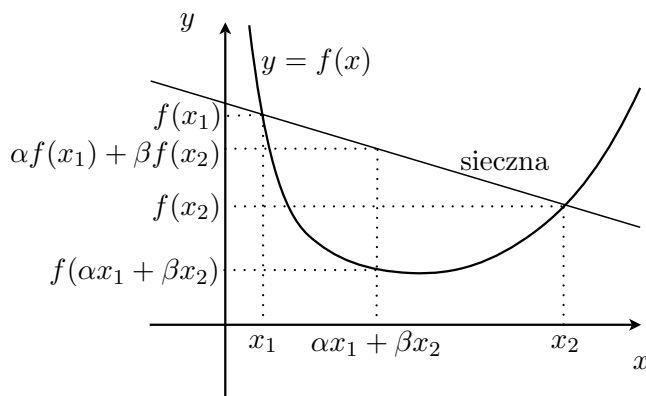
Definicja 9.4.1. Funkcja f jest *wypukła* na przedziale $A \subseteq D_f$, jeżeli dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in A$, takich że $x_1 < x_2$ oraz dla dowolnych liczb dodatnich α, β , takich że $\alpha + \beta = 1$ zachodzi nierówność

$$(9.4.1) \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) < \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

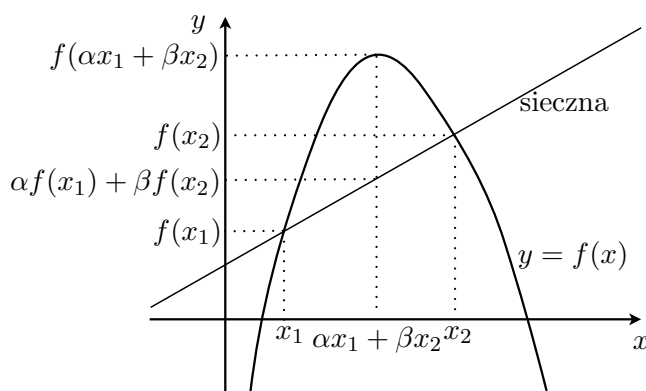
Funkcja f jest *wklęsła* na przedziale $A \subseteq D_f$, jeżeli zamiast nierówności (9.4.1) zachodzi nierówność

$$(9.4.2) \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) > \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Warto zauważyć, że jeśli mamy $\alpha, \beta > 0$ oraz $\alpha + \beta = 1$, to liczba $\alpha x_1 + \beta x_2$ leży w przedziale (x_1, x_2) . Rozważmy sieczną wykresu funkcji f , przechodzącą przez punkty $(x_1, f(x_1))$ oraz $(x_2, f(x_2))$. Warunek (9.4.1) oznacza, że w przedziale $[x_1, x_2]$ sieczna ta leży nad wykresem funkcji f (patrz rysunek 9.7). Natomiast warunek (9.4.2) znaczy, że w przedziale $[x_1, x_2]$ sieczna leży pod wykresem tej funkcji (patrz rysunek 9.8).



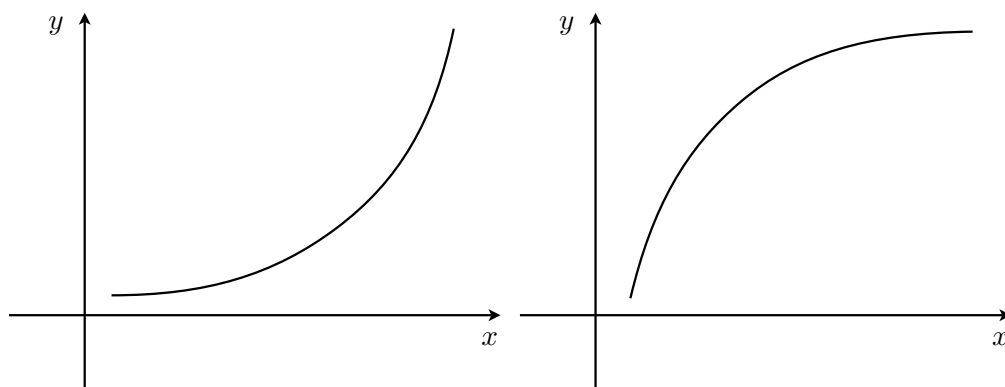
Rysunek 9.7. Wypukłość funkcji



Rysunek 9.8. Wklęsłość funkcji

Wypukłość i wklęsłość funkcji opisują tendencję (tempo) zmian wartości funkcji. Fakt ten jest zobrazowany na rysunku 9.9. Przykładowo funkcja rosnąca i wypukła rośnie coraz szybciej (po lewej), zaś funkcja rosnąca i wklęsła rośnie coraz wolniej (po prawej).

W przypadku gdy funkcja f jest różniczkowalna w przedziale A , pojęcia funkcji wypukłej i funkcji wklęsłej na tym przedziale można równoważnie zdefiniować, używając terminu prostej stycznej do wykresu funkcji.

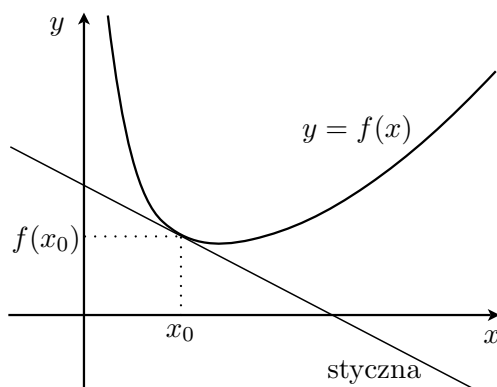


Rysunek 9.9. Wykresy funkcji rosnących w sposób wypukły lub wklęsły

Definicja 9.4.2. Funkcja f różniczkowalna w przedziale A jest *wypukła* na tym przedziale, jeżeli dla każdego $x_0 \in A$ prosta styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ leży pod wykresem tej funkcji.

Funkcja f jest *wklęsła* na przedziale A , jeśli dla każdego $x_0 \in A$ prosta styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ leży nad wykresem tej funkcji.

Pojęcia wypukłości i wklęsłości funkcji podane w definicji 9.4.2 są zilustrowane na rysunkach 9.10 oraz 9.11.



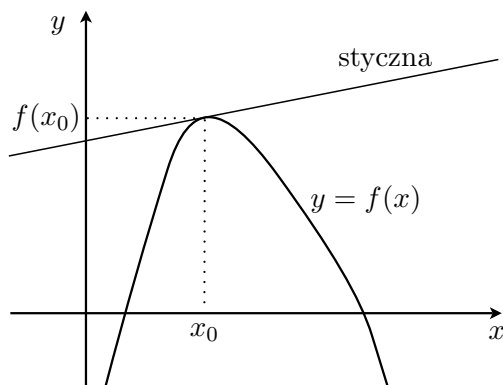
Rysunek 9.10. Wypukłość funkcji w terminach prostej stycznej

Badanie wypukłości i wklęsłości funkcji na przedziale wyłącznie przy użyciu definicji 9.4.1 lub definicji 9.4.2 jest zajęciem trudnym. Dlatego też do takiego badania będziemy używali aparatu rachunku różniczkowego. W szczególności będziemy badali znak drugiej pochodnej danej funkcji.

Twierdzenie 9.4.3 (warunki dostateczne wypukłości funkcji).

Niech A oznacza dowolny przedział otwarty i niech funkcja f będzie dwukrotnie różniczkowalna w A . Jeżeli dla każdego $x \in A$

- $f''(x) > 0$, to funkcja f jest na przedziale A wypukła,



Rysunek 9.11. Wklęsłość funkcji w terminach prostej stycznej

- $f''(x) < 0$, to funkcja f jest na przedziale A wklęsła,
- $f''(x) = 0$, to funkcja f jest na przedziale A liniowa, tzn. jest postaci $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

Przykład 9.4.4. Wyznamy przedziały wypukłości funkcji $f(x) = e^{-x}$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$. Obliczmy drugą pochodną funkcji f , a następnie zbadajmy jej znak.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= [e^{-x}]' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x} & D_{f'} &= \mathbb{R} \\
 f''(x) &= [-e^{-x}]' = -[e^{-x}]' = e^{-x} & D_{f''} &= \mathbb{R} \\
 f''(x) = 0 &\iff e^{-x} = 0 \iff x \in \emptyset & & \text{(brak miejsc zerowych)} \\
 f''(x) > 0 &\iff e^{-x} > 0 \iff x \in \mathbb{R} \\
 f''(x) < 0 &\iff e^{-x} < 0 \iff x \in \emptyset & & \text{(nierówność sprzeczna)}
 \end{aligned}$$

Z powyższego wnioskujemy, że funkcja $f(x) = e^{-x}$ jest wypukła na \mathbb{R} .

9.5. Punkt przegięcia funkcji

Znając pojęcia funkcji wypukłej i wklęsłej, możemy wprowadzić pojęcie punktu przegięcia funkcji. Następnie zastosujemy rachunek różniczkowy do wyznaczania punktów przegięcia danej funkcji.

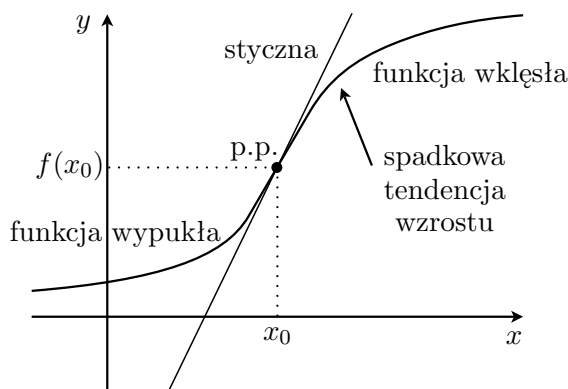
Definicja 9.5.1. Punkt x_0 nazywamy *punktem przegięcia funkcji* f , jeśli:

- i) istnieje styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$,
- ii) funkcja f zmienia rodzaj wypukłości przy przejściu przez x_0 .

Jeśli x_0 jest punktem przegięcia funkcji f , to punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ nazywamy *punktem przegięcia wykresu funkcji* f .

Sformułowanie „przy przejściu przez x_0 funkcja f zmienia rodzaj wypukłości” należy rozumieć następująco: w pewnym sąsiedztwie lewostronnym $S(x_0^-)$ punktu x_0 funkcja jest wypukła, zaś w pewnym sąsiedztwie prawostronnym $S(x_0^+)$ punktu x_0 funkcja jest wklęsła, lub odwrotnie.

Zamiast pełnej nazwy „punkt przegięcia” możemy pisać skrótowo „p.p.”. Przykładowy wykres funkcji posiadającej punkt przegięcia przedstawiono na rysunku 9.12. W ekonomii p.p. funkcji rosnącej, opisującej np. dochód narodowy, jest nazywany momentem rozpoczęcia spadkowej tendencji wzrostu.



Rysunek 9.12. Punkt przegięcia

Na początek podamy twierdzenie, które pozwoli nam znaleźć te argumenty funkcji dwukrotnie różniczkowalnej, które będą kandydatami na jej punkty przegięcia.

Twierdzenie 9.5.2 (warunek konieczny istnienia punktu przegięcia).

Jeżeli x_0 jest p.p. funkcji f i jest ona dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie, to x_0 jest miejscem zerowym drugiej pochodnej funkcji f , tzn. $f''(x_0) = 0$.

Warte uwagi jest to, że twierdzenie 9.5.2 nie wspomina o tych punktach przegięcia funkcji, w których nie jest ona dwukrotnie różniczkowalna. Analogicznie jak w przypadku ekstremów lokalnych (patrz fakt 9.2.4), przy typowaniu kandydatów na punkty przegięcia funkcji będziemy posługiwali się następującym faktem.

Fakt 9.5.3. Funkcja *może mieć* punkty przegięcia *jedynie* w tych punktach, w których jej druga pochodna jest równa zero lub nie istnieje.

Po ustaleniu listy punktów podejrzanych o bycie p.p. danej funkcji każdego z tych podejrzanych trzeba poddać weryfikacji przy pomocy jednego z twierdzeń 9.5.4 lub 9.5.6 o warunkach dostatecznych istnienia p.p. (w przypadku miejsc zerowych drugiej pochodnej) lub przy pomocy innych środków (w przypadku punktów, w których funkcja nie posiada pochodnej właściwej drugiego rzędu).

Twierdzenie 9.5.4 (I warunek dostateczny istnienia p.p.).

Niech funkcja f będzie dwukrotnie różniczkowalna w otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 . Jeżeli spełnione są warunki:

- i) $f''(x_0) = 0$,
 - ii) przy przejściu przez x_0 druga pochodna f'' zmienia znak,
- to punkt x_0 jest p.p. funkcji f .

Sformułowanie „przy przejściu przez x_0 druga pochodna f'' zmienia znak” należy rozumieć następująco: w pewnym sąsiedztwie lewostronnym $S(x_0^-)$ punktu x_0 druga pochodna jest dodatnia oraz w pewnym sąsiedztwie prawostronnym $S(x_0^+)$ punktu x_0 druga pochodna jest ujemna, lub na odwrót.

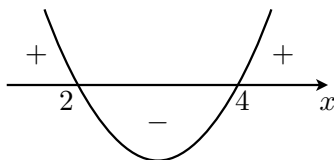
Przykład 9.5.5. Wyznamy punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2$. Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$. Wyznamy drugą pochodną funkcji f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^4 - 12x^3 + 48x^2]' = 4x^3 - 36x^2 + 96x, & D_{f'} &= \mathbb{R}, \\ f''(x) &= [4x^3 - 36x^2 + 96x]' = 12x^2 - 72x + 96, & D_{f''} &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Widzimy, że nie ma punktów, w których f'' nie istnieje. Zatem jedynymi kandydatami na p.p. będą miejsca zerowe f'' .

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 12x^2 - 72x + 96 = 0, & / : 12, \\ & x^2 - 6x + 8 = 0, \\ \Delta &= 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4, & \sqrt{\Delta} = 2, \\ x_1 &= \frac{6-2}{2} = 2, & x_2 &= \frac{6+2}{2} = 4. \end{aligned}$$

Naszkieujemy wykres funkcji kwadratowej $y = 12x^2 - 72x + 96$ (patrz rysunek 9.13).



Rysunek 9.13. Szkic wykresu funkcji $y = 12x^2 - 72x + 96$

Z wykresu tego odczytujemy, kiedy f'' jest dodatnia, a kiedy ujemna.

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\iff x \in (-\infty, 2) \text{ lub } x \in (4, +\infty), \\ f''(x) < 0 &\iff x \in (2, 4). \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że przy przejściu przez $x = 2$ druga pochodna f'' zmienia znak, czyli $x = 2$ jest punktem przegięcia funkcji f . Ponadto przy przejściu przez $x = 4$ druga pochodna f'' też zmienia znak, czyli $x = 4$ też jest p.p. funkcji f . Ponieważ

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^4 - 12 \cdot 2^3 + 48 \cdot 2^2 = 16 - 96 + 192 = 112, \\ f(4) &= 4^4 - 12 \cdot 4^3 + 48 \cdot 4^2 = 256 - 768 + 768 = 256, \end{aligned}$$

to punktami przegięcia wykresu funkcji f są punkty $(2, 112)$ oraz $(4, 256)$.

Twierdzenie 9.5.6 (II warunek dostateczny istnienia p.p.).

Niech funkcja f będzie n -krotnie różniczkowalna w otoczeniu $O(x_0)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli spełnione są warunki:

- i) $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
 - ii) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,
 - iii) n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$,
- to punkt x_0 jest p.p. funkcji f .

Mała modyfikacja powyższego twierdzenia pozwala nam orzec, że dany punkt nie jest p.p. danej funkcji.

Fakt 9.5.7. Jeśli w warunku iii) twierdzenia 9.5.6 mamy „ n jest liczbą parzystą”, to punkt x_0 nie jest p.p. funkcji f .

Jeśli w twierdzeniu 9.5.6 przyjmiemy $n = 3$, to otrzymamy fakt, którego zastosowanie jest wystarczające w znacznej ilości przykładów.

Fakt 9.5.8. Niech funkcja f będzie trzykrotnie różniczkowalna w otoczeniu $O(x_0)$. Jeżeli $f''(x_0) = 0$ oraz $f'''(x_0) \neq 0$, to punkt x_0 jest p.p. funkcji f .

Przykład 9.5.9. Wyznamy punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^{99} + x^3$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$. Obliczmy trzecią pochodną funkcji f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 99x^{98} + 3x^2, & D_{f'} &= \mathbb{R}, \\ f''(x) &= 99 \cdot 98x^{97} + 6x, & D_{f''} &= \mathbb{R}, \\ f'''(x) &= 99 \cdot 98 \cdot 97x^{96} + 6, & D_{f'''} &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ponieważ $D_{f''} = D_f$, to jedynymi kandydatami na p.p. będą miejsca zerowe drugiej pochodnej funkcji f .

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 99 \cdot 98x^{97} + 6x = 0, \\ &x(99 \cdot 98x^{96} + 6) = 0, \\ &x = 0 \quad \text{lub} \quad 99 \cdot 98x^{96} + 6 = 0, \\ &x = 0 \quad \text{lub} \quad 99 \cdot 98x^{96} = -6, \\ &x = 0 \quad \text{lub} \quad x \in \emptyset \\ &\hspace{10em} (\text{równanie sprzeczne}). \end{aligned}$$

Zatem jedynym kandydatem na p.p. funkcji f jest $x = 0$. Wyznamy wartość f''' w tym punkcie.

$$f'''(0) = 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 0^{96} + 6 = 6 \neq 0.$$

Zatem na mocy faktu 9.5.8 jedynym punktem przegięcia funkcji $f(x) = x^{99} + x^3$ jest $x = 0$. Natomiast p.p. wykresu tej funkcji jest punkt $(0, f(0)) = (0, 0)$.

9.6. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Poznaliśmy już wszystkie składowe procesu badania przebiegu zmienności funkcji. Badanie to odbywać się będzie według następującej kolejności:

1. Ustalenie dziedziny funkcji i jej podstawowych własności (parzystość, okresowość, ciągłość).
2. Określenie punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami współrzędnych.
3. Wyznaczenie asymptot.
4. Wyznaczenie wartości lub granic funkcji w końcach przedziałów określoności.
5. Zbadanie monotoniczności.
6. Wyznaczenie ekstremów lokalnych i ewentualnie ekstremów globalnych.
7. Zbadanie wypukłości.
8. Wyznaczenie punktów przegięcia.
9. Zebranie wszystkich powyższych informacji w tabeli przebiegu zmienności funkcji.
10. Wykonanie szkicu wykresu funkcji.

Przykład 9.6.1. Zbadajmy przebieg zmienności funkcji $f(x) = x \ln x$.

1. $D_f = (0, \infty)$.
Funkcja f jest funkcją ciągłą w przedziale $(0, \infty)$ (ponieważ jest funkcją elementarną).
2. Ponieważ $x = 0 \notin D_f$, to wykres funkcji f nie przecina osi Oy .
Wyznamy miejsca zerowe funkcji.

$$x \cdot \ln x = 0 \iff x = 0 \quad \text{lub} \quad \ln x = 0, \\ \text{(sprzeczność)} \qquad \qquad \qquad x = 1.$$

Zatem wykres funkcji przecina oś Ox w punkcie $(1, 0)$.

3. Asymptoty:
 - a) pionowe:
Z faktu 6.3.2 wynika, iż jedyną prostą podejrzaną o bycie asymptotą pionową (tylko prawostronną) jest prosta $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \left[0^+ \cdot (-\infty) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{\text{H}}{=} \\ \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Ponieważ nie jest spełniony warunek (6.3.2), to funkcja f nie posiada asymptot pionowych.

- b) ukośna w ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

Ponieważ powyższa granica jest niewłaściwa, to funkcja f nie posiada asymptoty ukośnej w $+\infty$ (patrz twierdzenie 6.3.5).

4. Granice funkcji w końcach dziedziny.

Przy badaniu asymptot pionowych otrzymaliśmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

Teraz wyznaczmy granicę funkcji w prawym końcu dziedziny, tj. w ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln x = \infty \cdot \infty = \infty.$$

5. Monotoniczność.

Zbadajmy pierwszą pochodną funkcji f .

$$f'(x) = [x \cdot \ln x]' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad D_{f'} = D_f = (0, \infty),$$

$$f'(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0,$$

$$\ln x = -1,$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0,$$

$$\ln x > -1,$$

$$x > \frac{1}{e},$$

$$f'(x) < 0 \iff \ln x + 1 < 0,$$

$$\ln x < -1,$$

$$x < \frac{1}{e}.$$

Korzystając z twierdzenia 9.1.1 o warunkach dostatecznych monotoniczności funkcji, otrzymujemy, że na przedziale $(0, \frac{1}{e})$ funkcja f jest malejąca, zaś na przedziale $(\frac{1}{e}, \infty)$ funkcja ta jest rosnąca.

6. Ekstrema lokalne.

W wyniku zbadania pierwszej pochodnej funkcji f otrzymujemy, że przy przejściu przez $x = \frac{1}{e}$ pochodna f' zmienia znak z „-” na „+”. Korzystając z twierdzenia 9.2.5 o I warunku dostatecznym istnienia ekstremum, mamy, że dla $x = \frac{1}{e}$ funkcja f osiąga minimum lokalne równe

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}.$$

7. Wypukłość.

Zbadajmy drugą pochodną funkcji f .

$$f''(x) = [\ln x + 1]' = \frac{1}{x}, \quad D_{f''} = D_f = (0, \infty),$$

$$f''(x) > 0 \iff x \in (0, \infty).$$



Zatem na mocy twierdzenia 9.4.3 o warunkach dostatecznych wypukłości funkcji funkcja f jest wypukła na przedziale $(0, \infty)$.

8. Punkty przegięcia.

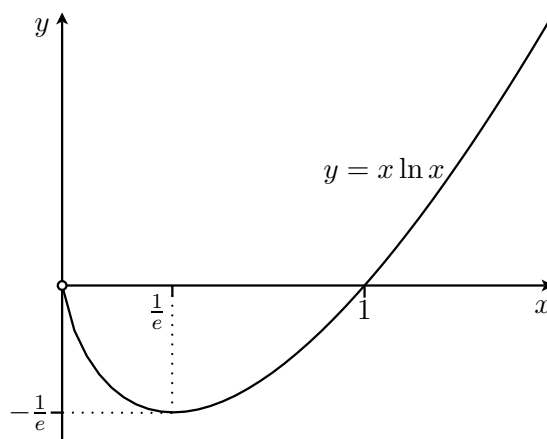
Po zbadaniu drugiej pochodnej funkcji f i zastosowaniu faktu 9.5.3 otrzymujemy, że funkcja f nie posiada punktów przegięcia.

9. Tabela przebiegu zmienności funkcji.

Tabela 9.1. Tabela przebiegu zmienności funkcji $f(x) = x \ln x$

x	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, \infty)$	∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	
$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$		$-\frac{1}{e}$ min. lokalne		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

10. Szkic wykresu funkcji przedstawiono na rysunku 9.14.



Rysunek 9.14. Wykres funkcji $f(x) = x \ln x$

9.7. Badanie funkcji ekonomicznych

Szczególnym przypadkiem funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej jest tzw. trend (słowo „trend” oznacza kierunek lub tendencję). W ekonomii trendem nazywa się zazwyczaj funkcję lub krzywą obrazującą proces zmian badanej wielkości w czasie. Przykładem trendu jest funkcja (krzywa) logistyczna.

Przykład 9.7.1 (funkcja logistyczna).

Funkcja logistyczna opisuje m.in. ilościowy wzrost prawie wszystkich organizmów

żywych w ustalonych warunkach lub wszędzie tam, gdzie nie nastąpiła jeszcze ingerencja człowieka. Ponadto funkcja ta dobrze opisuje popyt na dobra trwałego użytku (np. telewizory, motocykle, samochody itp.) lub wydajność pracy w zależności od stażu pracy na określonym stanowisku. Funkcję logistyczną stosuje się również w chemii, medycynie, farmakologii, rehabilitacji i antropologii. Wykres funkcji logistycznej nazywamy krzywą logistyczną. Zainteresowanie krzywą logistyczną sięga końca XIV wieku. Więcej informacji na temat rysu historycznego i wykorzystania krzywej logistycznej można znaleźć np. w [5].

Niech t oznacza czas, gdzie oczywiście $t \geq 0$. Funkcja logistyczna zadaje się wzorem

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}},$$

gdzie $a > 0$, $b > 1$, $c > 0$ są pewnymi stałymi.

1. $D_f = [0, \infty)$.

Funkcja f jest funkcją ciągłą w przedziale $[0, \infty)$, ponieważ jest funkcją elementarną.

2. Wykres funkcji f nie przecina osi Ot , ponieważ $(\forall t \geq 0) \frac{a}{1+be^{-ct}} > 0$.

Wyznamy punkt przecięcia z osią Oy . Obliczmy wartość funkcji dla $t = 0$:

$$f(0) = \frac{a}{1 + be^{-c0}} = \frac{a}{1 + b}.$$

Zatem krzywa logistyczna przecina oś Oy w punkcie $(0, \frac{a}{1+b})$.

3. Asymptoty:

- a) pionowe:

Z faktu 6.3.2 wynika, iż krzywa logistyczna nie posiada asymptot pionowych.

- b) ukośna w ∞ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{a}{1 + be^{-ct}} = 0 \cdot \frac{a}{1 + b \cdot 0} = 0 \cdot a = 0 = a_+,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - a_+t] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + be^{-ct}} = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a = b_+.$$

Wykorzystując twierdzenie 6.3.5, otrzymujemy, że prosta $y = a_+t + b_+ = 0 \cdot t + a$, czyli $y = a$ jest asymptotą poziomą danej funkcji w ∞ .

4. Granice funkcji w końcach dziedziny.

Przy badaniu punktu przecięcia z osią Oy otrzymaliśmy, że

$$f(0) = \frac{a}{1 + b}.$$

Przy badaniu asymptoty ukośnej w ∞ otrzymaliśmy, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a.$$

5. Monotoniczność.

Zbadajmy pierwszą pochodną funkcji f .

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left[\frac{a}{1 + be^{-ct}} \right]' = \frac{0 \cdot (1 + be^{-ct}) - a \cdot [1 + be^{-ct}]'}{(1 + be^{-ct})^2} = \frac{-a \cdot b \cdot e^{-ct} \cdot (-c)}{(1 + be^{-ct})^2} = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2}. \end{aligned}$$

Oczywiście $D_{f'} = D_f = [0, +\infty)$. Zauważmy, że

$$(\forall t \geq 0) \frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2} > 0,$$

czyli że $(\forall t \geq 0) f'(t) > 0$. Korzystając z twierdzenia 9.1.1 o warunkach dostatecznych monotoniczności funkcji, otrzymujemy, że funkcja logistyczna jest rosnąca na całej dziedzinie.

6. Ekstrema lokalne.

W wyniku zbadania pierwszej pochodnej funkcji f otrzymujemy, że funkcja logistyczna nie posiada ekstremów lokalnych.

7. Wypukłość.

Zbadajmy drugą pochodną funkcji f .

$$\begin{aligned} f''(t) &= \left[\frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2} \right]' = \\ &= \frac{[abce^{-ct}]' \cdot (1 + be^{-ct})^2 - (abce^{-ct}) \cdot [(1 + be^{-ct})^2]'}{(1 + be^{-ct})^4} = \\ &= \frac{abc \cdot e^{-ct} \cdot (-c) \cdot (1 + be^{-ct})^2 - abc \cdot e^{-ct} \cdot 2(1 + be^{-ct})be^{-ct} \cdot (-c)}{(1 + be^{-ct})^4} = \\ &= \frac{-abc^2 e^{-ct}(1 + be^{-ct})^2 + 2ab^2 c^2 e^{-ct} \cdot e^{-ct}(1 + be^{-ct})}{(1 + be^{-ct})^4} = \\ &= \frac{abc^2 e^{-ct}(1 + be^{-ct})[-(1 + be^{-ct}) + 2be^{-ct}]}{(1 + be^{-ct})^4} = \frac{abc^2 e^{-ct}[be^{-ct} - 1]}{(1 + be^{-ct})^3}. \end{aligned}$$

Oczywiście $D_{f''} = D_f = [0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} f''(t) = 0 &\iff \frac{abc^2 e^{-ct}[be^{-ct} - 1]}{(1 + be^{-ct})^3} = 0 \iff abc^2 e^{-ct}[be^{-ct} - 1] = 0 \\ &\iff be^{-ct} - 1 = 0 \iff be^{-ct} = 1. \end{aligned}$$

Rozwiążmy zatem równanie

$$\begin{aligned} be^{-ct} &= 1, & / \cdot e^{ct}, \\ be^{-ct} \cdot e^{ct} &= e^{ct}, \\ b \cdot e^0 &= e^{ct}, \\ b &= e^{ct}, \\ \ln b &= \ln e^{ct}, \\ \ln b &= ct \cdot \ln e, \\ \ln b &= ct, & / : c, \\ t &= \frac{\ln b}{c}. \end{aligned}$$

Zatem

$$f''(t) = 0 \iff t = \frac{\ln b}{c}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} f''(t) > 0 &\iff \frac{abc^2 e^{-ct} [be^{-ct} - 1]}{(1 + be^{-ct})^3} > 0 \iff be^{-ct} > 1 \\ &\iff \ln b > ct \iff \frac{\ln b}{c} > t \iff 0 \leq t < \frac{\ln b}{c} \end{aligned}$$

oraz

$$f''(t) < 0 \iff t > \frac{\ln b}{c}.$$

Zatem na mocy twierdzenia 9.4.3 o warunkach dostatecznych wypukłości funkcji funkcja logistyczna jest wypukła na przedziale $[0, \frac{\ln b}{c})$ oraz wklęsła na przedziale $(\frac{\ln b}{c}, \infty)$.

8. Punkty przegięcia.

Po zbadaniu drugiej pochodnej funkcji f wnioskujemy, że jedynym punktem przegięcia funkcji logistycznej jest punkt $t = \frac{\ln b}{c}$. Ponieważ

$$f\left(\frac{\ln b}{c}\right) = \frac{a}{1 + be^{-c \cdot \frac{\ln b}{c}}} = \frac{a}{1 + be^{-\ln b}} = \frac{a}{1 + b \cdot \frac{1}{b}} = \frac{a}{2},$$

to punktem przegięcia krzywej logistycznej jest punkt $(\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2})$.



9. Tabela przebiegu zmienności funkcji logistycznej jest przedstawiona jako tabela 9.2.

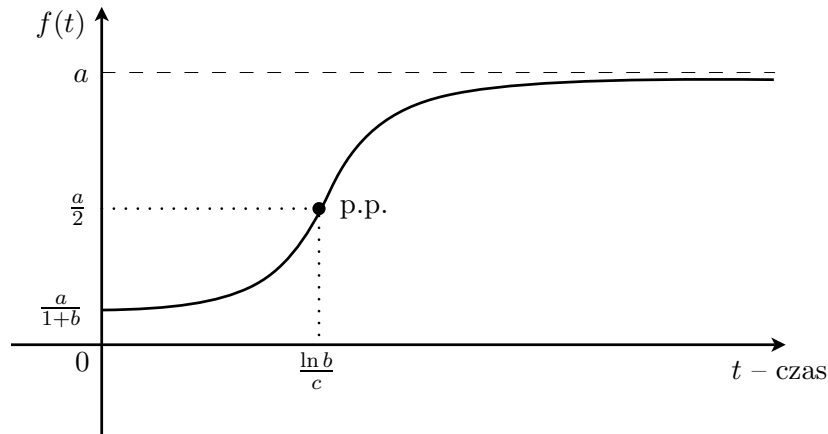
10. Szkic wykresu funkcji logistycznej przedstawiono na rysunku 9.15.

Jak łatwo sprawdzić, stopa wzrostu (patrz rozdział 8.8) funkcji logistycznej wynosi

$$S_t f = \frac{bce^{-ct}}{1 + be^{-ct}}.$$

Tabela 9.2. Tabela przebiegu zmienności funkcji logistycznej

t	0	$(0, \frac{\ln b}{c})$	$\frac{\ln b}{c}$	$(\frac{\ln b}{c}, \infty)$	∞
$f'(t)$	+	+	+	+	
$f''(t)$	+	+	0	-	
$f(t)$	$\frac{a}{1+b}$		$\frac{a}{2}$ p.p.		$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$



Rysunek 9.15. Krzywa logistyczna

Ponieważ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{bce^{-ct}}{1 + be^{-ct}} = 0,$$

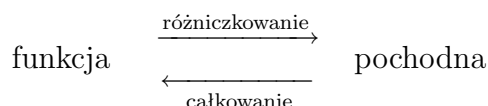
to przy nieograniczonym wzroście czasu procentowe przyrosty funkcji logistycznej są coraz mniejsze (maleją do zera). Oznacza to, że każde zjawisko opisane przy pomocy krzywej logistycznej stabilizuje się w czasie.

Przykładem innych zależności między wielkościami ekonomicznymi są funkcje Törnquista. Opisują one wydatki (popyt) na różne rodzaje dóbr w zależności od dochodu konsumenta. B. Törnquist, ekonomista szwedzki, podzielił łańcuch dóbr na trzy grupy: dobra pierwszej potrzeby (tzn. dobra podstawowe), dobra wyższego rzędu oraz dobra luksusowe. Dla każdego z typów tych dóbr przedstawił funkcję wymierną, która opisuje, w jaki sposób przedstawiają się wydatki na dane dobro przy określonych zarobkach konsumenta. W niniejszej książce nie będziemy przedstawiali szczegółów badania przebiegu zmienności funkcji Törnquista. Szczegóły te są przedstawione np. w [1].

Rozdział 10

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

W niniejszym rozdziale przedstawimy podstawy rachunku całkowego funkcji jednej zmiennej. Operacja całkowania to operacja przeciwna do różniczkowania: przy różniczkowaniu dana jest funkcja i trzeba wyznaczyć jej pochodną; przy całkowaniu dana jest pochodna i trzeba znaleźć funkcję, której jest pochodną.



Za twórców rachunku całkowego uważa się angielskiego fizyka i matematyka Isaaca Newtona (1643–1727) oraz niemieckiego matematyka i filozofa Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716).

10.1. Całka nieoznaczona

Definicja 10.1.1. Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f w przedziale A , jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi $F'(x) = f(x)$.

Funkcję f , dla której istnieje funkcja pierwotna F w przedziale A , nazywamy *funkcją całkowaną* w tym przedziale.

Przykład 10.1.2. Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$ jest na przykład funkcja $F(x) = x^2$.

W tym momencie warto zadać pytanie: jakie warunki powinna spełniać funkcja, aby być całkowaną w danym przedziale? Odpowiedzią na to pytanie jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.1.3. Jeżeli funkcja jest ciągła w danym przedziale, to jest w nim całkowana.

Z powyższego twierdzenia oraz twierdzenia 7.1.11 o ciągłości funkcji elementarnych wynika twierdzenie o całkowalności funkcji elementarnych:

Twierdzenie 10.1.4 (o całkowalności funkcji elementarnych).

Każda funkcja elementarna jest całkowana w dowolnym podprzedziale swojej dziedziny.

Niestety, funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną.

Przykład 10.1.5. Funkcja pierwotna funkcji $f(x) = \sqrt{1-x^4}$ nie jest funkcją elementarną, jest ona przykładem tzw. całki eliptycznej.

Ponieważ $[F(x) + C]' = F'(x)$ dla dowolnej stałej C , to dla danej funkcji całkowlanej f istnieje nieskończenie wiele funkcji pierwotnych, różniących się o stałą C .

Twierdzenie 10.1.6. Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f w przedziale A . Wówczas każda funkcja pierwotna funkcji f jest postaci $F(x) + C$ dla pewnej stałej C .

Definicja 10.1.7. Wyrażenie $F(x) + C$, gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f , zaś C jest dowolną stałą, nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f i oznaczamy symbolem $\int f(x) dx$.

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + C.$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy zwyczajowo *funkcją podcałkową*, wyrażenie dx – *różniczką zmiennej x* , zaś $C \in \mathbb{R}$ – *stałą całkowania*.

Symbol \int jest wystylizowaną literą S – pierwszą literą łacińskiego słowa *summa*, oznaczającego *sumę*. Związek całkowania z sumowaniem zostanie ujawniony przy okazji omawiania tzw. całki oznaczonej Riemanna, w podrozdziale 10.4.

Przykład 10.1.8. $\int 2x dx = x^2 + C.$

Przykład 10.1.9. $\int 3x^2 dx = x^3 + C.$

W tabeli 10.1 na stronie 132 przedstawiamy całki nieoznaczone niektórych funkcji elementarnych. Jeśli nie założono inaczej, to przyjmujemy, że $x \in \mathbb{R}$. Oczywiście każdorazowo stała całkowania $C \in \mathbb{R}$.

10.2. Reguły całkowania

W tej części przedstawimy podstawowe techniki wyznaczania całek nieoznaczonych.

Twierdzenie 10.2.1 (o liniowości całki nieoznaczonej).

Jeśli funkcje f i g są całkowlane w przedziale $A \subseteq D_f \cap D_g$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$(10.2.1) \quad \int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \cdot \int f(x) dx + \beta \cdot \int g(x) dx.$$

Tabela 10.1. Całki nieoznaczone niektórych funkcji elementarnych

Funkcja i jej całka nieoznaczona	Założenia i uwagi
$\int 0 dx = C$	
$\int 1 dx = \int dx = x + C$	
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + C$	$\alpha \neq -1, x > 0$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$x \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1$
$\int e^x dx = e^x + C$	
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	
$\int \cos x dx = \sin x + C$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\cos x \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\sin x \neq 0 \iff x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$	

Przykład 10.2.2. Wyznaczmy całkę nieoznaczoną $\int (3x^2 + 2x + 5) dx$. Korzystając ze wzoru (10.2.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int (3x^2 + 2x + 5) dx &= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 5 dx = \\
 &= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + 5 \int dx = \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 5 \cdot x + C = x^3 + x^2 + 5x + C.
 \end{aligned}$$

Przykład 10.2.3. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$. Korzystając ze wzoru (10.2.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left[\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \right] dx = \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x + (-\operatorname{ctg} x) + C = \\
&= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 10.2.4 (o całkowaniu przez części).

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne w przedziale A , to

$$(10.2.2) \quad \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Przykład 10.2.5. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \ln x dx$. Korzystając ze wzoru (10.2.2) oraz tabeli 10.1, mamy

$$\begin{aligned}
\int \ln x dx &= \int \ln x \cdot 1 dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 \quad g(x) = x \end{array} \right\} = \\
&= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = \\
&= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.
\end{aligned}$$

Przykład 10.2.6. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \sin x \cos x dx$. Korzystając ze wzoru (10.2.2) oraz tabeli 10.1, mamy

$$\int \sin x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \\ g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x \end{array} \right\} = \sin x \cdot \sin x - \int \sin x \cos x dx.$$

Musimy zatem rozwiązać następujące równanie całkowe:

$$\begin{aligned}
&\int \sin x \cos x dx = \sin^2 x - \int \sin x \cos x dx, \\
&\int \sin x \cos x dx + \int \sin x \cos x dx = \sin^2 x, \\
&2 \cdot \int \sin x \cos x dx = \sin^2 x, \quad / : 2, \\
&\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.
\end{aligned}$$

Zatem ostatecznie:

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

Przykład 10.2.7. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int x^2 \sin x dx$. Korzystając ze wzorów (10.2.2), (10.2.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = \\ &= -x^2 \cos x - \int -2x \cos x dx = -x^2 \cos x - (-2) \cdot \int x \cos x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2(-\cos x) + C = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.2.8 (o całkowaniu przez podstawienie).

Jeżeli funkcja $g: (a, b) \rightarrow (A, B)$, gdzie $g(x) = t$, ma ciągłą pochodną g' w przedziale (a, b) oraz funkcja f jest ciągła w przedziale (A, B) , to

$$(10.2.3) \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Ideą twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie jest zamiana trudnej do wyliczenia całki funkcji zmiennej x na łatwiejszą do obliczenia całkę funkcji zmiennej t . Zastosowanie tego twierdzenia sprowadza się do wykonania następujących kroków:

1. Wykonujemy podstawienie (zamianę zmiennych) $g(x) = t$.
2. Różniczkujemy obustronnie to podstawienie: lewą stronę względem zmiennej x , zaś prawą stronę względem zmiennej t ; fakt takiego różniczkowania podkreślamy, dopisując po obu stronach podstawienia różniczki odpowiednich zmiennych.
3. Wyznaczamy zależność różniczki dx zmiennej x od różniczki dt zmiennej t .
4. Całkę funkcji zmiennej x zamieniamy na całkę funkcji zmiennej t według uprzednio ustalonych zależności między zmiennymi x i t oraz ich różniczkami.
5. Wyznaczamy całkę nieoznaczoną $F(t) + C$ funkcji zmiennej t .
6. W funkcji pierwotnej $F(t)$ w miejsce t wpisujemy ponownie $g(x)$ i otrzymujemy całkę nieoznaczoną danej funkcji zmiennej x .

Przykład 10.2.9. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int (1+2x)^3 dx$. Korzystając ze wzorów (10.2.3), (10.2.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int (1+2x)^3 dx &= \left\{ \begin{array}{l} 1+2x = t \\ 2 dx = 1 dt \\ 2 dx = dt \quad / : 2 \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{8} t^4 + C = \frac{1}{8} (1+2x)^4 + C. \end{aligned}$$

Przykład 10.2.10. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \operatorname{tg} x dx$. Korzystając ze wzorów (10.2.3) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{t} = - \int \frac{1}{t} dt = \\ &= -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Przykład 10.2.10 można uogólnić do następującego faktu.

Fakt 10.2.11. Jeżeli funkcja f jest niezerowa i różniczkowalna w przedziale A , to wówczas

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Przykład 10.2.12. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$. Korzystając ze wzorów (10.2.3), (10.2.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x \sqrt{\sin x} dx = \int (1 - \sin^2 x) \sqrt{\sin x} \cos x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int (1 - t^2) \sqrt{t} dt = \int (\sqrt{t} - t^2 \sqrt{t}) dt = \\ &= \int \sqrt{t} dt - \int t^2 \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt - \int t^{\frac{5}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} t^{\frac{1}{2} + 1} - \frac{1}{\frac{5}{2} + 1} \cdot t^{\frac{5}{2} + 1} + C = \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{7}{2}} t^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} (\sin x)^{\frac{7}{2}} + C. \end{aligned}$$

Przykład 10.2.13. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{(3x+2) dx}{3x^2+4x+7}$. Korzystając ze wzorów (10.2.3), (10.2.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+2) dx}{3x^2+4x+7} &= \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 4x + 7 = t \\ (6x+4) dx = dt \\ 2(3x+2) dx = dt \quad / : 2 \\ (3x+2) dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |3x^2 + 4x + 7| + C. \end{aligned}$$

10.3. Całkowanie funkcji wymiernych

Wiemy już, że nie zawsze całka nieoznaczona funkcji elementarnej jest funkcją elementarną (patrz fakt 10.1.5). Nas interesują takie klasy funkcji elementarnych, dla których funkcje pierwotne zawsze będą elementarne. Jedną z takich klas jest klasa funkcji wymiernych.

Aby scałkować funkcję wymierną, należy najpierw przedstawić tę funkcję w postaci sumy pewnego wielomianu i tzw. ułamków prostych. Teraz opiszemy, w jaki sposób otrzymać takie przedstawienie.

Twierdzenie 10.3.1. Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy pewnego wielomianu i funkcji wymiernej właściwej, tzn. dla dowolnych wielomianów W i V , gdzie $V \neq 0$, istnieją wielomiany I oraz R , takie że

$$(10.3.1) \quad \frac{W(x)}{V(x)} = I(x) + \frac{R(x)}{V(x)}$$

oraz stopień wielomianu R jest mniejszy niż stopień wielomianu V .

Uwaga 10.3.2. Wielomiany I oraz R łatwo znaleźć, wykonując dzielenie wielomianu W przez wielomian V ; I jest wówczas ilorazem, zaś R jest resztą z takiego dzielenia.

Przykład 10.3.3. W postaci (10.3.1) przedstawimy funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 - x - 2}.$$

Na początek wyznaczmy miejsca zerowe trójmianu kwadratowego $y = x^2 - x - 2$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9, \\ x_1 &= \frac{1-3}{2} = -1, \\ x_2 &= \frac{1+3}{2} = 2. \end{aligned}$$

Zatem $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Wielomian $x^3 + 2x - 6$ dzielimy przez wielomian $x^2 - x - 2$ (algorytm dzielenia wielomianów przedstawiamy na stronie 253).

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ \hline (x^3 + 2x - 6) : (x^2 - x - 2) \\ - x^3 + x^2 + 2x \\ \hline = x^2 + 4x - 6 \\ - x^2 + x + 2 \\ \hline = 5x - 4 \end{array}$$

Iloraz wynosi $I(x) = x + 1$, zaś reszta z dzielenia jest równa $R(x) = 5x - 4$. Zatem

$$(10.3.2) \quad \frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2}.$$

Definicja 10.3.4. *Ułamkiem prostym pierwszego rodzaju* nazywamy funkcję wymierną właściwą postaci

$$\frac{A}{(ax + b)^n},$$

gdzie $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ułamkiem prostym drugiego rodzaju nazywamy funkcję wymierną właściwą postaci

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k},$$

gdzie $B, C, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ oraz $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Zwróćmy uwagę na to, że ze względu na warunek $\Delta = p^2 - 4q < 0$ trójmian kwadratowy $x^2 + px + q$, który znajduje się w mianowniku ułamka prostego drugiego rodzaju, jest nierozkładalny, tzn. nie można przedstawić go w postaci iloczynu dwumianów.

Twierdzenie 10.3.5. Każdą funkcję wymierną właściwą można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy pewnej ilości ułamków prostych.

Przykład 10.3.6. Rozłóżmy na ułamki proste funkcję wymierną właściwą

$$f(x) = \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2},$$

gdzie $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Na początek przedstawimy w postaci iloczynowej wielomian $y = x^2 - x - 2$, który znajduje się w mianowniku funkcji f . Pierwiastki tego wielomianu to -1 oraz 2 (patrz przykład 10.3.3). Zatem szukana postać iloczynowa to

$$y = x^2 - x - 2 = 1(x - (-1))(x - 2) = (x + 1)(x - 2).$$

W konsekwencji funkcję f zapisujemy jako

$$(10.3.3) \quad f(x) = \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{5x - 4}{(x + 1)(x - 2)}.$$

Z każdym czynnikiem mianownika funkcji f stowarzyszony jest jeden ułamek prosty. Zatem funkcję f można przedstawić w postaci następującej sumy dwóch ułamków prostych:

$$(10.3.4) \quad f(x) = \frac{5x - 4}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}, \quad \text{gdzie } A, B \in \mathbb{R}.$$

Przekształcając wyrażenie po prawej stronie równości (10.3.4), otrzymujemy

$$(10.3.5) \quad \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{(A + B)x - 2A + B}{(x + 1)(x - 2)}.$$

Porównując ostatnie wyrażenie równości (10.3.5) z postacią (10.3.3) funkcji f , otrzymujemy równość liczników

$$(10.3.6) \quad 5x - 4 = (A + B)x - 2A + B.$$

Pamiętając, że dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki przy odpowiednich potęgach x są identyczne, z równości (10.3.6) otrzymujemy następujący układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 5 = A + B \\ -4 = -2A + B \end{cases}.$$

Do rozwiązania tego układu zastosujemy metodę przeciwnych współczynników (dodawania stronami).

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5 = A + B \\ 4 = 2A - B \end{cases} \Big| +, \\ & 9 = 3A, \quad / : 3, \\ & A = 3, \\ & 5 = 3 + B, \\ & B = 2. \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymane rozwiązanie do równości (10.3.4), dostajemy szukany rozkład funkcji f na ułamki proste

$$(10.3.7) \quad \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - 2}.$$

Z twierdzeń 10.3.1 oraz 10.3.5 wynika, że zagadnienie całkowania funkcji wymiernych sprowadza się do zagadnień całkowania wielomianów oraz całkowania ułamków prostych. Ponieważ potrafimy już całkować wielomiany, korzystając z liniowości całki nieoznaczonej (patrz przykład 10.2.2), teraz zajmiemy się całkowaniem ułamków prostych.

10.3.1. Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

Ułamki proste pierwszego rodzaju całkujemy, korzystając z twierdzenia 10.2.8 o całkowaniu przez podstawienie. Niech $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} ax+b=t \\ a dx = dt \quad / : a \\ dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right\} = \int \frac{A}{t^n} \cdot \frac{1}{a} dt = \frac{A}{a} \int \frac{1}{t^n} dt.$$

Następnie rozpatrujemy dwa przypadki:

- $n = 1$

$$\frac{A}{a} \int \frac{1}{t} dt = \frac{A}{a} \ln |t| + C = \frac{A}{a} \ln |ax+b| + C,$$

- $n > 1$

$$\frac{A}{a} \int t^{-n} dt = \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{-n+1} t^{-n+1} + C = \frac{A}{a(1-n)} (ax+b)^{1-n} + C.$$

Przykład 10.3.7. Wyznaczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{1}{x+1} dx$.

$$(10.3.8) \quad \int \frac{1}{x+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x+1| + C.$$

Przykład 10.3.8. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{1}{x-2} dx$.

$$(10.3.9) \quad \int \frac{1}{x-2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x-2=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x-2| + C.$$

10.3.2. Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju jest bardziej skomplikowane niż całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju. Na początek całkę nieoznaczoną ogólnego ułamka prostego drugiego rodzaju przedstawimy w postaci sumy całek ułamków prostych drugiego rodzaju dwóch szczególnych typów.

Niech $B, C, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ oraz $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p) + (C - \frac{Bp}{2})}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx}_{\text{I typ}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k} dx}_{\text{II typ}}. \end{aligned}$$

Na początek wyznaczmy całkę nieoznaczoną ułamka typu I. Skorzystamy przy tym z twierdzenia 10.2.8 o całkowaniu przez podstawienie.

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+px+q=t \\ (2x+p) dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^k}.$$

Następnie oddzielnie rozpatrujemy dwa przypadki: $k = 1$ oraz $k > 1$:

- $k = 1$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x^2 + px + q| + C,$$

- $k > 1$

$$\int t^{-k} dt = \frac{1}{-k+1} t^{-k+1} + C = \frac{1}{1-k} (x^2 + px + q)^{1-k} + C.$$

Przykład 10.3.9. Wyznaczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{2x}{(x^2+1)^k} dx$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^k} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^k} = \left\{ \begin{array}{ll} \ln |t| + C & \text{dla } k = 1, \\ \frac{1}{-(k-1)} t^{-(k-1)} + C & \text{dla } k > 1. \end{array} \right.$$

Dla $k = 1$ mamy zatem

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln |x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

Natomiast dla $k > 1$ otrzymujemy

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^k} dx = \frac{1}{-(k-1)} (x^2+1)^{-(k-1)} + C = -\frac{1}{(k-1)(x^2+1)^{k-1}} + C.$$

Zanim zaprezentujemy ogólny algorytm całkowania ułamka typu II, przyjrzyjmy się następującym trzem przykładom.

Przykład 10.3.10. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$. Najpierw przedstawimy trójmian kwadratowy $y = x^2 - 6x + 13$ w postaci kanonicznej, tj. w postaci

$$y = a(x-p)^2 + q,$$

gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$. Ponieważ

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 13, \quad \Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0,$$

to

$$x^2 - 6x + 13 = \left(x - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{16}{4} = (x-3)^2 + 4.$$

Korzystając z twierdzenia 10.2.8 o całkowaniu przez podstawienie, wyznaczmy szukaną całkę nieoznaczoną.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} &= \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 4} = \int \frac{dx}{4 \left[\frac{(x-3)^2}{4} + 1 \right]} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 + 1} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{2} = t \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = t \\ \frac{1}{2}dx = dt \quad / \cdot 2 \\ dx = 2dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x-3}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Przykład 10.3.11. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}$. Wykorzystując postać kanoniczną $y = (x-3)^2 + 4$ trójmianu kwadratowego $y = x^2 - 6x + 13$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 13)^2} &= \int \frac{dx}{[(x-3)^2 + 4]^2} = \int \frac{dx}{\left[4 \left(\frac{(x-3)^2}{4} + 1 \right) \right]^2} = \\ &= \int \frac{dx}{16 \left[\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 + 1 \right]^2} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 + 1 \right]^2}. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 10.2.8 o całkowaniu przez podstawienie, mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 + 1 \right]^2} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{2} = t \\ \frac{1}{2}dx = dt \\ dx = 2dt \end{array} \right\} = \frac{1}{16} \int \frac{2dt}{[t^2 + 1]^2} = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{[t^2 + 1]^2} = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{t^2 + 1 - t^2}{[t^2 + 1]^2} dt = \frac{1}{8} \int \frac{t^2 + 1}{[t^2 + 1]^2} dt - \frac{1}{8} \int \frac{t^2}{[t^2 + 1]^2} dt = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \frac{1}{8} \int t \cdot \frac{t}{[t^2 + 1]^2} dt = \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{8} \int t \cdot \frac{t}{[t^2 + 1]^2} dt. \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia 10.2.4 o całkowaniu przez części uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{8} \int t \cdot \frac{t}{[t^2 + 1]^2} dt &= \left\{ \begin{array}{ll} f(t) = t & f'(t) = 1 \\ g'(t) = \frac{t}{[t^2 + 1]^2} & g(t) = -\frac{1}{2(t^2 + 1)} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{8} \left[-\frac{t}{2(t^2 + 1)} - \int -\frac{1}{2(t^2 + 1)} dt \right] = \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} t + \frac{1}{16} \cdot \frac{t}{(t^2 + 1)} - \frac{1}{8} \int \frac{1}{2(t^2 + 1)} dt = \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} t + \frac{1}{16} \cdot \frac{t}{t^2 + 1} - \frac{1}{16} \operatorname{arc\,tg} t + C = \\ &= \frac{1}{16} \operatorname{arc\,tg} t + \frac{1}{16} \cdot \frac{t}{t^2 + 1} + C. \end{aligned}$$

Przy pomocy użytego uprzednio podstawienia $\frac{x-3}{2} = t$ wracamy do funkcji zmiennej x i otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 13)^2} &= \frac{1}{16} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-3}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{\frac{x-3}{2}}{(\frac{x-3}{2})^2 + 1} + C = \\ &= \frac{1}{16} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-3}{2} + \frac{x-3}{8[(x-3)^2 + 4]} + C. \end{aligned}$$

Przykład 10.3.12. Obliczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{(x^2+1)^k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że korzystając z tabeli 10.1 dla $k = 1$, mamy

$$(10.3.10) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

W dalszym ciągu zakładamy więc, że $k > 1$.

$$(10.3.11) \quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^k} &= \int \frac{(x^2 + 1 - x^2) dx}{(x^2 + 1)^k} = \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 + 1)^k} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^k} = \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{k-1}} - \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x dx}{(x^2 + 1)^k}. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę przekształcamy, korzystając z twierdzenia 10.2.4 o całkowaniu przez części oraz przykładu 10.3.9.

$$(10.3.12) \quad \begin{aligned} \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x dx}{(x^2 + 1)^k} &= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \frac{x}{2} & f'(x) = \frac{1}{2} \\ g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^k} & g(x) = -\frac{1}{(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{x}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} - \int -\frac{1}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} dx = \\ &= -\frac{x}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} + \int \frac{dx}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę równości (10.3.11) i (10.3.12), możemy zapisać

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)^k} &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}} - \int \frac{dx}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} + \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right) \int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}} + \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} = \\ &= \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}} + \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że dla $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ prawdziwy jest wzór rekurencyjny

$$(10.3.13) \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^k} = \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}}.$$

Stosując wzór (10.3.13), stopniowo obniżamy wartość k aż do sytuacji $k = 1$, w której stosujemy bezpośrednio wzór (10.3.10). Przykładowo dla $k = 3$ mamy

$$\begin{aligned} (10.3.14) \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} &\stackrel{(10.3.13)}{=} \frac{x}{2 \cdot 2(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \stackrel{(10.3.13)}{=} \\ &\stackrel{(10.3.13)}{=} \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \left[\frac{x}{2 \cdot 1(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \right] \stackrel{(10.3.10)}{=} \\ &\stackrel{(10.3.10)}{=} \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

Teraz zaprezentujemy ogólny algorytm całkowania ułamka prostego drugiego rodzaju typu II. Najpierw zapiszemy trójmian kwadratowy $y = x^2 + px + q$ w postaci kanonicznej

$$x^2 + px + q = \left(x - \frac{-p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p^2 - 4q}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Ponieważ $\Delta = p^2 - 4q < 0$, to $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Wprowadźmy zatem oznaczenie $q - \frac{p^2}{4} = \varepsilon^2$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Przy takim oznaczeniu otrzymujemy

$$(10.3.15) \quad x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \varepsilon^2.$$

Teraz możemy wyznaczyć szukaną całkę ułamka prostego drugiego rodzaju typu II. Wykorzystamy przy tym równość (10.3.15) oraz twierdzenie 10.2.8 o całkowaniu przez podstawienie.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} &= \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \varepsilon^2\right]^k} = \int \frac{dx}{\left[\varepsilon^2 \left(\frac{(x + \frac{p}{2})^2}{\varepsilon^2} + 1\right)\right]^k} = \\ &= \int \frac{dx}{\varepsilon^{2k} \left[\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right]^k} = \frac{1}{\varepsilon^{2k}} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right)\right)^2 + 1\right]^k} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right) = t \\ \frac{1}{\varepsilon} dx = dt \\ dx = \varepsilon dt \end{array} \right\} = \frac{1}{\varepsilon^{2k}} \int \frac{\varepsilon dt}{[t^2 + 1]^k} = \frac{1}{\varepsilon^{2k-1}} \int \frac{dt}{[t^2 + 1]^k}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zagadnienie całkowania ułamka prostego drugiego rodzaju typu II zostało zredukowane do zagadnienia wyznaczenia całki nieoznaczonej $\int \frac{dt}{[t^2 + 1]^k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Taką całką zajmowaliśmy się już w przykładzie 10.3.12. Przypomnijmy, że dla $k = 1$ otrzymaliśmy wzór (10.3.10), z którego wynika, że przy $\varepsilon = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ mamy

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \stackrel{(10.3.10)}{=} \frac{1}{\varepsilon} \arctg t + C = \frac{1}{\varepsilon} \arctg \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right) \right] + C.$$

Natomiast dla $k > 1$ trzeba było zastosować wzór rekurencyjny (10.3.13) i stopniowo sprowadzić szukaną całkę do przypadku $k = 1$. Na przykład dla $k = 3$ otrzymaliśmy równość (10.3.14), z której wynika, że

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^3} &= \frac{1}{\varepsilon^5} \int \frac{dt}{[t^2 + 1]^3} \stackrel{(10.3.14)}{=} \\ &\stackrel{(10.3.14)}{=} \frac{1}{\varepsilon^5} \left[\frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 + 1)} + \frac{3}{8} \arctg t \right] + C. \end{aligned}$$

Przy pomocy użytego powyżej podstawienia $\frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right) = t$ wracamy do funkcji zmiennej x i otrzymujemy ostatecznie, że przy $\varepsilon = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^3} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon^5} \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right)}{4 \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right)\right]^2 + 1\right)^2} + \frac{3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right)}{8 \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right)\right]^2 + 1\right)} + \frac{3}{8} \arctg \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(x + \frac{p}{2}\right)\right] \right] + C. \end{aligned}$$

Podsumowując rezultaty otrzymane w punktach 10.3.1 oraz 10.3.2, możemy stwierdzić, że całka niewłaściwa dowolnego ułamka prostego jest zawsze funkcją elementarną. Całka niewłaściwa dowolnego wielomianu jest także wielomianem, czyli w szczególności funkcją elementarną. Z powyższego oraz z twierdzeń 10.3.1 i 10.3.5 wynika dowód twierdzenia, o którym wspomnieliśmy już na początku podrozdziału 10.3.

Twierdzenie 10.3.13. Całka nieoznaczona każdej funkcji wymiernej jest funkcją elementarną.

Przykład 10.3.14. Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji wymiernej $f(x) = \frac{x^3+2x-6}{x^2-x-2}$, gdzie $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Będziemy przy tym korzystać z różnych równości, otrzymanych w kolejnych przykładach prezentowanych w podrozdziale 10.3.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 - x - 2} dx &\stackrel{(10.3.2)}{=} \int \left(x + 1 + \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2} \right) dx = \\ &= \int (x + 1) dx + \int \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2} dx \stackrel{(10.3.7)}{=} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \int \left(\frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - 2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{3}{x + 1} dx + \int \frac{2}{x - 2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + 3 \int \frac{1}{x + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x - 2} dx \stackrel{(10.3.8)}{=} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + 3 \ln |x + 1| + 2 \ln |x - 2| + C. \end{aligned}$$

10.4. Całka oznaczona

W tym podrozdziale przedstawimy podstawy teorii całki oznaczonej, której autorem był matematyk niemiecki Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Zakładamy, że każda z wymienionych funkcji jest określona i *ograniczona* na przedziale domkniętym $[a, b]$. Na początek zajmiemy się odpowiednim podzieleniem tego przedziału.

Niech $n \in \mathbb{N}$. W przedziale $[a, b]$ wybieramy dowolnie punkty x_0, x_1, \dots, x_n , takie że

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

W ten sposób przedział $[a, b]$ dzieli się na mniejsze części (podprzedziały), tzn.

$$(10.4.1) \quad [a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \dots \cup [x_{i-1}, x_i] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

Dla podziału (10.4.1) definiujemy jego średnicę.

Definicja 10.4.1. Średnicą podziału (10.4.1) nazywamy liczbę δ_n , określoną następująco

$$\delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|.$$

Jak łatwo zauważyć, δ_n to długość największego spośród podprzedziałów $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, \dots , $[x_{i-1}, x_i]$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$.

W drodze zwiększania ilości punktów x_0, x_1, \dots, x_n w przedziale $[a, b]$ otrzymamy różne podziały tego przedziału. Podziały te będą tworzyły ciąg.

Definicja 10.4.2. Ciąg podziałów przedziału $[a, b]$ jest *ciągą normalnym podziałów*, jeśli przy wzroście ilości punktów do ∞ długości wszystkich podprzedziałów maleją do 0, tzn. jeśli zachodzi warunek $\lim \delta_n = 0$.

Teraz możemy zdefiniować sumę całkową Riemanna funkcji f , która jest określona i ograniczona na przedziale $[a, b]$.

Definicja 10.4.3. Sumą całkową Riemanna funkcji f dla podziału (10.4.1) nazywamy sumę postaci

$$(10.4.2) \quad \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

gdzie ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jest punktem dowolnie wybranym z przedziału $[x_{i-1}, x_i]$.

Pojęcie sumy całkowej Riemanna jest zilustrowane na rysunku 10.1. Upraszczając, przyjęto $n = 6$. Liczba $f(\xi_1)$ to wysokość prostokąta o podstawie $[x_0, x_1]$. Zatem wyrażenie $f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0)$ to pole powierzchni tego prostokąta. Ogólnie mówiąc, wyrażenie $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ to pole powierzchni prostokąta o podstawie $[x_{i-1}, x_i]$. Zatem suma całkowa Riemanna (10.4.2) jest równa sumie pól wszystkich zakreskowanych prostokątów.

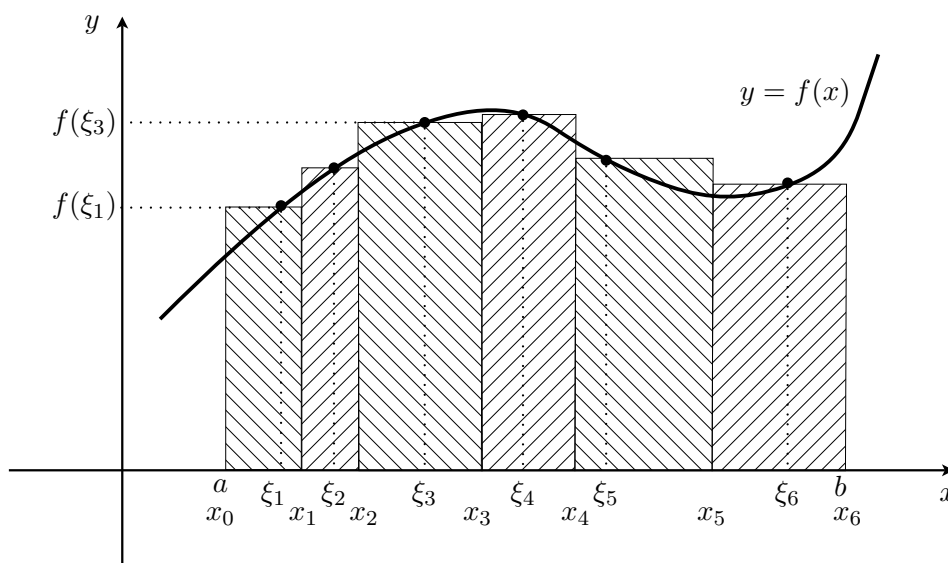
Teraz możemy zdefiniować pojęcia funkcji całkownej w sensie Riemanna oraz całki oznaczonej funkcji.

Definicja 10.4.4. Funkcja f jest *całkowna w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$* , jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje taka sama granica właściwa sum całkowych Riemanna przy $\delta_n \rightarrow 0$, niezależna od wyborów punktów ξ_i .

Definicja 10.4.5. Granicę właściwą sum całkowych Riemanna przy $\delta_n \rightarrow 0$ nazywamy *całką oznaczoną Riemanna funkcji f w przedziale $[a, b]$* i oznaczamy

przez $\int_a^b f(x) dx$.

$$(10.4.3) \quad \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$



Rysunek 10.1. Geometryczna interpretacja sumy całkowej Riemanna

Liczbę a nazywamy zwyczajowo *dolną granicą całkowania*, zaś liczbę b – *górną granicą całkowania*. Przy ustalonych granicach całka oznaczona jest liczbą (stałą).

Podobnie jak w przypadku całki nieoznaczonej można zadać sobie pytanie: kiedy funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna w danym przedziale? Odpowiedź na to pytanie jest przedstawiona w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 10.4.6. Jeśli funkcja ograniczona na przedziale domkniętym posiada w tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości, to jest w nim całkowalna w sensie Riemanna.

Jako szczególny przypadek powyższego twierdzenia otrzymujemy twierdzenie kolejne.

Twierdzenie 10.4.7. Jeśli funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym, to jest w tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.

Z twierdzenia 10.4.7 oraz twierdzenia 7.1.11 o ciągłości funkcji elementarnych wynika twierdzenie o całkowalności funkcji elementarnych w sensie Riemanna.

Twierdzenie 10.4.8 (o całkowalności funkcji elementarnych w sensie Riemanna). Każda funkcja elementarna jest całkowalna w sensie Riemanna w dowolnym podprzedziale domkniętym swojej dziedziny.

W dalszym ciągu przedstawimy podstawowe własności całki Riemanna. Zaczniemy od własności zwanej *addytywnością całki oznaczonej względem przedziału całkowania*.

Twierdzenie 10.4.9. Niech funkcje f i g będą całkowalne w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ oraz niech $a \leq c \leq b$. Wówczas

$$(10.4.4) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Teraz zdefiniujemy całkę oznaczoną Riemanna dla przypadku, gdy dolna granica całkowania jest równa bądź większa od górnej granicy całkowania.

Definicja 10.4.10. Jeżeli $a > b$, to przyjmujemy następujące definicje całek oznaczonych Riemanna

$$(10.4.5) \quad \int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

$$(10.4.6) \quad \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_b^a f(x) dx.$$

10.4.1. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej

Rozważmy funkcję f nieujemną i całkowalną w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ oraz jej sumy całkowite w tym przedziale. Załóżmy, że ciąg δ_n średnic podziałów przedziału $[a, b]$ dąży do zera. Korzystając z rysunku 10.1, zauważamy, że odpowiada to zastępowaniu dotychczasowych prostokątów przez prostokąty o coraz krótszych podstawach. Dlatego też górne podstawy tych nowych prostokątów będą coraz lepiej przybliżały wykres funkcji f . Tym samym sumy pól wszystkich prostokątów będą coraz dokładniej przybliżały pole obszaru pomiędzy wykresem funkcji f a osią Ox . W przypadku granicznym otrzymamy następujący fakt:

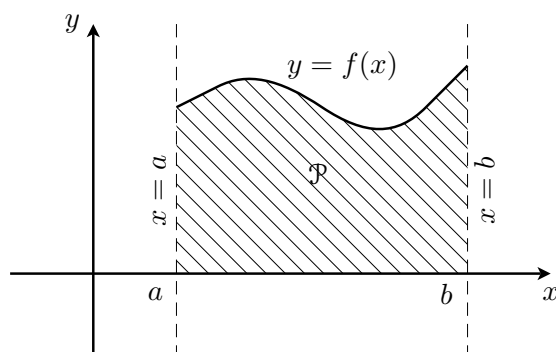
Fakt 10.4.11. Jeżeli funkcja f jest nieujemna i całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$, to całka oznaczona tej funkcji w tym przedziale jest równa polu \mathcal{P} obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, tzn.

$$\mathcal{P} = \int_a^b f(x) dx.$$

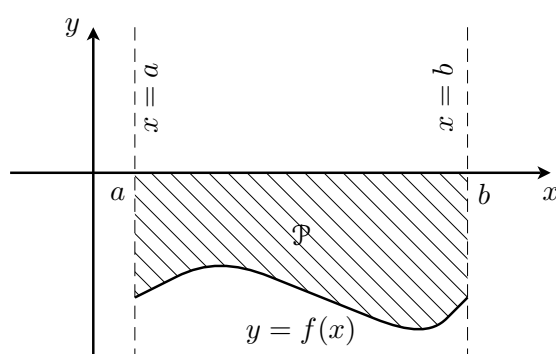
W przypadku gdy funkcja f jest w przedziale $[a, b]$ niedodatnia, pole \mathcal{P} obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ jest liczbą przeciwną do całki oznaczonej funkcji f w przedziale $[a, b]$, tzn.

$$\mathcal{P} = - \int_a^b f(x) dx.$$

Obszar ograniczony wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ (patrz rysunki 10.2 oraz 10.3) zwany jest często *trapezem krzywoliniowym*.



Rysunek 10.2. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej funkcji nieujemnej



Rysunek 10.3. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej funkcji niedodatniej

10.5. Podstawowe twierdzenia o całkach oznaczonych

W tej części zaprezentujemy podstawowe twierdzenia, które umożliwią nam obliczanie całek oznaczonych funkcji bez korzystania ze wzoru (10.4.3) definiującego całkę oznaczoną Riemanna. Ponadto przedstawimy całkowe twierdzenie o wartości średniej funkcji.

Twierdzenie 10.5.1 (Newtona–Leibniza).

Jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$, to wówczas

$$(10.5.1) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Twierdzenie Newtona–Leibniza określa związek pomiędzy całką oznaczoną i całką nieoznaczoną funkcji w przedziale domkniętym. Twierdzenie to jest często nazywane *podstawowym twierdzeniem rachunku całkowego*.

Przykład 10.5.2. Obliczmy całkę oznaczoną $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Z tabeli 10.1 wynika, że

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C.$$

Korzystając ze wzoru Newtona–Leibniza (10.5.1), otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Przykład 10.5.3. Obliczmy całkę oznaczoną $\int_0^\pi \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$. W przykładzie 10.2.12 pokazaliśmy, że

$$\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}} + C.$$

Korzystając ze wzoru Newtona–Leibniza (10.5.1), mamy

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx &= \left[\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{2}{3}(\sin \pi)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}(\sin \pi)^{\frac{7}{2}} - \left(\frac{2}{3}(\sin 0)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}(\sin 0)^{\frac{7}{2}} \right) = \\ &= 0 - 0 - (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.5.4 (o liniowości całki oznaczonej).

Jeśli funkcje f i g są całkowne w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$(10.5.2) \quad \int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Przykład 10.5.5. Wyznaczmy całkę oznaczoną $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 5) dx$. Korzystając ze wzoru (10.5.2), wzoru Newtona–Leibniza (10.5.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 + 2x + 5) dx &= \int_0^1 3x^2 dx + \int_0^1 2x dx + \int_0^1 5 dx = \\ &= 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 x dx + 5 \int_0^1 dx = \\ &= 3 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + 2 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + 5 \left[x \right]_0^1 = \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + 2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + 5(1 - 0) = \\ &= 1 + 1 + 5 = 7. \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.5.6 (o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej).

Jeżeli funkcje f i g są określone w przedziale $[a, b]$ oraz mają ciągłe pochodne w przedziale (a, b) , to

$$(10.5.3) \quad \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Przykład 10.5.7. Obliczmy całkę oznaczoną $\int_1^e 3x^2 \ln x dx$. Korzystając ze wzoru (10.5.3), wzoru Newtona–Leibniza (10.5.1) oraz tabeli 10.1, mamy

$$\begin{aligned} \int_1^e 3x^2 \cdot \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 3x^2 & g(x) = x^3 \end{array} \right\} = [x^3 \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x} \cdot x^3 \right) dx = \\ &= (e^3 \cdot \ln e - 1^3 \cdot \ln 1) - \int_1^e x^2 dx = e^3 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^e = \\ &= e^3 - \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} 1^3 \right) = \frac{2}{3} e^3 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.5.8 (o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej).

Jeżeli funkcja $g: (a, b) \rightarrow (A, B)$, gdzie $g(x) = t$, $g(a) = A$, $g(b) = B$, ma ciągłą pochodną g' w przedziale (a, b) oraz funkcja f jest ciągła w przedziale (A, B) , to

$$(10.5.4) \quad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_A^B f(t) dt.$$

Idea twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej jest taka sama jak idea twierdzenia 10.2.8 o całkowaniu przez podstawienie dla całki nieoznaczonej (patrz strona 134). W przypadku całki oznaczonej trzeba dodatkowo zatroszczyć się o odpowiednią zmianę granic całkowania. Taka zmiana odbywa się zgodnie z zastosowanym podstawieniem $g(x) = t$.

Przykład 10.5.9. Obliczmy całkę oznaczoną $\int_0^\pi e^{\sin x} \cos x dx$. Korzystając ze wzoru (10.5.4) oraz własności (10.4.5), otrzymujemy

$$\int_0^\pi e^{\sin x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0 \\ x = \pi \Rightarrow t = \sin \pi = 0 \end{array} \right\} = \int_0^0 e^t dt \stackrel{(10.4.5)}{=} 0.$$

Przykład 10.5.10. Obliczmy całkę oznaczoną $\int_0^1 \frac{(3x+2) dx}{3x^2+4x+7}$. Korzystając ze wzorów (10.5.4), wzoru Newtona–Leibniza (10.5.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{(3x+2) dx}{3x^2+4x+7} = \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 4x + 7 = t \\ (6x + 4) dx = dt \\ 2(3x + 2) dx = dt \quad / : 2 \\ (3x + 2) dx = \frac{1}{2} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 7 = 7 \\ x = 1 \Rightarrow t = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 7 = 14 \end{array} \right\} = \int_7^{14} \frac{\frac{1}{2} dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_7^{14} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} [\ln |t|]_7^{14} = \frac{1}{2} (\ln 14 - \ln 7) = \frac{1}{2} \ln \frac{14}{7} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

10.5.1. Całkowe twierdzenie o wartości średniej

W tym punkcie zaprezentujemy kolejne, po twierdzeniach 8.9.1 Rolle’a i 8.9.3 Lagrange’a, twierdzenie o wartości średniej funkcji.

Definicja 10.5.11. *Wartością średnią funkcji f w przedziale $[a, b]$ nazywamy wyrażenie*

$$(10.5.5) \quad f_{\text{sr}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

W tym momencie warto zwrócić uwagę na to, że pojęcie wartości średniej funkcji w przedziale jest uogólnieniem pojęcia średniej arytmetycznej skończonego ciągu liczb. Przypomnijmy, że w średniej arytmetycznej sumujemy skończenie wiele liczb, a następnie tę sumę dzielimy przez skończoną ilość tych liczb. W przypadku funkcji zmiennej rzeczywistej sumowanie wszystkich nieskończenie wielu wartości funkcji w przedziale domkniętym jest zastąpione przez całkowanie tej funkcji w tym przedziale. Natomiast dzielenie przez nieskończoną ilość wartości funkcji jest zastąpione dzieleniem przez długość przedziału.

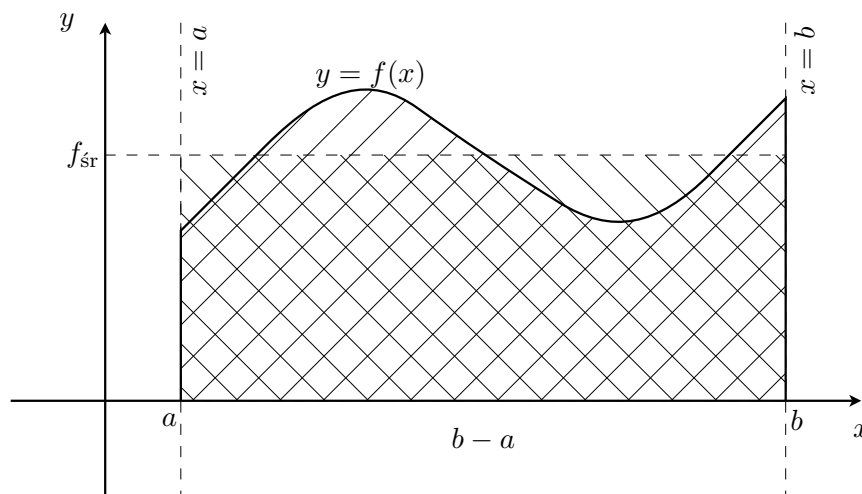
Ponieważ z równości (10.5.5) wynika równość

$$f_{\text{sr}} \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx,$$

to korzystając z geometrycznej interpretacji całki oznaczonej Riemanna (patrz punkt 10.4.1), otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 10.5.12. *Wartość średnia f_{sr} funkcji f w przedziale $[a, b]$ jest wysokością prostokąta o podstawie długości $b-a$ i o polu równym polu trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.*

Geometryczna interpretacja wartości średniej funkcji w przedziale przedstawiona jest na rysunku 10.4.



Rysunek 10.4. Geometryczna interpretacja wartości średniej funkcji w przedziale

Przykład 10.5.13. Obliczmy wartość średnią funkcji $f(x) = \ln x$ w przedziale $[1, e]$. Korzystając ze wzorów (10.5.5), (10.5.3), wzoru Newtona–Leibniza (10.5.1) oraz tabeli 10.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_{\text{sr}} &= \frac{1}{e-1} \int_1^e \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{e-1} \left([x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{e-1} \left([x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{e-1} \left([x \cdot \ln x]_1^e - [x]_1^e \right) = \\ &= \frac{1}{e-1} (e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - (e - 1)) = \\ &= \frac{1}{e-1} (e - e + 1) = \frac{1}{e-1}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.5.14 (całkowe o wartości średniej).

Funkcja f ciągła w przedziale $[a, b]$ przyjmuje w tym przedziale swoją wartość średnią, tzn. istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$, taki że

$$f(x_0) = f_{\text{sr}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Przykład 10.5.15. Uzasadnimy, że funkcja $f(x) = \ln x$ przyjmuje w przedziale $(1, e)$ wartość $\frac{1}{e-1}$ (oczywiście $\ln 1 = 0 < \frac{1}{e-1} < 1 = \ln e$). W przykładzie 10.5.13 pokazaliśmy, że wartość średnia funkcji $f(x) = \ln x$ w przedziale $[1, e]$ wynosi $\frac{1}{e-1}$. Ponieważ funkcja f jest ciągła, w szczególności w przedziale $[1, e]$, to stosując całkowe twierdzenie 10.5.14 o wartości średniej, otrzymujemy, że w przedziale $(1, e)$ istnieje punkt x_0 taki, że $f(x_0) = \ln x_0 = \frac{1}{e-1}$.

10.6. Zastosowania całek oznaczonych

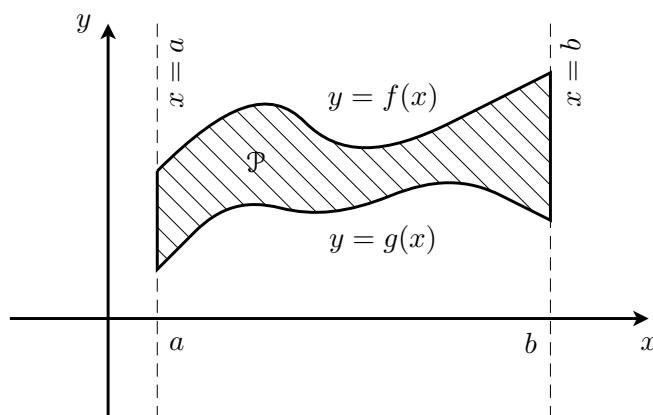
W tym podrozdziale zaprezentujemy podstawowe zastosowania całki oznaczonej Riemanna.

10.6.1. Zastosowanie całek oznaczonych w geometrii

Geometryczną interpretację całki oznaczonej Riemanna jako pola trapezu krzywoliniowego (patrz punkt 10.4.1) można uogólnić do twierdzenia, które pozwala obliczyć pole obszaru między wykresami dwóch dowolnych funkcji (patrz rysunek 10.5).

Twierdzenie 10.6.1. Niech $a < b$. Pole obszaru pomiędzy krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ jest równe

$$(10.6.1) \quad \mathcal{P} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

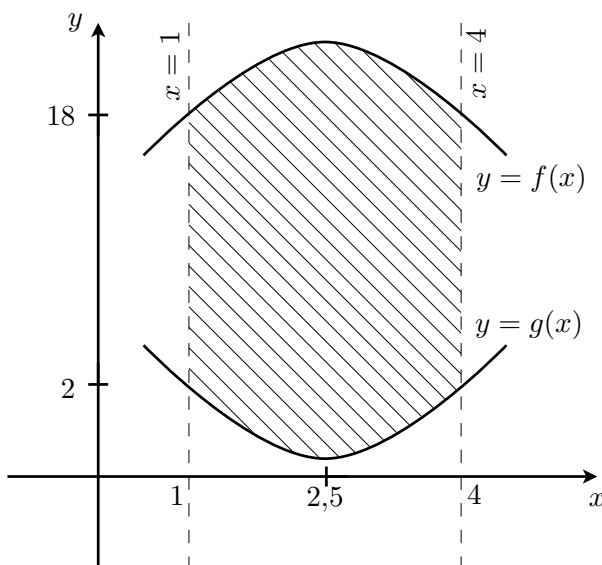


Rysunek 10.5. Pole obszaru pomiędzy krzywymi $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$

Przykład 10.6.2. Obliczmy pole obszaru pomiędzy krzywymi $y = f(x) = -x^2 + 5x + 14$ oraz $y = g(x) = x^2 - 5x + 6$ oraz prostymi $x = 1$ i $x = 4$. Na początek wyznaczmy wartości funkcji f oraz g na końcach przedziału $[1, 4]$.

$$\begin{aligned} f(1) &= -1^2 + 5 + 14 = 18, \\ g(1) &= 1^2 - 5 + 6 = 2, \\ f(4) &= -4^2 + 20 + 14 = 18, \\ g(4) &= 4^2 - 20 + 6 = 2. \end{aligned}$$

Po narysowaniu wykresów obu funkcji w danym przedziale (patrz rysunek 10.6) zauważamy, że dla $x \in [1, 4]$ zachodzi nierówność $f(x) > g(x)$.



Rysunek 10.6. Obszar między krzywymi $y = -x^2 + 5x + 14$ oraz $y = x^2 - 5x + 6$

Korzystając ze wzoru (10.6.1) oraz z poznanych twierdzeń o całkach oznaczonych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_1^4 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \int_1^4 (-x^2 + 5x + 14 - x^2 + 5x - 6) dx = \int_1^4 (-2x^2 + 10x + 8) dx = \\ &= (-2) \int_1^4 x^2 dx + 10 \int_1^4 x dx + 8 \int_1^4 1 dx = \\ &= (-2) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_1^4 + 10 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_1^4 + 8 \cdot [x]_1^4 = \end{aligned}$$

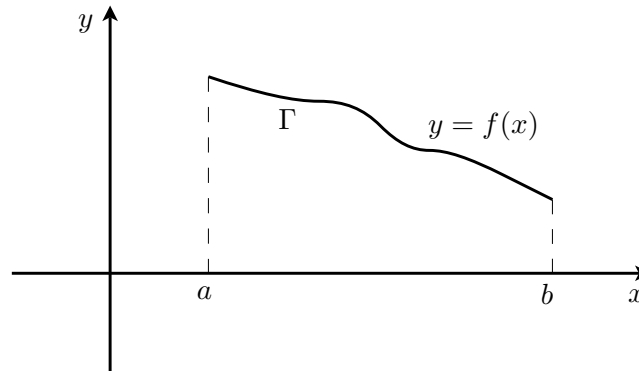
$$\begin{aligned}
&= (-2) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) + 8 \cdot (4 - 1) = \\
&= (-2) \cdot \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) + 10 \cdot \left(8 - \frac{1}{2} \right) + 24 = \\
&= (-2) \cdot 21 + 10 \cdot \frac{15}{2} + 24 = \\
&= -42 + 75 + 24 = 57.
\end{aligned}$$

Zatem pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = -x^2 + 5x + 14$ i $y = x^2 - 5x + 6$ oraz prostymi $x = 1$ i $x = 4$ wynosi 57 jednostek kwadratowych.

Całki oznaczone stosujemy również w planimetrii przy obliczaniu długości krzywych będących wykresami funkcji oraz w stereometrii przy obliczaniu pól powierzchni i objętości brył obrotowych.

Rozważmy na płaszczyźnie krzywą Γ , będącą wykresem funkcji f określonej na przedziale $[a, b]$ (patrz rysunek 10.7). Długość $|\Gamma|$ krzywej Γ wyraża się wzorem

$$(10.6.2) \quad |\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

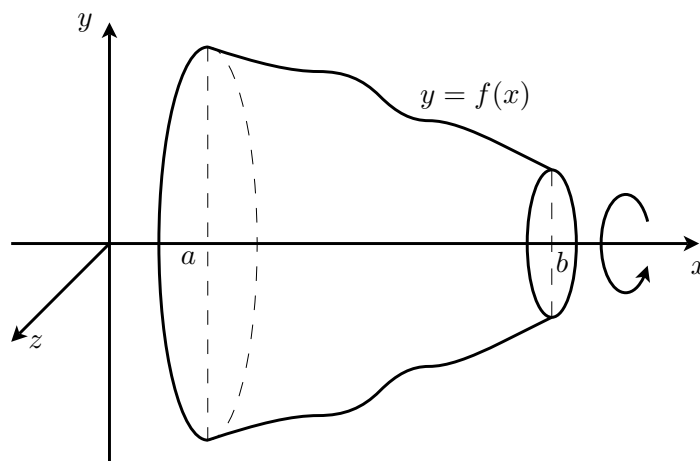


Rysunek 10.7. Krzywa wykresu funkcji na przedziale domkniętym

Jeżeli będziemy obracali dookoła osi Ox krzywą Γ razem z wyznaczonym przez nią trapezem krzywoliniowym, to w rezultacie otrzymamy pewną bryłę obrotową (patrz rysunek 10.8). Pole powierzchni \mathcal{S} oraz objętość \mathcal{V} tej bryły wyrażają się następującymi wzorami:

$$(10.6.3) \quad \mathcal{S} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$(10.6.4) \quad \mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Rysunek 10.8. Pewna bryła obrotowa

10.6.2. Zastosowanie całek oznaczonych w ekonomii

W ekonomii całki oznaczone są stosowane m.in. do wyznaczania tzw. zasobów. Poniżej przedstawimy dwa przykłady takich zastosowań. Zainteresowanych innymi przykładami zastosowań całek w ekonomii odsyłamy np. do [1] lub [5].

Przykład 10.6.3. Załóżmy, że do magazynu napływa w jednostce czasu $f(t)$ jednostek towaru, gdzie t jest miarą czasu, który upłynął od momentu rozpoczęcia dostaw. Interesuje nas wielkość zapasu zgromadzonego w przedziale czasowym $[T_1, T_2]$. Funkcja f jest ograniczona i posiada jedynie skończenie wiele punktów nieciągłości (odpowiadających raptownym zmianom intensywności dostaw) t_1, t_2, \dots, t_{n-1} . Z twierdzenia 10.4.6 wynika, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[T_1, T_2]$. Przedział ten dzielimy punktami $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n = T_2$ na podprzedziały, w których f jest ciągła. Niech $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas $f(\xi_i) \cdot (t_{i-1} - t_i)$ jest przybliżeniem przyrostu zapasów w przedziale $[t_{i-1}, t_i]$. Przybliżona ilość zapasu zgromadzonego w całym przedziale $[T_1, T_2]$ jest równa sumie $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_{i-1} - t_i)$, czyli sumie całkowitej Riemanna funkcji f w przedziale $[T_1, T_2]$. Zatem rzeczywista (dokładna) wielkość zapasu zgromadzonego w przedziale czasowym $[T_1, T_2]$ jest równa całce oznaczonej Riemanna funkcji f w przedziale $[T_1, T_2]$, tzn. $\int_{T_1}^{T_2} f(t) dt$.

Powyższy przykład jest przypadkiem szczególnym ogólnego modelu ekonomicznego, w którym funkcja $f(t)$ to strumień zasilaający, funkcja zmian krańcowych, natomiast całka oznaczona $\int_a^b f(t) dt$ to zasób, czyli efekt zasilania strumieniem w przedziale $[a, b]$.

Przykład 10.6.4. Przedsiębiorstwo nabyło pewne urządzenie. Niech t oznacza ilość lat eksploatacji tego urządzenia, gdzie $t > 0$. Niech zysk z jego użytkowania wyraża się wzorem $Z(t) = 768 - \frac{1}{2}t^3$ [w tys. PLN na rok]. Koszty eksploatacji urządzenia wyrażają się wzorem $K(t) = t^3$ [w tys. PLN na rok]. Na początku wyznaczmy maksymalny czas eksploatacji urządzenia, czyli okres, dla którego $Z(t) \geq K(t)$.

$$\begin{aligned} 768 - \frac{1}{2}t^3 &\geq t^3, \\ -\frac{3}{2}t^3 &\geq -768, & / \cdot \left(-\frac{2}{3}\right), \\ t^3 &\leq 512, \\ t &\leq 8. \end{aligned}$$

Zatem maksymalny czas eksploatacji urządzenia wynosi 8 lat. Obliczmy łączny zysk z eksploatacji tego urządzenia.

$$\begin{aligned} \int_0^8 (Z(t) - K(t)) dt &= \int_0^8 \left(768 - \frac{1}{2}t^3 - t^3\right) dt = \int_0^8 \left(768 - \frac{3}{2}t^3\right) dt = \\ &= \int_0^8 768 dt - \int_0^8 \frac{3}{2}t^3 dt = 768 \int_0^8 1 dt - \frac{3}{2} \int_0^8 t^3 dt = \\ &= 768 \left[t\right]_0^8 - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^8 = \\ &= 768(8 - 0) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot 8^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4\right) = \\ &= 6144 - \frac{3}{2} \cdot \frac{4096}{4} = 6144 - 1536 = 4608. \end{aligned}$$

Zatem łączny zysk z eksploatacji tego urządzenia na przestrzeni 8 lat wyniósł 4608 tysięcy PLN.

10.7. Całki niewłaściwe

Teoria całki oznaczonej Riemanna zakłada, że funkcja podcałkowa jest określona na skończonym przedziale domkniętym i ograniczona. W bieżącym podrozdziale przedstawimy podstawy teorii całek funkcji określonych na przedziałach nieograniczonych oraz teorii całek funkcji nieograniczonych. Zaczniemy od podstaw pierwszej z tych teorii.

10.7.1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Definicja 10.7.1. Niech funkcja f będzie określona w przedziale $[a, +\infty)$ oraz całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ dla każdego $b \geq a$. *Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f w przedziale $[a, +\infty)$* definiujemy następująco

$$(10.7.1) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Definicja 10.7.2. Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, b]$ i całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ dla każdego $a \leq b$. *Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f w przedziale $(-\infty, b]$* definiujemy następująco

$$(10.7.2) \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości (10.7.1) lub (10.7.2) jest skończona, to mówimy że odpowiednia całka niewłaściwa pierwszego rodzaju jest *zbieżna*. W przeciwnym wypadku mówimy że całka niewłaściwa pierwszego rodzaju jest *rozbieżna*.

Przykład 10.7.3. Sprawdźmy zbieżność całki niewłaściwej pierwszego rodzaju $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$. Wykorzystując uprzednio poznane twierdzenia o całkach oznaczonych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} - (-e^{-0})) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Zatem dana całka niewłaściwa jest zbieżna oraz $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$.

Przykład 10.7.4. Zbadajmy zbieżność całki niewłaściwej pierwszego rodzaju $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln |x|]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty.$$

W konsekwencji podana całka niewłaściwa jest rozbieżna oraz $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$.

Przykład 10.7.5. Sprawdźmy zbieżność całki niewłaściwej pierwszego rodzaju

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} x^{-3} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_a^{-1} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot (-1)^{-2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot a^{-2} \right) \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem dana całka niewłaściwa jest zbieżna oraz $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2}$.

Definicja 10.7.6. Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f na prostej rzeczywistej definiujemy jako sumę jej całek niewłaściwych w przedziale $(-\infty, a]$ oraz w przedziale $[a, +\infty)$, dla pewnego (dowolnego) $a \in \mathbb{R}$, tzn.

$$(10.7.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

W równości (10.7.3) wybór liczby $a \in \mathbb{R}$ jest zupełnie dowolny, ponieważ zachodzi następujący fakt:

Fakt 10.7.7. Całka niewłaściwa na prostej nie zależy od wyboru $a \in \mathbb{R}$, tzn. dla danej funkcji f oraz dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

Przykład 10.7.8. Sprawdźmy, czy jest zbieżna całka niewłaściwa na prostej $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$. Najpierw wyznaczmy całkę nieoznaczoną $\int x \cdot e^{-x^2} dx$, stosując twierdzenie 10.2.8 o całkowaniu przez podstawienie.

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-x^2} dx &= \int e^{-x^2} \cdot x dx = \left\{ \begin{array}{l} -x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \\ &= \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższą równość, poznane twierdzenia o całkach oznaczonych oraz fakt, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x \cdot e^{-x^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^b = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-0^2} - \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} \right) \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2} - \left(-\frac{1}{2} e^{-0^2} \right) \right) = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-a^2} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

W konsekwencji dana całka niewłaściwa na prostej jest zbieżna i $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = 0$.

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju znajdują swe zastosowanie m.in. w teorii metod probabilistycznych, tj. w rachunku prawdopodobieństwa. Poniżej przedstawiamy dwa przykłady występowania całek niewłaściwych w tej teorii. Zainteresowanych innymi przykładami odsyłamy np. do [19].

Przykład 10.7.9. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą pewnymi ustalonymi liczbami. Rozważmy funkcję f , zdefiniowaną następująco

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in [a, b], \\ 0 & \text{dla } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Wyznamy całkę niewłaściwą funkcji f na prostej.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^{+\infty} 0 dx = \\
 &= \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^a 0 dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_b^S 0 dx = \\
 &= \lim_{T \rightarrow -\infty} [C]_T^a + \left[\frac{1}{b-a} \cdot x \right]_a^b + \lim_{S \rightarrow +\infty} [C]_b^S = \\
 &= \lim_{T \rightarrow -\infty} (C - C) + \left(\frac{1}{b-a} \cdot b - \frac{1}{b-a} \cdot a \right) + \lim_{S \rightarrow +\infty} (C - C) = \\
 &= \lim_{T \rightarrow -\infty} 0 + \frac{1}{b-a} (b - a) + \lim_{S \rightarrow +\infty} 0 = 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1.
 \end{aligned}$$

Zatem całka niewłaściwa funkcji f na prostej jest zbieżna do 1.

Uwaga 10.7.10. Funkcja f rozważana w przykładzie 10.7.9 jest tzw. funkcją gęstości rozkładu jednostajnego na przedziale $[a, b]$.

Przykład 10.7.11. Niech $\lambda > 0$ będzie ustaloną liczbą dodatnią. Rozważmy funkcję f , zdefiniowaną następująco

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wyznamy całkę niewłaściwą funkcji f na prostej. Korzystając m.in. z twierdzenia 10.5.8 o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej oraz z faktu, że dla $\lambda > 0$ zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \\ &= 0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\lambda x} \cdot \lambda dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} -\lambda x = t \\ -\lambda dx = dt \\ \lambda dx = -dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = b \Rightarrow t = -\lambda b \end{array} \right\} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{-\lambda b} e^t (-dt) \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(- \int_0^{-\lambda b} e^t dt \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} - [e^t]_0^{-\lambda b} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} - (e^{-\lambda b} - e^0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-\lambda b} + 1) = 1. \end{aligned}$$

Zatem $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, czyli całka niewłaściwa funkcji f na prostej jest zbieżna do 1.

Uwaga 10.7.12. Funkcja f przedstawiona w przykładzie 10.7.11 jest tzw. funkcją gęstości rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$.

Na zakończenie tej części warto wspomnieć, że zbieżność danej całki niewłaściwej pierwszego rodzaju jest równoważna zbieżności pewnego szeregu liczbowego. Mówi o tym twierdzenie Cauchy'ego–Maclaurina. Zainteresowanych szczegółami odsyłamy np. do [20].

10.7.2. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Teraz przedstawimy podstawy teorii całek funkcji nieograniczonych.

Rozważmy przedział skończony $[a, b]$ oraz funkcję f całkowalną w sensie Riemanna w dowolnym przedziale $[a, T]$, gdzie $a < T < b$, lecz nieograniczoną w dowolnym lewostronnym sąsiedztwie $S(b^-)$ punktu b . Sytuacja taka zachodzi na przykład, gdy funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b)$ oraz $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$.

Definicja 10.7.13. *Całkę niewłaściwą funkcji f prawostronnie nieograniczonej w przedziale $[a, b]$ definiujemy jako*

$$(10.7.4) \quad \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow b^-} \int_a^T f(x) dx.$$

W przypadku gdy funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna w dowolnym przedziale $[S, b]$, gdzie $a < S < b$, lecz nieograniczona w dowolnym prawostronnym sąsiedztwie $S(a^+)$ punktu a (np. kiedy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$), mamy definicję następującą:

Definicja 10.7.14. *Całkę niewłaściwą funkcji f lewostronnie nieograniczonej w przedziale $[a, b]$ określamy jako*

$$(10.7.5) \quad \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{S \rightarrow a^+} \int_S^b f(x) dx.$$

Całkę niewłaściwą funkcji lewostronnie lub prawostronnie nieograniczonej na przedziale skończonym nazywamy *całką niewłaściwą drugiego rodzaju* tej funkcji w tym przedziale. Jeżeli granica po prawej stronie równości (10.7.4) lub (10.7.5) jest skończona, to mówimy, że odpowiednia całka niewłaściwa drugiego rodzaju jest *zbieżna*. W przeciwnym wypadku mówimy, że całka niewłaściwa drugiego rodzaju jest *rozbieżna*.

Przykład 10.7.15. Sprawdźmy, czy całka niewłaściwa drugiego rodzaju $\int_0^2 \frac{1}{x} dx$ jest zbieżna. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

to otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x} dx &= \lim_{S \rightarrow 0^+} \int_S^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{S \rightarrow 0^+} \left[\ln |x| \right]_S^2 = \lim_{S \rightarrow 0^+} (\ln 2 - \ln S) = \\ &= \ln 2 - \lim_{S \rightarrow 0^+} \ln S = \ln 2 - (-\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Zatem $\int_0^2 \frac{1}{x} dx = +\infty$, czyli dana całka niewłaściwa drugiego rodzaju jest rozbieżna.

Przykład 10.7.16. Zbadajmy całkę niewłaściwą drugiego rodzaju $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Oczywiście

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{S \rightarrow 0^+} \int_S^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{S \rightarrow 0^+} \int_S^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{S \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right]_S^4 = \\ &= \lim_{S \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_S^4 = \lim_{S \rightarrow 0^+} (2\sqrt{4} - 2\sqrt{S}) = \lim_{S \rightarrow 0^+} (4 - 2\sqrt{S}) = 4. \end{aligned}$$

W konsekwencji $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4$, czyli podana całka niewłaściwa drugiego rodzaju jest zbieżna do 4.

Niech $x_0 \in [a, b]$ i niech f będzie nieograniczona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0 . Ponadto niech funkcja f będzie całkowalna w sensie Riemanna w dowolnych przedziałach $[a, T]$, gdzie $a < T < x_0$, oraz $[S, b]$, gdzie $x_0 < S < b$. Sytuacja taka zachodzi np. wtedy, gdy funkcja f jest ciągła w przedziałach $[a, x_0)$ i $(x_0, b]$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

Definicja 10.7.17. Całkę niewłaściwą drugiego rodzaju funkcji f nieograniczonej w przedziale $[a, b]$ definiujemy jako

$$(10.7.6) \quad \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow x_0^-} \int_a^T f(x) dx + \lim_{S \rightarrow x_0^+} \int_S^b f(x) dx.$$

Jeżeli obie granice po prawej stronie równości (10.7.6) są skończone, to mówimy że całka niewłaściwa drugiego rodzaju jest *zbieżna*, zaś w przeciwnym przypadku – że jest *rozbieżna*.

Przykład 10.7.18. Zbadajmy zbieżność całki $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$. Oczywiście

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = +\infty.$$

Na początek wyznaczmy całkę nieoznaczoną $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{5}} dx = \frac{1}{\frac{4}{5}} x^{\frac{4}{5}} + C = \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} + C.$$

Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx &= \lim_{T \rightarrow 0^-} \int_{-2}^T \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx + \lim_{S \rightarrow 0^+} \int_S^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0^-} \left[\frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} \right]_{-2}^T + \lim_{S \rightarrow 0^+} \left[\frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} \right]_S = \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0^-} \left(\frac{5}{4} T^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{4} (-2)^{\frac{4}{5}} \right) + \lim_{S \rightarrow 0^+} \left(\frac{5}{4} 2^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{4} S^{\frac{4}{5}} \right) = \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0^-} \left(\frac{5}{4} T^{\frac{4}{5}} \right) - \frac{5}{4} \sqrt[5]{16} + \frac{5}{4} \sqrt[5]{16} - \lim_{S \rightarrow 0^+} \left(\frac{5}{4} S^{\frac{4}{5}} \right) = \\
 &= \frac{5}{4} 0^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{4} 0^{\frac{4}{5}} = 0 - 0 = 0.
 \end{aligned}$$

W konsekwencji $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = 0$, czyli dana całka niewłaściwa drugiego rodzaju jest zbieżna do 0.

Więcej informacji w zakresie teorii całek niewłaściwych można znaleźć np. w [4].

Część III

Elementy algebry liniowej

Rozdział 11

Macierze i wyznaczniki

11.1. Podstawowe definicje

Definicja 11.1.1. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. *Macierz liczbowa o m wierszach i n kolumnach* to funkcja przyporządkowująca każdej uporządkowanej parze (i, j) liczb naturalnych, gdzie $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, liczbę a_{ij} . Macierz liczbową o m wierszach i n kolumnach nazywamy inaczej *macierzą wymiaru $m \times n$* .

Macierze oznaczamy dużymi literami np. A, B, X itd. Liczbę a_{ij} nazywamy *wyrazem* lub *elementem macierzy* A . Macierz A wymiaru $m \times n$, składającą się z elementów a_{ij} , oznaczamy jako $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Zwyczajowo macierz wymiaru $m \times n$ zapisujemy jako prostokątny układ $m \cdot n$ liczb ułożonych w m wierszach i n kolumnach.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Możemy wyróżnić szczególne typy macierzy liczbowych.

Definicja 11.1.2. *Macierzą zerową* nazywamy macierz, której wszystkie elementy są równe 0. Macierz zerową będziemy oznaczali \mathbb{O} , czasami podając jej wymiar.

Przykład 11.1.3. $\mathbb{O}_{1 \times 1} = [0]$, $\mathbb{O}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{O}_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definicja 11.1.4. Macierz wymiaru $m \times n$ nazywamy *macierzą kwadratową*, gdy $m = n$; wówczas n jest *stopniem macierzy kwadratowej*. Elementy $\{a_{ij} : i = j\}$ tworzą *główną przekątną* macierzy kwadratowej.

Definicja 11.1.5. *Macierzą trójkątną dolną* nazywamy macierz kwadratową, której stopień wynosi przynajmniej 2, taką że $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ (tzn. wszystkie wyrazy powyżej głównej przekątnej są równe 0).

Przykład 11.1.6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 9 & 8 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definicja 11.1.7. *Macierzą trójkątną górną* nazywamy macierz kwadratową stopnia co najmniej 2, taką że $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ (tzn. wszystkie wyrazy poniżej głównej przekątnej są równe 0).

Przykład 11.1.8.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 11.1.9. *Macierzą diagonalną* nazywamy macierz kwadratową, taką że $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ (tzn. wszystkie wyrazy poza główną przekątną są równe 0).

Definicja 11.1.10. *Macierzą jednostkową \mathbb{I}_n stopnia n* nazywamy macierz kwadratową stopnia n , określoną jako

$$\mathbb{I}_n \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_{ij}]_{n \times n}, \quad \text{gdzie} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Symbol δ_{ij} jest nazywany *symbolem delta Kroneckera*.

Przykład 11.1.11.

$$\mathbb{I}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na macierzach liczbowych można wykonywać operację tzw. transponowania macierzy.

Definicja 11.1.12 (transponowanie macierzy).

Niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. *Macierz transponowana* macierzy A to macierz $A^T = [a_{ji}]$ wymiaru $n \times m$, gdzie $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Macierz transponowaną otrzymujemy z danej macierzy poprzez zamianę wierszy na kolumny, z zachowaniem ich kolejności.

Przykład 11.1.13. Znajdźmy macierz transponowaną macierzy A , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zamieniając kolejno wiersze na kolumny, otrzymujemy

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Znając operację transponowania macierzy, możemy zdefiniować dwa nowe typy macierzy liczbowych.

Definicja 11.1.14. Macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ jest:

- *symetryczna*, jeśli $A^T = A$,
- *antysymetryczna*, jeśli $A^T = -A$, gdzie $-A = [-a_{ij}]$.

Zauważmy, że wyrazy macierzy symetrycznej są symetryczne względem głównej przekątnej. Natomiast w macierzy antisymetrycznej główna przekątna składa się wyłącznie z elementów zerowych, natomiast pozostałe wyrazy spełniają warunek $a_{ij} = -a_{ji}$ dla każdych $i \neq j$.

Przykład 11.1.15. Przykładem macierzy symetrycznej jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Przykładem macierzy antisymetrycznej jest macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

11.2. Działania na macierzach

W bieżącym podrozdziale omówimy podstawowe działania na macierzach liczbowych. Zaczniemy jednakże od określenia, kiedy dwie macierze będziemy uważali za równe.

Definicja 11.2.1 (równość macierzy).

Jeżeli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ oraz $B = [b_{ij}]_{k \times l}$, to

$$(11.2.1) \quad A = B \iff m = k \wedge n = l \wedge (\forall 1 \leq i \leq m)(\forall 1 \leq j \leq n) a_{ij} = b_{ij}.$$

Definicja 11.2.2 (dodawanie macierzy).

Jeżeli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ oraz $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, to *sumę macierzy* A i B określamy następująco

$$(11.2.2) \quad A + B \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Definicja 11.2.3 (odejmowanie macierzy).

Jeżeli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ oraz $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, to *różnicę macierzy* A i B określamy następująco

$$(11.2.3) \quad A - B \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}.$$

Definicja 11.2.4 (mnożenie macierzy przez liczbę).

Jeżeli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, to *iloczyn macierzy* A przez liczbę α definiujemy następująco

$$(11.2.4) \quad \alpha \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n}.$$

Definicja 11.2.5 (macierz przeciwna).

Macierz przeciwną do macierzy A definiujemy jako

$$(11.2.5) \quad -A \stackrel{\text{def}}{=} (-1) \cdot A.$$

Przykład 11.2.6.

$$\begin{aligned} 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \\ 35 & 40 & 45 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 7 & 0 & 21 \\ 14 & 21 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 17 & 29 \\ 27 & 25 & 51 \\ 49 & 61 & 45 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ze wszystkich działań na macierzach najtrudniejsze jest działanie mnożenia macierzy przez macierz. Mnożenie dwóch macierzy jest wykonalne jedynie w przypadku, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy.

Definicja 11.2.7 (mnożenie macierzy).

Niech będą dane macierze $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ oraz $B = [b_{ij}]_{n \times k}$. *Iloczyn macierzy* A oraz B oznaczamy przez $A \cdot B$ i określamy w następujący sposób:

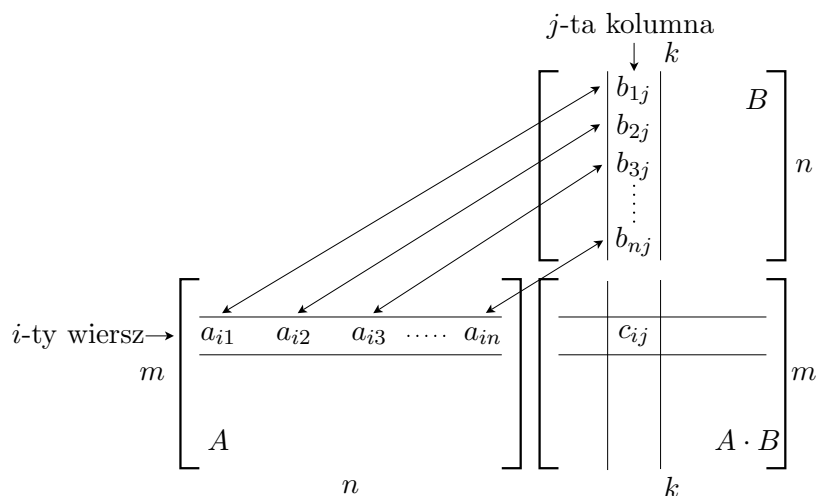
$$(11.2.6) \quad A \cdot B = [c_{ij}]_{m \times k}, \quad \text{gdzie} \quad c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}$$

dla wszystkich i, j takich, że $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$.

Aby zrozumieć zasadę mnożenia macierzy rozpiszmy element c_{ij} iloczynu $A \cdot B$:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Widać zatem, że aby otrzymać wyraz c_{ij} , należy odpowiednio pomnożyć elementy i -tego wiersza macierzy A przez elementy j -tej kolumny macierzy B , a następnie wysumować wszystkie takie iloczyny. Zasadę mnożenia macierzy najlepiej ilustruje tzw. *schemat Falka*, przedstawiony na rysunku 11.1. Obustronne strzałki na tym rysunku pokazują, które wyrazy należy przez siebie pomnożyć.



Rysunek 11.1. Schemat Falka mnożenia macierzy

Przykład 11.2.8. Wymnóżmy przez siebie macierze

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze schematu Falka, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} B_{2 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 17 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 2} \quad A \cdot B_{3 \times 4},$$

czyli

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 17 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

W dalszym ciągu będziemy pisali zamiennie $A \cdot B$ lub AB .

Definicja 11.2.9 (potęgowanie macierzy).

Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy n -tą potęgę macierzy kwadratowej A jako

$$(11.2.7) \quad A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{n \text{ czynników}}.$$

11.3. Własności działań na macierzach

Poniżej przedstawimy własności wymienionych powyżej działań na macierzach.

Twierdzenie 11.3.1 (własności działań na macierzach).

Niech α, β będą liczbami oraz niech macierze A, B, C, \mathbb{O} oraz \mathbb{I} będą macierzami odpowiednich wymiarów, tak aby poniższe działania były wykonalne. Wówczas

- (11.3.1) $A + B = B + A$ (przemienność dodawania),
 (11.3.2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (łączność dodawania),
 (11.3.3) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$ (element neutralny dodawania),
 (11.3.4) $A + (-A) = \mathbb{O}$ (element przeciwny dodawania),
 (11.3.5) $A(BC) = (AB)C$ (łączność mnożenia),
 (11.3.6) $A\mathbb{I} = \mathbb{I}A = A$ (element neutralny mnożenia),
 (11.3.7) $A(B + C) = AB + AC$ (rozdzielność mnożenia
względem dodawania),
 (11.3.8) $(A + B)C = AC + BC$ (rozdzielność dodawania
względem mnożenia),
 (11.3.9) $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$,
 (11.3.10) $1 \cdot A = A$,
 (11.3.11) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
 (11.3.12) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
 (11.3.13) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Zauważmy, że jeśli dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ macierze A, B, C, \mathbb{O} oraz \mathbb{I} są macierzami kwadratowymi stopnia n , to wszystkie działania wymienione we wzorach (11.3.1) – (11.3.13) są wykonalne. Zbiór wszystkich macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n oznaczamy przez \mathcal{M}_n .

Definicja 11.3.2. Niech będzie dany niepusty zbiór \mathcal{A} , w którym określone są dwa działania $+$ i \cdot oraz dla którego określone jest działanie mnożenia elementu przez liczbę. Zbiór \mathcal{A} nazywa się *algebrą liniową*, lub krótko *algebrą*, jeśli wymienione działania spełniają warunki (11.3.1) – (11.3.13).

Twierdzenie 11.3.3. Zbiór \mathcal{M}_n wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, z działaniami dodawania macierzy, mnożenia macierzy oraz mnożenia macierzy przez liczbę, spełniającymi warunki (11.3.1) – (11.3.13), jest algebrą.

Fakt 11.3.4. Iloczyn macierzy nie jest przemienny, tzn. zazwyczaj $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Przykład 11.3.5. Rozważmy macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mnożąc te macierze przez siebie, otrzymujemy

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem w tym przypadku

$$AB \neq BA.$$

Znając własności działań na macierzach, możemy rozwiązywać równania macierzowe, tzn. równania, w których niewiadomymi są macierze.

Przykład 11.3.6. Rozwiążmy równanie macierzowe

$$2 \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stosując własności działań na macierzach, otrzymujemy kolejno

$$X \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X \cdot \left(\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X \cdot 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$4 \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$4 \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad / \cdot \frac{1}{4},$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

11.4. Wyznacznik macierzy

W tym podrozdziale przedstawimy pewną funkcję określoną na zbiorze \mathcal{M}_n macierzy kwadratowych danego stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, zwaną *wyznacznikiem*. Wyznacznik można zdefiniować na wiele sposobów. Jako że staramy się przedstawiać wybrane zagadnienia matematyki w możliwie najmniej skomplikowany sposób, to zaprezentowana poniżej definicja rekurencyjna wyznacznika macierzy jest jedną z najprostszych. Została ona zaczerpnięta z [25]. Zazwyczaj w literaturze przedmiotu wyznacznik macierzy jest definiowany aksjomatycznie lub poprzez permutacje (patrz np. [5], [11], [13] lub [22]). Wszystkie te definicje są oczywiście równoważne.

Definicja 11.4.1 (rekurencyjna definicja wyznacznika).

Wyznacznik macierzy to funkcja \det , która kwadratowej macierzy liczbowej A przypisuje liczbę $\det A$, określoną rekurencyjnie:

1. dla macierzy $A = [a_{11}]$ stopnia 1 mamy

$$\det A = a_{11},$$

2. dla macierzy A stopnia $n \geq 2$ mamy

$$\det A = (-1)^{n+1} \cdot a_{n1} \cdot \det A_{n1} + (-1)^{n+2} \cdot a_{n2} \cdot \det A_{n2} + \dots + (-1)^{n+n} \cdot a_{nn} \cdot \det A_{nn},$$

gdzie A_{nj} to macierz kwadratowa stopnia $n-1$, otrzymana z macierzy A poprzez wykreślenie ostatniego, n -tego wiersza oraz j -tej kolumny, gdzie $1 \leq j \leq n$. Liczbę $\det A$ nazywamy *wyznacznikiem macierzy A* i będziemy oznaczali równoważnie przez $\det[a_{ij}]$ lub $|A|$. Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia n nazywamy krócej *wyznacznikiem stopnia n* .

Przykład 11.4.2. Obliczmy wyznacznik macierzy A , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z definicji 11.4.1 otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot 3 + (-1)^{2+2} \cdot 6 \cdot 5 = -3 + 30 = 27.$$

Obliczanie wyznaczników wyższych stopni tylko z definicji 11.4.1 jest zajęciem dość żmudnym. Dlatego też przedstawimy różne techniki ułatwiające obliczanie wyznaczników.

11.4.1. Obliczanie wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego

Twierdzenie 11.4.3. Dana jest dowolna macierz kwadratowa stopnia 2, tzn. macierz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie a, b, c, d są pewnymi liczbami. Wówczas

$$(11.4.1) \quad \det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Przykład 11.4.4. Korzystając ze wzoru (11.4.1), otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 5 \cdot 6 - 3 \cdot 1 = 30 - 3 = 27.$$

Twierdzenie 11.4.5 (metoda Sarrusa).

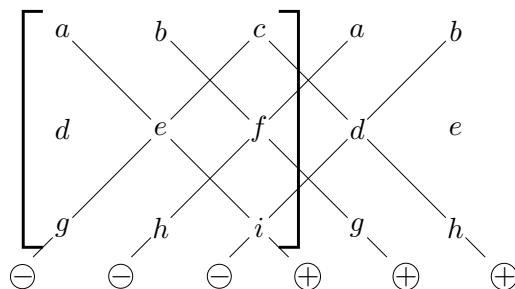
Dana jest dowolna macierz kwadratowa stopnia 3, tzn. macierz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

gdzie a, b, \dots, i są pewnymi liczbami. Wówczas

$$(11.4.2) \quad \det A = (a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h) - (c \cdot e \cdot g + a \cdot f \cdot h + b \cdot d \cdot i).$$

Metodę Sarrusa można zapamiętać następująco. Dopisujemy po prawej stronie macierzy A jej pierwszą kolumnę, a następnie jej drugą kolumnę. Następnie prowadzimy od wyrazów pierwszego wiersza przekątne w sposób pokazany na rysunku 11.2. Przekątne równoległe do głównej przekątnej opatrujemy znakiem „+”, zaś przekątne prostopadłe do głównej znakiem „-”. Tworzymy iloczyny wyrazów na przekątnych i nadajemy im znaki adekwatne do znaków tych przekątnych. Na końcu sumujemy wszystkie iloczyny i otrzymujemy szukany wyznacznik.



Rysunek 11.2. Metoda Sarrusa

Przykład 11.4.6. Korzystając z metody Sarrusa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} = \\ &= (1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3) - (3 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2) = \\ &= (6 + 2 + 18) - (9 + 3 + 8) = 26 - 20 = 6. \end{aligned}$$

11.4.2. Rozwinięcie wyznacznika według Laplace’a

Obliczanie wyznaczników metodą „mnożenia po przekątnych” jest możliwe tylko dla wyznaczników stopnia 2 lub 3. Dla wyznaczników wyższych stopni trzeba zastosować metodę, którą przedstawił matematyk francuski Pierre Simon de Laplace (1749–1827). Na potrzeby tej metody wprowadzimy pojęcie dopełnienia algebraicznego elementu macierzy.

Definicja 11.4.7. Dla macierzy $A = [a_{ij}]$ kwadratowej stopnia $n \geq 2$ definiujemy *dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}* jako liczbę

$$(11.4.3) \quad D_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} to macierz stopnia $n - 1$, otrzymana z macierzy A poprzez wykreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Twierdzenie 11.4.8 (rozwinięcie wyznacznika według Laplace’a).

Niech macierz $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. Wówczas dla dowolnych i, j takich, że $1 \leq i \leq n$ oraz $1 \leq j \leq n$, prawdziwe są równości

$$(11.4.4) \quad \det A = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot D_{is} = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \dots + a_{in} \cdot D_{in},$$

$$(11.4.5) \quad \det A = \sum_{s=1}^n a_{sj} \cdot D_{sj} = a_{1j} \cdot D_{1j} + a_{2j} \cdot D_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot D_{nj}.$$

Równość (11.4.4) nazywamy *rozwinięciem wyznacznika względem i -tego wiersza*, zaś równość (11.4.5) nazywamy *rozwinięciem wyznacznika względem j -tej kolumny*.

Z twierdzenia 11.4.8 wynikają dwa następujące fakty:

Fakt 11.4.9. Dla macierzy trójkątnej dolnej oraz macierzy trójkątnej górnej wyznacznik jest równy iloczynowi wyrazów na głównej przekątnej, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Fakt 11.4.10. Jeśli w macierzy A każdy wyraz pewnego wiersza lub każdy wyraz pewnej kolumny jest równy 0, to $\det A = 0$.

Uwaga 11.4.11. Korzystnie jest stosować rozwinięcie Laplace’a względem tego wiersza bądź tej kolumny, gdzie jest możliwie najwięcej wyrazów zerowych. W takiej sytuacji we wzorach (11.4.4) lub (11.4.5) możliwie najwięcej iloczynów będzie zerowych i obliczenie wyznacznika będzie najmniej skomplikowane rachunkowo.

Przykład 11.4.12. Obliczmy następujący wyznacznik stopnia 4

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem trzeciego wiersza, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ & = 0 \cdot D_{31} + (-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot D_{34} = \\ & = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Otrzymane wyznaczniki trzeciego stopnia obliczamy, korzystając z metody Sarrusa.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 0 + (-30) - (-50 + 18 + 0) = \\ & = -54 - (-32) = -22, \\ & \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 12 + (-20) + 0 - (25 + 0 + 16) = \\ & = -8 - 41 = -49. \end{aligned}$$

Ostatecznie szukany wyznacznik wynosi

$$\det A = 2 \cdot (-22) + 5 \cdot (-49) = -44 - 245 = -289.$$

11.4.3. Podstawowe własności wyznacznika

W tej części przedstawimy podstawowe własności wyznacznika macierzy kwadratowej.

Twierdzenie 11.4.13. Dla dowolnych macierzy kwadratowych A, B stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, oraz dowolnej liczby α zachodzą następujące równości

$$(11.4.6) \quad \det A^T = \det A,$$

$$(11.4.7) \quad \det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A,$$

$$(11.4.8) \quad \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B,$$

$$(11.4.9) \quad \det A^k = (\det A)^k, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{N}.$$

Równość (11.4.8) jest nazywana *twierdzeniem Cauchy'ego*.

Przykład 11.4.14. Obliczmy wyznacznik iloczynu AB , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Z przykładu 11.4.12 wiemy, że $\det A = -22$, zaś $\det B = -49$. Korzystając ze wzoru (11.4.8), otrzymujemy, że

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = (-22) \cdot (-49) = 1078.$$

W niektórych sytuacjach wyznacznik macierzy kwadratowej można wyznaczyć niemalże bez rachunków.

Twierdzenie 11.4.15. Jeżeli w macierzy A wyrazy ustalonego wiersza są odpowiednio proporcjonalne do wyrazów innego wiersza, to $\det A = 0$.

Ponieważ zawsze zachodzi równość $\det A^T = \det A$, to powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla kolumn macierzy A .

Przykład 11.4.16. Jak łatwo zauważyć

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -4 & 0 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

11.5. Macierz odwrotna

Definicja 11.5.1. Macierz kwadratową A nazywamy *macierzą osobliwą* lub *nieodwracalną*, jeśli $\det A = 0$. Jeśli $\det A \neq 0$, to macierz kwadratową A nazywamy *macierzą nieosobliwą* lub *odwracalną*.

Definicja 11.5.2. *Macierzą odwrotną* A^{-1} do macierzy nieosobliwej A stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy jedyną macierz spełniającą warunek

$$(11.5.1) \quad AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n,$$

gdzie \mathbb{I}_n to macierz jednostkowa stopnia n .

Łatwo zauważyć, że macierz odwrotna do macierzy nieosobliwej stopnia n też jest macierzą nieosobliwą stopnia n .

Przykład 11.5.3. Korzystając z warunku (11.5.1), wyznaczmy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 6 \neq 0,$$

to macierz A jest nieosobliwa. Niech

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } a, b, c, d \text{ są pewnymi liczbami.}$$

Wyznamy iloczyny AA^{-1} oraz $A^{-1}A$.

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}, \\ A^{-1}A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Przyrównując oba iloczyny do macierzy jednostkowej stopnia 2, tj. do macierzy

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy dwa układy czterech równań z czterema niewiadomymi

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} 2a = 1 \\ 3b = 0 \\ 2c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tych układów są oczywiście liczby

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Zatem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Można zauważyć, że wyznaczenie macierzy odwrotnej do macierzy nieosobliwej stopnia n za pomocą definicji, tj. wyłącznie z warunku (11.5.1), wymaga od nas m.in. rozwiązania dwóch układów n^2 równań z n^2 niewiadomymi. Jest to zajęcie dość żmudne. Dlatego też łatwiej będzie wyznaczyć macierz odwrotną do danej przy pomocy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 11.5.4. Jeśli A jest macierzą nieosobliwą stopnia n , to

$$(11.5.2) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

Definicja 11.5.5. Macierz $[D_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy *macierzą dopełnień algebraicznych* elementów macierzy A i oznaczamy krótko przez A^D .

Przykład 11.5.6. Znajdźmy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Na początek obliczmy wyznacznik macierzy A .

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (54 + 28 + 45) - (27 + 40 + 63) = -9 + 1 + 5 = -3.$$

Ponieważ $\det A = -3 \neq 0$, to macierz A jest nieosobliwa. Teraz obliczmy dopełnienia algebraiczne wyrazów macierzy A .

$$\begin{aligned} D_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7, & D_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \\ D_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6, & D_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, \\ D_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1, & D_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \end{aligned}$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3,$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

Podstawiając powyższe do wzoru (11.5.2), otrzymujemy

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla $n = 2$ teza twierdzenia 11.5.4 przybiera bardzo prostą postać.

Twierdzenie 11.5.7. Jeśli macierz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa, to wtedy

$$(11.5.3) \quad A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Przykład 11.5.8. Znajdźmy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z równości (11.5.3), otrzymujemy

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 0 \cdot 0} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Innym sposobem obliczenia macierzy odwrotnej do danej macierzy nieosobliwej jest tzw. *metoda bezwyznacznikowa*. Metodę tę zaprezentujemy w części 11.6.1 na stronie 184.

11.5.1. Podstawowe własności macierzy odwrotnej

Poniżej przedstawiamy niektóre własności macierzy odwrotnej.

Twierdzenie 11.5.9 (własności macierzy odwrotnej).

Niech A, B będą macierzami nieosobliwymi stopnia n oraz niech α będzie liczbą różną od 0. Wówczas

$$(11.5.4) \quad (A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(11.5.5) \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A},$$

$$(11.5.6) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$

$$(11.5.7) \quad (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1},$$

$$(11.5.8) \quad (A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1},$$

$$(11.5.9) \quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{N}.$$

Przykład 11.5.10. Obliczmy wyznacznik macierzy odwrotnej do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Z przykładu 11.4.12 wiemy, że $\det A = -289$. Korzystając ze wzoru (11.5.5), otrzymujemy

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{-289} = -\frac{1}{289}.$$

11.6. Algorytm Gaussa

W bieżącym podrozdziale przedstawimy jedno z najważniejszych narzędzi algebry liniowej – algorytm Gaussa (Carl Friedrich Gauss, żyjący w latach 1777 – 1855, był wybitnym matematykiem, astronomem i fizykiem niemieckim). Algorytm Gaussa, zwany często algorytmem Gaussa–Jordana, znajduje swoje zastosowanie głównie przy rozwiązywaniu cramerowskich układów równań liniowych. To zastosowanie przedstawimy w części 12.2.3. Innym przykładem na wykorzystanie algorytmu Gaussa jest wyznaczanie macierzy odwrotnej do danej macierzy nieosobliwej. Metodę bezwyznacznikową obliczania macierzy odwrotnej przedstawimy w części 11.6.1.

Rozpocznijmy od zdefiniowania *operacji elementarnych*, zwanych też czasami *przekształceniami elementarnymi*.

Definicja 11.6.1. *Operacjami elementarnymi na wierszach macierzy* nazywamy działania następujących typów:

1. zamiana miejscami wiersza i -tego oraz wiersza j -tego; operację taką oznaczamy $w_i \leftrightarrow w_j$,
2. pomnożenie wszystkich elementów i -tego wiersza przez niezerową liczbę c ; operację taką oznaczamy $c \cdot w_i \rightarrow w_i$,
3. dodanie do elementów i -tego wiersza odpowiednich elementów j -tego wiersza pomnożonych przez niezerową liczbę c ; operację taką będziemy oznaczać $w_i + c \cdot w_j \rightarrow w_i$.

Podobnie definiujemy *operacje elementarne na kolumnach macierzy*: $k_i \leftrightarrow k_j$, $c \cdot k_i \rightarrow k_i$ oraz $k_i + c \cdot k_j \rightarrow k_i$.

Przykład 11.6.2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2+2w_4 \rightarrow w_2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 10 & 7 & 16 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definicja 11.6.3. Macierze otrzymane z danej macierzy w wyniku operacji elementarnych nazywamy *macierzami równoważnymi*.

Algorytm Gaussa polega na wykorzystaniu operacji elementarnych *na wierszach* macierzy nieosobliwej A stopnia n w celu przekształcenia tej macierzy w równoważną macierz jednostkową \mathbb{I}_n . Algorytm Gaussa realizujemy w trzech krokach przedstawionych poniżej.

Krok I

Dana jest macierz nieosobliwa A stopnia $n \geq 2$. Pierwsza kolumna macierzy A jest niezerowa, tzn. istnieje wyraz $a_{i1} \neq 0$, gdzie $1 \leq i \leq n$ (patrz fakt 11.4.10). Jeśli $a_{11} = 0$, to wykonujemy operację $w_1 \leftrightarrow w_i$ i otrzymujemy, że nowy wyraz $a_{11} \neq 0$. Następnie wykonujemy operację typu 2. $\frac{1}{a_{11}} \cdot w_1 \rightarrow w_1$ i otrzymujemy $a_{11} = 1$. Następnie wykonujemy operacje $w_i - a_{i1}w_1 \rightarrow w_i$ kolejno dla $i = 2, 3, 4, \dots, n$. W rezultacie otrzymujemy macierz, w której pierwsza kolumna jest jednostkowa, tzn. macierz postaci

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{1} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & * & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right].$$

Krok II

Wykonujemy Krok I dla dalszych kolumn, czyli na macierzach coraz niższych stopni. W rezultacie otrzymujemy macierz górną trójkątną, w której na głównej przekątnej znajdują się wyrazy równe 1, tzn. macierz postaci

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & * \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok III

Stosując operacje typu $w_i - c \cdot w_{i+k} \rightarrow w_i$ kolejno dla $i = n-1, n-2, n-3, \dots, 1$ oraz odpowiednich c i $k \geq 1$, doprowadzamy do macierzy jednostkowej \mathbb{I}_n .

Przykład 11.6.4. Korzystając z algorytmu Gaussa, przekształcimy macierz nieosobliwą

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{array} \right]$$

w macierz jednostkową \mathbb{I}_4 .

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}w_1 \rightarrow w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_1 \rightarrow w_3} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_2 \rightarrow w_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - 2w_3 \rightarrow w_4} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_4 \rightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(w_2 + 3w_3) - 4w_4 \rightarrow w_2} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{((w_1 - 2w_2) - 3w_3) - w_4 \rightarrow w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

11.6.1. Metoda bezwyznacznikowa obliczania macierzy odwrotnej

Jeżeli wykonujemy identyczne operacje elementarne na wierszach nieosobliwej macierzy A stopnia n i macierzy jednostkowej \mathbb{I}_n , to po przekształceniu macierzy A do macierzy jednostkowej \mathbb{I}_n macierz jednostkowa \mathbb{I}_n będzie przekształcona do macierzy odwrotnej A^{-1} . Wygodnie jest wykonywać te operacje, zapisując obie macierze obok siebie, tzn. tworząc macierz $[A|\mathbb{I}_n]$. Metodę bezwyznacznikową można zapisać skrótowo za pomocą schematu

$$(11.6.1) \quad [A|\mathbb{I}_n] \xrightarrow[\text{Gaussa}]{\text{algorytm}} [\mathbb{I}_n|A^{-1}].$$

Metoda bezwyznacznikowa jest często zwana *metodą przekształceń elementarnych* obliczania macierzy odwrotnej.

Przykład 11.6.5. Korzystając z metody bezwyznacznikowej, obliczmy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
[A|\mathbb{I}_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{w_2-2w_1 \rightarrow w_2 \\ w_3-w_1 \rightarrow w_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\
&\xrightarrow{w_3-3w_2 \rightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)w_2 \rightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\
&\xrightarrow{w_1-2w_2 \rightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right] = [\mathbb{I}_3|A^{-1}].
\end{aligned}$$

Zatem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na przykładzie widać, że (jak sugeruje sama nazwa) w metodzie bezwyznacznikowej nie oblicza się żadnych wyznaczników macierzy (oczywiście poza ewentualnym sprawdzeniem, czy podana macierz jest nieosobliwa).

Metoda bezwyznacznikowa jest metodą, na której opierają się procedury numeryczne obliczania macierzy odwrotnej.

11.7. Rozszerzony algorytm Gaussa

Rozszerzony algorytm Gaussa służy do przekształcenia dowolnej macierzy do równoważnej macierzy zwanej *postacią kanoniczną* tej macierzy. Ponadto jest stosowany przy rozwiązywaniu dowolnych układów równań liniowych. To zastosowanie przedstawimy w podrozdziale 12.3.

Twierdzenie 11.7.1. Każdą macierz A wymiaru $m \times n$ można za pomocą skończonej ilości operacji elementarnych przekształcić w macierz wymiaru $m \times n$ postaci

$$(11.7.1) \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & R_{r \times n-r} \\ \hline \mathbb{O}_{m-r \times r} & \mathbb{O}_{m-r \times n-r} \end{array} \right]$$

dla pewnego r takiego, że $1 \leq r \leq \min(m, n)$ i pewnej macierzy $R_{r \times n-r}$. Jeżeli $r = m$, to w postaci (11.7.1) nie występują macierze $\mathbb{O}_{m-r \times r}$ i $\mathbb{O}_{m-r \times n-r}$, natomiast jeśli $r = n$, to nie występują macierze $R_{r \times n-r}$ oraz $\mathbb{O}_{m-r \times n-r}$.

Definicja 11.7.2. Macierz (11.7.1) równoważną macierzy A nazywa się *postacią kanoniczną* lub *bazową* tej macierzy.

Uwaga 11.7.3. Dla danej macierzy A liczba r występująca w postaci kanonicznej (11.7.1) jest określona jednoznacznie i nazywa się *rzędem macierzy A* . Rząd

macierzy A oznaczamy przez $\text{rz}(A)$ lub $\text{rk}(A)$. Zainteresowanych tematem rzędu macierzy odsyłamy np. do [2], [11] lub [13].

W praktyce do przekształcenia dowolnej macierzy do jej postaci kanonicznej będziemy wykorzystywali jedynie operacje elementarne na wierszach oraz operacje elementarne typu $k_i \leftrightarrow k_j$ na kolumnach danej macierzy.

Dla ułatwienia przez $k_i \rightarrow k_n$ oznaczymy makrooperację, która składa się ze skończonego ciągu następujących operacji elementarnych: $k_i \leftrightarrow k_{i+1}$, $k_{i+1} \leftrightarrow k_{i+2}$, $k_{i+2} \leftrightarrow k_{i+3}$, ..., $k_{n-1} \leftrightarrow k_n$. W wyniku tej makrooperacji kolumna k_i stanie się ostatnią kolumną macierzy, zaś każda z kolumn od k_{i+1} do k_n przesunie się o jedno miejsce w lewo.

W *rozszerzonym algorytmie Gaussa* wykonujemy podobne kroki jak w „zwykłym” algorytmie Gaussa. W przypadku gdy pierwsza kolumna danej macierzy zawiera wyłącznie wyrazy zerowe, to zastosujemy makrooperację $k_1 \rightarrow k_n$. Gdy przy realizacji kroku II kolejna kolumna k_i zawiera wyrazy zerowe na głównej przekątnej oraz pod nią, to wykonujemy makrooperację $k_i \rightarrow k_n$.

Przykład 11.7.4. Przekształćmy do postaci kanonicznej macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Stosując rozszerzony algorytm Gaussa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & -4 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\substack{w_2-3w_1 \rightarrow w_2 \\ w_3-2w_1 \rightarrow w_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_2 \leftrightarrow k_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{(-\frac{1}{2})w_2 \rightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3-w_2 \rightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{w_1-3w_2 \rightarrow w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Zatem postać kanoniczna macierzy A to postać

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

W przypadku macierzy nieosobliwej rozszerzony algorytm Gaussa jest identyczny z podstawowym algorytmem Gaussa.

Fakt 11.7.5. Jeśli macierz A jest nieosobliwą macierzą kwadratową stopnia n , to w tezie twierdzenia 11.7.1 zachodzi $r = m = n$ i postacią kanoniczną macierzy A jest macierz jednostkowa \mathbb{I}_n .

Rozdział 12

Układy równań liniowych

12.1. Podstawowe definicje

Definicja 12.1.1. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. *Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy równanie macierzowe postaci*

$$(12.1.1) \quad AX = B,$$

gdzie $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $X = [x_j]_{n \times 1}$, $B = [b_i]_{m \times 1}$ i wszystkie elementy a_{ij} oraz b_i ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) są dane.

Macierz A nazywamy *macierzą główną* lub inaczej *macierzą współczynników* układu (12.1.1). Macierz X zwiemy *kolumną niewiadomych*, zaś macierz B *kolumną wyrazów wolnych* tego układu. Jeśli macierze A oraz B zapiszemy obok siebie, to powstałą macierz $[A|B]$ nazywamy *macierzą rozszerzoną* lub *macierzą uzupełnioną* układu (12.1.1).

Układ (12.1.1) zazwyczaj zapisujemy w *postaci rozwiniętej*:

$$(12.1.2) \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}.$$

Definicja 12.1.2. *Rozwiązaniem układu m równań liniowych z n niewiadomymi nazywamy macierz liczbową X spełniającą równanie (12.1.1) lub równoważnie skończony ciąg (x_1, x_2, \dots, x_n) liczb, które spełniają każde z równań układu (12.1.2).*

Ze względu na ilość rozwiązań wyróżniamy następujące typy układów równań liniowych.

Definicja 12.1.3. Układ równań nazywamy *układem*:

- *sprzecznym*, gdy nie ma rozwiązań,
- *niesprzecznym*, gdy posiada co najmniej jedno rozwiązanie.

Niespreczny układ równań jest *układem*:

- *oznaczonym*, gdy posiada dokładnie jedno rozwiązanie,
- *nieoznaczonym*, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Ze względu na postać kolumny wyrazów wolnych wyróżniamy następujące typy układów równań liniowych:

Definicja 12.1.4. Układ $AX = B$ jest *układem*:

- *jednorodnym*, gdy kolumna wyrazów wolnych jest kolumną zerową, tzn. gdy $B = \mathbb{O}_{m \times 1}$,
- *niejednorodnym*, gdy kolumna wyrazów wolnych zawiera choć jeden element niezerowy, tzn. gdy $B \neq \mathbb{O}_{m \times 1}$.

Każdy układ jednorodny jest układem niesprzecznym.

Fakt 12.1.5. Jednym z rozwiązań układu jednorodnego jest macierz zerowa $X = [0]_{n \times 1}$.

Spośród wszystkich układów równań liniowych wyróżniamy tzw. *układy Cramera*. Gabriel Cramer był matematykiem szwajcarskim, który żył w latach 1704 – 1752.

Definicja 12.1.6. Układ równań liniowych $AX = B$ nazywamy *układem Cramera* lub *układem cramerowskim*, gdy macierz A jest nieosobliwą macierzą kwadratową, tzn. gdy $\det A \neq 0$. W przeciwnym wypadku układ $AX = B$ nazywamy *układem niecramerowskim*.

Fakt 12.1.7. Każdy układ cramerowski jest układem oznaczonym.

W zależności od tego, czy dany układ równań liniowych jest układem cramerowskim, czy też nie, do jego rozwiązywania będziemy stosowali różne metody. W dalszej części rozdziału przedstawimy podstawowe z tych metod.

12.2. Metody rozwiązywania układów Cramera

W bieżącym podrozdziale omówimy trzy podstawowe metody rozwiązywania układów Cramera.

12.2.1. Wzór Cramera

Twierdzenie 12.2.1 (Cramera).

Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, określone *wzorem Cramera*

$$(12.2.1) \quad X = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \dots \\ \det A_n \end{bmatrix},$$

gdzie A_j to macierz powstała z macierzy A poprzez zastąpienie j -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

Fakt 12.2.2. Równanie (12.2.1) można równoważnie zapisać w postaci następujących wzorów Cramera.

$$(12.2.2) \quad x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Przykład 12.2.3. Rozwiążmy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}.$$

Zapisując ten układ w postaci macierzowej (12.1.1), otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = 6 - (-15) = 21 \neq 0$, to dany układ jest układem Cramera.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}, & \det A_1 &= 12 - 75 = -63, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}, & \det A_2 &= 15 - (-6) = 21. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe do wzoru Cramera (12.2.1), otrzymujemy

$$X = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} -63 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem danego układu jest para $x = -3$ i $y = 1$.

Przykład 12.2.4. Rozwiążmy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}.$$

W postaci macierzowej (12.1.1) mamy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Na początek obliczmy wyznacznik macierzy głównej układu.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 6 + 6) - (27 + 1 + 8) = 18 - 36 = -18 \neq 0.$$

Zatem dany układ jest układem Cramera.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 4 + 9) - (18 + 1 + 12) = 19 - 31 = -12,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (6 + 3 + 12) - (27 + 2 + 4) = 21 - 33 = -12,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 18 + 2) - (9 + 3 + 8) = 26 - 20 = 6.$$

Ze wzorów Cramera (12.2.2) dostajemy, że

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3},$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3},$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{6}{-18} = -\frac{1}{3}.$$

Zatem rozwiązaniem danego układu jest trójka $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$.

12.2.2. Metoda macierzy odwrotnej

Twierdzenie 12.2.5 (metoda macierzy odwrotnej).

Rozwiązanie układu Cramera $AX = B$ jest określone wzorem

$$(12.2.3) \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Przykład 12.2.6. Rozwiążmy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x - 7y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}.$$

Zapisując ten układ w postaci macierzowej (12.1.1), otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = 3 - (-14) = 17 \neq 0$, to dany układ jest układem cramerowskim. Korzystając ze wzoru (11.5.3), obliczamy macierz odwrotną do macierzy głównej układu.

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{2}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

Ze wzoru (12.2.3) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{2}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{17} \\ \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem danego układu jest para $x = \frac{41}{17}$, $y = \frac{1}{17}$.

Przykład 12.2.7. Rozwiążmy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x + 2y & = 3 \\ 2x + 3y & = 1 \\ x - y + z & = 4 \end{cases}.$$

W postaci macierzowej (12.1.1) mamy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciej kolumny, obliczmy wyznacznik macierzy A .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & \boxed{0} \\ 1 & -1 & \boxed{1} \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

Zatem dany układ jest układem Cramera. Korzystając z przykładu 11.6.5, mamy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając powyższe do wzoru (12.2.3), otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 + 2 + 0 \\ 6 - 1 + 0 \\ 15 - 3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem podanego układu jest trójka $x = -7$, $y = 5$, $z = 16$.

12.2.3. Metoda eliminacji Gaussa

Jeżeli wykonujemy identyczne operacje elementarne na wierszach nieosobliwej macierzy A stopnia n i kolumny wyrazów wolnych B , to po przekształceniu macierzy A do macierzy jednostkowej \mathbb{I}_n kolumna wyrazów wolnych B będzie przekształcona do rozwiązania X układu. Wygodnie jest wykonywać te operacje,

zapisując A i B obok siebie, tzn. tworząc macierz uzupełnioną $[A|B]$ danego układu. W praktyce przy wykonywaniu operacji elementarnych na wierszach będziemy kierowali się algorytmem Gaussa, przedstawionym w podrozdziale 11.6.

Metodę eliminacji Gaussa dla układów Cramera można zapisać skrótowo za pomocą schematu

$$(12.2.4) \quad [A|B] \xrightarrow[\text{Gaussa}]{\text{algorytm}} [\mathbb{I}_n|X].$$

Metoda eliminacji Gaussa jest czasami zwana *metodą przekształceń elementarnych* rozwiązywania układu równań.

Definicja 12.2.8. Układy równań liniowych otrzymane z danego układu w wyniku operacji elementarnych na macierzach uzupełnionych nazywamy *układami równoważnymi*.

Przykład 12.2.9. Rozwiążmy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2y + 3z = 6 \\ -x + y - 5z = -3 \end{cases}.$$

Zapisując ten układ w postaci macierzowej (12.1.1), otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z metody Sarrusa, otrzymujemy, że $\det A = -20 \neq 0$, czyli dany układ jest układem Cramera. Przy pomocy metody eliminacji Gaussa wyznaczamy rozwiązanie tego układu.

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -5 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3+w_1 \rightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}w_2 \rightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-2w_2 \rightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{(-\frac{1}{10}) \cdot w_3 \rightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - \frac{3}{2}w_3 \rightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{(w_1-w_2)+2w_3 \rightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right] = [\mathbb{I}_n|X]. \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem danego układu jest trójka $x = \frac{17}{5}$, $y = \frac{12}{5}$ oraz $z = \frac{2}{5}$.

12.3. Metoda eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań liniowych

Metodę eliminacji Gaussa, zaprezentowaną dla układów cramerowskich w części 12.2.3, można uogólnić i zastosować do rozwiązywania dowolnych układów równań liniowych. Uogólnienie będzie polegało na zastąpieniu standardowego algorytmu Gaussa (patrz podrozdział 11.6) jego rozszerzoną wersją, przedstawioną w podrozdziale 11.7.

Dany jest dowolny układ $AX = B$ m równań liniowych z n niewiadomymi x_1, x_2, \dots, x_n . Przed rozpoczęciem przekształceń zapisujemy macierz główną A i kolumnę wyrazów wolnych B obok siebie, jako macierz rozszerzoną $[A|B]$ wymiaru $m \times (n + 1)$. Dążymy do tego, by macierz A doprowadzić do jej postaci kanonicznej (11.7.1). Przy wykonywaniu operacji elementarnych kierujemy się rozszerzonym algorytmem Gaussa. Operacje elementarne na wierszach przeprowadzamy dla wierszy całej macierzy $[A|B]$, natomiast makrooperacje $k_i \rightarrow k_n$ stosujemy tylko dla kolumn macierzy głównej A . Należy pamiętać, że każda kolumna macierzy A odpowiada współczynnikom przy innej niewiadomej (pierwszą kolumnę tworzą współczynniki przy x_1 , drugą współczynniki przy x_2 itd.) Dlatego też przy stosowaniu makrooperacji $k_i \rightarrow k_n$ kolumnę k_i przemieszczamy razem z jej niewiadomą x_i . W związku z tym po przekształceniu macierzy głównej układu do jej postaci kanonicznej (11.7.1) kolejność niewiadomych może być inna niż na początku. Niewiadome zapisane w finałowej kolejności oznaczymy przez x'_1, x'_2, \dots, x'_n . Po zakończeniu realizacji rozszerzonego algorytmu Gaussa kolumna wyrazów wolnych B będzie przekształcona do pewnej kolumny liczb $B' = [b'_i]_{m \times 1}$. W ten sposób otrzymamy postać kanoniczną macierzy rozszerzonej $[A|B]$ danego układu równań.

Metodę eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań liniowych można zapisać za pomocą schematu

$$(12.3.1) \quad [A|B] \xrightarrow[\text{Gaussa}]{\text{rozszerzony algorytm}} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbb{I}_r & R_{r \times n-r} & B'_1 \\ \hline \mathbb{O}_{m-r \times r} & \mathbb{O}_{m-r \times n-r} & B'_2 \end{array} \right],$$

gdzie $1 \leq r \leq \min(m, n)$, $R_{r \times n-r}$ jest pewną macierzą (patrz twierdzenie 11.7.1), natomiast kolumny B'_1 oraz B'_2 są postaci

$$B'_1 = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \end{bmatrix} \quad B'_2 = \begin{bmatrix} b'_{r+1} \\ b'_{r+2} \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}.$$

Postać kanoniczna macierzy rozszerzonej określa ilość rozwiązań układu równań liniowych $AX = B$. Możemy wyróżnić następujące sytuacje:

1. $r = m$ (macierze $\mathbb{O}_{m-r \times r}$, $\mathbb{O}_{m-r \times n-r}$ i B'_2 nie występują)

Układ równań jest niesprzeczny:

- a) $r < n$ (macierz $R_{r \times n-r}$ pojawia się)
 Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań, czyli jest układem nieoznaczonym.
- b) $r = n$ (macierz $R_{r \times n-r}$ nie występuje)
 Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie, czyli jest układem oznaczonym.
2. $r < m$ (macierze $\mathbb{O}_{m-r \times r}$ i B'_2 pojawiają się)
- a) $B'_2 \neq \mathbb{O}_{m-r \times 1}$ (dla pewnego $r + 1 \leq i \leq m$ zachodzi $b'_i \neq 0$)
 Układ równań nie posiada rozwiązań, czyli jest układem sprzecznym.
- b) $B'_2 = \mathbb{O}_{m-r \times 1}$ (dla każdego $r + 1 \leq i \leq m$ zachodzi $b'_i = 0$)
 Układ równań jest niespreczny:
- i. $r < n$ (macierz $R_{r \times n-r}$ pojawia się)
 Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań, czyli jest układem nieoznaczonym.
- ii. $r = n$ (macierz $R_{r \times n-r}$ nie występuje)
 Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie, czyli jest układem oznaczonym.

W sytuacjach kiedy układ jest nieoznaczony, niewiadome x'_1, x'_2, \dots, x'_r , które odpowiadają kolumnom macierzy \mathbb{I}_r , nazywamy *zmiennymi zależnymi*, zaś niewiadome $x'_{r+1}, x'_{r+2}, \dots, x'_n$ odpowiadające kolumnom macierzy $R_{r \times n-r}$ nazywamy *zmiennymi niezależnymi* lub inaczej *parametrami*. Parametry mogą przyjmować dowolne wartości liczbowe, natomiast zmienne zależne, jak sama nazwa wskazuje, wyrażają się w terminach parametrów i ewentualnie stałych b'_i .

Przykład 12.3.1. Rozwiążmy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}.$$

W postaci macierzowej (12.1.1) otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz główna danego układu jest macierzą wymiaru 3×4 , to układ ten jest układem niecramerowskim. Stosując rozszerzony algorytm Gaussa, otrzymujemy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} w_2 - 3w_1 \rightarrow w_2 \\ w_3 - 2w_1 \rightarrow w_3 \end{array}]{} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c} x & z & t & y & \\ \hline \xrightarrow{k_2 \rightarrow k_4} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} & \xrightarrow{(-\frac{1}{2})w_2 \rightarrow w_2} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} & \rightarrow \\ \hline \xrightarrow{w_3 - w_2 \rightarrow w_3} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{w_1 - 3w_2 \rightarrow w_1} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .
\end{array}
\end{array}$$

Zatem postać kanoniczna macierzy uzupełnionej danego układu to

$$(12.3.2) \quad \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

przy czym pierwsza kolumna odpowiada niewiadomej x , druga niewiadomej z , trzecia niewiadomej t , zaś czwarta kolumna niewiadomej y . Z powyższego wynika, że dany układ równań jest układem nieoznaczonym. Niewiadome x oraz z są zmiennymi zależnymi, natomiast niewiadome t oraz y są zmiennymi niezależnymi. Zależność zmiennych zależnych od parametrów otrzymujemy, zapisując w postaci rozwiniętej układ równań o macierzy rozszerzonej (12.3.2), równoważny danemu układowi równań. Oczywiście pomijamy ostatnie równanie, które jest równaniem tożsamościowym $0 = 0$.

$$\begin{cases} x + 5t + 2y = 11 \\ z - 2t = -4 \end{cases}.$$

W rezultacie rozwiązaniami danego układu równań są wszystkie czwórki (x, y, z, t) , gdzie

$$\begin{cases} x = 11 - 5t - 2y \\ z = -4 + 2t \end{cases},$$

natomiast y oraz t są liczbami dowolnymi.

Przykład 12.3.2. Rozwiążmy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2t = -2 \\ 5x - 3y - z + t = 3 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = -4 \end{cases}.$$

Macierz uzupełniona tego układu to oczywiście macierz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & -4 \end{array} \right].$$

Stosując metodę eliminacji Gaussa, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2-5w_1 \rightarrow w_2 \\ w_3-2w_1 \rightarrow w_3 \\ w_4-3w_1 \rightarrow w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & -9 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -8 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \\
 & \xrightarrow{\frac{1}{2}w_2 \rightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -8 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3-3w_2 \rightarrow w_3 \\ w_4-w_2 \rightarrow w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{21}{2} & -\frac{29}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{9}{2} \end{array} \right] \rightarrow \\
 & \xrightarrow{(-\frac{2}{21})w_3 \rightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{29}{21} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{9}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_4-\frac{7}{2}w_3 \rightarrow w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{29}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{365}{42} \end{array} \right] \rightarrow \\
 & \xrightarrow{w_2-\frac{9}{2}w_3 \rightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{431}{84} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{29}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{365}{42} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1+w_2 \rightarrow w_1 \\ w_1+2w_3 \rightarrow w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{367}{84} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{431}{84} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{29}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{365}{42} \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Zatem postać kanoniczna macierzy uzupełnionej danego układu to macierz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{367}{84} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{431}{84} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{29}{21} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{365}{42} \end{array} \right].$$

Gdybyśmy zapisali w postaci rozwiniętej układ równań odpowiadający tej macierzy, to ostatnie równanie okazałoby się równaniem sprzecznym $0 = -\frac{365}{42}$. Zatem dany układ równań liniowych nie ma rozwiązań.

12.4. Zastosowania układów równań liniowych

Teoria układów równań liniowych i inne metody algebry liniowej mają szerokie zastosowania w ekonomii, zarządzaniu, logistyce i wielu innych naukach. W szczególności stosuje się tam tak zwany *model programowania liniowego*, który jest generalizacją takich zagadnień jak zagadnienie optymalnej diety, zagadnienie optymalnego planu produkcji czy też zagadnienie transportowe. Model programowania liniowego jest jednym z przedmiotów badań operacyjnych. Zainteresowanych szczegółami wyżej wymienionych zagadnień odsyłamy np. do [1], [5], [12], [22] lub [26]. Poniżej przedstawimy inne zastosowanie teorii układów liniowych zwane *modelem przepływów międzygałęziowych Leontiewa*.

12.4.1. Model przepływów międzygałęziowych Leontiewa

Analiza przepływów międzygałęziowych (międzydziałowych) wymaga ułożenia bilansu gospodarki przedsiębiorstwem, w którym znane są ilości produkcji i jej przydziały do poszczególnych działów (gałęzi) tego przedsiębiorstwa. Założmy, że całe przedsiębiorstwo zostało podzielone na n działów. Przez X_1, X_2, \dots, X_n oznaczymy wielkość globalnej produkcji każdego z tych działów. Przez x_{ij} , gdzie $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, oznaczymy tę część produkcji, która z działu i -tego zostaje przekazana do działu j -tego. Jeżeli $i = j$, to x_{ii} oznacza produkcję działu i , która pozostaje w tym dziale (nazwiemy ją *zużyciem wewnętrznym*). Liczby x_{ij} nazywamy *przepływami międzygałęziowymi*. Nie zawsze cała produkcja i -tego działu zostaje przekazana do innych działów lub zostaje zużyta w tym dziale. Taką nadwyżkę oznaczamy przez x_i i nazywamy *produktem końcowym* i -tego działu. Oczywiście produkty końcowe muszą być nieujemne, tzn. mamy $x_i \geq 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bilans gospodarki przedsiębiorstwa można według propozycji Leontiewa zapisać w postaci macierzy

$$(12.4.1) \quad \begin{bmatrix} X_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_1 \\ X_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & x_n \end{bmatrix}.$$

Zbilansowanie gospodarki oznacza, że produkcja globalna i -tego działu jest sumą przepływów międzygałęziowych wychodzących z tego działu oraz produkcji końcowej tego działu. Mamy zatem następujący układ równań

$$(12.4.2) \quad \begin{cases} X_1 = \sum_{j=1}^n x_{1j} + x_1 \\ X_2 = \sum_{j=1}^n x_{2j} + x_2 \\ \dots \\ X_n = \sum_{j=1}^n x_{nj} + x_n \end{cases}.$$

Powyższy układ równań nazywany jest *równaniami bilansowymi produkcji*. Dla $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ liczby

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

nazywane są *technologicznymi współczynnikami produkcji* lub *współczynnikami bezpośrednich kosztów*. Współczynniki te określają, ile jednostek produktu i -tego działu należy zużyć w j -tym dziale, aby umożliwić wyprodukowanie jednej jednostki produktu w tym dziale. Współczynnik a_{ii} jest oczywiście współczynnikiem wewnętrznego zużycia produkcji. Macierz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy *macierzą technologicznych współczynników produkcji* lub *macierzą współczynników kosztów*.

Kolumnę $X = [X_i]_{n \times 1}$ nazywamy *wektorem produktu globalnego*, zaś kolumnę $Y = [x_i]_{n \times 1}$ nazywamy *wektorem produktu końcowego*. Układ równań bilansowych (12.4.2) tworzy *statyczny model przepływów międzygałęziowych* o postaci macierzowej

$$(12.4.3) \quad X = AX + Y$$

lub równoważnie

$$(12.4.4) \quad (\mathbb{I}_n - A) \cdot X = Y.$$

Macierz $\mathbb{I}_n - A$ oznaczamy zazwyczaj przez L i nazywamy *macierzą Leontiewa*. Warunkiem koniecznym wewnętrznej zgodności produkcji jest niesprzeczność powyższego układu równań. Jeżeli układ ten jest sprzeczny, to planu produkcji nie da się wykonać. Jeżeli zadane są wielkości produktów końcowych i macierz Leontiewa jest macierzą nieosobliwą, to układ (12.4.4) jest układem Cramera. Korzystając z metody macierzy odwrotnej, wektor produktów globalnych wyznaczamy według wzoru

$$X = (\mathbb{I}_n - A)^{-1}Y.$$

Model Leontiewa służy do sporządzania różnych wariantów planów produkcji. Ponadto model ten można przenieść na całą gospodarkę narodową.

Poniższy przykład jest zaczerpnięty z [1].

Przykład 12.4.1. Rozważmy kompleks górniczo-hutniczo-energetyczny z macierzą bilansu (12.4.1), jak następuje (wyniki podane są w mln PLN):

$$\begin{bmatrix} 120 & 24 & 9 & 20 & 67 \\ 90 & 48 & 27 & 10 & 5 \\ 100 & 12 & 18 & 30 & 40 \end{bmatrix}.$$

Macierz technologicznych współczynników produkcji to macierz

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Macierz Leontiewa $L = \mathbb{I}_n - A$ jest równa

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo sprawdzić, macierz Leontiewa jest macierzą nieosobliwą. Chcemy odpowiedzieć na pytanie: jaka powinna być produkcja globalna, aby produkty końcowe wynosiły odpowiednio $x_1 = 80$, $x_2 = 20$, $x_3 = 40$ (w mln PLN)? Po wstawieniu do układu równań (12.4.4) powyższych danych i po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy szukane wielkości produktów globalnych: $X_1 = 143,5$ mln PLN wartości wydobycia węgla, $X_2 = 127,46$ mln PLN wytopionej stali oraz $X_3 = 114,16$ mln wytworzonej energii elektrycznej.

Część IV

Elementy geometrii analitycznej

Rozdział 13

Geometria analityczna w przestrzeni trójwymiarowej

Słowo geometria pochodzi z języka greckiego: *geo* oznacza ziemię, zaś *metreo* znaczy mierzę. Początki geometrii wiążą się z koniecznością mierzenia różnych długości, powierzchni pól uprawnych czy też objętości magazynów na zboża. Najstarsze zachowane źródła dotyczące geometrii jako miernictwa pochodzą ze starożytnej Babilonii, z XXI wieku p.n.e. Status nauki nadali geometrii starożytni Grecy, a w szczególności Tales z Miletu, Pitagoras czy też Euklides. Ten ostatni w swoim dziele *Elementy*, datowanym na ok. 300 r. p.n.e., sformułował m.in. pięć aksjomatów geometrii, które stanowiły fundament tej nauki przez ponad 2000 lat. Dopiero w XIX wieku naszej ery zakwestionowano słusność V aksjomatu Euklidesa, co doprowadziło do powstania tzw. geometrii nieeuklidesowych.

Za twórcę geometrii analitycznej uważany jest matematyk i filozof francuski Rene Descartes (1596–1650), bardziej znany jako Kartezjusz. Jako pierwszy zauważył on, że obiekty geometryczne można badać metodami analitycznymi, przy użyciu algebry. Wprowadził m.in. używane do dziś układy współrzędnych, zwane kartezjańskimi. Elementy geometrii analitycznej na płaszczyźnie występują w programie nauczania matematyki w szkole ponadgimnazjalnej. My zajmiemy się przedstawieniem podstaw geometrii analitycznej w przestrzeni trójwymiarowej.

13.1. Wektory

Definicja 13.1.1. *Przestrzeń trójwymiarowa* to zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych. Innymi słowy przestrzeń trójwymiarowa to dwukrotny iloczyn kartezjański zbioru \mathbb{R} samego ze sobą, czyli $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

W dalszym ciągu tego rozdziału zamiast przestrzeń trójwymiarowa będziemy pisali skrótowo \mathbb{R}^3 .

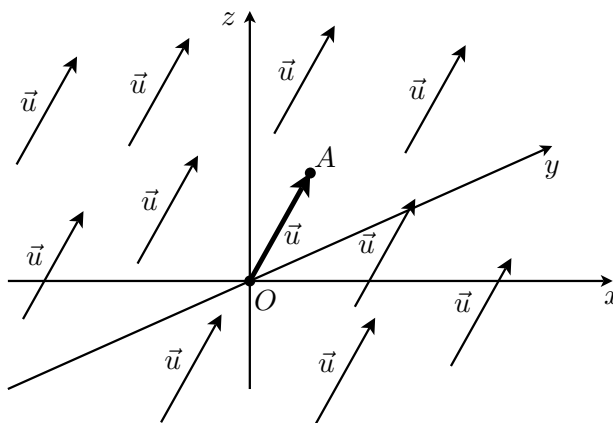
Elementy \mathbb{R}^3 nazywamy *punktami*. Punkty będziemy oznaczali dużymi literami A, B, C itd.

Definicja 13.1.2. Niech będą dane dwa punkty A oraz B . Uporządkowaną parę punktów (A, B) nazywamy *wektorem* i oznaczamy przez \overrightarrow{AB} . Wektor \overrightarrow{AB} nazywamy często *wektorem zaczepionym* w punkcie A .

Wektory rysujemy zwyczajowo w postaci prostej strzałki łączącej punkt początkowy z punktem końcowym wektora. W ten sposób określamy *zwrot wektora*. Jeżeli punkty A i B są różne, \overrightarrow{AB} przechodzi przez nie dokładnie jedna prosta, która wyznacza *kierunek wektora* \overrightarrow{AB} . *Długością* tego wektora jest długość odcinka AB na tej prostej. Wektory możemy oznaczać również przez \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} itp.

Definicja 13.1.3. *Wektor swobodny* wektora \vec{u} to zbiór tych wszystkich wektorów zaczepionych w dowolnym punkcie, które mają ten sam kierunek, zwrot i długość co wektor \vec{u} . Wektor swobodny danego wektora \vec{u} także będziemy oznaczali \vec{u} .

W dalszym ciągu punkt $A \in \mathbb{R}^3$ będziemy utożsamiali zarówno z wektorem zaczepionym \overrightarrow{OA} , gdzie $O \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, 0)$, jak i z wektorem swobodnym \vec{u} wektora \overrightarrow{OA} (patrz rysunek 13.1). W tym kontekście trójkę (x, y, z) będziemy nazywali *współzrędnymi wektora* $\vec{u} = (x, y, z)$. *Wektorem zerowym* będziemy nazywali wektor $\vec{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, 0)$.



Rysunek 13.1. Interpretacja geometryczna \mathbb{R}^3

Wektory są podstawowymi pojęciami w fizyce i inżynierii, przy czym długość wektora nazywa się tam jego *wartością*. Wektory są wykorzystywane do reprezentowania dowolnej wielkości mającej wartość i kierunek. Przykładami takich wielkości są: prędkość (jej wartością jest szybkość), przyspieszenie, przemieszczenie, pęd i kręt poruszającego się obiektu oraz siła działająca na obiekt. Układ wektorów skojarzonych z każdym punktem przestrzeni fizycznej, zwany polem wektorowym, reprezentuje z kolei inne wielkości wektorowe typu pole elektryczne czy też magnetyczne. Zainteresowanych zastosowaniami rachunku wektorowego w mechanice odsyłamy np. do [13].

Definicja 13.1.4. Zbiór punktów postaci $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ będziemy nazywali *osią liczbową* Ox . Podobnie definiujemy osie Oy oraz Oz . Zwyczajowo na każdej osi zaznacza się strzałką naturalny porządek w zbiorze \mathbb{R} .

Definicja 13.1.5. Uporządkowaną trójkę osi liczbowych Ox, Oy, Oz nazywamy *kartezjańskim układem współrzędnych* (patrz rysunek 13.1).

Przestrzeń trójwymiarowa jest szczególnym przypadkiem obiektu o nazwie *przestrzeń n -wymiarowa*.

Definicja 13.1.6. Niech $n \in \mathbb{N}$. *Przestrzenią n -wymiarową* \mathbb{R}^n nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych układów n liczb rzeczywistych, tzn.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leq i \leq n\}.$$

Elementy przestrzeni \mathbb{R}^n nazywamy *wektorami* lub *punktami*. Wektory przestrzeni \mathbb{R}^n też będziemy oznaczali $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ itp.

Każdy wektor możemy identyfikować z macierzą liczbową wymiaru $1 \times n$. Przy takiej interpretacji na wektorach można wykonywać działania arytmetyczne oraz można mnożyć wektory przez liczby, tak jak to zdefiniowaliśmy w podrozdziale 11.2. W konsekwencji działania te będą posiadały wszystkie własności opisane w twierdzeniu 11.3.1 na stronie 172. To sprawia, że przestrzeń \mathbb{R}^n jest przykładem struktury algebraicznej zwanej *przestrzenią liniową* lub *przestrzenią wektorową*.

Definicja 13.1.7. Niepusty zbiór \mathcal{V} , w którym określone są działanie dodawania elementów tego zbioru oraz działanie mnożenia elementu przez liczbę, nazywamy *przestrzenią liniową*, jeśli dla dowolnych $z, w, s \in \mathcal{V}$ oraz dla dowolnych liczb α, β spełnione są następujące warunki:

$$(L-I) \quad z + (w + s) = (z + w) + s,$$

$$(L-II) \quad z + 0 = 0 + z = z,$$

$$(L-III) \quad z + (-z) = (-z) + z = 0,$$

$$(L-IV) \quad z + w = w + z,$$

$$(L-V) \quad 1 \cdot z = z,$$

$$(L-VI) \quad \alpha(z + w) = \alpha z + \alpha w,$$

$$(L-VII) \quad (\alpha + \beta)z = \alpha z + \beta z,$$

$$(L-VIII) \quad (\alpha\beta)z = \alpha(\beta z).$$

Z twierdzenia 11.3.1 wynika, że innym przykładem przestrzeni liniowej jest zbiór wszystkich macierzy liczbowych.

13.1.1. Iloczyn skalarny wektorów

Niech $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ będą wektorami w \mathbb{R}^n .

Definicja 13.1.8. *Iloczynem skalarnym* wektorów \vec{u} i \vec{v} nazywamy liczbę (czyli skalar), określoną następująco:

$$\vec{u} \circ \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \det [\vec{u} \cdot (\vec{v})^T] = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

Przykład 13.1.9. Obliczmy iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = (1, 5, 4)$ oraz $\vec{v} = (2, 3, -1)$.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 2 + 15 - 4 = 13.$$

Definicja 13.1.10. Przestrzeń liniową, w której określony jest iloczyn skalarny, nazywa się *przestrzenią euklidesową*.

Zatem przestrzeń \mathbb{R}^n jest przykładem przestrzeni euklidesowej. W przestrzeniach euklidesowych możemy zdefiniować takie pojęcia metryczne jak długość, odległość, miara kąta, prostopadłość oraz równoległość.

13.1.2. Długość wektora

Definicja 13.1.11. *Długością wektora* \vec{u} nazywamy liczbę

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}}.$$

Długość wektora nazywamy inaczej jego *normą*.

Przykład 13.1.12. Obliczmy długość wektora $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Definicja 13.1.13. Każdy wektor jednostkowy (tzn. wektor o długości 1) nazywamy *wersorem*. W przypadku przestrzeni trójwymiarowej wektory $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ nazywamy *wersorami osi Ox, Oy, Oz* odpowiednio.

13.1.3. Odległość punktów

Niech $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $P_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ będą punktami w przestrzeni \mathbb{R}^n .

Fakt 13.1.14. Współrzędne wektora zaczepionego $\overrightarrow{P_1P_2}$ wyrażają się wzorem

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n).$$

Definicja 13.1.15. *Odległością punktów* P_1 i P_2 nazywamy długość wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$. Oczywiście długość tego wektora jest równa długości wektora $\overrightarrow{P_2P_1}$. Odległość punktów P_1 i P_2 będziemy oznaczali $d(P_1, P_2)$.

$$d(P_1, P_2) \stackrel{\text{def}}{=} \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \|\overrightarrow{P_2P_1}\|.$$

Przykład 13.1.16. Wyznamy odległość punktów $P_1 = (1, 3, 2)$ i $P_2 = (3, 2, 5)$.
Ponieważ

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3 - 1, 2 - 3, 5 - 2) = (2, -1, 3),$$

to szukana odległość wynosi

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

13.1.4. Miara kąta między wektorami

Definicja 13.1.17. *Miarą kąta między niezerowymi wektorami \vec{u} i \vec{v} nazywamy liczbę $\alpha \in [0, \pi]$, taką że*

$$(13.1.1) \quad \alpha = \arccos \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Ponadto przyjmujemy, że miara kąta między dowolnym wektorem a wektorem zerowym $\vec{0}$ wynosi 0. Miarę kąta między wektorami \vec{u} i \vec{v} będziemy oznaczali $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Uwaga 13.1.18. Równość (13.1.1) możemy przy założeniu $\alpha \in [0, \pi]$ zapisać jako

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

To z kolei prowadzi do równości, która często przyjmowana jest za definicję iloczynu skalarnego wektorów:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Przykład 13.1.19. Obliczmy miarę kąta między wektorami $\vec{u} = (3, -1, 2)$ oraz $\vec{v} = (4, 2, -5)$. Ponieważ

$$\begin{aligned} \vec{u} \circ \vec{v} &= 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 12 - 2 - 10 = 0, \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}, \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}, \end{aligned}$$

to

$$\cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot 3\sqrt{5}} = 0.$$

W rezultacie szukana miara wynosi $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

13.1.5. Prostopadłość i równoległość wektorów

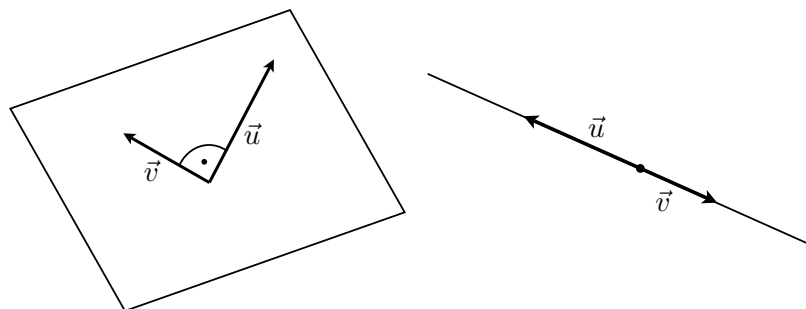
Definicja 13.1.20. Wektory \vec{u} i \vec{v} są *prostopadłe*, co zapisujemy $\vec{u} \perp \vec{v}$, jeśli kąt między nimi ma miarę $\frac{\pi}{2}$, tzn. jeśli $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$. Wektory prostopadłe nazywamy inaczej *wektorami ortogonalnymi*. Oczywiście wektor $\vec{0}$ jest prostopadły do dowolnego wektora.

Definicja 13.1.21. Wektory \vec{u} i \vec{v} są *równoległe*, co zapisujemy $\vec{u} \parallel \vec{v}$, jeśli kąt między nimi ma miarę 0 lub π . Wektory równoległe nazywamy inaczej *wektorami współliniowymi* lub *koliniowymi*. Oczywiście wektor $\vec{0}$ jest równoległy do dowolnego wektora.

Powyższa definicja wektorów współliniowych jest równoważna definicji bazującej na naszej intuicji geometrycznej.

Definicja 13.1.22. Wektory \vec{u} , \vec{v} są *współliniowe*, gdy istnieje prosta zawierająca te wektory.

Przykłady par wektorów prostopadłych oraz wektorów równoległych pokazano na rysunku 13.2.



Rysunek 13.2. Wektory prostopadłe i wektory równoległe

Poniższy fakt przedstawia kryterium konieczne i dostateczne równoległości dwóch wektorów niezerowych.

Fakt 13.1.23. Dwa niezerowe wektory \vec{u} i \vec{v} są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definicja 13.1.24. Dla danego wektora niezerowego \vec{v} zbiór wektorów postaci

$$l_{\vec{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha\vec{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

nazywamy *prostą generowaną przez wektor \vec{v}* . Wektor \vec{v} nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej $l_{\vec{v}}$.

Przykład 13.1.25. Łatwo zauważyć, że wektory $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (10, 20, 30)$ są wektorami współliniowymi. Natomiast wektor \vec{u} oraz wektor $\vec{w} = (2, 4, 9)$ nie są współliniowe.

Do badania prostopadłości używamy iloczynu skalarnego wektorów (patrz definicja 13.1.20). Wygodnym narzędziem badania równoległości wektorów jest iloczyn wektorowy, który opiszemy w części 13.1.7.

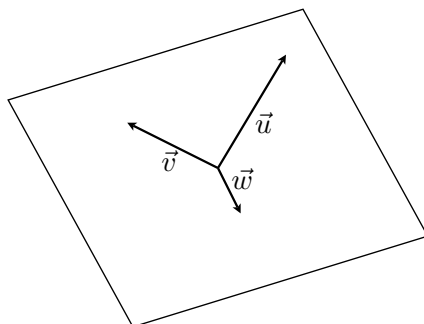
13.1.6. Współpłaszczyznowość wektorów

Naturalną kolejną rzeczą jest, aby zaraz po zdefiniowaniu współliniowości wektorów zdefiniować ich współpłaszczyznowość.

Definicja 13.1.26. Wektory \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} są *współpłaszczyznowe*, gdy istnieje płaszczyzna zawierająca te wektory. Wektory współpłaszczyznowe nazywamy również *wektorami komplanarnymi*.

Oczywiście wektor $\vec{0}$ i dwa dowolne wektory są współpłaszczyznowe.

Przykład trzech niezerowych wektorów współpłaszczyznowych przedstawiono na rysunku 13.3.



Rysunek 13.3. Wektory współpłaszczyznowe

Kolejny fakt przedstawia kryterium konieczne i dostateczne współpłaszczyznowości wektorów.

Fakt 13.1.27. Trzy parami nierównoległe wektory \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, takie że

$$(13.1.2) \quad \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}.$$

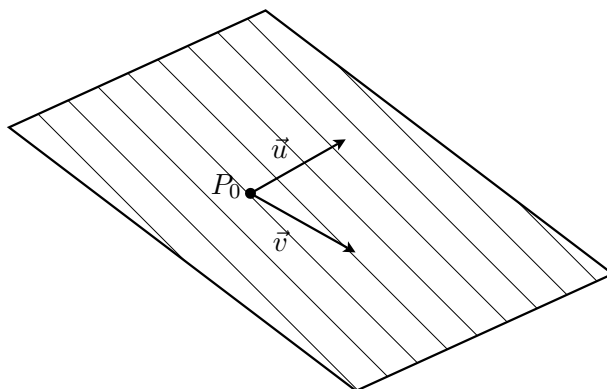
Definicja 13.1.28. Dla pary wektorów nierównoległych \vec{v} oraz \vec{w} zbiór wektorów postaci

$$(13.1.3) \quad \pi_{\vec{v}, \vec{w}} = \{\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

nazywamy *płaszczyzną rozpiętą przez wektory \vec{v} i \vec{w}* lub *płaszczyzną generowaną przez te wektory*.

Przykład płaszczyzny rozpiętej na wektorach przedstawiono na rysunku 13.4.

Fakt 13.1.27 można równoważnie sformułować, jak następuje:



Rysunek 13.4. Płaszczyzna rozpięta na dwóch wektorach nierównoległych

Fakt 13.1.29. Trzy parami nierównoległe wektory \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z tych wektorów leży w płaszczyźnie rozpiętej przez dwa pozostałe wektory.

Przykład 13.1.30. Rozważmy wektory $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 4, 8)$ i $\vec{w} = (3, 7, 0)$, które są parami niewspółliniowe. Zbadajmy, czy wektory te są współpłaszczyznowe. Podstawiamy współrzędne tych wektorów do warunku (13.1.2) i wykonujemy odpowiednie działania na macierzach:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &= \alpha(2, 4, 8) + \beta(3, 7, 0), \\ (1, 2, 3) &= (2\alpha, 4\alpha, 8\alpha) + (3\beta, 7\beta, 0), \\ (1, 2, 3) &= (2\alpha + 3\beta, 4\alpha + 7\beta, 8\alpha). \end{aligned}$$

Powyższą równość macierzy zapisujemy w postaci układu równań z niewiadomymi α oraz β .

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ 4\alpha + 7\beta = 2 \\ 8\alpha = 3 \end{cases}.$$

Układ ten jest układem niecramerowskim. Stosując metodę eliminacji Gaussa, przekonujemy się, że układ ten jest sprzeczny. Zatem dla podanej trójki wektorów \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} nie istnieją liczby α i β , dla których byłby spełniony warunek (13.1.2). W konsekwencji podane wektory nie są współpłaszczyznowe.

Wygodnym narzędziem badania współpłaszczyznowości trójki wektorów jest iloczyn mieszany, który omówimy w części 13.1.9.

Definicja 13.1.31. Dla dwóch wektorów \vec{u} oraz \vec{v} zbiór wektorów postaci

$$(13.1.4) \quad \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} : \alpha, \beta \in [0, 1]\}$$

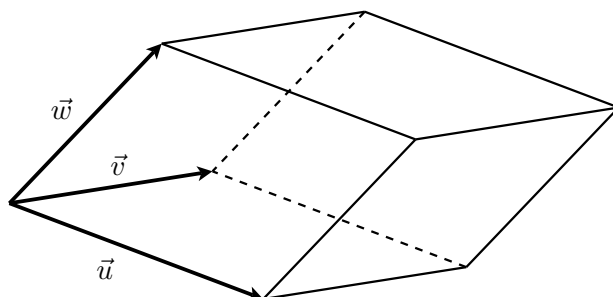
nazywamy *równoległobokiem zbudowanym* lub *rozpiętym na tych wektorach*.

Definicja 13.1.32. Dla trzech wektorów \vec{u} , \vec{v} oraz \vec{w} zbiór wektorów postaci

$$(13.1.5) \quad \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} : \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]\}$$

nazywamy *równoległościaniem zbudowanym* lub *rozpiętym na tych wektorach*.

Równoległościan zbudowany na trzech niewspółpłaszczyznowych wektorach przedstawiony jest na rysunku 13.5.



Rysunek 13.5. Równoległościan zbudowany na trzech wektorach

Dalsze rozważania na temat geometrii analitycznej będziemy prowadzili już wyłącznie w przestrzeni trójwymiarowej.

13.1.7. Iloczyn wektorowy

W odróżnieniu od mnożenia skalarne działanie mnożenia wektorowego pary wektorów jest zdefiniowane tylko w przestrzeni trójwymiarowej. Jednakże zanim zdefiniujemy iloczyn wektorowy, musimy wprowadzić pojęcie *orientacji trójki wektorów*.

Definicja 13.1.33. Mówimy, że uporządkowana trójka wektorów $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ tworzy *układ wektorów prawoskrętny* (lub inaczej *układ o orientacji dodatniej*), jeśli

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Trójka takich wektorów tworzy *układ wektorów lewoskrętny* (lub inaczej *układ o orientacji ujemnej*), jeśli

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} < 0.$$

Przykład 13.1.34. Rozważmy trójkę wektorów $(1, 0, 0) = \vec{i}$, $(0, 1, 0) = \vec{j}$ oraz $(0, 0, 1) = \vec{k}$. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

to trójka $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tworzy układ wektorów prawoskrętny. Zatem standardowo uporządkowane osie kartezjańskiego układu współrzędnych tworzą układ prawoskrętny.

Przykład 13.1.35. Rozważmy trójkę wektorów $(0, 1, 0) = \vec{j}$, $(1, 0, 0) = \vec{i}$ oraz $(0, 0, 1) = \vec{k}$. Ponieważ

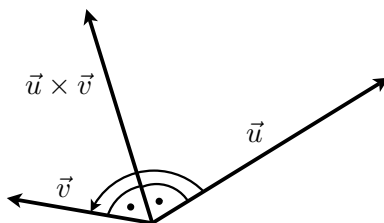
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

to trójka $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ tworzy układ wektorów lewoskrętny. Zatem osie układu kartezjańskiego, uporządkowane w kolejności Oy, Ox, Oz , tworzą układ lewoskrętny.

Definicja 13.1.36. *Iloczyn wektorowy* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów \vec{u} i \vec{v} to jedyny wektor \vec{w} spełniający następujące warunki:

- i) $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$,
- ii) $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$,
- iii) układ wektorów \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} jest układem prawoskrętnym.

Iloczyn wektorowy wektorów \vec{u} i \vec{v} oznaczamy $\vec{u} \times \vec{v}$. Jeśli wektory \vec{u} i \vec{v} są współliniowe (tzn. $\vec{u} \parallel \vec{v}$), to przyjmujemy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.



Rysunek 13.6. Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy jest również nazywany *iloczynem zewnętrznym* (ang. *outer product*).

Uwaga 13.1.37. Z edukacji szkolnej pamiętamy, że pole P równoległoboku o bokach długości a i b oraz mierze α kąta między tymi bokami jest równe $P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$. Zatem warunek ii) w definicji iloczynu wektorowego jest równoważny warunkowi

- ii) długość wektora \vec{w} jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{u} i \vec{v} .

Wyznaczanie iloczynu wektorowego tylko przy pomocy definicji jest dość trudne. Dlatego zazwyczaj będziemy korzystali z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 13.1.38. Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Wtedy

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) - \vec{j}(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

gdzie \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} są wersorami osi układu współrzędnych.

Przykład 13.1.39. Wyznamy iloczyn wektorowy wektorów $\vec{u} = (-1, 2, 5)$ oraz $\vec{v} = (2, 0, -3)$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(2 \cdot (-3) - 0 \cdot 5) - \vec{j}((-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 5) + \vec{k}((-1) \cdot 0 - 2 \cdot 2) = \\ &= \vec{i}(-6) - \vec{j}(-7) + \vec{k}(-4) = \\ &= (1, 0, 0) \cdot (-6) - (0, 1, 0) \cdot (-7) + (0, 0, 1) \cdot (-4) = \\ &= (-6, 0, 0) + (0, 7, 0) + (0, 0, -4) = (-6, 7, -4). \end{aligned}$$

13.1.8. Własności iloczynu skalarnego i iloczynu wektorowego

Poniżej przedstawiamy własności iloczynów skalarnego i wektorowego oraz długości wektorów w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Własności iloczynu skalarnego oraz długości są prawdziwe ogólnie dla przestrzeni \mathbb{R}^n , gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 13.1.40. Niech $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$(13.1.6) \quad \|\vec{u}\| \geq 0,$$

$$(13.1.7) \quad \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0},$$

$$(13.1.8) \quad \|\alpha \cdot \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|,$$

$$(13.1.9) \quad \vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u},$$

$$(13.1.10) \quad \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}),$$

$$(13.1.11) \quad (\alpha \vec{u}) \otimes \vec{v} = \vec{u} \otimes (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \otimes \vec{v}),$$

$$(13.1.12) \quad (\vec{u} + \vec{v}) \otimes \vec{w} = \vec{u} \otimes \vec{w} + \vec{v} \otimes \vec{w},$$

$$(13.1.13) \quad \vec{u} \otimes (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{u} \otimes \vec{w},$$

$$(13.1.14) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,$$

$$(13.1.15) \quad |\vec{u} \circ \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

$$(13.1.16) \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

$$(13.1.17) \quad \left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|,$$

$$(13.1.18) \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0},$$

$$(13.1.19) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \circ \vec{v} = 0.$$

Uwaga 13.1.41. W równaniach (13.1.11)–(13.1.13) symbol \otimes oznacza zarówno iloczyn skalarny \circ , jak i wektorowy \times . Nierówność (13.1.14) nazywamy *nierównością trójkąta*. We wzorze (13.1.15) równość zachodzi tylko w przypadku, gdy $\vec{u} \parallel \vec{v}$. We wzorze (13.1.16) równość zachodzi tylko w przypadku, gdy $\vec{u} \perp \vec{v}$.

13.1.9. Iloczyn mieszany trójki wektorów

Dla trójki wektorów w \mathbb{R}^3 możemy zdefiniować dodatkowo tzw. iloczyn mieszany, będący połączeniem iloczynów wektorowego i skalarnego.

Definicja 13.1.42. *Iloczyn mieszany* uporządkowanej trójki wektorów \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} to liczba określona wzorem

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}.$$

Przy wyznaczaniu iloczynu mieszanego będziemy korzystali z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 13.1.43. Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w \mathbb{R}^3 . Wówczas

$$(13.1.20) \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Przykład 13.1.44. Obliczmy iloczyn mieszany wektorów $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ i $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Korzystając ze wzoru (13.1.20), otrzymujemy

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Iloczyn mieszany trójki wektorów ma następującą interpretację geometryczną.

Twierdzenie 13.1.45. Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego określa objętość równoległościanu zbudowanego na tych wektorach (patrz rysunek 13.5), tzn.

$$\mathcal{V} = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Jeśli trzy wektory są współpłaszczyznowe, to równoległościan na nich zbudowany jest „płaskim” równoległobokiem o zerowej objętości. Dlatego też iloczyn mieszany trójki wektorów jest przydatny przy badaniu komplanarności trójki wektorów.

Twierdzenie 13.1.46. Wektory \vec{u} , \vec{v} oraz \vec{w} są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Przykład 13.1.47. Rozważmy wektory $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ i $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Ponieważ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$, to wektory te nie są komplanarne.

13.1.10. Własności iloczynu mieszanego

Twierdzenie 13.1.48. Niech \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy:

$$(13.1.21) \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}),$$

$$(13.1.22) \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}),$$

$$(13.1.23) \quad (\vec{u} + \vec{r}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{r}, \vec{v}, \vec{w}),$$

$$(13.1.24) \quad (\alpha \cdot \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha \cdot (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}),$$

$$(13.1.25) \quad |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|.$$

Równość w ostatniej nierówności zachodzi tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} jest zerowy lub gdy wektory są wzajemnie prostopadłe.

13.2. Płaszczyzny

Położenie płaszczyzny w \mathbb{R}^3 może być jednoznacznie określone na wiele sposobów. W bieżącym podrozdziale podamy kilka przykładów odpowiadających różnym przypadkom.

13.2.1. Równanie normalne płaszczyzny

Niech będzie dany ustalony punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz ustalony wektor *niezerowy* $\vec{n} = (A, B, C)$.

Fakt 13.2.1. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt P_0 i prostopadłej do wektora \vec{n} ma postać

$$(13.2.1) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

gdzie $P = (x, y, z)$ jest dowolnym punktem tej płaszczyzny.

Definicja 13.2.2. Równanie (13.2.1) nazywamy *równaniem normalnym płaszczyzny*, zaś wektor \vec{n} zwiemy *wektorem normalnym tej płaszczyzny*.

Uwaga 13.2.3. Warunek niezerowości wektora $\vec{n} = (A, B, C)$ wygodnie zapisuje się w postaci $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ lub równoważnie $|A| + |B| + |C| > 0$.

Przykład 13.2.4. Płaszczyzna przechodząca przez punkt $P_0 = (3, 2, 1)$ i prostopadła do wektora $\vec{n} = (5, 6, 7)$ ma równanie normalne postaci

$$5(x - 3) + 6(y - 2) + 7(z - 1) = 0.$$

13.2.2. Równanie ogólne płaszczyzny

Po wykonaniu działań w równaniu (13.2.1), a następnie po podstawieniu

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

otrzymujemy równanie postaci

$$(13.2.2) \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Definicja 13.2.5. Równanie (13.2.2), gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, nazywamy *równaniem ogólnym płaszczyzny*.

Rozważmy przypadki szczególne równania ogólnego:

- $C = 0$

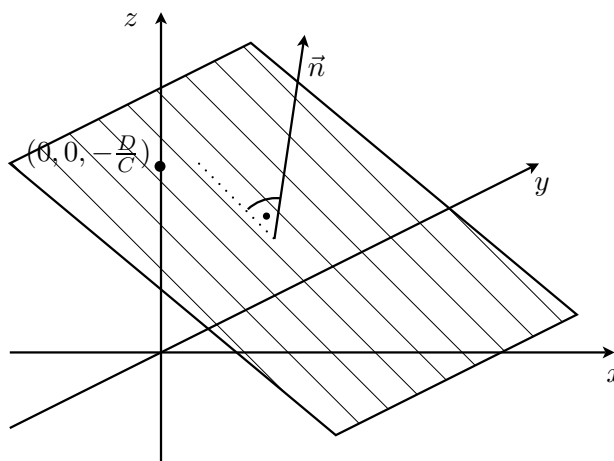
Równanie

$$Ax + By + D = 0$$

opisuje płaszczyznę równoległą do osi Oz .

- $C \neq 0$

Równanie (13.2.2) przedstawia płaszczyznę, która przecina oś Oz w punkcie $(0, 0, -\frac{D}{C})$ (patrz rysunek 13.7).



Rysunek 13.7. Płaszczyzna prostopadła do wektora \vec{n}

Analogicznie można rozważyć przypadki dla pozostałych współrzędnych wektora normalnego.

Przykład 13.2.6. Napiszmy równanie ogólne płaszczyzny prostopadłej do wektora $\vec{u} = (3, 8, 6)$ i przecinającej oś Oz w punkcie $(0, 0, 2)$. Najpierw wyznaczmy współczynnik D .

$$-\frac{D}{C} = 2 \iff -\frac{D}{6} = 2 \iff D = -12.$$

Zatem szukane równanie to

$$3x + 8y + 6z - 12 = 0.$$

13.2.3. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty niewspółliniowe

Z geometrii elementarnej wiemy, że przez trzy punkty nie leżące na jednej prostej można przeprowadzić dokładnie jedną płaszczyznę. Równanie płaszczyzny, przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, gdzie $1 \leq i \leq 3$, to równanie postaci

$$(13.2.3) \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oczywiście po obliczeniu wyznacznika znajdującego się po lewej stronie równości (13.2.3) otrzymamy równanie płaszczyzny w postaci ogólnej (13.2.2).

Przykład 13.2.7. Wyznamy równanie płaszczyzny, która przechodzi przez punkty $(0, 1, 2)$, $(-1, 4, 5)$ oraz $(2, -2, 3)$. Na początek obliczymy odpowiedni wyznacznik, stosując rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 2 \\ -1 - 0 & 4 - 1 & 5 - 2 \\ 2 - 0 & -2 - 1 & 3 - 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & y - 1 & z - 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= x \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (y - 1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z - 2) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= x \cdot 12 - (y - 1) \cdot (-7) + (z - 2) \cdot (-3) = 12x + 7y - 3z - 1. \end{aligned}$$

Zatem szukane równanie to

$$12x + 7y - 3z - 1 = 0.$$

13.2.4. Równania parametryczne płaszczyzny

Dane są ustalone wektory nierównoległe $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ oraz punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Płaszczyzna rozpięta przez wektory \vec{u} i \vec{v} oraz przechodząca przez punkt P_0 (patrz rysunek 13.4 na stronie 207) zadaje się równaniami postaci

$$(13.2.4) \quad \begin{cases} x = x_0 + s \cdot a_1 + t \cdot a_2 \\ y = y_0 + s \cdot b_1 + t \cdot b_2 \\ z = z_0 + s \cdot c_1 + t \cdot c_2 \end{cases},$$

gdzie $s, t \in \mathbb{R}$.

Definicja 13.2.8. Równania (13.2.4) nazywamy *równaniami parametrycznymi płaszczyzny*.

Przykład 13.2.9. Płaszczyzna przechodząca przez punkt $P_0 = (10, 9, 7)$ i równoległa do wektorów $\vec{u} = (\frac{2}{10}, \frac{1}{3}, \sqrt{5})$ oraz $\vec{v} = (0, 0, 1)$ (oczywiście $\vec{u} \nparallel \vec{v}$) ma dla $s, t \in \mathbb{R}$ postać parametryczną

$$\begin{cases} x = 10 + \frac{2}{10}s \\ y = 9 + \frac{1}{3}s \\ z = 7 + \sqrt{5}s + t \end{cases} .$$

13.3. Proste

Podobnie jak położenie płaszczyzny, tak i położenie prostej w \mathbb{R}^3 można określić jednoznacznie na wiele sposobów. W tym podrozdziale zaprezentujemy kilka przykładów adekwatnych do różnych przypadków.

13.3.1. Równania krawędziowe prostej

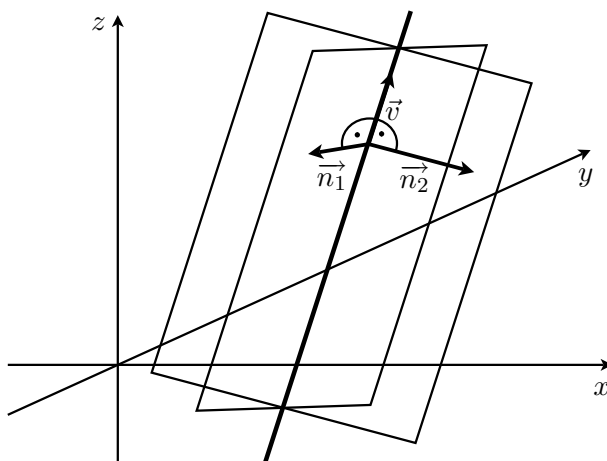
Ponieważ dwie nierównoległe płaszczyzny przecinają się wzdłuż jednej prostej, to układ równań ogólnych

$$(13.3.1) \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} ,$$

gdzie $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \nparallel \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, określa prostą w przestrzeni.

Definicja 13.3.1. Układ równań (13.3.1) nazywa się *postacią krawędziową* równań prostej.

Przykład prostej zadanej krawędziowo przedstawiono na rysunku 13.8.



Rysunek 13.8. Prosta zadana krawędziowo

Niestety, zapis (13.3.1) nie określa wprost kierunku prostej. Kierunek ten wyznaczamy na podstawie następującego faktu:

Fakt 13.3.2. Wektor kierunkowy \vec{v} prostej zadanej równaniami krawędziowymi (13.3.1) jest równy

$$(13.3.2) \quad \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2).$$

13.3.2. Równania parametryczne prostej

Niech będzie dany ustalony punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz ustalony wektor *niezerowy* $\vec{v} = (a, b, c)$.

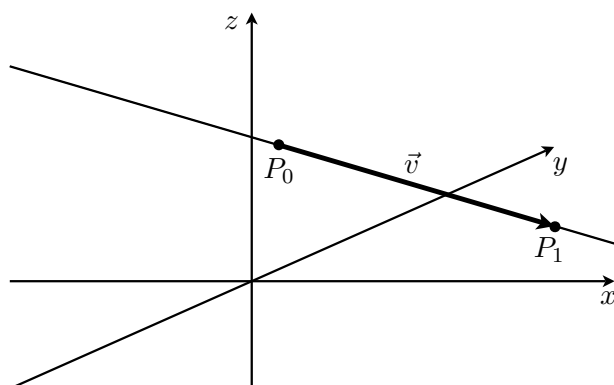
Fakt 13.3.3. Prosta przechodząca przez punkt P_0 i równoległa do wektora \vec{v} zadaje się przy pomocy układu równań

$$(13.3.3) \quad \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases},$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Definicja 13.3.4. Układ równań (13.3.3) nazywa się *postacią parametryczną* równań prostej.

Przykład prostej zadanej parametrycznie przedstawiono na rysunku 13.9.



Rysunek 13.9. Prosta zadana parametrycznie

Przykład 13.3.5. Napiszmy równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P_0 = (1, 2, 3)$ i $P_1 = (4, 6, 0)$ (por. rysunek 13.9). Jeśli prosta przechodzi przez punkty P_0 i P_1 , to wektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ wyznacza kierunek tej prostej.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (4 - 1, 6 - 2, 0 - 3) = (3, 4, -3).$$

Zatem szukane równania to

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t \\ z = 3 - 3 \cdot t \end{cases},$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Uwaga 13.3.6. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Przy założeniu

— $t \in [\alpha, +\infty)$ lub $t \in (-\infty, \beta]$ układ (13.3.3) opisuje półprostą,

— $t \in [\alpha, \beta]$ układ (13.3.3) opisuje odcinek.

Przykład 13.3.7. Postać parametryczna równań odcinka P_0P_1 , gdzie $P_0 = (1, 2, 3)$, $P_1 = (4, 6, 0)$, to postać

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t \\ z = 3 - 3 \cdot t \end{cases},$$

gdzie $t \in [0, 1]$.

Przykład 13.3.8. Prosta

$$(13.3.4) \quad \begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

zapiszemy w postaci parametrycznej. Wyznamy iloczyn wektorowy wektorów $\vec{n}_1 = (6, 2, -1)$ i $\vec{n}_2 = (3, 2, 2)$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(4 + 2) - \vec{j}(12 + 3) + \vec{k}(12 - 6) = 6\vec{i} - 15\vec{j} + 6\vec{k} = (6, -15, 6).$$

Korzystając z (13.3.2), otrzymujemy, że wektor kierunkowy danej prostej to wektor

$$\vec{v} = (6, 2, -1) \times (3, 2, 2) = (6, -15, 6).$$

Wyznamy teraz przykładowy punkt P_0 , należący do danej prostej. W tym celu musimy znaleźć przynajmniej jedno rozwiązanie układu (13.3.4). Układ ten jest oczywiście równoważny układowi

$$\begin{cases} 6x + 2y - z = 9 \\ 3x + 2y + 2z = 12 \end{cases}.$$

Stosując metodę eliminacji Gaussa dla układów niecramerowskich (patrz podrozdział 12.3), otrzymujemy równoważny układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ y + \frac{5}{2}z = \frac{15}{2} \end{cases},$$

gdzie $z \in \mathbb{R}$. Wyznaczając zmienne zależne, otrzymujemy

$$(13.3.5) \quad \begin{cases} x = -1 + z \\ y = \frac{15}{2} - \frac{5}{2}z \end{cases},$$

gdzie $z \in \mathbb{R}$. Przyjmując $z = 0$, dostajemy $x = -1$ i $y = \frac{15}{2}$. Zatem szukany punkt to $P_0 = \left(-1, \frac{15}{2}, 0\right)$. Ostatecznie równania parametryczne danej prostej to

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = \frac{15}{2} - 15t \\ z = 6t \end{cases},$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

13.3.3. Równania kierunkowe prostej

Jeśli w równaniach (13.3.3) wyeliminujemy zmienną t , to otrzymamy podwójną równość

$$(13.3.6) \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

gdzie $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Definicja 13.3.9. Równania (13.3.6) nazywamy *postacią kierunkową* równań prostej.

Uwaga 13.3.10. Jeśli w równaniach (13.3.6) jeden z mianowników jest równy 0, to przyjmujemy, że odpowiadający mu licznik też jest równy 0.

Przykład 13.3.11. Znajdziemy wektor kierunkowy prostej

$$4(x - 1) = 3(y + 2) = 2(3 - z).$$

Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} 4(x - 1) &= 3(y + 2) = 2(3 - z), \\ \frac{x - 1}{3} &= \frac{y + 2}{4} = \frac{3 - z}{6}, \\ \frac{x - 1}{3} &= \frac{y - (-2)}{4} = \frac{z - 3}{-6}. \end{aligned}$$

Zatem szukany wektor kierunkowy to $\vec{v} = (3, 4, -6)$. Przy okazji pokazaliśmy, że dana prosta przechodzi przez punkt $P_0 = (1, -2, 3)$.

13.4. Odległość punktu od prostej lub płaszczyzny

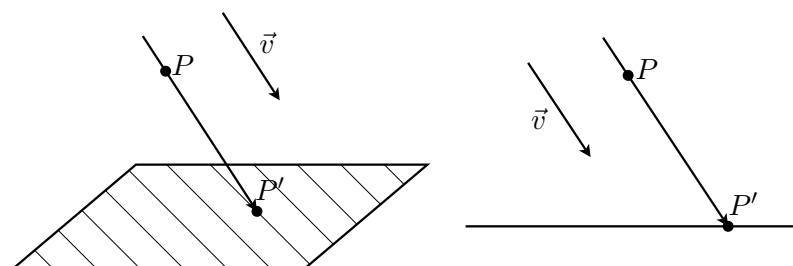
Jeśli dany punkt nie leży na danej prostej lub danej płaszczyźnie, to będziemy wyznaczać jego odległość od tej prostej lub od tej płaszczyzny. Mierzenie takiej odległości wymaga wprowadzenia pojęcia *rzutu prostopadłego*. Jednakże najpierw zdefiniujemy ogólniejsze pojęcie *rzutu*, zwanego czasem *rzutem ukośnym*.

Dane są wektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, płaszczyzna π oraz prosta l .

Definicja 13.4.1. Rzutem punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora \vec{v} nazywamy punkt P' należący do płaszczyzny π taki, że $\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{v}$.

Definicja 13.4.2. Rzutem punktu P na prostą l w kierunku wektora \vec{v} nazywamy punkt P' należący do prostej l taki, że $\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{v}$.

Przykład rzutowania na płaszczyznę oraz prostą ukazano na rysunku 13.10.



Rysunek 13.10. Rzutowanie na płaszczyznę i rzutowanie na prostą

Płaszczyznę π i prostą l nazywamy zwyczajowo *rzutniami*. Wektor \vec{v} nazywamy *wektorem rzutowania*.

Definicja 13.4.3. Jeśli wektor rzutowania jest prostopadły do rzutni, to rzut nazywamy *rzutem prostopadłym* lub *prostokątnym*. W takiej sytuacji wektor $\overrightarrow{PP'}$ też jest prostopadły do rzutni.

Teraz możemy zdefiniować pojęcia odległości punktu od prostej lub płaszczyzny.

Definicja 13.4.4. *Odległością punktu P od płaszczyzny π* nazywamy odległość punktu P od punktu P' , który jest rzutem prostopadłym P na tę płaszczyznę. Odległość punktu P od płaszczyzny π będziemy oznaczali $d(P, \pi)$.

Definicja 13.4.5. *Odległością punktu P od prostej l* nazywamy odległość punktu P od punktu P' , który jest rzutem prostopadłym P na tę prostą. Odległość punktu P od prostej l będziemy oznaczali $d(P, l)$.

Fakt 13.4.6. Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, wyraża się wzorem

$$(13.4.1) \quad d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Przykład 13.4.7. Odległość punktu $P_0 = (1, 2, 0)$ od płaszczyzny π , danej w postaci ogólnej

$$\pi : x + 3y - \sqrt{6}z - 5 = 0,$$

wynosi

$$d(P_0, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - \sqrt{6} \cdot 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-\sqrt{6})^2}} = \frac{|7 - 5|}{\sqrt{1 + 9 + 6}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}.$$

Fakt 13.4.8. Dany jest punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Niech prosta l przechodzi przez ustalony punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i ma wektor kierunkowy $\vec{v} = (a, b, c)$. Przy oznaczeniach $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ odległość punktu $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ od prostej l wyraża się wzorem

$$(13.4.2) \quad d(P_1, l) = \frac{\|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Przykład 13.4.9. Obliczmy odległość punktu $P_1 = (1, 1, -3)$ od prostej l , jeśli

$$l: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

Prosta l ma kierunek wektora $\vec{v} = (-3, -1, 1)$ i przechodzi przez punkt $P_0 = (-1, 2, 3)$. Obliczmy kolejno wielkości występujące po prawej stronie równości (13.4.2).

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 - \vec{r}_1 &= (-1, 2, 3) - (1, 1, -3) = (-2, 1, 6), \\ (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{v} &= (-2, 1, 6) \times (-3, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot 7 - \vec{j} \cdot 16 + \vec{k} \cdot 5 = (7, -16, 5), \\ \|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{v}\| &= \sqrt{7^2 + (-16)^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 256 + 25} = \sqrt{330}, \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe do wzoru (13.4.2), otrzymujemy

$$d(P_1, l) = \frac{\sqrt{330}}{\sqrt{11}} = \sqrt{30}.$$

13.5. Wzajemne położenia dwóch płaszczyzn

Rozważmy wzajemne położenie dwóch różnych płaszczyzn w \mathbb{R}^3 . Z geometrii elementarnej wiemy, że dwie takie płaszczyzny albo przecinają się wzdłuż jednej prostej (patrz rysunek 13.8 na stronie 215), albo nie mają punktów wspólnych, czyli są wzajemnie równoległe. W pierwszym przypadku interesować nas będzie wyznaczenie kąta przecięcia tych płaszczyzn. W przypadku płaszczyzn równoległych obliczymy ich odległość.

13.5.1. Kąty

Definicja 13.5.1. *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy ten kąt między niezerowymi wektorami normalnymi tych płaszczyzn, którego miara należy do przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Miarę kąta między płaszczyznami π_1, π_2 oznaczamy $\angle(\pi_1, \pi_2)$.

Zwróćmy uwagę na to, że powyższą definicję można również przyjąć w przypadku płaszczyzn wzajemnie równoległych. Oczywiście miara kąta między płaszczyznami równoległymi wynosi 0.

Fakt 13.5.2. Miara $\angle(\pi_1, \pi_2)$ kąta między płaszczyznami π_1, π_2 o niezerowych wektorach normalnych \vec{n}_1 i \vec{n}_2 wyraża się wzorem

$$(13.5.1) \quad \cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}.$$

Przykład 13.5.3. Obliczmy kąt między płaszczyznami zadanymi parametrycznie

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 2 + s - t \\ z = 3 - s + t \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3s - t \\ z = 2 + s + t \end{cases}, \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

Łatwo zauważyć, że wektory $(1, 1, -1)$ oraz $(1, -1, 1)$ generują płaszczyznę π_1 , podczas gdy wektory $(0, 3, 1)$ oraz $(2, -1, 1)$ generują płaszczyznę π_2 . Obliczmy odpowiednie iloczyny wektorowe.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (1, 1, -1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(1 - 1) - \vec{j}(1 + 1) + \vec{k}(-1 - 1) = (0, -2, -2), \\ \vec{n}_2 &= (0, 3, 1) \times (2, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(3 + 1) - \vec{j}(0 - 2) + \vec{k}(0 - 6) = (4, 2, -6). \end{aligned}$$

Oczywiście wektor \vec{n}_1 jest wektorem normalnym płaszczyzny π_1 , zaś wektor \vec{n}_2 jest wektorem normalnym płaszczyzny π_2 . Zatem ze wzoru (13.5.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos \angle(\pi_1, \pi_2) &= \frac{|0 - 4 + 12|}{\sqrt{4 + 4} \cdot \sqrt{16 + 4 + 36}} = \frac{8}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{8 \cdot 8 \cdot 7}} = \\ &= \frac{8}{8\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\angle(\pi_1, \pi_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, to ostatecznie $\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \frac{\sqrt{7}}{7}$.

13.5.2. Odległości

Definicja 13.5.4. *Odległością płaszczyzn π_1 i π_2 nazywamy najmniejszą odległość między punktami należącymi do tych płaszczyzn, tzn. liczbę*

$$(13.5.2) \quad d(\pi_1, \pi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{P_1 \in \pi_1, P_2 \in \pi_2} d(P_1, P_2).$$

Oczywiście odległość dwóch płaszczyzn przecinających się wynosi 0.

Fakt 13.5.5. *Odległość między płaszczyznami równoległymi*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: Ax + By + Cz + D_1 = 0, \\ \pi_2 &: Ax + By + Cz + D_2 = 0, \end{aligned}$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, wyraża się wzorem

$$(13.5.3) \quad d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

13.6. Wzajemne położenia prostej i płaszczyzny

W \mathbb{R}^3 rozważmy wzajemne położenie płaszczyzny oraz prostej nie leżącej na tej płaszczyźnie. Z geometrii elementarnej wiemy, że takie płaszczyzna i prosta albo przecinają się w jednym punkcie, albo nie mają punktów wspólnych, czyli są wzajemnie równoległe. W pierwszym przypadku interesować nas będzie wyznaczenie miary kąta nachylenia prostej do płaszczyzny. W przypadku prostej i płaszczyzny wzajemnie równoległych obliczymy ich odległość.

13.6.1. Kąty

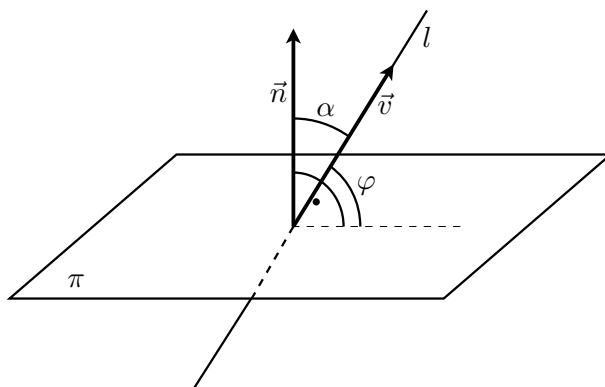
Definicja 13.6.1. *Miarą kąta nachylenia prostej l do płaszczyzny π nazywamy liczbę $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, zaś α jest miarą kąta ostrego między wektorem kierunkowym \vec{v} prostej l i wektorem normalnym \vec{n} płaszczyzny π (patrz rysunek 13.11). Miarę kąta nachylenia prostej l do płaszczyzny π oznaczamy $\angle(l, \pi)$.*

Zwróćmy uwagę na to, że powyższą definicję można również przyjąć w przypadku prostej i płaszczyzny wzajemnie równoległych. Oczywiście miara kąta nachylenia prostej do równoległej doń płaszczyzny wynosi 0.

Ponieważ $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \circ \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ oraz $\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$, to $\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

Fakt 13.6.2. *Miara $\angle(l, \pi)$ kąta nachylenia prostej l o wektorze kierunkowym \vec{v} do płaszczyzny π o wektorze normalnym \vec{n} wyraża się wzorem*

$$(13.6.1) \quad \sin \angle(l, \pi) = \frac{|\vec{n} \circ \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$



Rysunek 13.11. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Przykład 13.6.3. Obliczmy miarę kąta nachylenia prostej l do płaszczyzny π , jeśli

$$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2},$$

$$\pi : 2x + y + z = 0.$$

Oczywiście wektorem kierunkowym prostej l jest wektor $\vec{v} = (2, 1, -2)$, zaś wektorem normalnym płaszczyzny π jest wektor $\vec{n} = (2, 1, 1)$. Obliczmy wielkości, które występują we wzorze (13.6.1):

$$\vec{n} \circ \vec{v} = 4 + 1 - 2 = 3,$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6},$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Zatem otrzymujemy

$$\sin \angle(l, \pi) = \frac{|3|}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ponieważ $\angle(l, \pi) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, to ostatecznie $\angle(l, \pi) = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$.

13.6.2. Odległości

Definicja 13.6.4. *Odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy najmniejszą odległość między punktami należącymi do tej prostej i tej płaszczyzny, tzn. liczbę*

$$(13.6.2) \quad d(l, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{P_1 \in l, P_2 \in \pi} d(P_1, P_2).$$

Oczywiście, jeśli prosta i płaszczyzna przecinają się, to ich odległość wynosi 0.

Jeśli prosta l i płaszczyzna π są wzajemnie równoległe, to ich odległość obliczamy, obierając na prostej l dowolny punkt i obliczając jego odległość od płaszczyzny π za pomocą wzoru (13.4.1).

Przykład 13.6.5. Obliczmy odległość prostej l od płaszczyzny π , jeśli

$$l : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = \sqrt{6}t \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}, \quad \text{oraz} \quad \pi : x + 3y - \sqrt{6}z - 5 = 0.$$

Zauważmy, że wektorem kierunkowym prostej l jest $\vec{v} = (0, 2, \sqrt{6})$, zaś wektorem normalnym płaszczyzny π jest $\vec{n} = (1, 3, -\sqrt{6})$. Ponieważ

$$\vec{v} \circ \vec{n} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \sqrt{6} \cdot (-\sqrt{6}) = 0,$$

to $\vec{v} \perp \vec{n}$, czyli prosta l i płaszczyzna π są równoległe. Prosta l przechodzi przez punkt $P_0 = (1, 2, 0)$. Korzystając z przykładu 13.4.7, otrzymujemy

$$d(l, \pi) = d(P_0, \pi) = \frac{1}{2}.$$

Uwaga 13.6.6. Jeśli prosta l jest zadana postacią krawędziową (13.3.1), zaś płaszczyzna π jest zadana równaniem ogólnym (13.2.2), to wzajemne położenia l i π można badać przy pomocy metody eliminacji Gaussa, mianowicie rozwiązując układ równań liniowych

$$(13.6.3) \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$

- Jeśli układ (13.6.3) jest sprzeczny, to prosta l jest równoległa do płaszczyzny π .
- Jeśli układ (13.6.3) jest oznaczony, to prosta l i płaszczyzna π przecinają się w jednym punkcie.
- Jeśli układ (13.6.3) jest nieoznaczony, to prosta l zawiera się w płaszczyźnie π .

13.7. Wzajemne położenia dwóch prostych

Rozważmy położenie dwóch różnych prostych w \mathbb{R}^3 . Z geometrii elementarnej wiemy, że dwie takie proste albo leżą w jednej płaszczyźnie, albo są *prostymi skośnymi*, to znaczy nie wyznaczają płaszczyzny (inaczej: nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych). Jeśli dwie różne proste leżą w jednej płaszczyźnie, to albo przecinają się w jednym punkcie, albo nie mają punktów wspólnych, czyli są wzajemnie równoległe. W przypadku prostych przecinających się interesować

nas będzie wyznaczenie kąta przecięcia tych prostych. W przypadku prostych równoległych obliczymy ich odległość. Przypadkiem obliczania odległości prostych skośnych nie zajmujemy się ze względu na ograniczoność miejsca. Osoby zainteresowane tym przypadkiem odsyłamy do [2].

13.7.1. Kąty

Definicja 13.7.1. *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy ten kąt między wektorami kierunkowymi tych prostych, którego miara należy do przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Miarę kąta między prostymi l_1, l_2 oznaczamy $\angle(l_1, l_2)$.

Warto zwrócić uwagę na to, że powyższa definicja obowiązuje również w przypadku prostych wzajemnie równoległych lub prostych skośnych. Oczywiście miara kąta między prostymi równoległymi wynosi 0.

Fakt 13.7.2. Miara $\angle(l_1, l_2)$ kąta między prostymi l_1 i l_2 o wektorach kierunkowych \vec{v}_1 i \vec{v}_2 wyraża się wzorem

$$(13.7.1) \quad \cos \angle(l_1, l_2) = \frac{|\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}.$$

13.7.2. Odległości

Definicja 13.7.3. *Odległością prostych* l_1 i l_2 nazywamy najmniejszą odległość między punktami należącymi do tych prostych, tzn. liczbę

$$(13.7.2) \quad d(l_1, l_2) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{P_1 \in l_1, P_2 \in l_2} d(P_1, P_2).$$

Oczywiście odległość dwóch prostych przecinających się wynosi 0.

Jeśli dwie proste są równoległe, to ich odległość obliczamy, obierając na jednej prostej dowolny punkt i obliczając jego odległość od drugiej prostej za pomocą wzoru (13.4.2).

Przykład 13.7.4. Znajdźmy odległość między dwiema prostymi, zadanymi w postaci kierunkowej

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-1},$$

$$l_2 : \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

Prosta l_1 ma kierunek wektora $\vec{v}_1 = (3, 1, -1)$ i przechodzi przez punkt $P_1 = (1, 1, -3)$. Prosta l_2 ma kierunek wektora $\vec{v}_2 = (-3, -1, 1)$ i przechodzi przez punkt $P_1 = (-1, 2, -3)$. Oczywiście $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$, czyli proste l_1 i l_2 są równoległe. Korzystając z przykładu 13.4.9, otrzymujemy

$$d(l_1, l_2) = d(P_1, l_2) = \sqrt{30}.$$

Część V

Elementy algebry abstrakcyjnej

Rozdział 14

Liczby zespolone

Liczby zespolone wprowadził do matematyki Girolamo Cardano (1501–1576), przy okazji nadając liczbie i nazwę *jednostki urojonej* (łacińskie słowo *imaginarium* znaczy urojony). Cardano, podobnie jak wielu innych matematyków, nie wierzył jednak w istnienie liczb zespolonych. Uznawał je jedynie za pomocniczy element w dążeniu do znalezienia wzorów na pierwiastki równania wielomianowego trzeciego stopnia, obecnie zwanych wzorami Cardano. Do analizy liczby zespolone wprowadził L. Euler w roku 1748 w swym fundamentalnym dziele *Introductio in analysin infinitorum*. Ścisłą teorię liczb zespolonych przyniósł początek wieku XIX. C.F. Gauss wykazał, że liczby zespolone są właściwie punktami płaszczyzny euklidesowej, w której wprowadzono pewne działania zwane dodawaniem i mnożeniem takich punktów. W.R. Hamilton zdefiniował liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych, przy czym określił specjalny sposób mnożenia i dodawania takich par. Obecnie liczby zespolone pojawiają się nie tylko w codziennej pracy matematyka czy fizyka teoretycznego, ale również w pracy inżyniera, któremu służą w takich dziedzinach jak elektrotechnika czy aerodynamika. Ponadto liczby zespolone stosuje się m.in. przy wyznaczaniu rozwiązań równań kwadratowych o wyróżnikach ujemnych, w teorii fraktali czy też w analizie obwodów elektrycznych prądu zmiennego.

14.1. Konstrukcja liczb zespolonych

Na początek rozważmy zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych oraz liczbę $\sqrt{2}$. Jak wszyscy wiemy, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Spróbujmy „uzupełnić” zbiór \mathbb{Q} o element $\sqrt{2}$, tworząc nowy zbiór $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$. Jak łatwo zauważyć, niestety nie zawsze suma dwóch liczb ze zbioru $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ jest nadal elementem tego zbioru. Podobnie jest w przypadku różnicy, iloczynu i ilorazu.

Teraz rozważmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi. Oznaczmy ten zbiór przez $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Mamy zatem

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Przyjrzyjmy się działaniom arytmetycznym na elementach zbioru $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Dodawanie:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}.$$

Odejmowanie:

$$(a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}.$$

Mnożenie:

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + bd \cdot 2 = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Dzielenie (oczywiście zakładamy, że $c + d\sqrt{2} \neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} &= \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (-ad + bc)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \\ &= \left(\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2} \right) \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Jak widać, wynik każdego działania arytmetycznego nadal jest elementem zbioru $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Definicja 14.1.1. Mówimy, że działanie \oplus jest *określone*, lub inaczej *wykonalne*, w zbiorze \mathcal{K} , jeśli dla dowolnych elementów $k, l \in \mathcal{K}$ mamy $k \oplus l \in \mathcal{K}$.

Zatem każde z działań arytmetycznych jest w zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wykonalne. To prowadzi do pojęcia struktury algebraicznej zwanej *ciałem liczbowym*.

Definicja 14.1.2. *Ciałem liczbowym* nazywamy zbiór liczbowy \mathcal{K} , zawierający więcej niż jeden element i spełniający warunek, że dla dowolnych elementów $k, l \in \mathcal{K}$ mamy $k + l, k - l, k \cdot l, \frac{k}{l} \in \mathcal{K}$ (oczywiście w ostatnim przypadku zakładamy, że $l \neq 0$).

Zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest zatem przykładem ciała liczbowego. Innymi przykładami ciał liczbowych są oczywiście zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych oraz zbiór \mathbb{R} liczb rzeczywistych.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że oczywiście $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Zatem znaleźliśmy sposób, żeby zbiór liczb wymiernych „uzupełnić” o brakujący element $\sqrt{2}$ w ten sposób, aby w nowym zbiorze nadal były wykonalne wszystkie działania arytmetyczne. Fachowo mówimy, że ciało $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest *rozszerzeniem algebraicznym* ciała \mathbb{Q} .

Wróćmy teraz do zapowiadanej w tytule podrozdziału konstrukcji zbioru liczb zespolonych. Wszyscy wiemy, że równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych (podobnie jak dowolne równanie kwadratowe o ujemnym wyróżniku). Przez i oznaczymy takie wyrażenie, dla którego $i^2 = -1$, czyli rozwiązanie tego równania. Rozważmy teraz zbiór wszystkich wyrażeń postaci $a + b \cdot i$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi. Przyjrzyjmy się działaniom arytmetycznym

na elementach tego zbioru.

Dodawanie:

$$(14.1.1) \quad (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i.$$

Odejmowanie:

$$(14.1.2) \quad (a + b \cdot i) - (c + d \cdot i) = (a - c) + (b - d) \cdot i.$$

Mnożenie:

$$(14.1.3) \quad \begin{aligned} (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) &= ac + ad \cdot i + bc \cdot i + bd \cdot i^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i. \end{aligned}$$

Dzielenie (oczywiście zakładamy, że $c + d \cdot i \neq 0$, co jest równoważne $c^2 + d^2 \neq 0$):

$$(14.1.4) \quad \begin{aligned} \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} &= \frac{(a + b \cdot i)(c - d \cdot i)}{(c + d \cdot i)(c - d \cdot i)} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc) \cdot i}{c^2 - d^2 i^2} = \\ &= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \cdot i. \end{aligned}$$

Jak widać, każde działanie arytmetyczne jest wykonalne w rozważanym zbiorze. Zatem zbiór wszystkich wyrażeń postaci $a + b \cdot i$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest ciałem liczbowym uzupełniającym ciało \mathbb{R} o brakujące rozwiązanie równania $x^2 + 1 = 0$. Później przekonamy się, że to ciało rozszerza ciało \mathbb{R} o wszystkie brakujące pierwiastki dowolnych równań wielomianowych (patrz zasadnicze twierdzenie algebry 15.3.1).

Definicja 14.1.3. Wyrażenie postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, nazywamy *liczbą zespoloną*. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez \mathbb{C} (od ang. *complex*, czyli złożony). Mamy zatem

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Liczbę zespoloną i nazywamy *jednostką urojoną*. Liczbę zespoloną postaci bi , gdzie $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nazywamy *czysto urojoną*.

Uwaga 14.1.4. W fizyce, elektryce i elektrotechnice jednostkę urojoną oznacza się literą j .

Liczy zespolone zwyczajowo oznaczamy krótko z, w, s itd. Postać $a + bi$ liczby zespolonej z nosi nazwę *postaci kanonicznej* lub inaczej – *postaci algebraicznej* tej liczby.

Definicja 14.1.5. Liczbę rzeczywistą a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej $z = a + bi$, co oznaczamy $a = \operatorname{Re} z$ lub $a = \Re z$. Liczbę rzeczywistą b nazywamy *częścią urojoną* liczby zespolonej $z = a + bi$, co oznaczamy $b = \operatorname{Im} z$ lub $b = \Im z$.

Konstrukcja zbioru liczb zespolonych pochodząca od Williama Rowana Hamiltona (1805–1865), matematyka, astronoma i fizyka irlandzkiego, jest odmienna od konstrukcji przedstawionej powyżej. Hamilton wprowadził następującą definicję liczby zespolonej.

Definicja 14.1.6 (Hamiltona liczby zespolonej).

Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę (a, b) liczb rzeczywistych.

W zbiorze wszystkich takich par, czyli w iloczynie kartezjańskim \mathbb{R}^2 , Hamilton określił działania dodawania i mnożenia następująco:

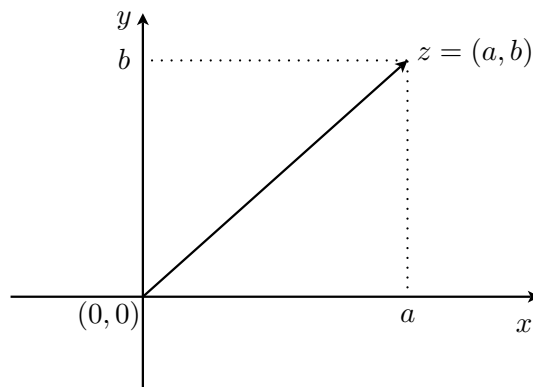
$$(14.1.5) \quad (a, b) + (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d),$$

$$(14.1.6) \quad (a, b) \cdot (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (ac - bd, ad + bc),$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tak określoną strukturę $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, która jest oczywiście ciałem liczbowym, nazwał ciałem liczb zespolonych. W interpretacji Hamiltona jednostka urojona i to element $(0, 1)$.

14.2. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

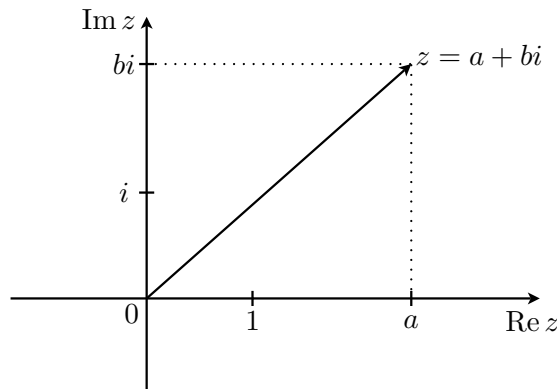
W konstrukcji Hamiltona liczbę zespoloną $z = (a, b)$ przedstawiamy na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (a, b) . Wektor o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie $z = (a, b)$ nazywamy *wektorem wodzącym liczby z* . W takiej interpretacji \mathbb{R}^2 nazywamy *płaszczyzną zespoloną* lub *płaszczyzną Arganda* (patrz rysunek 14.1).



Rysunek 14.1. Płaszczyzna zespolona według Hamiltona

Liczby zespolone interpretujemy geometrycznie również dla postaci algebraicznej. Każda liczba zespolona odpowiada jednoznacznie punktowi na płaszczyźnie euklidesowej, którą w tej interpretacji zwiemy *płaszczyzną Gaussa* lub po prostu *płaszczyzną zespoloną* (patrz rysunek 14.2). Oś poziomą nazywamy *osią*

rzeczywistą, którą oznaczamy $\operatorname{Re} z$, zaś oś pionową zwiemy *osią urojoną* $\operatorname{Im} z$. Wektor łączący liczbę zespoloną z z liczbą 0 też nazywamy *wektorem wodzącym* liczby z .



Rysunek 14.2. Płaszczyzna zespolona według Gaussa

Zauważmy, że dla konstrukcji Hamiltona zachodzi następujący fakt:

Fakt 14.2.1. Podzbiór $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ zbioru liczb zespolonych utożsamiamy ze zbiorem \mathbb{R} liczb rzeczywistych.

14.3. Działania na liczbach zespolonych

W tym podrozdziale podamy przykłady działań na liczbach zespolonych, zarówno w postaci kanonicznej, jak i hamiltonowskiej.

Niech z oraz w będą dwiema liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Mamy oczywiście

$$(14.3.1) \quad z = w \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w \end{cases} .$$

Działania na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy zgodnie ze wzorami (14.1.1) – (14.1.4), pamiętając oczywiście, że $i^2 = -1$.

Przykład 14.3.1.

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{2}i) &= 1 + 1 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})i = 2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})i, \\ (1 + 2i) \cdot (-3 + 4i) &= -3 + 4i - 6i + 8i^2 = -3 - 2i - 8 = -11 - 2i, \\ \frac{4 + 5i}{2 - i} &= \frac{(4 + 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{8 + 4i + 10i + 5i^2}{4 + 2i - 2i - i^2} = \frac{8 + 14i - 5}{5} = \frac{3}{5} + \frac{14}{5}i. \end{aligned}$$

Niech $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ będą liczbami zespolonymi w postaci hamiltonowskiej. Mamy oczywiście

$$(14.3.2) \quad z = w \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}.$$

Przykład 14.3.2. Niech $z = (0, 1)$, $w = (3, -4)$. Korzystając ze wzorów (14.1.5) oraz (14.1.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} z + w &= (0 + 3, 1 + (-4)) = (3, -3), \\ z \cdot w &= (0 \cdot 3 - 1 \cdot (-4), 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 3) = (4, 3). \end{aligned}$$

Posiłkując się wzorami (14.1.2) oraz (14.1.4) możemy zdefiniować odejmowanie i dzielenie liczb zespolonych w postaci hamiltonowskiej.

Definicja 14.3.3. Niech $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi w postaci hamiltonowskiej. Różnicę liczb z oraz w definiujemy jako

$$z - w \stackrel{\text{def}}{=} (a - c, b - d).$$

W szczególności liczbą przeciwną do liczby w jest

$$-w \stackrel{\text{def}}{=} (-c, -d).$$

Iloraz liczby z przez liczbę w , gdzie $w \neq (0, 0)$, definiujemy jako

$$\frac{z}{w} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

W szczególności odwrotnością liczby $w \neq (0, 0)$ jest liczba

$$\frac{1}{w} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right).$$

Przykład 14.3.4. Korzystając z powyższej definicji, otrzymujemy

$$(4, -1) - (-3, 5) = (4 - (-3), -1 - 5) = (7, -6)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{(-1, -2)}{(3, 4)} &= \left(\frac{(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2}, \frac{(-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 4}{3^2 + 4^2} \right) = \left(\frac{-11}{9 + 16}, \frac{-2}{9 + 16} \right) = \\ &= \left(-\frac{11}{25}, -\frac{2}{25} \right). \end{aligned}$$

Uwaga 14.3.5. Wszystkie reguły działań algebraicznych na liczbach rzeczywistych poznane na dotychczasowych etapach edukacji matematycznej, np. wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona itp., obowiązują także dla liczb zespolonych.

14.4. Własności działań w zbiorze liczb zespolonych

W tym podrozdziale zajmiemy się własnościami uprzednio zdefiniowanych działań, niezależnie od wybranej postaci liczb zespolonych.

Twierdzenie 14.4.1 (własności działań w zbiorze liczb zespolonych).

Niech z, w, s będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wtedy:

- (14.4.1) $z + w = w + z$ (przemienność dodawania),
 (14.4.2) $z + (w + s) = (z + w) + s$ (łączność dodawania),
 (14.4.3) $z + 0 = 0 + z = z$ (element neutralny dodawania),
 (14.4.4) $z + (-z) = 0$ (element przeciwny do danego),
 (14.4.5) $z \cdot w = w \cdot z$ (przemienność mnożenia),
 (14.4.6) $z \cdot (w \cdot s) = (z \cdot w) \cdot s$ (łączność mnożenia),
 (14.4.7) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (element neutralny mnożenia),
 (14.4.8) $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (element odwrotny do danego $z \neq 0$),
 (14.4.9) $z \cdot (w + s) = z \cdot w + z \cdot s$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Oczywiście dla liczb zespolonych w konstrukcji Hamiltona trzeba przyjąć $0 = (0, 0)$ oraz $1 = (1, 0)$.

Powyższe doprowadziło nas do definicji kolejnej struktury algebraicznej, zwanej *ciałem*. W odróżnieniu od ciała liczbowego ciało może składać się z dowolnych, abstrakcyjnych elementów.

Definicja 14.4.2. Niech będzie dany zbiór \mathcal{K} , zawierający co najmniej dwa elementy, w którym określone są dwa działania $+$ i \cdot . Zbiór \mathcal{K} nazywa się *ciałem*, jeśli wymienione działania spełniają warunki (14.4.1) – (14.4.9).

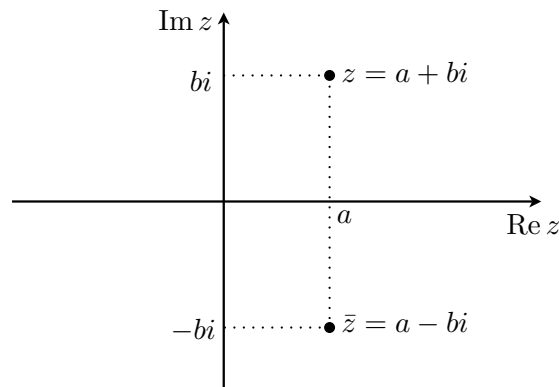
Oczywiście działania $+$ i \cdot , występujące w definicji 14.4.2, mogą nie mieć nic wspólnego z dodawaniem i mnożeniem liczb.

Przykładami ciał są oczywiście wszystkie wymienione uprzednio ciała liczbowe: \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, \mathbb{R} oraz \mathbb{C} . Przykładem ciała nieliczbowego jest ciało funkcji wymiernych o współczynnikach rzeczywistych.

Ze względów praktycznych obiekty zespolone, które pojawią się w dalszej części książki, będziemy rozpatrywali, wyrażając liczby zespolone w postaci algebraicznej (lub ewentualnie tzw. *postaci trygonometrycznej*).

14.5. Sprzężenie liczby zespolonej

Definicja 14.5.1. *Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną postaci $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} a - bi$.*



Rysunek 14.3. Sprzężenie liczby zespolonej

Operację sprzężenia można geometrycznie interpretować następująco: liczba sprzężona do danej jest jej obrazem w symetrii osiowej względem osi rzeczywistej (patrz rysunek 14.3). Z powyższej interpretacji wynika, że

$$(14.5.1) \quad z = \bar{z} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}.$$

14.5.1. Własności sprzężenia liczb zespolonych

Poniżej przedstawiamy twierdzenie, które mówi, że operacja sprzężenia „zachowuje” działania arytmetyczne na liczbach zespolonych. Dla przykładu własność (14.5.2) możemy odczytać jako „sprzężenie sumy to suma sprzężeń”.

Twierdzenie 14.5.2. Niech z, w będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wówczas:

$$(14.5.2) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},$$

$$(14.5.3) \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w},$$

$$(14.5.4) \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

$$(14.5.5) \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \text{ o ile } w \neq 0,$$

$$(14.5.6) \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z,$$

$$(14.5.7) \quad z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z,$$

$$(14.5.8) \quad \overline{(\bar{z})} = z,$$

$$(14.5.9) \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im} z.$$

Przykład 14.5.3. Rozwiążmy równanie zespolone $2z + (3 - i)\bar{z} = 5 + 4i$. Przy założeniu, że $z = a + bi$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} 2(a + bi) + (3 - i)(a - bi) &= 5 + 4i, \\ 2a + 2bi + 3a - 3bi - ai + bi^2 &= 5 + 4i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a + 3a - b + (2b - 3b - a)i &= 5 + 4i, \\(5a - b) + (-b - a)i &= 5 + 4i.\end{aligned}$$

Korzystając z warunku (14.3.1), otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi *rzeczywistymi* a, b

$$\begin{cases} 5a - b = 5 \\ -b - a = 4 \end{cases}.$$

Po rozwiązaniu tego układu (np. znaną z edukacji szkolnej metodą podstawiania) otrzymujemy $a = \frac{1}{6}$ oraz $b = -\frac{25}{6}$. Zatem rozwiązaniem danego równania jest liczba zespolona $z = \frac{1}{6} - \frac{25}{6}i$.

Przykład 14.5.4. Rozwiążmy równanie zespolone $z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$. Po założeniu, że $z = a + bi$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ i zastosowaniu wzoru (14.5.7), mamy kolejno

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) + 2i \cdot b &= 3 + 2i, \\a^2 - (ib)^2 + 2bi &= 3 + 2i, \\a^2 + b^2 + 2bi &= 3 + 2i.\end{aligned}$$

Z warunku (14.3.1) dostajemy układ

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ 2b = 2 \end{cases}.$$

Jak widać $b = 1$, co po podstawieniu do pierwszego równania daje

$$\begin{aligned}a^2 + 1 &= 3, \\a^2 &= 2, \\a_1 &= \sqrt{2}, \quad a_2 = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

W konsekwencji otrzymujemy dwa rozwiązania danego równania: $z_1 = \sqrt{2} + i$ oraz $z_2 = -\sqrt{2} + i$.

14.6. Moduł liczby zespolonej

Definicja 14.6.1. *Moduł liczby zespolonej* $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to liczba rzeczywista $|z|$ określona wzorem

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

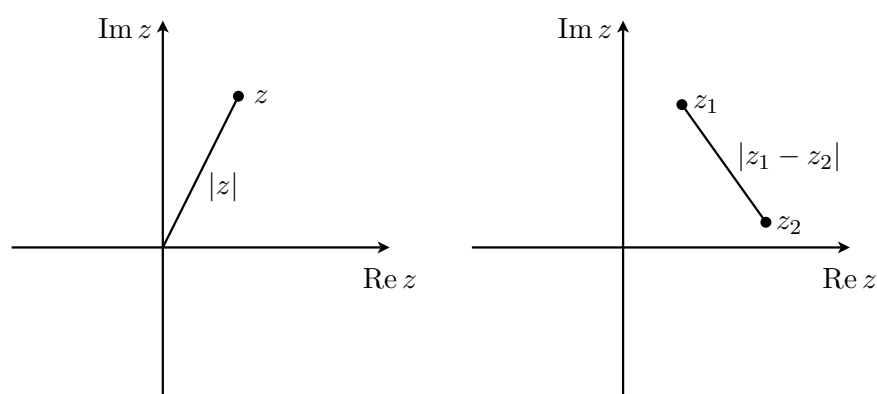
Czasami moduł liczby z jest oznaczany przez $\|z\|$ przez analogię do oznaczenia długości wektora.

Przykład 14.6.2. Moduł liczby $z = -1 + 3i$ wynosi

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Poniższy fakt ukazuje podobieństwo między modułem liczby zespolonej i wartością bezwzględną liczby rzeczywistej.

Fakt 14.6.3. Geometrycznie moduł liczby zespolonej jest odległością tej liczby od początku układu współrzędnych, czyli inaczej długością wektora wodzącego tej liczby. Moduł różnicy dwóch liczb zespolonych jest długością odcinka między tymi liczbami na płaszczyźnie zespolonej, tzn. odległością tych liczb.



Rysunek 14.4. Geometryczna interpretacja modułu liczby zespolonej

14.6.1. Własności modułu liczby zespolonej

Własności modułu liczby zespolonej są zbliżone do własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Twierdzenie 14.6.4. Niech z, w będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wtedy:

$$(14.6.1) \quad |z| \geq 0,$$

$$(14.6.2) \quad |z| = 0 \iff z = 0,$$

$$(14.6.3) \quad |\bar{z}| = |z| = |-z|,$$

$$(14.6.4) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2,$$

$$(14.6.5) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

$$(14.6.6) \quad |z^n| = |z|^n \quad \text{dla dowolnego } n \in \mathbb{N},$$

$$(14.6.7) \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad \text{o ile } w \neq 0,$$

$$(14.6.8) \quad |z + w| \leq |z| + |w|,$$

$$(14.6.9) \quad ||z| - |w|| \leq |z - w|,$$

$$(14.6.10) \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|,$$

$$(14.6.11) \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

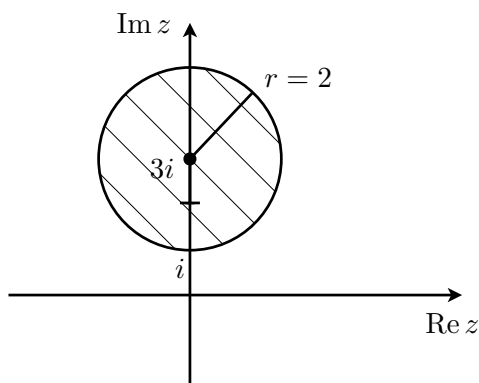
$$(14.6.12) \quad |\operatorname{Re}(z \cdot w)| \leq |z| \cdot |w|.$$

Nierówność (14.6.8) jest nazywana *nierównością trójkąta* przez analogię do takiej nierówności dla wartości bezwzględnej. Zauważmy, że własność (14.6.4) wykorzystywaliśmy już przy dzieleniu liczb zespolonych w postaci algebraicznej. Własności modułu wykorzystamy później w części 15.3.1, przy rozkładzie wielomianu rzeczywistego na czynniki.

Przykład 14.6.5. Rozwiążmy nierówność $|2iz + 6| \leq 4$. Korzystając z własności (14.6.5) oraz z faktu, że $\frac{6}{2i} = -3i$ i $|2i| = 2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |2iz + 6| &\leq 4, \\ \left| 2i \cdot \left(z + \frac{6}{2i} \right) \right| &\leq 4, \\ |2i| \cdot |z - 3i| &\leq 4, \\ 2 \cdot |z - 3i| &\leq 4, \quad / : 2, \\ |z - 3i| &\leq 2. \end{aligned}$$

Korzystając z faktu 14.6.3, otrzymujemy, że $|z - 3i|$ to odległość na płaszczyźnie zespolonej ustalonej liczby $z_0 = 3i$ od zmiennej liczby z . Ta odległość ma być nie większa niż 2. Z matematyki szkolnej wiemy, że zbiór punktów na płaszczyźnie, których odległość od ustalonego punktu P jest nie większa od ustalonej liczby dodatniej r , to domknięte koło o środku w punkcie P i promieniu r . Zatem zbiór rozwiązań nierówności $|z - 3i| \leq 2$ jest domkniętym kołem o środku $z_0 = 3i$ i promieniu $r = 2$ (patrz rysunek 14.5).



Rysunek 14.5. Zbiór rozwiązań nierówności $|z - 3i| \leq 2$

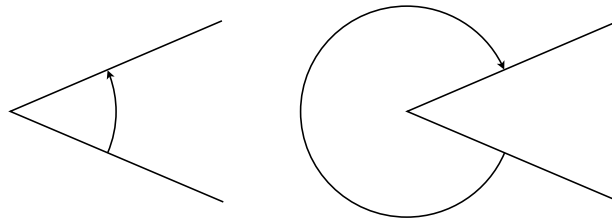
Interpretację geometryczną różnych typów równań i nierówności z modułem zaprezentowano w [13].

14.7. Argument liczby zespolonej

Zanim zdefiniujemy argument liczby zespolonej, przypomnijmy pojęcia kąta skierowanego oraz miary łukowej kąta na płaszczyźnie euklidesowej.

Definicja 14.7.1. *Kątem skierowanym* nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. W kącie skierowanym pierwszą z półprostych nazywamy *ramieniem początkowym kąta*, drugą zaś *ramieniem końcowym*. Wspólny początek ramion kąta nazywamy jego *wierzchołkiem*. *Wnętrzem kąta skierowanego* nazywamy figurę wyciętą z płaszczyzny przez ramiona tego kąta (patrz rysunek 14.7). Mówimy, że kąt jest skierowany *ujemnie*, jeśli ramiona tego kąta są uporządkowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara; w przeciwnym wypadku mówimy o kącie skierowanym *dodatnio*.

Przykłady kątów skierowanych przedstawiono na rysunku 14.6.



Rysunek 14.6. Kąt skierowany dodatnio i kąt skierowany ujemnie

Rozważmy kąt skierowany o wierzchołku A . Kreślimy okrąg o środku A i dowolnym promieniu r .

Definicja 14.7.2. *Miarą łukową kąta skierowanego dodatnio* nazywamy stosunek długości łuku będącego częścią wspólną okręgu i wnętrza kąta do długości promienia okręgu (patrz rysunek 14.7). Jeśli długość łuku oznaczmy przez l , to otrzymamy

$$\text{miara łukowa kąta dodatniego} = \frac{l}{r}.$$

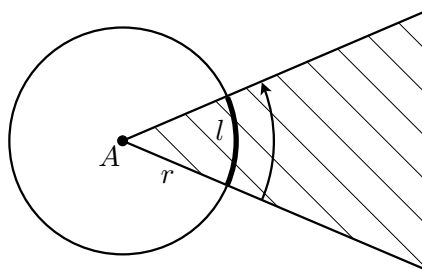
Dla kąta skierowanego ujemnie za jego miarę łukową przyjmujemy liczbę przeciwną, tzn.

$$\text{miara łukowa kąta ujemnego} = -\frac{l}{r}.$$

Kąt, którego miara łukowa wynosi 1, nazywamy *radianem* i oznaczamy w skrócie rad. Zależność między miarą stopniową kąta a miarą łukową kąta wyraża się wzorami

$$\alpha^\circ = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \text{ rad}, \quad \alpha \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot \alpha}{\pi} \right)^\circ.$$

W przypadku miary łukowej często pomija się wyrażenie rad i podaje tylko jej wartość liczbową. Przykładowo: miara łukowa kąta prostego wynosi $\frac{\pi}{2}$, zaś miara



Rysunek 14.7. Kąt skierowany i jego miara łukowa

Łukowa kąta pełnego wynosi 2π . Po wprowadzeniu *uogólnionego kąta skierowanego*, tj. po dopuszczeniu sytuacji, w której ramię końcowe kąta „obraca się” dodatkowo o wielokrotność kąta pełnego, otrzymujemy, że miara łukowa kąta może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Po tych preliminariach możemy zdefiniować argument liczby zespolonej.

Definicja 14.7.3. *Argumentem liczby zespolonej $z = a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, nazywamy dowolną liczbę rzeczywistą φ , która spełnia warunki*

$$(14.7.1) \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \end{cases},$$

gdzie $|z|$ jest modułem liczby z . Dla $z = 0$ przyjmujemy, że argumentem jest dowolna liczba rzeczywista φ .

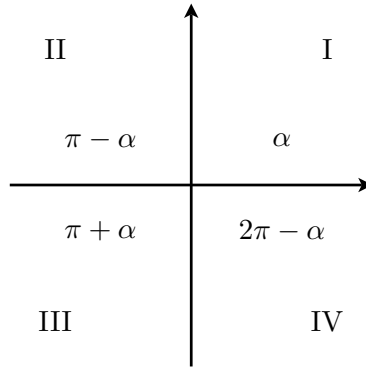
Definicja 14.7.4. *Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy ten argument liczby z , który należy do przedziału $[0, 2\pi)$. Argument główny liczby z oznaczamy $\arg z$. Ponadto przyjmujemy, że $\arg 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.*

Korzystając z okresowości funkcji trygonometrycznych sinus i cosinus, a co za tym idzie ze wzorów (3.2.1) oraz (3.2.2), otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 14.7.5. Każdy argument liczby $z \neq 0$ jest postaci $\varphi = \arg z + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k .

Geometryczne znaczenie pojęcia argumentu wyjaśnia poniższy fakt.

Fakt 14.7.6. Argument liczby zespolonej to miara łukowa kąta skierowanego, którego pierwsze ramię pokrywa się z dodatnią częścią osi rzeczywistej, a drugie ramię zawiera wektor wodzący tej liczby (patrz rysunek 14.8). Argument główny to najmniejsza nieujemna taka miara.



Rysunek 14.10. Ogólne postacie miar łukowych kątów

Pamiętając o ogólnych postaciach miar łukowych kątów w poszczególnych ćwiartkach (patrz rysunek 14.10), otrzymujemy, że $\varphi = 2\pi - \alpha$ dla pewnego $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, które spełnia oczywiście warunek

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \sin(2\pi - \varphi) = -\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} .$$

Z trygonometrii kąta ostrego wiemy, że $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Zatem ostatecznie $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Ponieważ $\varphi \in [0, 2\pi)$, to argument główny danej liczby zespolonej wynosi $\arg z = \frac{7\pi}{4}$.

14.7.1. Własności argumentu liczby zespolonej

Twierdzenie 14.7.8. Niech z, w będą dowolnymi *niezerowymi* liczbami zespolonymi. Wtedy:

$$(14.7.2) \quad \arg \frac{z}{|z|} = \arg z \quad \text{oraz} \quad \left| \frac{z}{|z|} \right| = 1,$$

$$(14.7.3) \quad \arg(-z) = \begin{cases} \arg z + \pi & \text{gdy } 0 \leq \arg z < \pi \\ \arg z - \pi & \text{gdy } \pi \leq \arg z < 2\pi \end{cases} ,$$

$$(14.7.4) \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi - \arg z,$$

$$(14.7.5) \quad \arg(\bar{z}) = 2\pi - \arg z,$$

$$(14.7.6) \quad \arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k = 0 \text{ lub } k = -1,$$

$$(14.7.7) \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ i pewnego } k \in \mathbb{Z},$$

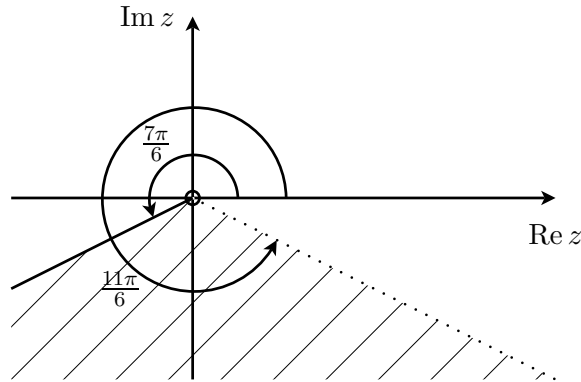
$$(14.7.8) \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k = 0 \text{ lub } k = 1.$$

Występujące w równościach (14.7.6)–(14.7.8) liczby całkowite k dobieramy tak, by po prawych stronach tych równości uzyskać liczby należące do przedziału $[0, 2\pi)$.

Przykład 14.7.9. Rozwiążmy nierówność $\frac{\pi}{6} < \arg\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{5\pi}{6}$, gdzie oczywiście $z \neq 0$. Korzystając z własności (14.7.4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} < \arg\left(\frac{1}{z}\right) &\leq \frac{5\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{6} < 2\pi - \arg z &\leq \frac{5\pi}{6}, \\ -\frac{11\pi}{6} < -\arg z &\leq -\frac{7\pi}{6}, \\ \frac{11\pi}{6} > \arg z &\geq \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Z faktu 14.7.6 wynika, że rozwiązaniem danej nierówności będzie każda liczba zespolona z , której wektor wodzący tworzy z dodatnią częścią osi rzeczywistej kąt skierowany o mierze łukowej z przedziału $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$. Zbiór wszystkich rozwiązań danej nierówności jest przedstawiony na rysunku 14.11.



Rysunek 14.11. Zbiór rozwiązań nierówności $\frac{\pi}{6} < \arg\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{5\pi}{6}$

Interpretację geometryczną różnych typów równań i nierówności z argumentem przedstawiono w [13].

14.8. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Znając pojęcia modułu oraz argumentu liczby zespolonej, możemy zdefiniować postać trygonometryczną liczby zespolonej.

Definicja 14.8.1. *Postacią trygonometryczną liczby zespolonej z nazywamy wyrażenie*

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $|z|$ jest modułem, zaś φ jest jednym z argumentów liczby z . W dalszym ciągu będziemy starali się wybierać $\varphi = \arg z$.

Postać trygonometryczną liczby zespolonej nazywamy inaczej jej *postacią biegunową* lub *postacią geometryczną*.

Przykład 14.8.2. Zapiszmy w postaci trygonometrycznej liczbę $z = 3 + 3i$. Najpierw wyznaczamy moduł tej liczby.

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Teraz obliczymy argument główny danej liczby.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Korzystając z rysunku 14.9, wnioskujemy, że φ jest miarą kąta skierowanego, którego drugie ramię leży w I ćwiartce płaszczyzny kartezjańskiej. Z trygonometrii kąta ostrego wynika, że $\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Zatem $\arg z = \frac{\pi}{4}$. W konsekwencji postacią trygonometryczną danej liczby jest

$$z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Przykład 14.8.3. Przedstawmy w postaci trygonometrycznej liczbę $z = 1 - i$. Wyznaczamy moduł tej liczby.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Obliczamy argument główny danej liczby.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Przy pomocy rysunku 14.9 wnioskujemy, że φ jest miarą kąta skierowanego, którego drugie ramię leży w IV ćwiartce płaszczyzny kartezjańskiej. Poprzez analogię do przykładu 14.7.7 dostajemy $\varphi = \arg z = \frac{7\pi}{4}$. Zatem dana liczba zapisuje się w postaci trygonometrycznej jako

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

Przykład 14.8.4. Zapiszmy w postaci trygonometrycznej liczbę $z = \sqrt{3} + i$. Najpierw wyznaczamy moduł tej liczby.

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Teraz obliczymy argument główny danej liczby.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Łatwo obliczyć, że $\varphi = \arg z = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Zatem postacią trygonometryczną danej liczby jest

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

14.8.1. Własności liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej

Niech z będzie liczbą zespoloną przedstawioną w postaci trygonometrycznej $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Mamy oczywiście

$$(14.8.1) \quad z = 0 \iff |z| = 0.$$

Niech z oraz w będą dwiema niezerowymi liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej, tzn. $z = |z|(\cos \varphi_z + i \sin \varphi_z)$, $w = |w|(\cos \varphi_w + i \sin \varphi_w)$ oraz $|z| > 0$ i $|w| > 0$. Wówczas

$$(14.8.2) \quad z = w \iff \begin{cases} |z| = |w| \\ \varphi_z = \varphi_w + 2k\pi \end{cases} \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Warunek „ $\varphi_z = \varphi_w + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ ” jest oczywiście równoważny warunkowi „ $\arg z = \arg w$ ”.

Korzystając ze wzorów (14.6.5), (14.6.7), (14.7.6) oraz (14.7.8), otrzymujemy wzory na mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.

Twierdzenie 14.8.5. Jeżeli z oraz w są dwiema liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej, tzn. $z = |z|(\cos \varphi_z + i \sin \varphi_z)$, $w = |w|(\cos \varphi_w + i \sin \varphi_w)$, to

$$(14.8.3) \quad z \cdot w = |z| \cdot |w| (\cos(\varphi_z + \varphi_w) + i \sin(\varphi_z + \varphi_w)),$$

$$(14.8.4) \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi_z - \varphi_w) + i \sin(\varphi_z - \varphi_w)) \quad \text{o ile } w \neq 0.$$

Przykład 14.8.6. W przykładach 14.8.3 i 14.8.4 pokazaliśmy, że

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad \text{oraz} \quad \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Korzystając ze wzoru (14.8.3), z równości $\frac{23\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12}$ oraz z własności funkcji sinus i cosinus, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1 - i) \cdot (\sqrt{3} + i) &= \sqrt{2} \cdot 2 \left(\cos \left(\frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{23}{12}\pi \right) + i \sin \left(\frac{23}{12}\pi \right) \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Przykład 14.8.7. Postępując analogicznie do poprzedniego przykładu oraz wykorzystując wzór (14.8.4) i fakt, że $\frac{19\pi}{12} = 2\pi - \frac{5\pi}{12}$, mamy

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{19}{12}\pi \right) + i \sin \left(\frac{19}{12}\pi \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{5}{12}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{12}\pi \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{5}{12}\pi \right) - i \sin \left(\frac{5}{12}\pi \right) \right). \end{aligned}$$

14.8.2. Wzór de Moivre'a

Zauważmy, że nawet przy wykorzystaniu wzoru dwumianowego Newtona obliczenie n -tej potęgi liczby z dla z podanego w postaci kanonicznej oraz dużego $n \in \mathbb{N}$ jest zajęciem żmudnym. Natomiast gdy z jest dane w postaci trygonometrycznej, to wykorzystując własność (14.8.3), możemy otrzymać stosunkowo prosty wzór na obliczenie z^n . Wzór ten pochodzi od matematyka angielskiego Abrahama de Moivre'a (1667–1754).

Twierdzenie 14.8.8 (de Moivre'a).

Niech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(14.8.5) \quad z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)).$$

Przykład 14.8.9. Wykorzystując postać trygonometryczną liczby $1 - i$, tj. równość

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

obliczymy wartość wyrażenia $(1 - i)^{10}$. Po zastosowaniu wzoru (14.8.5) oraz wykorzystaniu okresowości funkcji sinus i cosinus otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1 - i)^{10} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{4}\pi \right) \right) \right]^{10} = \\ &= (\sqrt{2})^{10} \left[\cos \left(10 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) \right] = \\ &= (\sqrt{2})^{2 \cdot 5} \left[\cos \left(\frac{70}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{70}{4}\pi \right) \right] = \\ &= 2^5 \left[\cos \left(\frac{35}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{35}{2}\pi \right) \right] = \\ &= 32 \left[\cos \left(16\pi + \frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(16\pi + \frac{3}{2}\pi \right) \right] = \\ &= 32 \left[\cos \left(\frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{2}\pi \right) \right] = \\ &= 32 [0 + i(-1)] = -32i. \end{aligned}$$

14.8.3. Wzory Eulera

Dla dowolnej liczby rzeczywistej φ wprowadzamy oznaczenie

$$(14.8.6) \quad e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

gdzie e jest liczbą Eulera (patrz definicja 4.5.17).

Przy oznaczeniu (14.8.6) otrzymujemy zależności wyrażające głębokie powiązanie między funkcjami trygonometrycznymi sinus oraz cosinus oraz funkcją eksponencjalną. Zależności te nazywamy *wzorami Eulera*.

Twierdzenie 14.8.10 (Eulera).

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące równości

$$(14.8.7) \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

$$(14.8.8) \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Wzory Eulera, tak jak i wymienione uprzednio własności modułu i argumentu liczby zespolonej, służą m.in. do wyprowadzenia wielu wzorów trygonometrycznych.

Przykład 14.8.11. Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Stosując wzory Eulera oraz prawa działań na potęgach, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{(e^{ix})^2 - 2 \cdot e^{ix} \cdot e^{-ix} + (e^{-ix})^2}{-4} = \\ &= \frac{e^{i \cdot 2x} - 2 \cdot e^{ix+(-ix)} + e^{-i \cdot 2x}}{-4} = \frac{e^{i \cdot 2x} - 2 \cdot e^0 + e^{-i \cdot 2x}}{-4} = \\ &= \frac{e^{i \cdot 2x} + e^{-i \cdot 2x} - 2}{-4} = \frac{e^{i \cdot 2x} + e^{-i \cdot 2x}}{-4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i \cdot 2x} + e^{-i \cdot 2x}}{2} + \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \end{aligned}$$

Niniejszym dowiedliśmy wzór

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Warto wspomnieć, że wykorzystując oznaczenie (14.8.6), można przedstawić liczbę zespoloną w kolejnej postaci, zwanej *postacią wykładniczą*. Własności liczb zespolonych w postaci wykładniczej są na tyle podobne do własności tych liczb w postaci trygonometrycznej, że nie będziemy się dalej zajmowali tym nowym przedstawieniem.

Po podstawieniu $\varphi = \pi$ do zależności (14.8.6) otrzymujemy

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

W ten łatwy sposób dowiedliśmy prawdziwości twierdzenia łączącego pięć najważniejszych stałych matematycznych.

Twierdzenie 14.8.12.

$$(14.8.9) \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

14.9. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Po wszystkich dotychczasowych rozważaniach na temat liczb zespolonych dotarliśmy wreszcie do zagadnienia, które stało się przyczyną wynalezienia tych liczb, czyli do pierwiastkowania.

Cardano podczas odkrywania algebraicznej metody rozwiązywania równań trzeciego stopnia natknął się na wyrażenia, w których występują pierwiastki kwadratowe liczb ujemnych. Nie wiedząc, co takie wyrażenia miałyby znaczyć, i nie ośmielając się wykonywać na nich działań, nazwał je *urojonymi*. Wyrażeniami urojonymi zajął się następnie Rafael Bombelli (1526–1572), który w swym dziele *Algebra* (1572) zaprezentował pierwsze przedstawienie liczb zespolonych.

Definicja 14.9.1. Niech $n \in \mathbb{N}$. *Pierwiastkiem stopnia n z liczby zespolonej z* nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą warunek

$$(14.9.1) \quad w^n = z.$$

Zbiór wszystkich pierwiastków stopnia n z liczby z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

W tym momencie widać istotną różnicę w znaczeniu symbolu $\sqrt[n]{}$. W zbiorze liczb rzeczywistych symbol ten oznacza pojedynczą liczbę (ewentualnie jej brak), natomiast w zbiorze liczb zespolonych oznacza *zbiór liczb*. Dla porównania:

— dla \mathbb{R} :

$$\sqrt[4]{1} = 1; \quad \sqrt{-1} \text{ nie istnieje,}$$

— dla \mathbb{C} :

$$\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}; \quad \sqrt{-1} = \{i, -i\}.$$

Przykład 14.9.2. Wyznamy $\sqrt[4]{-1}$. W celu rozwiązania równania

$$(14.9.2) \quad w^4 = -1$$

przyjmijmy $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ oraz $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$. Po podstawieniu do (14.9.2) i zastosowaniu wzoru de Moivre'a (14.8.5) otrzymujemy równanie

$$|w|^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) = 1(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Korzystając z własności (14.8.2), otrzymujemy

$$\begin{cases} |w|^4 = 1 \\ 4\varphi = \pi + 2k\pi \quad \text{dla pewnego } k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

$$\begin{cases} |w| = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z} .$$

Zakładamy, że $\varphi = \arg w \in [0, 2\pi)$. Przy tym założeniu liczba k może być równa tylko 0,1,2 lub 3. Stosując wzory redukcyjne ([3]), otrzymujemy:

Dla $k = 0$

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Dla $k = 1$

$$w_1 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Dla $k = 2$

$$w_2 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) = -\cos \frac{\pi}{4} + i \left(-\sin \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

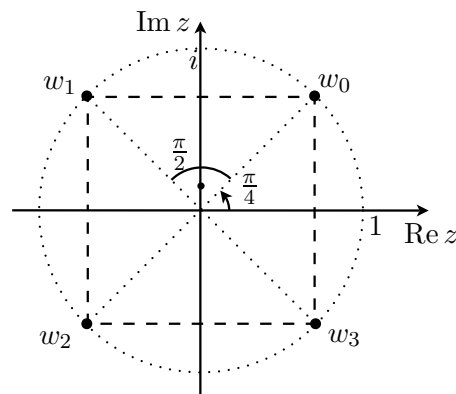
Dla $k = 3$

$$w_3 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi \right) = \sin \frac{\pi}{4} + i \left(-\cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Zatem szukanym zbiorem pierwiastków jest zbiór

$$\sqrt[4]{-1} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}.$$

Zbiór $\sqrt[4]{-1}$ jest przedstawiony na rysunku 14.12. Warto zwrócić uwagę na to, że elementy tego zbioru są wierzchołkami kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 1.



Rysunek 14.12. Zbiór pierwiastków czwartego stopnia z liczby -1

Uogólniając metodę zastosowaną w powyższym przykładzie, dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 14.9.3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Zbiór $\sqrt[n]{z}$ pierwiastków stopnia n z dowolnej niezerowej liczby zespolonej z jest zbiorem n -elementowym. Jeśli $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, to każdy z elementów tego zbioru wyraża się wzorem

$$(14.9.3) \quad z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

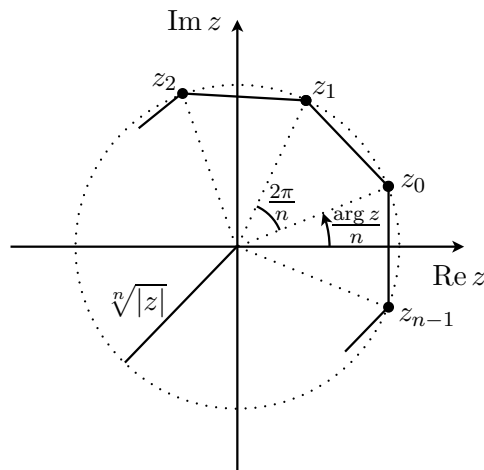
dla pewnego $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Liczba $\sqrt[n]{|z|}$ to pierwiastek n -tego stopnia z liczby rzeczywistej $|z|$, czyli taka liczba nieujemna, której n -ta potęga równa jest $|z|$.

Definicja 14.9.4. Jeśli we wzorze (14.9.3) mamy $\varphi = \arg z$, to z_0 nazywa się *pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z liczby z* . Mówiąc inaczej, pierwiastek pierwotny to pierwiastek o najmniejszym nieujemnym argumencie.

Przykład 14.9.5. Pierwiastkiem pierwotnym stopnia 4 z liczby -1 jest liczba $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

14.9.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka zespolonego



Rysunek 14.13. Zbiór pierwiastków n -tego stopnia z liczby z

Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ oraz niech $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ będzie niezerową liczbą zespoloną. Na płaszczyźnie zespolonej rozpatrzmy okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$ i środka w początku układu współrzędnych. Rozpatrzmy n -kąąt foremny W_n , wpisany w ten okrąg w taki sposób, że jednym z jego wierzchołków jest pierwiastek pierwotny stopnia n z liczby z (patrz rysunek 14.13).

Fakt 14.9.6. Zbiór $\sqrt[n]{z}$ pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z jest identyczny ze zbiorem wierzchołków n -kąta foremnego W_n .

Rozdział 15

Wielomiany zespolone

Pojęcie wielomianu pojawiło się już na lekcjach matematyki w szkole ponadgimnazjalnej. Wtedy też wykonywano na wielomianach działania arytmetyczne dodawania, odejmowania oraz mnożenia. Przy użyciu różnych metod rozkładu wielomianu na czynniki znajdowano pierwiastki danego wielomianu. Wielomiany znane z poprzednich etapów edukacji są wielomianami rzeczywistymi. W tym rozdziale przedstawimy podstawy teorii wielomianów zespolonych.

15.1. Podstawowe określenia

Definicja 15.1.1. *Wielomianem zespolonym* stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ postaci

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ są *współczynnikami wielomianu* W , $a_n \neq 0$. Jeśli natomiast $W(z) \equiv 0$, to mówimy że stopień W wynosi $-\infty$.

Fakt 15.1.2. Dwa wielomiany zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej z .

Działania arytmetyczne na wielomianach zespolonych wykonujemy podobnie jak na wielomianach rzeczywistych, pamiętając przy tym, że $i^2 = -1$.

Przykład 15.1.3. Niech $W(z) = z^4 + i$ oraz $Q(z) = z^2 - i$. Wyznaczmy sumę, różnicę i iloczyn tych wielomianów.

$$W(z) + Q(z) = z^4 + i + z^2 - i = z^4 + z^2,$$

$$W(z) - Q(z) = z^4 + i - (z^2 - i) = z^4 + i - z^2 + i = z^4 - z^2 + 2i,$$

$$W(z) \cdot Q(z) = (z^4 + i)(z^2 - i) = z^6 - iz^4 + iz^2 - i^2 = z^6 - iz^4 + iz^2 + 1.$$

Dygresja

Oznaczmy zbiór wszystkich wielomianów zespolonych przez $\mathbb{C}[z]$. Zbiór $\mathbb{C}[z]$ jest przykładem dwóch struktury algebraicznych: *grupy* oraz *pierścienia*. Przypomnijmy, że pojęcie *działania określonego w danym zbiorze* przedstawiliśmy w definicji 14.1.1 na stronie 228.

Definicja 15.1.4. Zbiór \mathcal{G} , w którym określone jest działanie \oplus , nazywamy *grupą*, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\text{G-I (łączność działania)} \quad (\forall z, w, s \in \mathcal{G}) \quad z \oplus (w \oplus s) = (z \oplus w) \oplus s,$$

$$\text{G-II (element neutralny działania)} \quad (\exists e \in \mathcal{G}) \quad z \oplus e = e \oplus z = z,$$

$$\text{G-III (element odwrotny do danego)} \quad (\forall z \in \mathcal{G})(\exists z' \in \mathcal{G}) \quad z \oplus z' = z' \oplus z = e.$$

Jeśli ponadto jest spełniony warunek

$$\text{G-IV (przemienność działania)} \quad (\forall z, w \in \mathcal{G}) \quad z \oplus w = w \oplus z,$$

to grupę nazywamy *przemienną* lub *abelową*.

Warunki (G-I)–(G-III) nazywamy *aksjomatami grupy*.

Zbiór $\mathbb{C}[z]$ z działaniem dodawania wielomianów jest grupą przemienną. Wielomian zerowy pełni rolę elementu neutralnego. Rolę elementu odwrotnego do danego wielomianu W gra wielomian przeciwny do W , czyli wielomian $-W$. Przykładem grupy nieprzemiennej jest zbiór \mathcal{M}_n wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, z działaniem mnożenia macierzy (patrz fakt 11.3.4 na stronie 172).

Definicja 15.1.5. Zbiór \mathcal{R} , w którym określone są dwa działania \oplus i \odot , nazywamy *pierścieniem*, jeśli spełnione są następujące warunki:

R-I (abelowość grupy addytywnej)

$$(\mathcal{R}, \oplus) \text{ spełnia aksjomaty (G-I)–(G-IV) grupy abelowej,}$$

R-II (łączność działania \odot)

$$(\forall z, w, s \in \mathcal{R}) \quad z \odot (w \odot s) = (z \odot w) \odot s,$$

R-III (rozdzielność działania \odot względem działania \oplus)

$$(\forall z, w, s \in \mathcal{R}) \quad [z \odot (w \oplus s) = (z \odot w) \oplus (z \odot s)] \wedge \\ [(w \oplus s) \odot z = (w \odot z) \oplus (s \odot z)].$$

Jeśli ponadto jest spełniony warunek

R-IV (przemienność działania \odot)

$$(\forall z, w \in \mathcal{R}) \quad z \odot w = w \odot z,$$

to pierścień nazywamy *przemiennym*.

Warunki (R-I)–(R-III) nazywamy *aksjomatami pierścienia*. Działanie \oplus zwyczajowo nazywamy *dodawaniem*, zaś działanie \odot zwiemy *mnożeniem*.

Zbiór $\mathbb{C}[z]$ z działaniem dodawania wielomianów jako \oplus oraz mnożenia wielomianów jako \odot jest pierścieniem przemiennym. Przykładem pierścienia nieprzemiennego jest $(\mathcal{M}_n, \oplus, \odot)$, gdzie \oplus jest dodawaniem, zaś \odot – mnożeniem macierzy (patrz twierdzenie 11.3.1 na stronie 172).

Przykładami pierścieni są oczywiście wszystkie wymienione uprzednio ciała: \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, \mathbb{R} oraz \mathbb{C} (patrz definicja 14.4.2 na stronie 233). Pierścień przemienny $\mathbb{C}[z]$ niestety nie jest ciałem, gdyż dla danego wielomianu W , różnego od wielomianu stałego, nie istnieje wielomian V taki, że $W \cdot V = 1$.

Koniec dygresji

Działanie dzielenia wielomianów wprowadzamy za pomocą następującej definicji.

Definicja 15.1.6. Jeżeli dla każdego $z \in \mathbb{C}$ spełniony jest warunek

$$(15.1.1) \quad W(z) = Q(z) \cdot I(z) + R(z),$$

gdzie stopień wielomianu R jest mniejszy od stopnia wielomianu Q , to wielomian I nazywamy *ilorazem*, zaś wielomian R *resztą z dzielenia* wielomianu W przez wielomian Q . Jeżeli $R(z) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian W jest *podzielny* przez wielomian Q .

W praktyce trudno jest stosować warunek (15.1.1) do wyznaczania ilorazu i reszty z dzielenia dwóch wielomianów. Dlatego też w takiej sytuacji będziemy stosowali pisemny algorytm dzielenia wielomianów, analogiczny do pisemnego dzielenia liczb całkowitych. Opis tego algorytmu pochodzi z [15].

Algorytm dzielenia wielomianów

Pierwszy wyraz dzielnej dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika. Otrzymany jednomian mnożymy przez każdy wyraz dzielnej. Iloczyn ze zmienionymi współczynnikami na przeciwne zapisujemy pod dzielną i dodajemy do niej. Otrzymany wielomian nazywamy pierwszą resztą z dzielenia. Wielomian ten przejmuje rolę dzielnej i dalej postępujemy zgodnie z już opisanym schematem (oczywiście kolejne reszty nazywamy: drugą, trzecią itd.). Dzielenie kończy się wtedy, gdy otrzymamy zerową resztę lub gdy stopień reszty będzie mniejszy od stopnia dzielnika.

Pierwszy przykład zastosowania powyższego algorytmu, dla dwóch wielomianów rzeczywistych, pojawił się już w przykładzie 10.3.3 na stronie 136. Poniżej przedstawimy dwa kolejne przykłady, tym razem zespolone.

Przykład 15.1.7. Niech $W(z) = z^4 + 1$ oraz $Q(z) = z^2 - i$. Wyznaczmy iloraz i resztę z dzielenia wielomianu W przez wielomian Q .

$$\begin{array}{r} (z^4 + 1) : (z^2 - i) = z^2 + i \\ \underline{-z^4 + iz^2} \\ = iz^2 + 1 \\ \underline{-iz^2 - 1} \\ = \end{array}$$

Zatem ilorazem jest wielomian $z^2 + i$, zaś reszta z dzielenia wynosi 0. Podstawiając to do warunku (15.1.1), otrzymujemy

$$z^4 + 1 = (z^2 - i)(z^2 + i).$$

Przykład 15.1.8. Niech $W(z) = z^4 + i$ oraz $Q(z) = z^2 - i$. Wyznaczmy iloraz i resztę z dzielenia wielomianu W przez wielomian Q .

$$\begin{array}{r} (z^4 + i) : (z^2 - i) = z^2 + i \\ -z^4 + iz^2 \\ \hline = iz^2 + i \\ -iz^2 - 1 \\ \hline = -1 + i \end{array}$$

Tym razem mamy

$$z^4 + i = (z^2 - i)(z^2 + i) + (-1 + i).$$

15.2. Pierwiastki wielomianów zespolonych

Definicja 15.2.1. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem zespolonym* wielomianu W , jeśli $W(z_0) = 0$. Jeśli ponadto $\text{Im } z_0 = 0$, czyli $z_0 \in \mathbb{R}$, to z_0 nazywamy *pierwiastkiem rzeczywistym* wielomianu W .

Przykład 15.2.2. Rozpatrzmy wielomian $W(z) = z^3 - 2z + 4$ oraz liczby $z_0 = 1 + i$ i $z_1 = -2$. Ponieważ $i^3 = i^2i = -i$, to otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(z_0) &= (1 + i)^3 - 2(1 + i) + 4 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 - 2 - 2i + 4 = \\ &= 1 + 3i - 3 - i - 2 - 2i + 4 = 0, \\ W(z_1) &= (-2)^3 - 2(-2) + 4 = 0. \end{aligned}$$

Zatem liczba z_0 jest pierwiastkiem zespolonym wielomianu W , zaś liczba z_1 jest pierwiastkiem rzeczywistym tego wielomianu.

W tym momencie rodzi się pytanie: w jaki sposób znaleźć pierwiastki danego wielomianu? Oczywiście poznane w szkole ponadgimnazjalnej metody pozostają nadal aktualne. Poniżej zaprezentujemy parę nowych technik szukania takich pierwiastków.

Twierdzenie 15.2.3 (o pierwiastkach całkowitych wielomianu).

Dany jest wielomian W stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o współczynnikach całkowitych, tzn.

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Jeżeli istnieje niezerowy pierwiastek całkowity wielomianu W , to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Przykład 15.2.4. Rozważmy wielomian $W(z) = z^3 - 2z^2 + 5z + 8$. Mamy $a_0 = 8$, zaś dzielniki a_0 to liczby $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Sprawdzamy, które z tych dzielników są pierwiastkami wielomianu W . Ponieważ

$$W(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 8 = 1 - 2 + 5 + 8 = 12 \neq 0,$$

to 1 nie jest pierwiastkiem W . Natomiast

$$W(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 5(-1) + 8 = -1 - 2 - 5 + 8 = 0,$$

czyli -1 jest pierwiastkiem całkowitym tego wielomianu. Łatwym rachunkiem sprawdzamy, że pozostałe dzielniki wyrazu wolnego nie są pierwiastkami W . Zatem jedynym pierwiastkiem całkowitym wielomianu W jest -1 .

Twierdzenie 15.2.5 (o pierwiastkach wymiernych wielomianu).

Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dany jest wielomian W stopnia n o współczynnikach całkowitych. Jeżeli istnieje niezerowy pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$ wielomianu W , gdzie $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ i $NWD(p, q) = 1$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Przykład 15.2.6. Rozważmy wielomian $W(z) = 4z^4 + z^2 - 3z + 1$. Mamy $a_0 = 1$, $a_n = a_4 = 4$. Dzielniki a_0 to liczby ± 1 , zaś dzielnikami a_n są: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Pierwiastków wymiernych wielomianu W szukamy wśród liczb: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$. Ponieważ

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

oraz, jak łatwo sprawdzić, pozostali kandydaci nie są pierwiastkami W , to jedynym pierwiastkiem wymiernym danego wielomianu jest $\frac{1}{2}$.

Jeśli już znamy choć jeden pierwiastek danego wielomianu, to przy szukaniu innych pierwiastków możemy wykorzystać twierdzenie pochodzące od matematyka francuskiego Etienne Bezouta (1730–1783).

Twierdzenie 15.2.7 (Bezout).

Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $z - z_0$ jest równa $W(z_0)$.

Twierdzenie Bezouta mówi w szczególności, że liczba z_0 jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian I , taki że

$$W(z) = (z - z_0) \cdot I(z)$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ (patrz definicja 15.1.6).

Przykład 15.2.8. Wiemy, że pierwiastkami wielomianu $W(z) = z^3 - 2z + 4$ są liczby $z_1 = 1 + i$ oraz $z_2 = -2$. Zatem dla pewnego wielomianu I mamy

$$\begin{aligned} z^3 - 2z + 4 &= (z - (1 + i))(z + 2) \cdot I(z), \\ z^3 - 2z + 4 &= (z^2 + (1 - i)z - 2 - 2i) \cdot I(z). \end{aligned}$$

Wyznaczmy wielomian I

$$I(z) = \frac{z^3 - 2z + 4}{z^2 + (1 - i)z - 2 - 2i} = z - (1 - i).$$

W konsekwencji

$$z^3 - 2z + 4 = (z - (1 + i))(z + 2)(z - (1 - i)).$$

Zatem trzecim (i równocześnie ostatnim) pierwiastkiem danego wielomianu jest $z_3 = 1 - i$.

Dla wielomianów stopnia 2, czyli trójmianów kwadratowych, mamy wzory analogiczne do poznanych w szkole średniej.

Fakt 15.2.9. Zespolony trójmian kwadratowy $W(z) = az^2 + bz + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ ma dwa pierwiastki zespolone

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad \text{gdzie } \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac.$$

Podobne wzory istnieją także dla wielomianów stopnia 3 (wzory Cardano), ale nie będziemy się tutaj nimi zajmowali.

15.3. Rozkład wielomianu na czynniki nierozkładalne

Fundamentem analizy zespolonej jest następujące twierdzenie, udowodnione w roku 1799 przez Gaussa:

Twierdzenie 15.3.1 (zasadnicze twierdzenie algebry).

Każdy zespolony wielomian stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Konsekwencją zasadniczego twierdzenia algebry oraz twierdzenia Bezouta jest twierdzenie następujące:

Twierdzenie 15.3.2. Każdy zespolony wielomian stopnia $n \in \mathbb{N}$ posiada dokładnie n pierwiastków zespolonych.

Twierdzenie 15.3.2 jest równoważne twierdzeniu o rozkładzie wielomianu zespolonego.

Twierdzenie 15.3.3 (o rozkładzie wielomianu zespolonego).

Każdy zespolony wielomian W stopnia $n \in \mathbb{N}$ można zapisać w postaci iloczynu

$$(15.3.1) \quad W(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \cdot \dots \cdot (z - z_n),$$

gdzie a_n jest współczynnikiem przy z^n wielomianu W , zaś $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ są pierwiastkami tego wielomianu.

Czynniki po prawej stronie równości (15.3.1) mogą się powtarzać. Powtarzający się pierwiastek nazywamy *wielokrotnym*, zaś liczbę jego wystąpień w rozkładzie zwiemy jego *krotnością*.

Przykład 15.3.4. Rozważmy wielomian $W(z) = z^5 - 4z^3$. Łatwo zauważyć, że

$$W(z) = z^5 - 4z^3 = z^3(z^2 - 4) = z^3(z - 2)(z + 2).$$

Zatem $z_1 = 0$ jest pierwiastkiem 3-krotnym wielomianu W , natomiast $z_2 = 2$ oraz $z_3 = -2$ są pierwiastkami jednokrotnymi tego wielomianu.

15.3.1. Rozkład wielomianu rzeczywistego na rzeczywiste czynniki nierozkładalne

Z edukacji matematycznej w szkole średniej wiemy, że w zbiorze liczb rzeczywistych każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego, przy czym czynniki stopnia drugiego są czynnikami nierozkładalnymi (tzn. trójmianami kwadratowymi o ujemnych wyróżnikach). Stąd też wynika, że w zbiorze liczb rzeczywistych wiemy tylko, że pierwiastków danego wielomianu stopnia n jest co najwyżej n . Powstaje pytanie: w jaki sposób dla danego wielomianu rzeczywistego znaleźć jego postać iloczynową? Postaramy się tutaj odpowiedzieć na to pytanie, używając metod analizy zespolonej.

W całej bieżącej części zakładamy, że wielomian W jest *wielomianem o współczynnikach rzeczywistych*. Ponieważ $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$, to możemy ten wielomian traktować jako szczególny wielomian zespolony.

Z własności (14.5.1) wynika następujący fakt:

Fakt 15.3.5. Jeśli wielomian W ma współczynniki rzeczywiste, to

$$\overline{W(z)} = W(\bar{z}) \quad \text{dla dowolnego } z \in \mathbb{C}.$$

Powyższy fakt implikuje prawdziwość twierdzenia:

Twierdzenie 15.3.6. Liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem wielomianu W , którego współczynniki są liczbami rzeczywistymi, wtedy i tylko wtedy, gdy liczba zespolona \bar{z}_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Zatem pierwiastki nierzeczywiste (tzn. takie, dla których część urojona jest niezerowa) wielomianu W występują parami: liczba zespolona i liczba do niej sprzężona. Spójrzmy teraz na rozkład (15.3.1) wielomianu W na czynniki zespolone. Jeśli z_i , gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, jest liczbą rzeczywistą, to czynnik $(z - z_i)$ jest oczywiście rzeczywistym czynnikiem pierwszego stopnia. Jeśli natomiast mamy $\text{Im } z_i \neq 0$, to w postaci iloczynowej W występuje m.in. iloczyn $(z - z_i)(z - \bar{z}_i)$. Przyjrzyjmy się bliżej temu iloczynowi. Korzystając z własności (14.5.6) i (14.6.4) sprzężenia oraz modułu liczby zespolonej dostajemy

$$(z - z_i)(z - \bar{z}_i) = z^2 - \bar{z}_i z - z_i z + z_i \cdot \bar{z}_i = z^2 - (z_i + \bar{z}_i)z + z_i \cdot \bar{z}_i = z^2 - 2\text{Re } z_i \cdot z + |z_i|^2.$$

Otrzymane wyrażenie $z^2 - 2\operatorname{Re} z_i \cdot z + |z_i|^2$ jest oczywiście rzeczywistym czynnikiem stopnia drugiego, czyli rzeczywistym trójmianem kwadratowym. Wyróżnik tego trójmianu wynosi

$$\Delta = (-2\operatorname{Re} z_i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot |z_i|^2 = 4((\operatorname{Re} z_i)^2 - |z_i|^2).$$

Ponieważ $|\operatorname{Re} z_i| < |z_i|$ (własność (14.6.10) modułu), to dostajemy $\Delta < 0$. Zatem rozważany trójmian nie jest rozkładalny w zbiorze liczb rzeczywistych. W ten sposób znaleźliśmy szukany rozkład wielomianu rzeczywistego na rzeczywiste czynniki nierozkładalne, przy okazji udawadniając twierdzenie.

Twierdzenie 15.3.7. Każdy niezerowy wielomian rzeczywisty można rozłożyć na rzeczywiste czynniki stopnia zerowego, pierwszego lub drugiego, przy czym te ostatnie to czynniki nierozkładalne w zbiorze liczb rzeczywistych (tzn. trójmiany kwadratowe o ujemnych wyróżnikach).

Przykład 15.3.8. Rozłóżmy na czynniki wielomian rzeczywisty $W(x) = x^4 + 1$. Oczywiście musimy rozwiązać równanie $x^4 + 1 = 0$, czyli inaczej $x^4 = -1$. Jak łatwo zauważyć, rozwiązania tego równania są pierwiastkami czwartego stopnia z liczby -1 . Wykorzystując przykład 14.9.2, mamy

$$\sqrt[4]{-1} = \left\{ \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}}_{z_1}, \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}}_{z_2}, \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}}_{z_3}, \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}}_{z_4} \right\}.$$

Dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ mamy $|z_i| = 1$. Ponadto $z_3 = \bar{z}_2$ oraz $z_4 = \bar{z}_1$. Wyznamy wartość wyrażenia $2\operatorname{Re} z_i$ dla $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} z_1 &= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \\ 2\operatorname{Re} z_2 &= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Zatem w rozkładzie W wystąpią dwa czynniki nierozkładalne: $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ oraz $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. Ostatecznie mamy

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Rozdział 16

Zespolone funkcje wymierne

Podstawy teorii funkcji wymiernych rzeczywistych pojawiły się w podrozdziale 10.3. W bieżącym rozdziale zajmiemy się zespolonymi funkcjami wymiernymi.

16.1. Podstawowe określenia

Definicja 16.1.1. *Zespolona funkcja wymierna* to iloraz dwóch wielomianów zespolonych, przy czym dzielnik nie jest wielomianem zerowym.

Zbiór wszystkich zespolonych funkcji wymiernych oznaczamy $\mathbb{C}(z)$. Dla każdej niezerowej funkcji wymiernej postaci $\frac{W}{V}$, gdzie $W \neq 0$ oraz $V \neq 0$, istnieje niezerowa funkcja wymierna $\frac{V}{W}$, taka że

$$\frac{W}{V} \cdot \frac{V}{W} = \frac{V}{W} \cdot \frac{W}{V} = 1.$$

Jak łatwo zauważyć zbiór $\mathbb{C}(z)$ spełnia wszystkie warunki (14.4.1) – (14.4.9), co dowodzi prawdziwości następującego twierdzenia:

Twierdzenie 16.1.2. Zbiór $\mathbb{C}(z)$ wszystkich zespolonych funkcji wymiernych, w którym określone są działania dodawania oraz mnożenia funkcji, jest ciałem.

Definicja 16.1.3. *Zespolona funkcja wymierna właściwa* to funkcja, w której stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Stosując algorytm dzielenia wielomianów, otrzymujemy twierdzenie:

Twierdzenie 16.1.4. Każdą zespoloną funkcję wymierną można przedstawić jako sumę pewnego wielomianu zespolonego i zespolonej funkcji wymiernej właściwej, tzn. dla dowolnych wielomianów W i V , gdzie $V \neq 0$, istnieją wielomiany I oraz R takie, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$

$$(16.1.1) \quad \frac{W(z)}{V(z)} = I(z) + \frac{R(z)}{V(z)}$$

oraz stopień wielomianu R jest mniejszy niż stopień wielomianu V .

16.2. Rozkład zespolonej funkcji wymiernej na ułamki proste

Rzeczywiste ułamki proste określiliśmy w definicji 10.3.4. Pamiętamy, że są dwa rodzaje takich ułamków. W związku z zasadniczym twierdzeniem algebry istnieje tylko jeden rodzaj ułamków prostych zespolonych.

Definicja 16.2.1. *Zespolony ułamek prosty* to zespolona funkcja wymierna postaci

$$\frac{A}{(z+a)^n},$$

gdzie $a, A \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 16.2.2. Przykładami zespolonych ułamków prostych są wyrażenia

$$\frac{i}{(z+2i)^{10}}, \quad \frac{5-4i}{(z-2+4i)^{15}}, \quad \frac{3}{(z-2)^2}.$$

Za [13] przytoczymy twierdzenie o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na zespolone ułamki proste. Tam też można znaleźć analogiczne twierdzenie dla funkcji rzeczywistych.

Twierdzenie 16.2.3. Każdą zespoloną funkcję wymierną właściwą można przedstawić jako sumę ułamków prostych, przy czym przedstawienie to jest jednoznaczne. Zespolona funkcja wymierna właściwa

$$\frac{W(z)}{V(z)} = \frac{W(z)}{a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m}},$$

gdzie dla $1 \leq j \leq m$, liczba z_j jest pierwiastkiem k_j -krotnym wielomianu V , jest sumą $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ zespolonych ułamków prostych, przy czym czynnikowi $(z-z_j)^{k_j}$ odpowiada suma k_j ułamków prostych postaci:

$$\frac{A_{j1}}{z-z_j} + \frac{A_{j2}}{(z-z_j)^2} + \cdots + \frac{A_{jk_j}}{(z-z_j)^{k_j}},$$

gdzie $A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jk_j} \in \mathbb{C}$ dla $1 \leq j \leq m$.

Przykład 16.2.4. Przedstawmy w postaci sumy ułamków prostych funkcję

$$f(z) = \frac{2z}{z^2+9},$$

gdzie $z^2+9 \neq 0$. Najpierw znajdziemy postać iloczynową mianownika. Mamy

$$z^2+9=0 \iff z^2=-9 \iff z_1=3i, \quad z_2=-3i.$$

Zatem $z^2+9=(z-3i)(z+3i)$, co w świetle powyższego twierdzenia oznacza, że z każdym czynnikiem mianownika funkcji f stowarzyszony jest jeden ułamek

prosty. Zatem funkcję f można przedstawić w postaci następującej sumy dwóch ułamków prostych:

$$\frac{2z}{z^2 + 9} = \frac{2z}{(z - 3i)(z + 3i)} = \frac{A}{z - 3i} + \frac{B}{z + 3i}, \quad \text{gdzie } A, B \in \mathbb{C}.$$

Przekształcając wyrażenie po prawej stronie powyższej równości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{A}{z - 3i} + \frac{B}{z + 3i} &= \frac{A(z + 3i) + B(z - 3i)}{(z - 3i)(z + 3i)} = \frac{Az + 3Ai + Bz - 3Bi}{(z - 3i)(z + 3i)} \\ &= \frac{(A + B)z + i(3A - 3B)}{(z - 3i)(z + 3i)} = \frac{2z}{(z - 3i)(z + 3i)}. \end{aligned}$$

Porównując liczniki, otrzymujemy układ dwóch równań

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 3A - 3B = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $A = 1$ oraz $B = 1$. Ostatecznie szukana postać funkcji f to

$$\frac{2z}{z^2 + 9} = \frac{1}{z - 3i} + \frac{1}{z + 3i}.$$

Bibliografia

- [1] J. Abtowa, K. Piasecki, T. Róžański, Z. Świtalski, *Matematyka wspomagająca zarządzanie*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2002.
- [2] S. Białas, A. Ćmiel, A. Fitzke, *Matematyka dla studiów inżynierskich, cz. I Algebra i geometria*, Wydawnictwo Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 2000.
- [3] A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2007.
- [4] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1–3*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [5] J. Gawinecki, *Matematyka dla ekonomistów*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlu i Prawa, Warszawa 2000.
- [6] I.M. Gelfand, *Wykłady z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1975.
- [7] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2007.
- [8] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2007.
- [9] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2006.
- [10] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2006.
- [11] B. Gleichgewicht, *Algebra*, PWN, Warszawa 1976 lub Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
- [12] Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz (red. K. Kukuła), *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [13] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2007.
- [14] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2007.
- [15] K. Kłaczek, M. Kurczab, E. Świda, *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa II. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2003.
- [16] A.I. Kostrikin, J.I. Manin, *Algebra liniowa i geometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- [17] J. Kraszewski, *Wstęp do matematyki*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2007.

-
- [18] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [19] W. Kryszicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Część 1 i 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [20] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [21] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1986.
- [22] A. Piwecka-Staryszak (red.), *Wykłady z matematyki dla studentów uczelni ekonomicznych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2004.
- [23] J. Płaskonka, K. Selwat, *Repetitorium z matematyki dla studentów pierwszego roku*, Seria wydawnicza PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2010.
- [24] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973.
- [25] M. Stark, *Geometria analityczna z wstępem do geometrii wielowymiarowej*, PWN, Warszawa 1972.
- [26] T. Trzaskalik, *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, PWE, Warszawa 2008.



ISBN 978-83-61389-33-0



9 788361 389330