

ISSN 1896-8333



zeszyty naukowe

Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy

Legnica 2011

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy

ZESZYTY NAUKOWE
nr 7



Legnica 2011

Rada Wydawnicza:

prof. dr hab. inż. Jerzy Pietkiewicz (przewodniczący), dr hab. Krystyna Choma-Moryl,
ks. dr hab. Bogusław Drożdż, dr hab. inż. Aleksander Zgrzywa, dr Jan Budka,
dr n. med. Jarosław Goldman, dr Romuald Łuczyński, dr Piotr Niemiec, dr Jan Wojtaś,
mgr Łukasz Gajewski, mgr Mirosław Szczypiorski, mgr Joanna Żółtańska

Recenzent:

prof. dr hab. Tadeusz Galanc, prof. dr hab. Bernard Jancewicz

Redaktor naukowy:

dr inż. Ryszard Rębowski

Komitet redakcyjny:

Waldemar Gajaszek, Łukasz Gajewski, Mirosław Szczypiorski

Korekta:

Krystyna Gajaszek, Waldemar Gajaszek

Wydawca:

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy
ul. Sejmowa 5 A, 59-220 Legnica
tel. 76 723 22 80 do 83
pwsz@pwsz.legnica.edu.pl
www.pwsz.legnica.edu.pl

Redakcja techniczna, skład i diapozytywy:

Waldemar Gajaszek, Halina Kawa
Stowarzyszenie na Rzecz Rozwoju
Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy
„Wspólnota Akademicka”
ul. Sejmowa 5 A, 59-220 Legnica
tel. 76 723 21 20, tel./fax 76 723 29 04
www.wa.legnica.edu.pl

© Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy

Wszystkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej publikacji nie może być powielana ani rozpowszechniana za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych bez uprzedniego wyrażenia zgody przez wydawcę.

ISSN 1896-8333

Spis treści

Słowo wstępne	5
Ryszard RĘBOWSKI	
Uwagi o dylatacji czasu w warunkach szczególnej teorii względności	7
Ryszard RĘBOWSKI	
3.14 – czyli imieniny liczby π	21
Ryszard RĘBOWSKI	
O liczbie π równej $3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\dots$ z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko. Część pierwsza	29
Ryszard RĘBOWSKI	
O liczbie π równej $3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\dots$ z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko. Część druga	53
Witold URBANIK	
Jak wygląda elektron, gdy nikt nie patrzy?	71
Tomasz STECHNIJ	
O paradoksie Josepha Bertranda	85
Tomasz STECHNIJ	
O paradoksie bliźniąt	95

Contents

Introduction	5
Ryszard REBOWSKI	
Remarks on the time dilation in the conditions of special theory of relativity	7
Ryszard REBOWSKI	
3.14 – or the name-day of the number π	21
Ryszard REBOWSKI	
On the number π equal to 3.141592653589793... from the perspective of probability theory and not only. Part one	29
Ryszard REBOWSKI	
On the number π equal to 3.141592653589793... from the perspective of probability theory and not only. Part two	53
Witold URBANIK	
How does the electron look like when no-one is looking?	71
Tomasz STECHNIJ	
The Joseph Bertrand's paradox	85
Tomasz STECHNIJ	
The gemini paradox	95

Słowo wstępne

Ilekoć spotykamy się z takimi pojęciami jak: *metamatematyka*, *matematyka wyższa*, *fizyka* i *chemia kwantowa* czy *teoria względności* przed większością z nas wyrasta mur uniemożliwiający zapoznanie się z tymi teoriami. Nikogo też taka reakcja nie dziwi, bowiem rzeczywistość bez profesjonalnego przygotowania, np. w formie studiów, zgłębienie tej wiedzy jest na ogół niemożliwe. Trudno się z takim stanowiskiem nie zgodzić, co wcale nie oznacza, że dla tej większości jest to owoc zakazany, co chcemy pokazać w naszych artykułach.

Wspomniane dyscypliny naukowe są przecież owocem intelektualnego wysiłku wielu pokoleń i zmian w postrzeganiu natury otaczającego nas świata. Doskonale można to prześledzić na przykładzie chociażby matematyki i fizyki. W matematyce co najmniej dwa pojęcia są fundamentalne: pojęcie *liczby* i *zbioru*, bowiem pojęcia te zawsze, bez względu na czas i okoliczności, istniały. W metamatematyce najważniejsza jest koncepcja utożsamiana z *logiką dwuwartościową* kojarzoną z Arystotelesem. W fizyce są to pojęcia *czasu*, *światła*, *masy* i *oddziaływania*, współcześnie opisywane zunifikowaną *teorią pola*.

Historia nauki dość dobrze tłumaczy przyczyny odniesionych sukcesów w odkrywaniu nowych praw. W matematyce przełomem było zerwanie z tzw. aspektem praktycznym matematyki i spojrzenie na matematykę jako na naukę o *strukturze aksjomatycznej* i *abstrakcyjnej*. Powstanie w XIX wieku sformalizowanej *teorii mnogości* G. Cantora umożliwiło nieskrępowany rozwój zarówno samej teorii, jak i kolejnych: *teorii relacji*, *teorii liczb*, *teorii funkcji rzeczywistych*, *geometrii* czy *topologii*. To z kolei doprowadziło do powstania *teorii prawdopodobieństwa* i ogólnie *teorii metod stochastycznych*, *teorii grup*, *analizy funkcjonalnej*, *teorii ergodycznej*, *topologii algebraicznej*, *teorii gier*, *teorii katastrof* i innych. Miało to istotny wpływ na powstanie i rozwój innych dyscyplin nauki decydujących o postępie cywilizacyjnym, np. ekonomii, fizyki, biologii molekularnej czy medycyny, a w ten sposób na nowe technologie.

W fizyce widoczne to jest jeszcze lepiej z powodu tzw. *zasady korespondencji*, którą najprościej jest wyjaśnić na przykładzie relacji pomiędzy dwiema podstawowymi teoriami fizycznymi – *klasyczną mechaniką newtonowską* i *mechaniką kwantową*. W pewnym przybliżeniu można stwierdzić, że dla obiektów wymiaru *średniego* pierwsza jest efektem zastosowania tej drugiej. Zwrot we współczesnej fizyce to okres *fin de siècle*, czyli przełomu XIX i XX wieku. Z punktu widzenia *świata starego* świat ten stał się nieciekawym, bowiem według ówczesnych poglądów i osiągnięć naukowych okazał się być całkowicie zdeterminowany. Było to zasługą pięknej *teorii Jacobiego-Hamiltona-Lagrange'a* (JHL). Obowiązująca teoria

łącząca w sobie *teorię równań różniczkowych, zasady rachunku wariacyjnego* i mechaniki newtonowskiej realizowała w znakomitym stopniu oczekiwania jej beneficjentów. Z teoretycznego punktu widzenia opisywała wszystkie znane do tego czasu zjawiska. Robiła to w ujęciu dynamicznym w postaci trajektorii w *6-wymiarowej przestrzeni fazowej*. Co więcej, opis ten umożliwiał antycypację opisu obserwowanego stanu, w tym sensie powodował jego zdeterminowanie. Wszystko było więc jasne i czytelne, bo przewidywalne. Wtedy wydawało się, że był to kres możliwości intelektualnych i poznawczych człowieka.

Tylko przełom mógł zmienić ten *mechanistyczny pogląd*. Stało się to już wkrótce, bo na początku XX wieku i co najmniej z trzech powodów. Pierwsze dwa związane były z rewizją postrzegania *świata i czasu*, trzeci miał związek z atrybutem wielkości świata, którym posłużyliśmy się przy akcentowaniu roli zasady korespondencji. Jak się okazało, to, co nowe i decydujące dla rozwoju myśli ludzkiej, kryje się nie w świecie o rozmiarze pośrednim, a w *mikro i makro* świecie, co dostatecznie wykazała mechanika kwantowa i astrofizyka. W tym sensie, bo w świecie o rozmiarze średnim, rację mieli autorzy teorii HJL, którzy stali na stanowisku, że osiągnęli wszystko, co można było. Nowe otwarcie nauki zdyskredytowało to stanowisko i zastąpiło nowym światopoglądem.

Zaprezentowany poniżej cykl artykułów odnoszących się swoimi treściami do przedstawionych wyżej wydarzeń pokazuje, że nawet w sytuacji braku niezbędnej wiedzy można partycypować intelektualnie w zdobyczach współczesnej nauki. Pozwala na to ważna, ale i często niedoceniana w Polsce działalność popularyzatorska osiągnięć nauki. W literaturze światowej robione to jest z powodzeniem na dużą skalę przez wydawnictwa uniwersyteckie i inne. Na krajowym rynku wydawniczym wygląda to już gorzej. Z doświadczenia zawodowego wiemy, że również zainteresowanie ze strony studentów taką formą aktywności intelektualnej jest niewielkie. Chcielibyśmy to zmienić, wpływając na podaż, ale i popyt takiej formy przekazywania wiedzy, zaczynając od najbliższego nam środowiska – naszych studentów i absolwentów PWSZ im. Witelona w Legnicy oraz słuchaczy Uniwersytetu Trzeciego Wieku. Głęboko wierzymy, że ciekawość świata, chęć zrozumienia jego natury i zasad funkcjonowania, które zawsze towarzyszyły człowiekowi, nigdy nie przestaną być ważne i zawsze będą siłą napędową postępu.

Ryszard Rębowski
Witold Urbanik
Tomasz Stechnij

Ryszard Rębowski

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

Uwagi o dylatacji czasu w warunkach szczególnej teorii względności

STRESZCZENIE

Kluczem do zrozumienia szczególnej teorii względności Einsteina jest pojęcie czasu i problem możliwości jego synchronizacji. Wychodząc z dwóch postulatów STW, metodami elementarnymi przedstawiono sposób pomiaru czasu w warunkach STW, zarówno dla przypadku pojedynczego, jak i dwóch układów inercjalnych. Na tej podstawie wyprowadzono pojęcia czasu własnego i czasu obserwowanego zjawiska. Zsynchronizowanie zegarów rejestrujących czas własny i czas obserwowany umożliwia porównanie tych czasów, czego efektem jest zjawisko dylatacji czasu. Zwrócono uwagę na związki dylatacji czasu ze STW i jego interpretację w postaci dobrze znanego paradoksu bliźniąt.

Słowa kluczowe: dylatacja czasu, szczególna teoria względności, przekształcenie Lorentza, paradoks bliźniąt.

1. Wstęp

Termin *dylatacja czasu* na ogół kojarzy się ze szczególną teorią względności (STW) Einsteina, a jeszcze częściej z interpretacją zjawiska *dylatacji* nazywanego *paradoksem bliźniąt*. Mówiąc wprost – chodzi o czas i o jego znaczenie. Gdybyśmy fizykę umownie podzielili na tę „przed” i „po” Einsteinie, to „przed” z czasem nie było żadnego problemu – miał on znaczenie absolutne, czyli był wspólny dla wszystkich układów fizycznych. Seria odkryć fizyki dziewiętnastowiecznej, między innymi: teoria pola Maxwella, wyniki eksperymentów Michelsona-Morleya, transformacje Lorentza jako uogólnienie dobrze znanych transformacji Galileusza czy zasada względności Henri Poincaré’go, zmusiła rodzącą się „nową” fizykę do zweryfikowania dotychczasowej roli czasu. Jak wiemy, zaszczyt ten przypadł młodemu urzędnikowi biura patentowego z Berna w Szwajcarii. Nastąpiła era fizyki „po” Einsteinie, w której rola czasu przestała być szczególna.

Naszym zamiarem nie jest przedstawienie STW – w tym przypadku odsyłamy Czytelnika do bogatej literatury (np. [Einstein 1916, Einstein 1997, Infeld 1962, Schwartz i MaGuinness

1989]). Tym bardziej nie mamy intencji posługiwania się sformalizowanym językiem tej teorii. Interesuje nas natomiast aspekt fizyczny tej teorii związany ze zrozumieniem znaczenia czasu w jej ramach.

2. Pojęcie czasu

Czas będziemy rozumieli jako wynik pomiaru. Zaczniemy od opisanie wzorcowego przyrządu pomiarowego. Weźmy odcinek długości l metrów. Przez zegar o podstawie l będziemy rozumieli układ dwóch równoległych lusterek oddalonych od siebie o l . Nazwiemy je odpowiednio lustrem dolnym i górnym. Lustro dolne zaopatrzone będzie w źródło światła. Przez jednostkę czasu Δ_{it} takiego zegara będziemy rozumieli zjawisko polegające na tym, że światło wychodzące ze źródła pokona drogę do drugiego lustra i po odbiciu powróci do lustra dolnego (patrz rys. 1).

Ponieważ droga, jaką pokona światło, wynosi $2l$, to przy założeniu, że w rozważanym ośrodku porusza się z prędkością c (w m/s), możemy zapisać

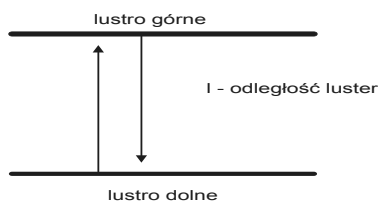
$$\Delta_{it} = \frac{2l}{c}. \quad (1)$$

Wtedy każdą wielkość t postaci $t = r\Delta_{it}$, gdzie r oznacza liczbę rzeczywistą nieujemną, będziemy nazywali *czasem własnym*.

Dla dalszych rozważań przyjmujemy dwa następujące postulaty STW:

1. Prawa fizyki są jednakowe we wszystkich układach inercjalnych.
2. Prędkość światła w próżni jest taka sama dla wszystkich układów inercjalnych we wszystkich kierunkach.

O zjawisku fizycznym powiemy, że jest ono mierzalne, jeśli dla każdego układu inercjalnego pozwala się ono opisać co najmniej w kategoriach *zaczęło się*–*skończyło się*. Atrybuty te pozwalają wtedy na określenie przedziału czasowego, którego pomiar zegarem pozwala na wyznaczenie czasu, który możemy nazwać *czasem życia* tego zjawiska. Pomiaru czasu zjawiska może dokonać tylko obserwator. Jeśli obserwator wraz z zegarem będzie przebywał w układzie inercjalnym mierzonego zjawiska, to tak wyznaczony czas zjawiska nazwiemy jego *czasem własnym*. Dalej zjawiska mierzalne będziemy nazywali krótko *zjawiskami*.



Rys. 1. Model zegara o podstawie l

3. Zjawisko i jego pomiar

Przyjmujemy, że wszystkie zjawiska, o których będzie mowa, będą zachodziły w przestrzeni rozumianej jako zbiór punktów opisanych czwórkami liczb (x, y, z, t) , gdzie trzy pierwsze opisują położenie, czwarta służy do rejestracji czasu własnego. Z tego powodu przestrzeń tę nazywa się *czasoprzestrzenią*. Upraszając sytuację, będziemy mówili, że w punkcie (x, y, z) znajduje się zegar, którego wskazanie wynosi t . Założymy, że każdy taki zegar ma tę samą podstawę l . W takim razie dla czasu własnego nazwanego wcześniej „tyknięciem” takiego zegara mamy $\Delta_l t = \frac{2l}{c}$. Tyknięcie to wyznacza przedział czasowy I_{AB} określony przez dwa zjawiska: A – impuls światła jest generowany przez źródło umiejscowione na dolnym lustrze, B – impuls światła wskutek odbicia od górnego lustra powrócił.

Wtedy

$$|I_{AB}| \Delta_l t,$$

gdzie $|I_{AB}|$ oznacza długość przedziału I_{AB} , wyznacza czas własny zjawiska równy $\frac{2l}{c}$. Dlatego w naszym przypadku $|I_{AB}| = 1$. Z tego powodu o $\Delta_l t$ możemy myśleć jako o jednostce miary czasu. Ogólnie $|I_{AB}|$ jest liczbą rzeczywistą nieujemną, która wcześniej oznaczana była przez r . Zatem znajomość długości przedziału czasowego pozwala wyznaczyć czas własny zjawiska, co jest doskonale znane.

Dalej będziemy zakładali, że wraz z zegarem o lokalizacji w punkcie (x_0, y_0, z_0, t) związany jest co najmniej jeden *układ inercjalny* U . Z matematycznego punktu widzenia jest to pewien podzbiór punktów przestrzeni $(x, y, z, t) \in U$, które charakteryzują się tym, że wektory prędkości punktów materialnych umieszczonych w (x, y, z) są jednakowe. Niech (x_1, y_1, z_1) opisuje lokalizację drugiego, innego punktu. Oczywiście z punktem tym związany jest jego zegar. Nie ma żadnego powodu, aby doszukiwać się jakiegokolwiek związku pomiędzy zachowaniem się obu tych zegarów. Jeśli jednak przyjmujemy, że oba rozważane punkty (czyli zegary) są elementami tego samego układu inercjalnego, to można dokonać procesu *synchronizacji* obu zegarów. W tym celu w środku odcinka o końcach (x_0, y_0, z_0) i (x_1, y_1, z_1) należy umieścić źródło światła, które wysyła impulsy świetlne jednocześnie w obu kierunkach wyznaczonych przez te punkty. Jeśli przed emisją oba zegary były w spoczynku i zostaną uruchomione wskutek odbioru impulsu, to powiemy, że zegary zostały *zsynchronizowane*. Mniej formalnie będziemy też mówili, że zegary pracują w tym samym rytmie, bowiem znajdując się w tym samym układzie, nie mogą się względem siebie przemieszczać oraz zgodnie z drugą zasadą STW w każdym kierunku impuls światła porusza się z tą samą prędkością. Dalej przyjmujemy, że każde dwa zegary znajdujące się w układzie inercjalnym są zsynchronizowane.

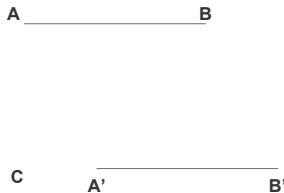
3.1. Przypadek pojedynczego układu

Weźmy dwa różne punkty przestrzeni (pamiętamy o synchronizacji zegarów) tego samego układu inercyjnego i założmy, że obserwator znajduje się w (x_1, y_1, z_1) . W punkcie (x_0, y_0, z_0) umieścimy nasze zjawisko, które jest „tyknięciem” zegara. Niech przedział czasowy tego zjawiska nazywa się I_{AB} . Obserwacja tego zjawiska przez naszego obserwatora sprowadza się do wyznaczenia przedziału czasowego $I_{A'B'}$, gdzie jego początek A' jest efektem zaobserwowania zjawiska A , odpowiednio koniec B' zjawiska B . Wyjaśnienia wymaga zwrot *obserwacja*. Przede wszystkim do tego celu potrzebne jest medium. Wykorzystamy do tego celu ponownie impuls światła. W momencie pojawienia się A , impuls światła po przebyciu drogi łączącej punkty (x_0, y_0, z_0) i (x_1, y_1, z_1) wygeneruje A' . Podobnie B wygeneruje B' . Ponieważ oba punkty znajdują się w tym samym układzie inercyjnym, więc zgodnie z drugim postulatem STW

$$|I_{AB}| = |I_{A'B'}|,$$

co oznacza, że czas własny zjawiska jest identyczny z czasem jego obserwacji.

Omówioną wyżej sytuację przedstawiono na rys. 2, gdzie oś czasu zorientowana jest na prawo. Rysunek ten ilustruje „efekt przesunięcia” przedziału zjawiska powstały w wyniku jego obserwacji. Przedział $I_{CA'}$ z rys. 2 reprezentuje to przesunięcie. Z punktu widzenia drugiej zasady STW efekt ten jest niezależny od umiejscowienia położenia obserwatora zjawiska.



Rys. 2. Efekt „przesunięcia” przedziału w układzie inercyjnym

3.2. Przypadek dwóch układów

Podstawowy problem związany z pomiarem zjawiska polega na tym, że obserwator takiego zjawiska nie musi być elementem układu inercyjnego związanego z tym zjawiskiem. Założmy, że zjawiskiem tym będzie również „tyknięcie” zegara o podstawie l . Wtedy, jak to stwierdziliśmy wcześniej, przedział czasowy I_{AB} (patrz rys. 3) związany z tym zjawiskiem wyznacza, jeśli obserwator znajduje się w układzie zegara, czas własny równy jednostce czasu $\Delta_l t$.

Założmy teraz, że obserwator nie znajduje się w układzie zdarzenia. Dokładniej, przyjmijmy, że układ inercjalny zjawiska porusza się (względem układu obserwatora) ruchem

jednostajnym prostoliniowym równoległe do płaszczyzny luster z prędkością $0 < \mathbf{v} < \mathbf{c}$. Wtedy to, co zobaczy obserwator (zasada obserwacji przedstawiona została w podrozdziale 3.1), przedstawia rys. 3. Dokładniej, punkty A, B, C reprezentują, przy uwzględnieniu efektu ruchu układu zegara względem obserwatora, wynik obserwacji zachowania się zegara: impuls przed wysłaniem, impuls w momencie odbicia od górnego lustra, impuls po powrocie. Ze względu na drugą zasadę STW mamy symetrię, którą na rys. 3 przedstawia odcinek DC (trójkąty $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$ są przystające).

Zgodnie z drugim postulatem, na odcinku AC prędkość światła dalej będzie równa \mathbf{c} . Długość odcinka AB ze względu na ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością \mathbf{v} jest równa $\mathbf{v}t$, gdzie t oznacza czas zdarzenia zarejestrowany przez obserwatora. Dalej t nazwiemy *czasem obserwacji zjawiska*. Długość odcinka DC jest przyjętym parametrem zegara i wynosi l . Ze względu na symetrię długość odcinka AD jest połową długości odcinka AB . Pisząc twierdzenie Pitagorasa, dla trójkąta ACD dostaniemy

$$\left(\frac{\mathbf{v}t}{2}\right)^2 + l^2 = \left(\frac{\mathbf{c}t}{2}\right)^2,$$

gdzie, jak pamiętamy, $\frac{2l}{\mathbf{c}} = \triangle t$ jest czasem własnym obserwowanego zjawiska. Ponieważ wtedy $l = \frac{\mathbf{c}\triangle t}{2}$, więc ostatnia równość będzie miała postać

$$\frac{\mathbf{v}^2 t^2}{4} + \frac{\mathbf{c}^2 (\triangle t)^2}{4} = \frac{\mathbf{c}^2 t^2}{4},$$

co daje

$$t^2 (\mathbf{c}^2 - \mathbf{v}^2) = \mathbf{c}^2 (\triangle t)^2.$$

Po podzieleniu stronami przez \mathbf{c}^2 i spierwiastkowaniu ($\mathbf{v} < \mathbf{c}$) otrzymamy

$$\triangle t = t \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}. \quad (2)$$

Wzór (2) tłumaczy związek, a jednocześnie różnicę pomiędzy dwoma pomiarami tego samego zjawiska jako efektu umieszczenia obserwatora w układzie poza poruszającym się układem inercjalnym obserwowanego zegara. Efektem tego pomiaru jest czas zaobserwowanego zjawiska t w odróżnieniu od czasu własnego $\triangle t$. Okoliczności towarzyszące obserwacji zjawiska zmuszają do posługiwania się dwiema skalami pomiaru takiego czasu. Rola wzoru (2) polega wtedy na „przetłumaczeniu” jednej skali na drugą, o czym napiszemy więcej dalej.

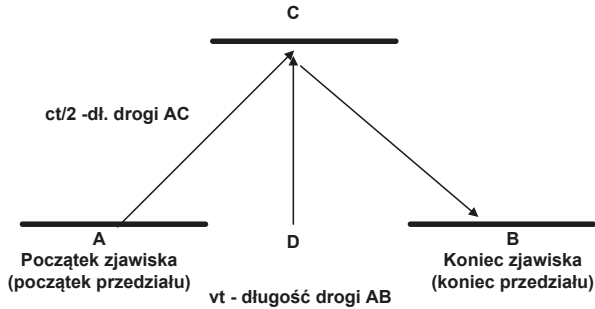
Uwaga. W literaturze przedmiotu wzór (2) zazwyczaj zapisuje się w postaci

$$t = \frac{\triangle t}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}}. \quad (3)$$

Wtedy czynnik

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

nazywany jest *współczynnikiem dylatacji*.



Rys. 3. Efekt obserwacji „tyknięcia zegara”

Efekt dylatacji można zilustrować graficznie, modyfikując sytuację przedstawioną na rys. 2, co pokazano na rys. 4, który ilustruje (poza efektem „przesunięcia”) efekt „rozciągnięcia” przedziału czasowego I_{AB} wskutek obserwacji zjawiska „tyknięcia zegara” do przedziału $I_{A'B'}$. Na uwagę zasługuje fakt, że wartość dylatacji nie zależy od położenia zegara względem obserwatora. Zależy natomiast tylko od wartości prędkości poruszającego się układu zegara.

A _____ B

A' _____ B'

Rys. 4. Efekt dylatacji przedziału czasowego

4. Interpretacja zjawiska dylatacji

Korzystając z postulatów STW pokazaliśmy, w jaki sposób można przeskalować czas własny (zaobserwowany) na czas zaobserwowany (własny) zjawiska.

W szczególności z równości (2) wynika, że

$$\Delta t < t, \quad (5)$$

co oznacza, że **czas obserwacji** „tyknięcia” zegara poruszającego się ruchem jednostajnym prostoliniowym **jest dłuższy aniżeli czas własny** tego zjawiska.

Zauważmy, że wartość czasu zaobserwowanego „tyknięcia” nigdy nie może być równa czasowi własnemu „tyknięcia” dla każdej podstawy l zegara, chyba że $\mathbf{v} = 0$. Istotnie, gdyby $t = \frac{2l}{c}$ dla pewnej wartości l , to wtedy (patrz rys. 3) mielibyśmy

$$\left(\frac{ct}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{v}t}{2}\right)^2 + \left(\frac{ct}{2}\right)^2,$$

co oznacza, że $\mathbf{v} = 0$. Oznacza to, że różnica pomiędzy czasami t i $\Delta_t t$ **nie jest spowodowana** zmianą zachowania się zegara poruszającego się polegającą na tym, że **spowalnia on**, czyli czas własny jego „tyknięcia” wydłuża się. Jest natomiast tylko konsekwencją przyjętej metodologii pomiaru zjawiska opartego na postulatach STW. Dokładniej, różnica ta **jest i tylko jest efektem pojawienia się obserwatora zjawiska**. Bez względu na to, czy ten obserwator jest, czy go nie ma, czas własny „tykania” zegara poruszającego się jest niezmienny – wynosi $\Delta_t t = \frac{2l}{c}$. W rozdziale poświęconym tzw. *paradoksowi bliźniąt* wrócimy do tej kwestii.

Uwaga. Efekt przeskalowania opisany zasadą dylatacji czasu już wcześniej był dobrze znany. W matematyce pojawia się np. w twierdzeniu o zamianie zmiennych w całce Riemanna. Przypomnimy szybko to twierdzenie. Przypuśćmy, że dany jest odcinek $[a, b]$, którego elementy będziemy oznaczali symbolem x , oraz drugi odcinek $[\alpha, \beta]$ z elementami s . Niech $[\alpha, \beta] \ni s \rightarrow \psi(s) = x \in [a, b]$ oznacza funkcję, która przekształca odcinek $[\alpha, \beta]$ na odcinek $[a, b]$ (funkcja ψ wcale nie musi być funkcją liniową!). Jeśli dodatkowo funkcja ψ przeprowadza końce odcinka na końce, czyli: $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$ oraz jest dostatecznie regularna, tzn. jej pochodna jest ciągła na $[\alpha, \beta]$, to dla $x = \psi(s)$, $s \in [\alpha, \beta]$

$$dx = \psi'(s)ds \text{ oraz } \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(\psi(s))\psi'(s)ds$$

dla każdej funkcji ciągłej f . Oczywiście nas interesuje przypadek, kiedy funkcja ta stałe przyjmuje wartość jeden. Zauważmy, że wynik całkowania po przedziale $[a, b]$ (lewa strona powyższego wzoru), jak i wynik całkowania po przedziale $[\alpha, \beta]$ (prawa strona) dają długości przedziału $[a, b]$, gdzie $f = 1$. Z drugiej strony „zaobserwowana jego długość”, czyli długość przedziału $[\alpha, \beta]$ wcale nie musi być równa $b - a$.

Jeśli teraz wrócimy do zagadnienia dylatacji, to zauważmy, że czas własny ($\Delta_t t$) to zmienna x , czas zaobserwowany (t), który jest miarą długości przedziału i dlatego możemy go oznaczyć przez t (nie należy mylić z $\Delta_t t!$) – to s . Wtedy wzór (2) możemy zapisać następująco

$$\Delta_t t = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \cdot \Delta t,$$

gdzie $\psi(t) = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \cdot t$ (bo \mathbf{v} jest stałe!). Jeśli przypomnimy sobie teraz, że przyrost

zmiennej niezależnej (argumentu funkcji) jest jej różniczką, to zasada dylatacji mówi, że w wyniku obserwacji zdarzenia znajdującego się w układzie inercyjnym poruszającym się ruchem jednostajnym prostoliniowym (a więc ze stałą prędkością), pojawiające się przedziały czasowe I oraz I' w procesie mierzalności tego zdarzenia są takie, że

$$\int_{I'} \Delta t = \int_I \psi'(t) dt = \int_I \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Jeśli natomiast v jest bardzo małe w stosunku do c , czyli $\frac{v}{c} \simeq 0$, to z (2) wynika, że $t \simeq \Delta t$. Jest zatem tak jak w fizyce przed Einsteinem.

Z drugiej strony, im większa jest prędkość układu z zegarem, tym czas obserwacji „tykania” zegara jest większy, bowiem wtedy wartość współczynnika dylatacji γ rośnie oraz $t = \gamma \Delta t$. W sytuacji granicznej, kiedy v zbliża się do wartości c , obserwujemy efekt *pozornego zatrzymania się* zegara, bowiem czas obserwacji jest dowolnie duży (mówimy wtedy, że jest nieskończony).

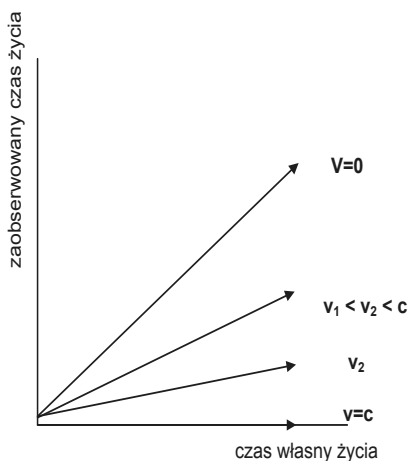
Wykorzystując zależność (2) dla czasu jednostkowego, łatwo jest przetłumaczyć efekt zmiany skali pomiaru jednostki czasu dla czasu życia zjawiska. W tym celu wystarczy (2) pomnożyć stronami przez dodatnią liczbę rzeczywistą r . Dostaniemy wtedy

$$r \Delta t = \frac{t_r}{\gamma}, \quad (6)$$

gdzie $t_r = rt$ oznacza *zaobserwowany czas życia zjawiska*.

W takim razie **zaobserwowany czas życia** zjawiska jest zawsze **dłuższy** aniżeli **czas własny życia zjawiska**, o ile układ inercyjny, w którym zjawisko to obserwowano porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Ostatnie wyniki można zilustrować wykresem, co przedstawia rys. 5.



Rys. 5. Efekt zmiany skali dla zjawiska dylatacji

Różnicę względną

$$d = \frac{t - \Delta_l t}{\Delta_l t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \quad (7)$$

będziemy nazywali miarą względną dylatacji. W poniższej tabeli przedstawiliśmy symulację zmiany wartości współczynnika dylatacji i jego miary.

Tablica 1 Symulacja wartości współczynnika dylatacji i jego miary

ułamek wartości c	wartość γ	wartość w % d
0	1	0
0,1	1,00005	0,005
0,5	1,15	15
0,9	2,29	129
0,9998	158,11	15711
1,00	∞	∞

5. Dylatacja a STW

Przedstawione rozważania, w szczególności wzór (2), są bezpośrednią konsekwencją postulatów STW, a nie samej teorii. Składową STW jest transformacja, której rola sprowadza się do odpowiedzi na następujące pytanie: *w jaki sposób zaobserwowaną rzeczywistość przekształcić na istniejącą rzeczywistość?*

Z formalnego punktu widzenia (czyli matematycznego) każdy układ inercjalny U rozumie się jako kartezjański układ współrzędnych (x, y, z, t) , gdzie pierwsze trzy liczby opisują położenie, czwarty czas. Dalej będziemy pisali $U_{(x,y,z,t)}$. Zagadnienie, które dyskutowaliśmy, wymaga dwóch takich układów: $U_{(x,y,z,t)}$ i $U'_{(x',y',z',t')}$. Zgodnie z pierwszym postulatem STW możemy założyć, że tak zdefiniowane układy (tak naprawdę zostały one opisane) są względem siebie równoległe (odpowiednie osie tych układów są równoległe i mają jednakowe zwroty). Dokonamy też pewnego uproszczenia polegającego na tym, że mówiąc, iż układ $U'_{(x',y',z',t')}$ porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v względem układu $U_{(x,y,z,t)}$, porusza się wzdłuż prostej równoległej do osi x . Aby uniknąć nieporozumień, przyjmujemy, że położenie w każdym z układów będziemy oznaczali dużymi literami. W takim razie czwórka liczb (X, Y, Z, T) będzie opisywała położenie w układzie $U'_{(x',y',z',t')}$ natomiast (X', Y', Z', T') odpowiednio w układzie $U_{(x,y,z,t)}$.

Jak dobrze wiadomo, z punktu widzenia STW w miejsce klasycznego *przekształcenia Galileusza* obowiązuje wtedy jej postać uogólniona – *przekształcenie Lorentza*, które przy poczynionych założeniach wygląda następująco:

$$(X, Y, Z, T) \rightarrow (X', Y', Z', T'),$$

gdzie przy obowiązujących uproszczeniach

$$Y' = Y, \quad Z' = Z,$$

natomiast

$$X' = \gamma(X - \mathbf{v}T), \quad T' = \gamma\left(T - \frac{\mathbf{v}X}{c^2}\right),$$

gdzie stała γ – współczynnik dylatacji (patrz też wzór (4)) przyjmuje wartość

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}},$$

Wtedy po chwili T (zaobserwowanej w układzie \mathbf{U}) takiej, że $X = \mathbf{v}T$, z powyższej zależności dostaniemy

$$T' = \frac{T - \frac{\mathbf{v}^2 T}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = T \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}.$$

Jasne jest, że wzór ten opisuje zjawisko dylatacji czasu jak w (2).

6. Dylatacja czasu a paradoks bliźniąt

Zgodnie z STW obserwator również posiada swój zegar. Zauważmy, że dla potrzeb rozważań przeprowadzonych w rozdziale 3 i 4 z tego faktu nie korzystaliśmy. Zrobimy to teraz. A zatem mamy dwa układy inercjalne \mathbf{U} i \mathbf{U}' , gdzie obserwator znajduje się w układzie \mathbf{U} . Niech układ \mathbf{U}' porusza się względem układu \mathbf{U} ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością \mathbf{v} . Oznaczmy przez t' czas własny życia zjawiska w układzie \mathbf{U}' , przez t zaobserwowany przez obserwatora czas życia tego zjawiska. Wtedy pomiędzy wartościami t oraz t' wystąpi efekt dylatacji (patrz (6) oraz rozdział 4), czyli

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (8)$$

Jeśli założymy, że na początku rozważanego przedziału czasu **zegary zostały zsynchronizowane** (można to było zrobić, bowiem znajdowały się w tym samym układzie inercjalnym), to t' – wartość zaobserwowana przez obserwatora czasu własnego zdarzenia w układzie \mathbf{U}' będzie **pokrywała się** ze wskazaniem zegara obserwatora w układzie \mathbf{U} . Pamiętajmy (patrz rozdział 3 i 4), że efekt omawianej tutaj dylatacji jest konsekwencją tylko:

- obu postulatów STW,

przy założeniu

- jednostajnego prostoliniowego ruchu jednego układu inercyjnego względem drugiego.

W takim razie zjawisko, które jest przedmiotem naszej dyskusji – ma **charakter symetryczny**. Po przeniesieniu obserwatora do układu U' , obserwator ten stwierdzi, że to układ U porusza się (względem układu U'). Ze wzoru (8) wynika, że dla czasów t, t' mamy relację $t' < t$. Ponieważ czas obserwacji jest jednocześnie czasem własnym obserwatora, nierówność tę możemy zinterpretować następująco:

**czas życia zjawiska obserwowanego jest nie dłuższy
aniżeli czas jego obserwacji.**

Ale ruch obu układów jest względny, więc wprowadzając **drugiego obserwatora** i zakładając, że w czasie kiedy on jest obserwowany, czyni to samo w stosunku do drugiego, z punktu widzenia obu obserwatorów powstaną sprzeczne informacje. Jak dobrze wiadomo, w literaturze taką sytuację nazywamy *paradoksem bliźniąt*. Ale czy na pewno?

Zjawisko dylatacji czasu ma naturę relacji *dwuargumentowej* symetrycznej. Zdefiniujemy tę relację. Oznaczmy przez \mathcal{U} rodzinę wszystkich układów inercjalnych. Weźmy dwa elementy tej rodziny, czyli dwa układy inercjalne $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Powiemy, że układ U_1 jest w relacji \mathcal{R} z układem U_2 , jeśli ma miejsce jednostajny i prostoliniowy z prędkością $|\mathbf{v}|$ (jako wartość skalarna) ruch względny układu U_2 względem U_1 (wtedy będziemy mówili, że obserwator znajduje się w układzie U_1). Dalej będziemy pisali $U_1 \mathcal{R} U_2$. Zauważmy, że z zasady symetrii ruchu względnego wynika, iż

$$U_1 \mathcal{R} U_2 \Rightarrow U_2 \mathcal{R} U_1,$$

co oznacza, że relacja \mathcal{R} jest **symetryczna**.

Jak wiemy, $U_1 \mathcal{R} U_2$ oznacza, że dla czasów życia zdarzenia t_2 i czasu życia obserwacji tego zdarzenia t_1 zachodzi zasada dylatacji. Własność symetryczności relacji nie jest żadną własnością sprzeczną, wręcz przeciwnie, w wielu sytuacjach jest ona pożądana. Tłumaczy na przykład, dlaczego nie można zsynchronizować ze sobą **dwóch zegarów** znajdujących się w różnych układach inercjalnych U_1, U_2 . Efekt postrzegania przez obserwatora opóźnienia czasu własnego zjawiska jest tym powodem. Oznacza to, że jeśli dwa zegary znajdują się w tym samym układzie inercjalnym ($U_1 = U_2$) i zostały zsynchronizowane, to pozostają zsynchronizowane dopóty, dopóki względem siebie będą spoczywały ($\mathbf{v} = 0$). Ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością $0 < |\mathbf{v}| < c$ jednego z nich, powiedzmy U_2 , powoduje, że ich opis z punktu widzenia STW musi uwzględnić fakt, że zegary te **reprezentują różne** układy inercjalne. Konsekwencją takiego stanu jest zjawisko dylatacji czasu życia zjawiska w układzie poruszającym się, czyli różnica względna (7). W zaistniałej sytuacji, jeśli chcemy określić czas t rejestrowany w układzie U_1 zajścia zjawiska w układzie poruszającym się U_2 (z punktu widzenia układu obserwatora), to możemy to zrobić tylko w **jeden** sposób – poprzez zastosowanie przekształcenia (3). W takim razie musimy przyjąć, że dla danej wartości t (zarejestrowanej w układzie U_2), wartość $\frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ jest wartością wskazania zegara obserwa-

tora, czyli t . Możemy powiedzieć, że dokonaliśmy w ten sposób połowicznej synchronizacji obu zegarów. Ponieważ w omawianej sytuacji mamy do czynienia z symetrią, dokończenie synchronizacji nie może udać się. Skoro przed pojawieniem się ruchu względnego tych układów zegary były zsynchronizowane, oznacza to, że w wyniku ruchu **utraciły** tę własność. Co więcej, utraciły ją w sposób **nieodwracalny**. Jeśli kiedyś ponownie $U_1 = U_2$, to będą wymagały **ponownej synchronizacji**, czyli czasy dla obu zegarów będą musiały być liczone **od początku**.

Dlaczego zatem *paradoks bliźniąt* budzi takie emocje? Odpowiedź z punktu widzenia powyższych uwag jest tylko jedna – problem został źle sformułowany. W paradoksie, o czym pisaliśmy wyżej, pojawia się drugi obserwator. **Problem nie istnieje, dopóki każdy z nich osobno** interpretuje relatywistyczny efekt pomiaru czasu obserwacji zdarzenia, czyli dylatację. Wtedy działa jeszcze efekt *połowicznej synchronizacji*. Jeśli próbują to robić obaj jednocześnie, a o to właśnie w tym paradoksie chodzi, to ich informacje dotyczące dylatacji czasu **muszą zostać wzajemnie wymienione**, a na ten temat nic nie wspomina się, bowiem z powodu braku synchronizacji zegarów jest to niemożliwe. Wyjściem z sytuacji może być **trzeci obserwator**, który wystąpiłby w roli „arbitra” stwierdzającego owe rozbieżności w rejestracji czasów. Tego jednak efekt dylatacji czasu nie uwzględnia, bowiem nie można zsynchronizować ze sobą trzech zegarów znajdujących się w dwóch różnych układach inercjalnych. W takim razie *paradoks bliźniąt*, jako zagadnienie spoza STW, nie może być rozstrzygany na gruncie tej teorii.

7. Zakończenie

O wiele ciekawszym przypadkiem jest wersja *paradoksu bliźniąt*, która łamiąc symetrię pomiędzy układami (w takim razie jeden z nich nie może być układem inercjalnym), zakłada, że bliźniaczy zegar wprawiony w ruch powróci. Jak dobrze wiadomo, obiegująca opinia na temat takiej sytuacji mówi, że wskazania na obu zegarach będą różne – zegar po powrocie będzie wskazywał opóźnienie w stosunku do tego, który spoczywał. Dokładniej, opóźnienie to będzie wielkością dylatacji czasu (patrz tabela symulacji dylatacji czasu). Czy tak jest, nikt na razie tego jednoznacznie nie jest w stanie stwierdzić, aczkolwiek od wielu lat uporczywie przeprowadzane są eksperymenty próbujące to potwierdzić. W tym przypadku ewidentnie nie mamy do czynienia z efektem relatywistycznym STW, która opisuje zjawiska zachodzące tylko w układach inercjalnych. Trzeba zatem sięgnąć do jej uogólnienia – ogólnej teorii względności. To z kolei wykracza poza skromne ramy tego artykułu.

Bibliografia

- Einstein A., *Relativity: The Special and General theory*, Mathuen & Co Ltd, 1916.
Einstein A., *Istota teorii względności*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.
Infeld L., *Ewolucja fizyki, rozwój poglądów od najdawniejszych pojęć do teorii względności i kwantów*, PWN, Warszawa 1962.
Schwartz J., McGuinness M., *Einstein dla początkujących*, Wydawnictwo „Alfa”, Warszawa 1989.

SUMMARY

Remarks on the time dilation in the conditions of special theory of relativity

The key to understand Einsteins Special Theory of Relativity is the time and the possibility of synchronization problem . Proceeding from two postulates of SRT, elementary methods present the way to measure time in terms SRT for both, single and two inertial systems. On this basis, there are derived the own time concept and the time of observed phenomena. Synchronized clocks recording the own time and observed time allows the comparison these times that results in the phenomena of time dilation. There is draw attention to the relationships of time dilation with SRT and its interpretation of well known twin paradox.

Key words: time dilatation, special theory of relativity, Lorentz transformation, twin paradox.

Ryszard Rębowski

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

3.14 – czyli imieniny liczby π

STRESZCZENIE

Liczba π towarzyszyła człowiekowi od zawsze – przecież koło było jego jednym z największych wynalazków. Każdego roku, 14 marca świat naukowy obchodzi jej imieniny. Z tej okazji przypomnieliśmy podstawowe fakty dotyczące geometrycznego pochodzenia π oraz historię najważniejszych odkryć w matematyce pozwalających lepiej zrozumieć jej znaczenie w nauce.

Słowa kluczowe: liczba π , koło, średnica koła, radian.

1. Wstęp

Któż z nas nie słyszał o π , nawet jeśli nie zdaje sobie sprawy z tego, że litera π pochodzi z alfabetu greckiego. Bowiem nie o znajomość greki tutaj chodzi, a – jak większość z nas myśli, i słusznie – chodzi o koło, czyli o geometrię. Każdy z nas pewnie kiedyś na lekcji matematyki badał zależność obwodu tego koła od jego średnicy i w wyniku kilku pomiarów stwierdził zadziwiająca zależność:

$$\frac{L}{d} = const.,$$

gdzie L oznacza obwód koła, d jego średnicę.

Właśnie to spostrzeżenie rzuca się od razu w oczy, aczkolwiek wcale nie jest jasne, dlaczego tak jest! Jeśli już to zauważyliśmy, to rzeczą naturalną jest zapytać o wartość tej stałej. Tym razem jest jeszcze gorzej, aniżeli zdajemy sobie z tego sprawę. Nie wtajemniczeni chóralnie odpowiadają: 3,14, ale tym razem populizm nie zwycięża, bowiem odpowiedź jest niepoprawna!

Co do jednego wątpliwości nie powinniśmy mieć – ta stała, o której mowa jest wyżej, to liczba. W takim razie pytanie powinno brzmieć: *jaka liczba?*

2. Geometryczne pochodzenie liczby π

Zostawmy na chwilę ostatnią kwestię i zajmijmy się samą regułą proporcji, o której mowa wyżej. Spróbujmy ją uzasadnić. W tym celu weźmy koło o promieniu R . Niech L oznacza jego obwód. Wybierzmy z tego koła jego wycinek o kącie środkowym $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$. Wtedy z zasady proporcji długość \tilde{L} łuku tego wycinka jest równa

$$\tilde{L} = L \frac{\alpha}{360}.$$

Załóżmy, że $\alpha = \alpha_0$ jest takie, że $\tilde{L} = R$. Wtedy powyższa proporcja będzie miała postać

$$\frac{L}{R} \cdot \alpha_0 = 360^\circ,$$

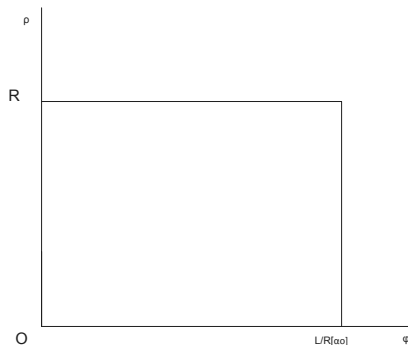
co oznacza, że kąt pełny jest równy $\frac{L}{R}$ jednostek, gdzie jednostką tą jest miara kąta α_0 .

Spójrzmy teraz na rozważane koło z punktu widzenia jego środka i półprostej wyprowadzonej z tego środka. Wtedy położenie każdego punktu należącego do tego koła możemy opisać parą dwóch liczb:

ρ – odległością tego punktu od środka koła,

φ – miarą kąta skierowanego w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara, gdzie $\varphi \in \langle 0^\circ, 360^\circ$.

Weźmy teraz układ współrzędnych kartezjańskich, gdzie na osi poziomej będziemy odmierzać wartości kąta φ w jednostkach α_0 , zaś na osi pionowej wartości ρ . Wtedy wszystkie punkty z koła o promieniu R można opisać za pomocą punktów znajdujących się w prostokącie umiejscowionym w zdefiniowanym wyżej układzie, którego podstawą jest odcinek $\langle 0, \frac{L}{R} \rangle$ leżący na osi $O\varphi$, natomiast (lewym) bokiem odcinek $\langle 0, R \rangle$ leżący na osi $O\rho$ (patrz rys. 1).



Rys. 1. Obraz koła w układzie $O\varphi\rho$

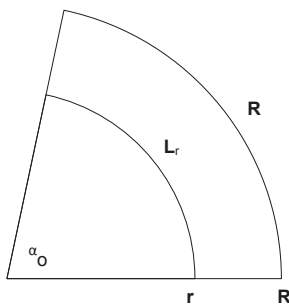
Zauważmy, że wtedy pole tego prostokąta równe jest długości okręgu naszego koła. Weźmy teraz wycinki naszego koła o parametrach: $\alpha_0, r < R$, jak to pokazano na rys. 2, gdzie

przez L_r oznaczyliśmy długość łuku wycinka koła o promieniu r . Wtedy wycinki w układzie $O\varphi\rho$ będą prostokątami jak na rys. 3. W takim razie z zasady proporcji, w jednostkach α_o , L_r ma długość

$$L_r = r \cdot 1 [\alpha_o] = r,$$

dla każdego $0 < r \leq R$. W szczególności, podstawiając $r = R$ i z uwagi, że $L_R = R$ (patrz rys. 2), w standardowych jednostkach dostaniemy

$$R = L \frac{\alpha_o}{360}.$$



Rys. 2. wycinek kołowy o parametrach α_o , r , R

Pokazaliśmy zatem, że dla każdego koła o promieniu R i długości okręgu L zachodzi równość

$$L = \frac{360}{\alpha_o} R.$$

W szczególności

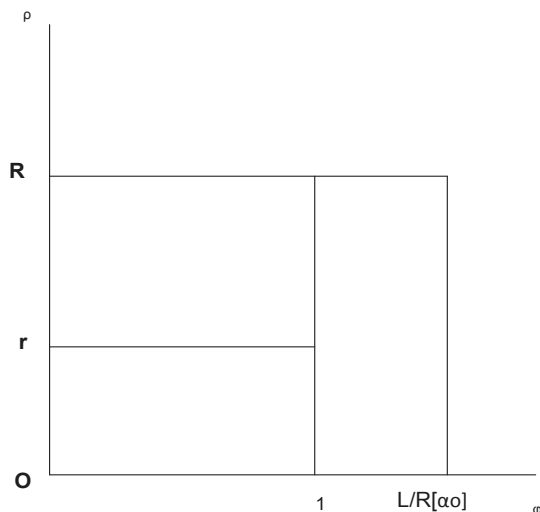
$$\frac{L}{d} = \frac{180}{\alpha_o}, \quad d = 2R.$$

Oznaczając teraz przez π wartość liczby

$$\frac{180}{\alpha_o},$$

możemy zapisać

$$L = 2\pi R.$$

Rys. 3. Obrazy wycinków kołowych w układzie $O\varphi\rho$

3. Podstawowe fakty o liczbie π

1. Dobrze wiadomo¹, że miara kąta α_0 w przybliżeniu ma wartość

$$57,29577951^\circ$$

i jednostkę $1[\alpha_0]$ nazywa się *radianem*, w skrócie rad.

2. Wtedy wartość przybliżona liczby π jest równa

$$\pi \cong 3,14159265376.$$

3. Wykazane wyżej zależności pozwalają zamienić jednostkę $[\circ]$ na $[\mathbf{rad}]$ i na odwrót. Jeśli dla kąta płaskiego α , przez α° oznaczymy jego miarę w stopniach, a przez $\alpha[\mathbf{rad}]$ w radianach, to

$$\alpha[\mathbf{rad}] = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi[\mathbf{rad}].$$

Jak pokazał w 1882 roku F. Lindemann, liczba π nie jest pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego, a więc postaci $W(x) = 0$, gdzie W oznacza dowolny wielomian rzeczywisty o współczynnikach całkowitych. Jako taka nie może być liczbą wymierną. Pozwoliło to wraz

¹ Uzasadnienie przedstawionych faktów można znaleźć np. w [Boyer 1964, Cajori 1994, Courant i Robbins 1962, Downing 1995, Merzbach, Boyer 2010, Tanton 2005, Weisstein 1985].

z twierdzeniem Wantzela–Gaussa rozstrzygnąć słynny problem *szkoły pitagorejskiej* – *problem kwadratury koła*. Pitagorejczycy pytali się:

czy za pomocą liniiki i cyrkla można skonstruować kwadrat, którego pole będzie równe polu danego koła?

Z twierdzenia Wantzela–Gaussa wynika, że jeśli kwadratura koła miałaby rozwiązanie, to liczba π musiałaby być algebraiczna, a tak nie jest, co właśnie wykazał Lindemann.

4. Liczba π jako liczba niewymierna nie pozwala się zapisać w układzie dziesiętnym, stąd potrzeba posługiwania się jej przybliżeniem. Dokładniej, taki zapis wyglądałby wtedy następująco

$$3, c_1 c_2 \dots c_n \dots,$$

gdzie ciąg c_j przyjmuje wartości ze zbioru $\{0, 1, \dots, 9\}$ ($c_1 = 1, c_2 = 4, c_3 = 1, c_4 = 5$ itd.) oraz odpowiedni szereg liczbowy jest zbieżny do wartości części ułamkowej liczby π , czyli

$$\pi = 3 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{10^j}.$$

Ponadto żadna sekwencja postaci $c_k, c_{k+1}, \dots, c_{k+l}$ nigdy nie powtórzy się w ciągu (c_j) .

Z drugiej strony istnieją sposoby jej *wyrepräsentowania*. Jedną z takich metod jest teoria szeregów liczbowych i szeregów funkcyjnych. Studenci informatyki PWSZ im. Witelona w Legnicy wiedzą, że funkcję **arctg** x można rozwinąć w taki szereg, czyli przedstawić ją następująco

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \text{ dla } x \in [0, 1].$$

W szczególności po podstawieniu $x = 1$ dostaniemy

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Co za regularność! Przecież ciąg $\left((-1)^n \frac{1}{2n+1} \right)_{n \geq 0}$ jest naprzemiennym ciągiem odwrotności kolejnych liczb nieparzystych! Jakże daleko mu do geometrii koła. A jednak.

5. Liczba π związana jest ze słynną funkcją *dzeta* ζ *Riemanna*, gdzie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

Wtedy, jak wykazał po raz pierwszy Euler, dla szeregu *2-harmonicznego* mamy

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Genezą tej równości zajmiemy się w kolejnym artykule poświęconym liczbie π .

6. Na liczbę π , jak pokazał w 1748 roku L. Euler, należy spojrzeć z ogólniejszej perspektywy – liczb zespolonych. Ze słynnego wzoru Eulera wynika, że

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Fenomen tego wzoru, z tego powodu często nazywany najpiękniejszym wzorem matematyki, polega na tym, że obok siebie znalazło się pięć z sześciu najważniejszych liczb: liczby 0 , 1 , bez których nie można mówić o *ciele liczb rzeczywistych*, dwie najważniejsze liczby niewymierne e , π (niektórzy do tego zbioru zaliczają jeszcze liczbę $\sqrt{2}$) oraz *jedność urojona i* pozwalająca rozszerzyć ciało liczb rzeczywistych do ciała *liczb zespolonych*, co po raz pierwszy wykazał wielki Gauss. Jaka szkoda, że we wzorze tym zabrakło miejsca na szóstą liczbę, słynną liczbę φ (fi od nazwiska antycznego rzeźbiarza Fidiasza) związaną z *ciągami Fibonacciego*, ze *złotą proporcją* czy *linią spiralną* pojawiającą się w geometrii i przyrodzie (np. [Rębowski 2009]).

7. Liczba π zagościła także w teorii prawdopodobieństwa, co dla wielu było i w dalszym ciągu jest sporym zaskoczeniem. Poniżej przytoczymy dwa klasyczne przykłady, o których szczegółowo napiszemy w kolejnym artykule. Pierwszy związany jest z geometrią i nie powinien akurat wzbudzać z tego powodu nieufności co do koneksji z liczbą π – przecież geometria jest jej rodowodem. Aczkolwiek nie do końca, bowiem sygnalizowany przykład związany jest bezpośrednio z geometrią kwadratu. Dokładniej:

załóżmy, że mamy kwadrat jednostkowy, z którego losowo wybieramy punkt o współrzędnych (a, b) . Pytamy się, jakie jest prawdopodobieństwo, że istnieje trójkąt rozwartokątny o bokach długości odpowiednio a , b , 1 .

Można wykazać (zrobimy to w sygnalizowanym kolejnym artykule), że prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Kolejny przykład jest o wiele bardziej interesujący. Zasadniczym powodem jest to, że nie ma on nic wspólnego z geometrią. Po wtóre dotyczy on trudnej, ale ważnej teorii liczb pierwszych oraz związany jest ze wspomnianą wyżej funkcją *dzeta* Riemanna. Problem ten sprowadza się do pytania o *prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb całkowitych względnie pierwszych*. Jak pokażemy w kolejnym artykule, prawdopodobieństwo to jest zaskakujące, bowiem równe $\frac{6}{\pi^2}$.

8. Z wcześniejszej uwagi nikogo nie powinno już dziwić, że liczba π doczekała się również swojej interpretacji na gruncie *statystyki matematycznej*.

W roku 1773 Georges-Louis Leclerc, hrabia Buffon, sformułował swój słynny problem. Pytał w nim:

jakie jest prawdopodobieństwo, że igła o długości l rzucona na płaszczyznę, na której naniesione są równoległe i oddalone od siebie o l proste, przetnie taką prostą.

Metodami probabilistycznego modelu geometrycznego można pokazać, że prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{2}{\pi}$ (patrz np. [Rębowski 2006]). Z kolei metodami statystyki matematycznej pozwala to uzyskiwać bardzo dokładne przybliżenie wartości liczby π , bowiem z mocnego prawa wielkich liczb wynika, że

$$\pi \cong \frac{2n}{k_n} \text{ z prawdopodobieństwem } 1,$$

gdzie n oznacza liczbę powtórzeń rzutów igłą, k_n liczbę przecięć.

4. Zakończenie

Artykuł ten pomyślany został jako „łagodne” wprowadzenie w świat liczb, bez którego nie byłoby matematyki. Nieprzypadkowo zrobiliśmy to na przykładzie liczby π , której obecność w stworzonej przez człowieka cywilizacji jest uzasadniona i niezastąpiona. Tak rozumiana popularność powoduje jej łatwą dostępność. Z drugiej strony oczekuję, że szanowny Czytelnik zauważy, że jest to tylko iluzja. Liczba ta jest bowiem głęboko „usadowiona” zarówno w zbiorze liczb rzeczywistych jak i samej matematyce. Jej „zobaczenie” wymaga bardzo zaawansowanych pojęć i metod, które wypracowane zostały przez kilkadziesiąt pokoleń badaczy, a w zdecydowanej większości uzyskanych w XIX i XX wieku. Na myśli mam tutaj przede wszystkim teorię zbiorów i ciał liczbowych, w tym teorię liczb niewymiernych, teorię równań algebraicznych, teorię funkcji rzeczywistych i zespolonych, teorię prawdopodobieństwa i statystkę matematyczną. Zgodzimy się, że brzmi to imponująco i od każdego z nas wymaga respektu i odpowiedniego dystansu. W niniejszym artykule świadomie zrezygnowaliśmy z wielu szczegółów. Ich obecność na tym poziomie zniechęciłaby bowiem Czytelnika, a przecież nie takiego efektu spodziewamy się. Skoro jednak – a takie jest nasze założenie i oczekiwanie – rozbudziliśmy już ciekawość, będziemy musieli postawić *kropkę nad i* i pokazać kawałek solidnej matematyki. Zrobimy to, o czym wcześniej wielokrotnie wspominaliśmy, w kolejnym artykule pomyślanym jako kontynuacja niniejszego. Już teraz zachęcamy do jego lektury.

Artykuł ten dedykuję swoim byłym i obecnym studentom PWSZ w Legnicy. Zajęcia, jakie odbywaliśmy w ramach kursów z matematyki, matematyki dyskretnej i metod probabilistycznych, powinny przybliżyć Państwu poruszoną w tym artykule tematykę. Rozmawialiśmy bowiem o liczbach zespolonych i ich postaci wykładniczej, równaniach

algebraicznych, prawdopodobieństwie geometrycznym, prawach wielkich liczb, ciągach rekurencyjnych Fibonacciego i o statystyce matematycznej.

Bibliografia

- Boyer C., *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN, Warszawa 1964.
- Cajori F., *A history of Mathematics*, MacMillan and CO, 1994.
- Courant R., Robbins H., *Co to jest MATEMATYKA*, wyd. drugie, PWN, Warszawa 1962.
- Downing D., *Dictionary of Mathematics Terms*, third edition, Barrons's Educational Series, Inc. 1995.
- Merzbach U.C., Boyer C.B., *A history of Mathematics*, third edition, John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- Rębowski R., *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2009.
- Rębowski R., *Podstawy metod probabilistycznych*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2006.
- Tanton J., *Encyclopedia of Mathematics*, Facts On File, Inc. 2005.
- Weisstein E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, second edition, van Nostrand Reinhold, New York 1989.

SUMMARY

3.14 or the name-day of the number π

The number π has accompanied man since ecer – we must remember that the wheel was one of the biggest invention. Each year, 14th of March scientific world celebrates the name-day of the number π . On that occasion, we have remained the basic facts about geometric origin of the number π and the history of the most important discoveries in mathematics that can help to understand the meaning of the number π in science.

Key words: number π , wheel, wheel diameter, radian.

Ryszard Rębowski

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

O liczbie π równej

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470948296329736659899817258

z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko

Część pierwsza

STRESZCZENIE

Zaprezentowano dorobek kilkunastu pokoleń matematyków, którzy swoimi badaniami przyczynili się do wyjaśnienia znaczenia i roli liczby π w matematyce. W części pierwszej pracy skoncentrowano się na metodach stosowanych w teorii funkcji rzeczywistych, geometrii i teorii liczb. W większości sytuacji starano się odtworzyć rozumowania i techniki rachunkowe, które doprowadziły do tak spektakularnych wyników jak w przypadku wzoru Leibniza, wzorów Eulera czy związku liczby π z funkcją dzeta Riemanna. Przypomniano o innych sposobach reprezentowania liczby π na przykładzie metody iloczynu Wallisa i nieskończonych ułamków łańcuchowych Eulera. Wspomniano o miejscu liczby π w najpiękniejszym wzorze matematyki – wzorze Eulera oraz o jej związku z inną ważną liczbą, liczbą Eulera.

Słowa kluczowe: liczba π , szereg potęgowy, szereg harmoniczny, liczba pierwsza, ułamek łańcuchowy.

1. Wstęp

W artykule „3,14 – czyli imieniny liczby π ” [Rębowski 2012] sygnalizowaliśmy, że w kolejnej pracy pokażemy szczegółowo zacytowane tam wyniki. Oczywiście każdy z nich jest dobrze znany i często cytowany w literaturze przedmiotu. Dlaczego w takim razie robimy to po raz kolejny? Argumentów „za” jest co najmniej kilka.

1. Pokazując uzasadnienia tych wyników, chcemy wyraźnie podkreślić zasygnalizowane w [Rębowski 2012] zjawisko głębokiego „usadowienia” liczby π w wielu współczesnych teoriach matematycznych.

2. Poruszana przez nas tematyka dotyczy wielu dyscyplin matematycznych. Zapoznanie się z nią wymagałoby od Czytelnika znajomości specjalistycznej wiedzy.

3. Studiowanie literatury poświęconej takiej tematyce dla niewtajemniczonego w arkana matematyki Czytelnika jest na ogół kłopotliwe, żeby nie powiedzieć trudne. Przedstawione dalej problemy wymagają bowiem zaawansowanej wiedzy i sprawności technicznej, a wszystko to odbywa się kosztem zaangażowanego czasu. Idąc naprzeciw oczekiwaniom Czytelnika, chcieliśmy cały ten proces uprościć i maksymalnie skrócić.

4. Wreszcie chcieliśmy osiągnąć cel podstawowy – spopularyzować ten aspekt wiedzy, bowiem co jak co, ale liczba π na pewno na to zasługuje.

Liczbę π często nazywa się *stałą Archimedesesa*, aczkolwiek jej pochodzenie jest o wiele starsze¹. Na pewno posługiwał się nią twórca geometrii euklidesowej – Euklides (365–300 p.n.e.) Niewątpliwie Archimedes (287–212 p.n.e.) był jednym z pierwszych, który zaczął badać liczbę π naukowo. Stosując metody geometrii, udało mu się oszacować jej wartość z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Nie ma natomiast żadnego dowodu na to, że oznaczał i nazywał tę liczbę tak jak współcześni, czyli *π -ludolfina*. Symbol π wprowadzono do literatury przedmiotu dopiero w 1706 roku. Uznaje się, że zawdzięczamy to Williamowi Jonesowi (1675–1749), który zaproponował używania greckiej litery *π* dla oznaczenia stałej Archimedesesa. Zrobił to w swoim dziele *Synopsis Palmariorum Mathesos*. Dla podkreślenia geometrycznego pochodzenia tej liczby, czyli obwodu, użył pierwszej litery Słowa *perimetryon* z greckiego *περιμετρον*. Spotkało się to ze zrozumieniem ówczesnego świata nauki, a kropkę nad „i” postawił Euler, wyrażając swoją aprobatę. Z kolei termin *ludolfina* odnosi się do matematyka niemieckiego Ludolpha van Ceulena (1540–1610), który jako jeden z pierwszych nowożytnych uczonych zajmował się obliczeniem wartości liczby π . Dopiero w 1761 roku Johan Heinrich Lambert (1728–1777), matematyk szwajcarski francuskiego pochodzenia, udowodnił, że liczby tej nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych. Tym samym pokazał, że jest liczbą niewymierną. Stało się więc jasne, dlaczego ani Archimedesowi, ani Ceulenowi i innym nie udało się ustalić jej wartości. Co więcej, okazało się, co pokazał w 1882 r. Ferdinand Lindemann (1852–1939), że jest ona *liczbą przestępną*, czyli nie może być pierwiastkiem *równania algebraicznego* o współczynnikach całkowitych². Ma to swoje konsekwencje w postaci nawet niemożliwości zapisania π za pomocą skończonego zapisu złożonego z liczb całkowitych, działań arytmetycznych, ułamków oraz potęg i pierwiastków. Z geometrycznego punktu widzenia odkrycie to ostatecznie rozstrzyga, że niemożliwa jest klasyczna konstrukcja (przy pomocy linijki i cyrkla) kwadratu o powierzchni równej powierzchni danego koła. Problem ten nazywany jest w literaturze przedmiotu *kwadraturą koła*.

Wszystkie fakty historyczne zacytujemy z cytowanej literatury. Na szczególną uwagę zasługują wydawnictwa: [Boyer 1964, Cajori 1994, Courant i Robbins 1962, Downing

¹ Znane są dowody świadczące o korzystaniu z własności liczby π już w starożytnym Babilonie. Odkryto, że na jednej z kamiennych tablic, datowanej na lata 1900–1680 p.n.e. pojawia się opis wartości obwodu koła o średnicy 1, przybliżony przez wartość 3,125.

² Równania, które powstaje z przyrównania wielomianu do zera.

1995, Merzbach i Boyer 2010, Tanton 2005, Weisstein 1989]. Czytelnika zachęcamy również do lektury [Aczel 1998, Guedj 2001] oraz do skorzystania z zasobów źródła internetowego <http://mathworld.wolfram.com>. Artykuł z przyczyn technicznych składa się z dwóch części. Strukturalnie podzielony został na pięć rozdziałów. Przedstawione w części 2 zdjęcia uczonych pobrano z repozytorium wolnych zasobów *Wikimedia Commons*.

2. Liczba π w teorii funkcji rzeczywistych

π jest liczbą niewymierną, o czym wiadomo co najmniej od 1761 roku. To właśnie dlatego trudno jest posługiwać się π w obliczeniach numerycznych czy w technice. Wymaga to bowiem używania jej wartości przybliżonej, np. 3,14159, ale również czasami rozwinięciem postaci

$$\begin{aligned} \pi = & 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510 \\ & 58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\ 82148 \\ & 08651\ 32823\ 06647\ 09384\ 46095\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128\ 48111\ 74502 \\ & 84102\ 70193\ 85211\ 05559\dots, \end{aligned}$$

a w konsekwencji kontroli dokładności takiego rachunku. Dla matematyki taka aproksymacja jest niedostateczna, co stało się wyzwaniem dla wielu pokoleń matematyków. Dociekliwego Czytelnika odsyłamy w tym miejscu do lektury bardzo znanej w literaturze przedmiotu książki E. Couranta i H. Robbinsa *Co to jest MATEMATYKA* oraz do strony internetowej <http://mathworld.wolfram.com>.

Skoro liczby π nie można zapisać w *notacji pozycyjnej*³, zaczęto poszukiwać metod i technik rachunkowych pozwalających tę trudność obejść. Stało się to za sprawą wielu matematyków, wśród nich na uwagę na pewno zasługują: P. Fermat (1601–1665), I. Newton (1643–1727), G. W. Leibnitz (1646–1716), B. Taylor (1685–1731), L. Euler (1707–1783), J. B. J. Fourier (1768–1830), C. F. Gauss (1777–1855), A. Cauchy (1789–1857), B. Riemann (1826–1866), J. Hadamard (1865–1963), S. Ramadujan (1887–1920) i inni. Przełomem stało się zdefiniowanie pojęcia *zbieżności* ciągu liczbowego oraz jego uogólnienie na przypadek funkcji rzeczywistych. Pozwoliło to spośród wszystkich funkcji rzeczywistych wybrać te „dobre”, czyli *funkcje ciągłe*. Stąd był już mały krok, chociaż w historii matematyki okazał się on krokiem milowym, w kierunku *funkcji gładkich*, czyli *różniczkowalnych*. Mariaż teorii szeregów z uzyskanymi wynikami rachunku różniczkowego oraz teorii całki zaowocował zaistnieniem potężnego narzędzia – *teorii szeregów funkcyjnych*, w tym *szeregów potęgowych* i *szeregów Fouriera*. O możliwościach tej teorii w badaniu zagadnień teorio-liczbowych napiszemy dalej.

³ Wcale to nie oznacza, że zaprzestano zajmować się tym problemem. Dość sugestywnie przedstawiono to np. w filmie zatytułowanym „ π ” Darrena Aronofskiego z 1998 r. Ponadto dalej trwają poszukiwania dokładniejszych rozwinięć π (patrz np. <http://mathworld.wolfram.com>, 28.09.2011.).

2.1. Rozwinięcie funkcji arctg i wzór Leibniza na π

Weźmy funkcję

$$\mathbf{R} \ni x \longrightarrow \operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Przypomnijmy, że funkcja ta powstaje w wyniku wzięcia funkcji odwrotnej do pierwszej gałęzi funkcji trygonometrycznej *tangens*. Oznacza to, że jej wykres wygląda tak jak na rys. 1. Z podstaw rachunku różniczkowego wiadomo, że

$$\left(\operatorname{arctg}(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \text{ dla wszystkich rzeczywistych } x.$$

Wynik tego różniczkowania należy skojarzyć z *ciągami geometrycznym*, dokładniej z jego skończoną sumą. Z matematyki elementarnej wiadomo, że dla ciągu

$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1},$$

dla $q \neq 1$, S_n – suma jego wyrazów ma postać

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

co po prostym przekształceniu daje

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^{n-1} + \frac{q^n}{1 - q}.$$

Stosując powszechnie używaną konwencję sumowania, ostatni wzór zapiszemy następująco

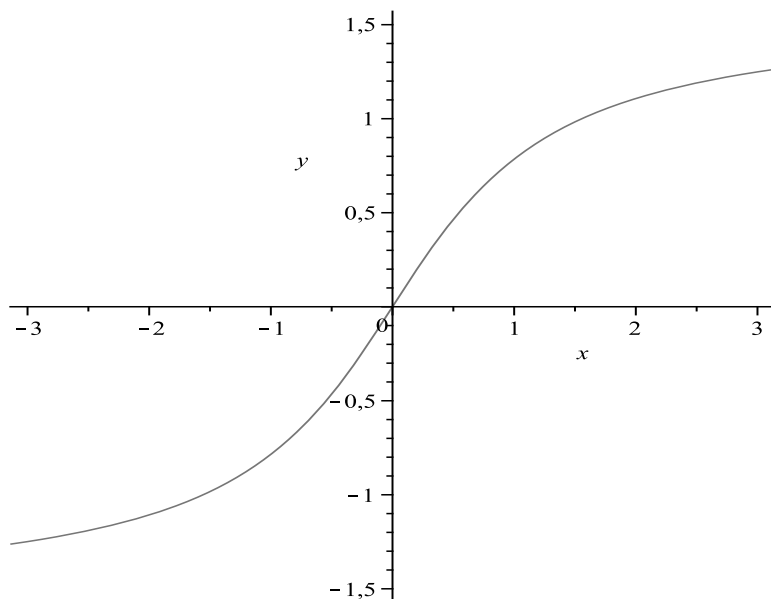
$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j + \frac{q^n}{1 - q}.$$

Jeśli teraz dokonamy podstawienia $q = -x^2$, to otrzymamy pochodną funkcji arctg (q zawsze jest różne od jedności dla każdego x), czyli

$$\left(\operatorname{arctg}(x)\right)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-x^2)^j + \frac{(-x^2)^n}{1 + x^2}$$

lub równoważnie

$$\left(\operatorname{arctg}(x)\right)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1 + x^2} \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

Rys. 1. Wykres funkcji \arctg

Scałkujemy tę równość obustronnie po przedziale jednostkowym $[0, 1]$. Z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego *Riemanna–Newtona–Leibniza*, *liniowości całki* i faktu, że $\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ dla wszystkich naturalnych k , dostaniemy

$$\arctg 1 - \arctg 0 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Ponieważ $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctg 0 = 0$, więc ostatnia równość, po zastosowaniu konwencji sumacyjnej, oznacza, że

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Daje to nam przybliżenie liczby $\frac{\pi}{4}$ sumą $\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}$ z dokładnością ϵ_n , gdzie

$$\epsilon_n = |(-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx| = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Pozostaje zbadać zbieżność ciągu (ϵ_n) . Z definicji $\epsilon_n \geq 0$ dla każdego n .

Z drugiej strony, jeśli spojrzymy na funkcję

$$f(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}, \quad x \in [0, 1],$$

to ponieważ $1+x^2 > 0$ oraz $x^{2n} \geq 0$,

$$f(x) \leq x^{2n}, \quad x \in [0, 1].$$

Z interpretacji geometrycznej całki wynika, że $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx$ i dlatego

$$\epsilon_n \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}.$$

Ponieważ wyrazy ciągu (ϵ_n) są nieujemne, więc powyższa nierówność pozwala wykorzystać znane kryterium zbieżności ciągu – *twierdzenie o trzech ciągach*. Oznacza to, że $(\epsilon_n) \rightarrow 0$. W takim razie z twierdzenia o *granicy sumy* dwóch ciągów dostaniemy

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}.$$

Wykorzystując pojęcie *szeregu liczbowego* i jego *sumy*, ostatnią równość możemy zapisać następująco

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1},$$

co oznacza, że liczba π jest równa czterokrotnej sumie *naprzemiennego* szeregu odwrotności kolejnych liczb nieparzystych. W literaturze powyższa równość znana jest jako *wzór Leibniza*. Było to pierwsze takie przedstawienie liczby π .

2.2. Szeregi harmoniczne a liczba π

Wśród szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich ważną rolę odgrywają tzw. *szeregi α -harmoniczne*, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{gdzie } \alpha > 0.$$

Dobrze wiadomo, że dla $\alpha \in [0, 1]$ szeregi te są *rozbieżne*, natomiast dla $\alpha > 1$ już są *zbieżne*. Pozwala to, jak zauważył Riemann, zdefiniować funkcję nazywaną funkcją ζ *Riemanna*⁴, czyli

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Przykładem rozbieżnego szeregu α -harmonicznego jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, nazywany *szeregiem harmonicznym*. Zjawiska opisane szeregiem harmonicznym znane były w jakimś sensie już starożytnym. Pojawiały się jako *paradoks Zenona z Elei* (490 rok p.n.e.). Zanim zajmujemy się związkiem między szeregami α -harmonicznymi a liczbą π , podamy przykład jednej z wersji takiego paradoksu.

⁴ Z funkcją tą, a tak naprawdę z jej zespolonym rozszerzeniem związana jest słynna, bowiem nie rozstrzygnięta do tej pory, *hipoteza Riemanna*. Jej znaczenie jest ważne w teorii liczb pierwszych.

Mówi on o Archimedesie, który ściga podążającego przed nim żółwia. Sprecyzujmy warunki, w jakich odbywa się ta rywalizacja.

1. Archimedes jak i żółw poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

2. W chwili zero Archimedes znajduje się w punkcie A odległym od punktu Z , w którym znajduje się żółw.

3. Odległość punktu A od Z wynosi d_o .

4. Jeśli v_A i v_Z oznaczają odpowiednio prędkość Archimedeses i żółwia, to $v_A = \beta v_Z$ dla $\beta > 1$ (przecież Archimedes nie poruszał się w żółwim tempie).

Zajmijmy się najpierw analizą logiczną zjawiska tego pościgu. W chwili zero obaj ruszają przed siebie, ruchem jednostajnym prostoliniowym⁵. Po pewnej chwili, powiedzmy t_1 Archimedes dotrze do punktu Z . W tym czasie żółw przebędzie drogę, która zaprowadzi go do punktu Z_1 , różnego od Z . W kolejnym kroku analizy Archimedes po kolejnej chwili t_2 dotrze do punktu Z_1 , z kolei żółw oddali się do nowego punktu Z_2 itd. Ponieważ nie ma powodu, aby twierdzić, że iteracje tego zjawiska kiedyś zakończą się, przecież oboje, Archimedes, jak i żółw, poruszają się zgodnie ze sformułowanymi zasadami, nie ma podstaw twierdzić, że Archimedes kiedykolwiek dogoni żółwia. Z drugiej strony, chociażby z autopsji wiemy, że taki pościg zakończy się zawsze sukcesem i jest to tylko kwestią czasu. W takim razie przedstawione wyżej rozumowanie wyklucza istnienie ruchu! O co tutaj chodzi?

Aby definitywnie rozstrzygnąć kwestię przedstawionego pościgu, przeprowadzimy jego analizę numeryczną, czyli ilościową. W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenia:

• d_n dla $n = 0, 1, 2, \dots$ niech oznacza długości odcinków AZ, ZZ_1, Z_1Z_2, \dots ;

• t_n dla $n = 0, 1, 2, \dots$ czas, jaki potrzebuje Archimedes i żółw na przebycie kolejnych odcinków.

Z założenia $v_A = \beta v_Z$ i $d_o = V_A t_o$ oraz $d_1 = v_Z t_o$, bowiem odcinki AZ i ZZ_1 oboje pokonują w czasie t_o . Ponieważ wtedy $t_o = \frac{d_o}{v_A}$, więc

$$d_1 = v_Z \frac{d_o}{v_A} = \frac{v_A}{\beta} \frac{d_o}{v_A} = \frac{d_o}{\beta}.$$

Podobnie, ponieważ $d_1 = v_A t_1$ i $v_A t_1 = v_Z t_o$ (Archimedes i żółw przebywają odcinek ZZ_1), więc $t_1 = \frac{v_Z}{v_A} t_o$ i dlatego

$$d_2 = v_Z t_1 = v_Z \frac{v_Z}{v_A} t_o = \left(\frac{v_A}{\beta}\right)^2 \frac{1}{v_A} \frac{d_o}{v_A} = \frac{d_o}{\beta^2}.$$

I ogólnie, powtarzając powyższe rozumowanie, otrzymamy, że $d_n = \frac{d_o}{\beta^n}$ dla wszystkich naturalnych n . Dostaliśmy więc szereg liczbowy o wyrazie ogólnym d_n , który jest zbieżny. Jeśli przez S oznaczymy jego sumę, to

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = d_o \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} = d_o \frac{1}{\beta - 1}.$$

⁵ Umówmy się, że dla uproszczenia pomijamy wstępną fazę ruchu, kiedy to występują przyspieszenia.

Wtedy S jest całkowitą drogą przebytą przez żółwia w tej wędrowce. W tym samym czasie Archimedes pokona drogę równą

$$S + d_o = d_o \frac{1}{\beta - 1} + d_o = d_o \frac{\beta}{\beta - 1},$$

na końcu której dogoni żółwia! Zatem nie jest tak, jak tłumaczy to logika, która w swoim rozumowaniu nie uwzględnia efektu zbieżności, a tylko nieskończone pojawianie się wartości dodatnich. Ruch w takim razie jednak istnieje!

Wracamy do naszego głównego problemu tego rozdziału – związku pomiędzy liczbą π a szeregami α -harmonicznymi. Weźmy jeszcze raz wzór na pochodną funkcji \arctg otrzymany w podrozdziale 1.1

$$\left(\arctg(x)\right)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

Ustalmy $t \in [0, 1]$ i scałkujmy tę równość obustronnie po przedziale $[0, t]$

$$\int_0^t \left(\arctg(x)\right)' dx = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_0^t x^{2j} dx + (-1)^n \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Licząc każdą z całek, otrzymamy

$$\arctg(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{2j+1} + (-1)^n \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Szukujemy się do wykonania przejścia granicznego przy $n \rightarrow \infty$. W tym celu skorzystamy z oszacowania, które w podobnej wersji pojawiło się w podrozdziale 2.1

$$\left| \arctg(t) - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{2j+1} \right| = \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^t x^{2n} dx = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1},$$

co pokazuje, że dla $x \in [0, 1]$

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Jest to tzw. *rozwiniecie w szereg potęgowy*, zwany też szeregiem Taylora–Maclaurina, funkcji \arctg .

Euler zauważył, że szereg ten (jak i wiele mu podobnych) można poddać pewnemu przekształceniu⁶, w wyniku czego dostaniemy

$$\arctg(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n,$$

⁶ Mowa tutaj o *przekształceniu Eulera* (patrz np. [Fichtenholz 1976]). Niestety, ale zaprezentowanie jego treści wykracza poza ramy tego artykułu.

gdzie symbolem $(2n)!!$ (odpowiednio $(2n+1)!!$) oznaczyliśmy iloczyn kolejnych liczb parzystych (nieparzystych) od 2 do $2n$ (od 1 do $2n+1$). Na przykład

$$7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105, 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

Powyższą równość przekształcamy dalej. Zaczniemy od zamiany zmiennych, podstawiając $x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ dla $t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Niech liczba $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ będzie taka, że

$$\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = s.$$

Wtedy, z definicji funkcji arctg i tg oraz uwagi, że $\cos(s) > 0$ dla wybranego s , dostaniemy kolejno

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{tg}(s) = \frac{\sin(s)}{\cos(s)} = \frac{\sin(s)}{\sqrt{\cos^2(s)}} = \frac{\sin(s)}{\sqrt{1-\sin^2(s)}}.$$

Rozwiązując tę proporcję, otrzymamy $t^2 = \sin^2(s)$, skąd $t = \sin(s)$, bowiem t oraz $\sin(s)$ jest nieujemne. Oznacza to, że $s = \operatorname{arcsin}(t)$ i dlatego

$$\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsin}(t).$$

Aby dokonać zamiany zmiennych we wzorze na arctg musimy jeszcze wyrazić $\frac{x}{1+x^2}$ oraz $\frac{x^2}{1+x^2}$ za pomocą t . Wygląda to następująco

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{t(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = t\sqrt{1-t^2},$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{t^2}{1-t^2}(1-t^2) = t^2.$$

Po zamianie zmiennych we wzorze na arctg dostaniemy

$$\operatorname{arcsin}(t) = t\sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} t^{2n},$$

albo po przekształceniu

$$\frac{\operatorname{arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} t^{2n+1}, \text{ dla } t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Niestety, ale na tym nie koniec. Już z dotychczasowych wyników widać, że Euler był wirtuozem techniki rachunkowej. Zobaczmy, co uczynił dalej. Zaczął od obustronnego scałkowania po przedziale $[0, s]$, gdzie $s \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, całkując prawą stronę wyraz po wyrazie⁷, czyli

$$\int_0^s \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \int_0^s t^{2n+1} dt.$$

Dla pierwszej całki wystarczy zauważyć, że ponieważ funkcja pierwotna jest równa $\frac{1}{2}(\arcsin(t))^2$, jej wartość wynosi

$$\frac{1}{2}(\arcsin(s))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{s^{2n+2}}{2n+2}.$$

Na szeregu występującym po prawej stronie wzoru dokonamy kolejnego przekształcenia – zamienimy zmienne, podstawiając $2k = 2n+2$. Wtedy wartości wskaźnika sumacyjnego będą zmieniały się od 1 do ∞ i dlatego

$$\frac{1}{2}(\arcsin(s))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{s^{2k}}{2k}.$$

Światło w tunelu zobaczymy, jeśli zauważymy, że ciąg $\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{2k}$ można zapisać za pomocą silni. Istotnie, z definicji operacji !! mamy

$$\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{2k} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2k}.$$

Ale

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2k-2) = 2(2 \cdot 2)(2 \cdot 3)(2 \cdot 4) \dots 2(k-1) = 2^{k-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k-1) = 2^{k-1} (k-1)!$$

Podobnie

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-1) 2k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2k-2)} = \frac{(2k)!}{2^k (k-1)!}.$$

Dlatego

$$\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{2k} = \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} 2^{2k-2}.$$

Wracając do głównego rachunku, otrzymamy

$$\frac{1}{2}(\arcsin(s))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} (2s)^{2k-2}$$

lub równoważnie

$$2(\arcsin(s))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} (2s)^{2k} \text{ dla } s \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

⁷ Oczywiście Euler wcześniej wykazał, że tak można (patrz np. [Fichtenholz 1976]).

Przyjmując w ostatnim wzorze $s = \frac{1}{2}$, ponieważ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, dostaniemy

$$\frac{\pi^2}{18} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}.$$

Zaraz, zaraz, przecież miał być szereg α -harmoniczny. Domyślamy się, co chcemy napisać. Euler wykazał⁸, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!},$$

co pozwala nam ostatecznie podać treść słynnego wzoru Eulera

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

W rozdziale 3 wzór ten pozwoli nam rozwiązać ciekawy problem liczb względnie pierwszych.

2.3. Liczba π a liczby pierwsze

Czas, aby dokładniej przyjrzeć się funkcji dzeta Riemanna. Euler jako pierwszy zauważył, że istnieje związek pomiędzy tą funkcją a zbiorem *liczb pierwszych*. Przypomnijmy, że liczby pierwsze to takie liczby naturalne $p > 1$, których rozkład na czynniki pierwsze jest trywialny, czyli ma postać $p = 1 \cdot p$. Dlatego na przykład liczby 2, 3, 5, 7, 11 są liczbami pierwszymi. Oznaczmy zbór wszystkich liczb pierwszych przez \mathbf{P} . Już Euklides zauważył, że zbiór liczb pierwszych nie może być skończony. Euklides rozumował następująco: gdyby tak nie było, to $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. W takim razie liczba $n = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ na pewno nie mogłaby być pierwszą, bowiem nie należy do zbioru \mathbf{P} . Z drugiej strony, przy dzieleniu przez każdą liczbę pierwszą p_j liczba n daje resztę 1, stąd jej rozkład na czynniki pierwsze ma postać $n = 1 \cdot n$. W takim razie musi być liczbą pierwszą, co przeczy temu, że zbiór \mathbf{P} jest skończony. Dlatego zbiór liczb pierwszych nie jest skończony. Euklides zauważył więcej, co przeszło do historii literatury przedmiotu pod nazwą twierdzenia o faktoryzacji (patrz np. [Sierpiński 1965]). Udowodnił bowiem, że każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić w postaci $n = p_1 p_2 \dots p_n$, gdzie $p_j \in \mathbf{P}$, $k \geq 1$ i rozkład ten jest jedyny.

Po tym wstępie wróćmy do funkcji dzeta. Ustalmy liczbę pierwszą p . Wtedy dla każdego $s > 1$, $0 < \frac{1}{p^s} < 1$ i dlatego dla nieskończonego ciągu geometrycznego $\left(\frac{1}{p^k}\right)_{k \geq 1}$ mamy

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

⁸ Szczegóły tego rozumowania pominiemy. Można je znaleźć np. w [Fichtenholz 1976].

Przypuśćmy, że czynność tę powtórzyliśmy dla n kolejnych liczb pierwszych p_1, p_2, \dots, p_n (pamiętamy, że \mathbf{P} jest zbiorem nieskończonym). Pomnóżmy stronami otrzymane równania przez siebie, czyli

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1 s}}\right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{k_2 s}}\right) \cdots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{k_n s}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2^s}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}}.$$

Spójrzmy na lewą stronę ostatniej równości. Z zasady rozdzielności mnożenia względem dodawania i twierdzenia o *granicy iloczynu*, po lewej stronie dostaniemy sumę wyrażen postaci

$$\frac{1}{p_1^{j_1 s}} \frac{1}{p_2^{j_2 s}} \cdots \frac{1}{p_r^{j_r s}} = \frac{1}{(p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_r^{j_r})^s}.$$

Z twierdzenia Euklidesa o faktoryzacji wynika, że iloczyny $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_r^{j_r}$ generują zbiór liczb naturalnych większych od jedności. Ponieważ w sumie po lewej stronie jest również składnik równy 1, więc lewa strona dla dostatecznie dużego n będzie miała postać

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{k^s}.$$

W takim razie, przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$, dostaniemy

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^s}}.$$

W matematyce ostatnią granicę nazywa się *iloczynem nieskończonym*, co zapisuje się symbolicznie $\prod_{j=1}^{\infty}$. Dlatego dla funkcji dzeta Riemanna mamy równość

$$\zeta(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^s}} \quad \text{dla } s > 1.$$

Ponieważ wiemy, że $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, mamy kolejną, należącą również do Eulera, reprezentację liczby π , tym razem związaną z liczbami pierwszymi

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^2}}.$$

2.4. Iloczyn Wallisa jako reprezentacja π

Do tej pory głównie pokazywaliśmy metody prowadzące do wyreprezentowania liczby π za pomocą szeregów liczbowych. Nie ulega wątpliwości, że w zdecydowanej większości przypadków stało się to za sprawą wielkiego Eulera. Nie tylko jednak on przeszedł do historii matematyki jako odkrywca takich zależności. Na uwagę zasługuje również oryginalny wynik J. Wallisa (1616–1703), którym właśnie teraz zajmiemy się. Istnieje wiele sposobów

uzyskania wyniku Wallisa. Jak zwykle prym wiedzie tutaj Euler. Metoda, którą zaprezentujemy, wydaje się być najprostsza, bowiem technicznie najmniej wymagająca i trochę zapomniana. Tym bardziej warta jest odświeżenia.

Pomysł polega na tym, aby skonstruować pewien regularny ciąg liczbowy⁹ biorący się z całkowania funkcji \sin^n . Dokładniej, niech

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx, \text{ dla } n \geq 0.$$

Nie ma większego problemu z pierwszymi dwoma wyrazami tego ciągu, bowiem $a_0 = \frac{\pi}{2}$ oraz

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Zapamiętajmy te wyniki, dalej będą nam potrzebne. W takim razie weźmy teraz $n \geq 2$. Ponieważ $\sin^n(x) = \sin^{n-1}(x)\sin(x)$, więc mamy do czynienia z klasyczną sytuacją – funkcja podcałkowa jest iloczynem i możemy próbować zastosować metodę całkowania przez części (patrz np. [Fichtenholz 1976]). Postępując zgodnie z procedurą, bierzemy rozkład

$$\begin{aligned} u &= \sin^{n-1}(x), & dv &= \sin(x) dx \\ du &= (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x), & v &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Ze wzoru na całkowanie przez części dostaniemy teraz

$$a_n = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x) dx.$$

Pozwala to nam napisać

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)(1 - \sin^2(x)) dx = \\ &= -(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx. \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu dostaniemy

$$a_n = -(n-1)a_n + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx,$$

co ostatecznie daje

$$a_n = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx = \frac{n-1}{n} a_{n-2}.$$

⁹ Ciągi takie nazywamy rekurencyjnymi (patrz np. [Rębowski 2009]).

Aby wyznaczyć kolejne (dla $n \geq 2$) wyrazy tego ciągu, posłużymy się wielokrotnie powyższą zależnością. Dla $n = 2$ wygląda to prosto, bowiem

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Dla $n > 2$ przebiega to tak

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-2-1}{n-2} a_{n-4}.$$

Rozważymy teraz dwa przypadki, kiedy n jest parzyste i nieparzyste. W sytuacji pierwszej, powtarzając odpowiednią ilość razy powyższy rachunek, otrzymamy

$$a_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} a_0 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Jeśli teraz n jest nieparzyste, to wyglądało to będzie następująco

$$a_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3} a_1 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3}.$$

Dalej wygodniej będzie zapisać oba wzory, przedstawiając liczbę parzystą jako $2n$, nieparzystą $2n+1$. Otrzymamy to w wyniku podstawienia w tych wzorach zamiast n odpowiednio $2n$ i $2n+1$. Wtedy wyrazy parzyste ciągu (a_n) będą miały postać

$$a_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

natomiast nieparzyste

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3}.$$

Dla dalszego rozumowania istotne wydaje się być zauważenie, że ciąg (a_n) zachowuje się monotonicznie, czyli

$$0 < a_{2n+1} \leq a_{2n} \leq a_{2n-1}.$$

Wynika to wprost z jego definicji i własności funkcji \sin dla argumentu z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ponieważ wtedy $\sin(x) \in [0, 1]$, więc

$$\sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x),$$

co z monotoniczności całki uzasadnia monotoniczność ciągu (a_n) . W takim razie mamy

$$1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}.$$

Czas wykorzystać uzyskane wyniki. Z otrzymanych wzorów na a_{2n} i a_{2n+1} i nierówności $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$ wynika, że

$$1 \leq \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{3}{2},$$

co możemy zapisać następująco

$$1 \leq \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Analogicznie dla ilorazu $\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$ możemy zapisać

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \frac{a_{2(n-1)+1}}{a_{2n+1}} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \frac{2n-6}{2n-5} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{3}{2},$$

co po skróceniu daje

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Z przedstawionych wyżej rachunków wynika, że

$$1 \leq \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach oznacza to, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1,$$

co oznacza, po zmianie kolejności czynników w iloczynie, że

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Jest to sygnalizowany na wstępie słynny wzór Wallisa, przedstawiający liczbę π w postaci iloczynu nieskończonego. Co za zaskakująca regularność!

2.5. Liczba π jako nieskończony ułamek łańcuchowy

Któż z nas nie słyszał o zasadzie podzielności. Przecież o tym była mowa już w szkole podstawowej. Przypomnijmy ją, aby łatwiej było kontynuować rozumowanie. W myśl tej zasady dla dowolnej liczby całkowitej p i naturalnej q istnieją liczby całkowite w, r , że

$$p = wq + r, \text{ gdzie } r \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}.$$

Co więcej, liczby w, r o podanych własnościach wyznaczone są jednoznacznie. Mówimy wtedy, że r jest resztą z dzielenia p przez q . Jeśli dodatkowo $r = 0$, oznacza to, że q dzieli p .

Zasada ta pozwala zapisać każdą liczbę wymierną w postaci pewnego szczególnego ułamka. Ale po kolei. Przede wszystkim zapiszmy zasadę podzielności w innej, równoważnej postaci

$$\frac{p}{q} = w + \frac{r}{q}.$$

Wtedy po lewej stronie tej równości mamy liczbę wymierną. Prawa strona mówi, że liczbę tę można jednoznacznie przedstawić w postaci frakcji całkowitoliczbowej i w ułamkowej $\frac{r}{q} \in [0, 1]$.

Weźmy ten ułamek, zakładając, że $r > 0$, i zapiszmy go w postaci

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r}},$$

a następnie dla liczby $\frac{q}{r}$ ponownie zastosujmy zasadę podzielności

$$\frac{q}{r} = w_1 + \frac{r_1}{q}, \quad r_1 \in \{0, 1, \dots, r-1\}.$$

Po podstawieniu do ułamka $\frac{r}{q}$ dostaniemy

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{w_1 + \frac{r_1}{q}}.$$

Procedurę tę możemy powtarzać dopóty, dopóki w i -tym kroku $r_i > 0$, ale co najwyżej po r krokach, z powodu że ciąg powstałych reszt (r_i) jest malejącym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych. W efekcie zastosowania tej procedury otrzymamy

$$\frac{p}{q} = w + \frac{1}{w_1 + \frac{1}{w_2 + \frac{1}{w_3 + \dots + \frac{1}{w_j}}}}.$$

Drugi składnik ostatniej sumy nazywamy *ułamkiem łańcuchowym*. Prześledźmy to jeszcze raz na przykładzie liczby $\frac{99}{17}$. Dostaniemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{99}{17} &= 5 + \frac{14}{17} = 5 + \frac{1}{\frac{17}{14}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{3}{14}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{14}{3}}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}}} = \\ &= 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}. \end{aligned}$$

Czytelnik pewnie zastanawia się, czego oczekujemy od pojęcia ułamka łańcuchowego. Przecież posługiwanie się tym pojęciem jest kłopotliwe – zajmuje sporo czasu i miejsca na kartce papieru. Domyślamy się, że powód jest i jak najszybciej musimy o nim napisać. Przede wszystkim nie chodzi tutaj o liczby wymierne. Te prościej jest zapisać w układzie pozycyjnym, na przykład dziesiętnym. Skoro tak, to będziemy mówili o liczbach niewymiernych. Ale każdy ułamek łańcuchowy jest liczbą wymierną, więc coś jest nie tak. To też wyjaśnimy, tym razem zaczynając od przykładu, biorąc do tego $\sqrt{2} - 1$.

Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić, że $\sqrt{2} - 1$ jest pierwiastkiem równania

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ dla } x > 0.$$

Równanie to zapiszemy inaczej

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x + 2}.$$

Z równania tego, w wyniku podstawiania w miejsce x po jego prawej stronie wyrażenia $\frac{1}{x+2}$, otrzymamy

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{x + 2}}.$$

Wygląda to znajomo, przecież to jest (algebraiczny) ułamek łańcuchowy. Oznaczmy prawą stronę powyższej równości przez. Jeśli powtórzymy tę procedurę dla równania $x = f_1(x)$, to dostaniemy

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + x}}}.$$

Prawą stronę otrzymanego równania oznaczmy przez $f_2(x)$. Porównując dwa ostatnie równania, łatwo zauważyć, że ponieważ

$$f_2(x) = f_1\left(\frac{1}{x + 2}\right),$$

drugie równanie ma postać

$$x = f_1\left(\frac{1}{x + 2}\right).$$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli procedurę tę przeprowadzimy n razy, a przez $f_n(x)$ oznaczymy prawą stronę otrzymanego równania

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots \frac{1}{2 + x}}}}},$$

to

$$x = f_n(x) \text{ dla } x > 0$$

oraz

$$f_{n+1}(x) = f_n\left(\frac{1}{x+2}\right).$$

Z konstrukcji kolejnych równań wynika, że każde z nich ma to samo rozwiązanie x_0 w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, mianowicie $x_0 = \sqrt{2}-1$. Z powyższego wynika, że dla x_0 , ciąg $f_n(x_0)$ jest zbieżny do x_0 . Symbolicznie ostatnie stwierdzenie możemy zapisać następująco

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}$$

i nazywamy *ciągłym ułamkiem łańcuchowym*.

W takim razie liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ możemy wyreprezentować jako

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}$$

Teraz wszystko jest jasne. Ciągły ułamek łańcuchowy pozwalający wyreprezentować liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ wykazuje zadziwiającą regularność, w przeciwieństwie do efektu zapisu dziesiętnego, który w ogóle – poprzez skrajną nieregularność – nie jest możliwy.

Ogólnie mówiąc, można udowodnić, że każdą liczbę niewymierną i tylko liczbę niewymierną można przedstawić w postaci ciągłego ułamka łańcuchowego (patrz np. [Rębowski 2009]). Mistrzem w reprezentowaniu liczb niewymiernych za pomocą ciągłych ułamków łańcuchowych był Euler.

W przypadku liczby π wykazał (szczegóły pominiemy), że

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \ddots}}}}}}$$

Jest to jednocześnie jeden z dowodów na to, że π jest liczbą niewymierną.

2.6. Liczba π a najpiękniejszy wzór matematyki

Zanim przedstawimy najpiękniejszy wzór matematyki, potrzebujemy jeszcze jednej ważnej liczby rzeczywistej. Liczba π związana jest z równie ważną liczbą, zwaną *liczbą Eulera*¹⁰, którą symbolicznie oznaczamy literą e . Domyślamy się, na czym polega problem – jest ona liczbą niewymierną, co po raz pierwszy pokazał Euler¹¹.

Znanych jest kilka sposobów definiowania liczby e . Wspomnimy tutaj tylko o tych najbardziej znanych.

1. Liczbę e definiuje się¹² jako granicę ciągu rosnącego i ograniczonego z góry (a_n) , gdzie

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Większość Czytelników tego tekstu zapewne w takich okolicznościach zapoznała się z tą liczbą.

2. O wiele mocniejszym wynikiem jest przedstawienie liczby e jako sumy następującego szeregu liczbowego¹³

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Argumentów na to jest wiele. Jednym z nich jest szybkość zbieżności tego szeregu do e , która jest nieporównanie większa, aniżeli ciągu (a_n) . Kolejny, koronny, argument wykorzystuje ten szereg do zdefiniowania jednej z najważniejszych funkcji elementarnych – funkcji wykładniczej

$$\mathbf{R} \ni x \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3. Niech f oznacza funkcję rzeczywistą różną od stałej i różniczkowalną, dla której

$$f'(x) = f(x) \text{ dla wszystkich rzeczywistych } x.$$

Wtedy f musi być eksponentą.

4. Weźmy funkcję f daną wzorem

$$[1, \infty) \ni x \longrightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Wówczas jedynym rozwiązaniem równania $f(x) = 1$ jest liczba e .

¹⁰ Czasami nazywana jest *liczbą Nepera*. J. Napier (Neper) (1550–1617), szkocki właściciel ziemski jest odkrywcą logarytmów naturalnych, które w podstawie miały liczbę e .

¹¹ Jest nawet przestępna, co wykazał Ch. Hermite (1822–1901). Z prac Hermite’a korzystał później Lindemann, dowodząc przestępności liczby π .

¹² Po raz pierwszy zrobił to J. Bernoulli (1667–1748).

¹³ Wynik ten należy do Eulera. Od 1728 roku liczba ta oznaczana jest symbolem e .

Istnieje ścisły związek pomiędzy tymi dwiema ważnymi liczbami. Po raz pierwszy dostrzegł to A. de Moivre (1667–1754) pokazując, że wynik operacji $n!$ jest asymptotycznie równy $cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, dla pewnej stałej rzeczywistej c . Oznacza to, że

$$\frac{n!}{cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \longrightarrow 1.$$

Następnie J. Stirling (1692–1770) poprawił ten wynik, pokazując, że stała c we wzorze de Moivre’a jest równa $\sqrt{2\pi}$. Wynik ten przeszedł do historii jako tzw. *wzór Stirlinga* w postaci

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

albo równoważnie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Stąd już mały krok do sygnalizowanej zależności pomiędzy liczbami π i e ,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Po tych dywagacjach na temat liczby Eulera możemy wrócić do wyjaśnienia, co rozumiemy przez najpiękniejszy wzór w matematyce. Związane to jest z kolejnym wielkim odkryciem, sformalizowanym przez Gaussa i W.R. Hamiltona (1805–1865), a dotyczącym ciała liczb zespolonych¹⁴. Jest rzeczą zdumiewającą, że Gaussowi brakło wyobraźni i poprzestał na algebraicznym opisie liczb zespolonych, nie zauważając potrzeby wykorzystania ich interpretacji geometrycznej, aczkolwiek w literaturze mówi się o *plaszczyźnie Gaussa*¹⁵.

Spojrzenie na liczby zespolone z perspektywy geometrii spowodowało, że dotychczasowy kartezjański układ współrzędnych należało zastąpić układem polarnym, zwanym też biegunowym. W układzie takim każdą liczbę zespoloną z rozumianą jako punkt płaszczyny zespolonej można jednoznacznie opisać parą liczb:

- ρ – jej odległością od ustalonego punktu, zwaną *modułem* $|z|$
- φ – jej azymutem liczonym względem ustalonej półprostej, zwanej *argumentem głównym* $\arg z$.

Doprowadziło to do *postaci wykładniczej* liczby zespolonej, którą po raz pierwszy metodami czysto analitycznymi uzyskał Euler¹⁶

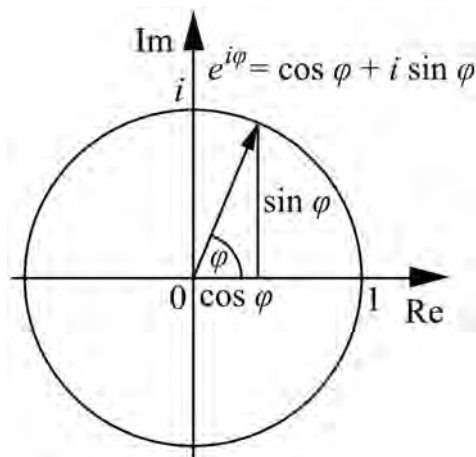
$$z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

¹⁴ Liczby zespolone odkrył o wiele wcześniej Girolamo Cardano (1501–1576), który nie wierząc w rzeczywiste istnienie odkrytych liczb, liczbie zespolonej i nadał nazwę *jednostki urojonej*.

¹⁵ Zauważył to po raz pierwszy matematyk norwesko-duński J. H. Wessel (1745–1818).

¹⁶ Euler również nigdy nie widział interpretacji geometrycznej przedstawionej na rys. 2. W serwisie YouTube (<http://www.youtube.com/watch?v=zApXlUlkpNs> & feature) na temat tego wzoru zamieszczono film pokazujący dowód wzoru Eulera.

gdzie i oznacza jednostkę urojoną wprowadzoną przez G. Cardano (patrz przyp. 11).



Rys. 2. Ilustracja geometryczna wzoru Eulera dla $\rho = 1$

Podstawmy we wzorze Eulera $\rho = 1$, $\varphi = \pi$. Dostaniemy wtedy

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Oto najpiękniejszy wzór matematyki! Urzeka swoją prostotą i przejrzystością. Łączy on w sobie wysiłek intelektualny wielu pokoleń matematyków. Pokazuje siłę i skuteczność rozumowania opartego na starej regule arystotelowskiej posługującej się tylko *prawdą* i *falszem*. Kojarzy teorię liczb z zaawansowanymi metodami teorii funkcji rzeczywistych, geometrię z abstrakcyjną strukturą ciała zespolonego. Znalazło się w nim miejsce na pięć najważniejszych liczb, bowiem:

- Liczby 0 i 1 stanowią fundament arytmetyki liczb wymiernych, jako *elementy neutralne* dwóch działań arytmetycznych: dodawania i mnożenia. Bez tych liczb nie byłoby liczb przeciwnych, a więc i ujemnych oraz odwrotnych, czyli ułamków.
- O roli liczby π wiemy już dostatecznie dużo i darujemy sobie dodatkowe komentarze.
- Znaczenie liczby Eulera jest przeogromne. Wspomnieliśmy o eksponencie, wzorze Stirlinga. Należy również wspomnieć np. o *logarytmie naturalnym* czy *rozkładzie normalnym* jako centralnym w teorii prawdopodobieństwa.
- Uzupełnienie zbioru $\{0, 1\}$ liczbą i pozwoliło wykonać, jak pokazał to Hamilton i Gauss, konstrukcję, która rozszerzyła ciało liczb rzeczywistych do ciała liczbowego, dla którego każde równanie algebraiczne nad tym ciałem ma co najmniej jeden pierwiastek¹⁷.

¹⁷ Jest to słynne *podstawowe twierdzenie algebry Gaussa*, które oznacza, że ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte.

Na koniec powinniśmy wyraźnie podkreślić, że zbiór „ważnych” liczb w matematyce jest o wiele obszerniejszy. Należą do nich na pewno liczby: Fibonacciego, Fermata, Bernoulliego, Catalana, Mersenne’a, Stirlinga, stała Eulera i wiele innych (patrz np. [Rębowski 2009]).

Bibliografia

- Aczel A.D., *Wielkie twierdzenie Fermata, rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.
- Boyer C., *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN, Warszawa 1964.
- Cajori F., *A history of Mathematics*, MacMillan and CO, 1994.
- Courant R., Robbins H., *Co to jest MATEMATYKA*, wyd. drugie, PWN, Warszawa 1962.
- Downing D., *Dictionary of Mathematics terms*, third edition, Barrons’s Educational Series, Inc. 1995.
- Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom II, wyd. drugie, PWN, Warszawa 1976.
- Guedj D., *Twierdzenie papugi*, Grupa Wydawnicza Bertelsmann Media, Warszawa 2001. <http://mathworld.wolfram.com>, 28.09.2011.
- Merzbach U.C., Boyer C.B., *A history of Mathematics*, third edition, John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- Rębowski R., *3,14 – czyli imieniny liczby π* , „Zeszyty Naukowe” PWSZ im. Witelona w Legnicy 2011, nr 7.
- Rębowski R., *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2009.
- Sierpiński W., *Wstęp do teorii liczb*, PZWSz, Warszawa 1965.
- Stein J.D., *Cosmic Numbers. The Numbers That Define Our UNIVERSE*, Basic Books, New York, 2011.
- Tanton J., *Encyclopedia of Mathematics*, Facts On File, Inc. 2005.
- Weisstein E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, second edition, van Nostrand Reinhold, New York 1989.

SUMMARY

On the number π equal to 3.141592653589793... from the perspective of probability theory and not only.

Part one

The paper presents the achievements of several generation of mathematics who contributed by their researching to clarify the meaning and the role of the number π in mathematics. The first part of the paper focuses on methods used in the theory of real

functions, geometry and number theory. In most situation, they tried to recreate the reasoning and techniques of accounting which led to such spectacular results as general Leibniz rule, Eulers formula or the relationship of the number π with Riemann zeta function. Other ways of representing number π was reminded in the example of Walls product and Eulers infinite continued fractions. Moreover, the place of number π was mentioned in the greatest formula of mathematics which is Eulers formula and its connection with another important number, Eulers number.

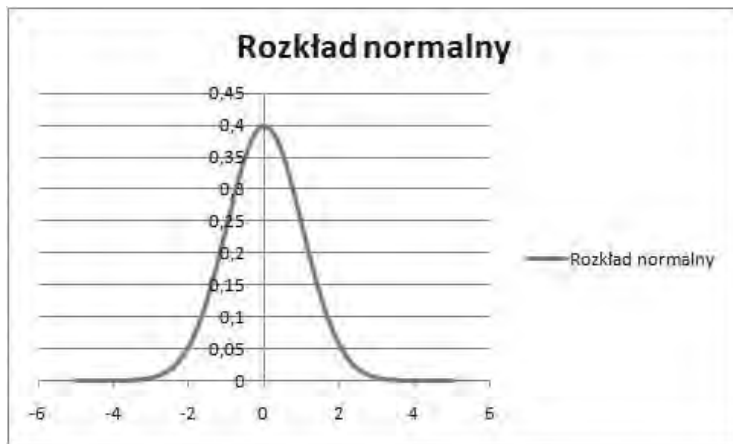
Key words: number π , power series, harmonic series, prime number, continued fraction.

1.1. Liczba π a krzywa dzwonowa Gaussa

Weźmy następującą funkcję

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ dla } x \in \mathbf{R},$$

której wykres przedstawia rys. 1¹.



Rys. 1. Funkcja dzwonowa Jouffretta

Okazuje się², że dla tej funkcji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

co oznacza, że funkcja dzwonowa może być traktowana jako *gęstość ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa* (patrz np. [Feller 1969]). Rozkładem tym jako pierwszy posługiwał się de Moivre w 1773 roku. Jego oficjalna nazwa, jako *rozkładu normalnego*, ukuta została w 1875 roku przez CH. S. Peirece'a (1839–1914), F. Galtona (1822–1911) i W. Lexisa (1837–1914). Tymczasem jeśli zajrzemy do dowolnego podręcznika z teorii prawdopodobieństwa, zauważymy, że synonimem nazwy tego rozkładu jest *rozkład Gaussa*. Niektórzy mówią, że zadziało w tym wypadku jedno z *praw Murphy'ego*, tzw. *prawo Stingera*³. Myślę, że Czytelnik

¹ W literaturze niesłusznie nazywana funkcją dzwonową Gaussa. Termin ten pochodzi od francuskiego oficera-artyleryzisty E. Jouffretta (1837–?) z 1872 roku.

² Co wcale nie jest takie oczywiste, bowiem funkcja pierwotna funkcji $e^{-\frac{x^2}{2}}$ nie jest funkcją elementarną. Oznacza to, że przy liczeniu tej całki nie można korzystać ze standardowego twierdzenia Riemanna–Newtona–Leibniza (patrz np. [Feller 1969]).

³ Brzmi ono; „Włączone do kontaktu lepiej działa”.

wybaczy, jeśli wstrzymamy się od skomentowania tego przypadku. Z drugiej strony powinniśmy mieć świadomość, że co jak co, ale Gauss na to sobie zasłużył!

Znaczenie liczby π w omawianej sytuacji sprowadza się do roli *czynnika normującego* dla funkcji $e^{-\frac{x^2}{2}}$, bez którego funkcja ta nie może być funkcją gęstości żadnego rozkładu prawdopodobieństwa. Z drugiej strony, jak zauważyli to już de Moivre i P. S. Laplace (1749–1827), w przypadku rozkładów dyskretnych, a uogólnione zostało to na klasę dowolnych rozkładów posiadających *drugi moment*⁴, rozkład ten jest rozkładem granicznym dla ciągu uśrednionych niezależnych kopii danego rozkładu. Jest to fundamentalne twierdzenie klasycznej teorii prawdopodobieństwa tłumaczące konsekwencje *stochastycznego* (czyli losowego) opisu zjawisk. Wbrew obawom wynikającym z intuicyjnego pojmowania zjawiska losowego, natura losowa wykazuje jednak różne przejawy regularności. Jedną z nich właśnie opisuje słynne CTG.

1.2. Problem geometryczny jako zjawisko losowe

Przypuśćmy, że z odcinka $[0, 1]$ losowo wybieramy dwie liczby a, b ⁵. Należy rozstrzygnąć, jakie jest prawdopodobieństwo, że można zbudować trójkąt rozwartokątny, którego odpowiednie boki mają długości równe $a, b, 1$.

Tak jak zawsze w takim przypadku, analizę problemu zaczniemy od skonstruowania przestrzeni probabilistycznej, która pozwoli nam opisać zjawisko *stricte* natury geometrycznej językiem teorii prawdopodobieństwa. Z punktu widzenia obserwacji przedstawionego eksperymentu⁶ wynikiem powinny być obie liczby. Ponieważ dopuszczamy sytuację, że wylosowane liczby mogą być jednakowe, nie możemy do tego celu użyć opisu mnogościowego. Dlatego aby je od siebie odróżnić, musimy ustawić je w ciąg, np. (a, b) . To z kolei nie powinno oznaczać, że w takiej kolejności liczby te były wylosowane. Po wylosowaniu obu i zapamiętaniu wyniku losowania, na pierwszym miejscu odnotowujemy liczbę, która ma nazwę a . Para ta będzie zdarzeniem elementarnym konstruowanej przestrzeni probabilistycznej, czyli

$$\omega = (a, b).$$

W takim razie przestrzeń wszystkich zdarzeń elementarnych Ω będzie miała postać

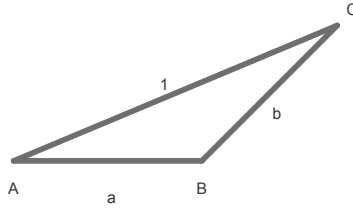
$$\Omega = \{\omega = (a, b) : a, b \in (0, 1)\}.$$

⁴ Mowa tutaj jest o twierdzeniu Lindenberga–Lévy’ego, zwanym *centralnym twierdzeniem granicznym* (CTG) (patrz np. [Feller 1969]).

⁵ Losowo oznacza, że ich wybór nie jest konsekwencją żadnego planu. Ważne natomiast jest to, czy wybieramy je w kolejności jedną po drugiej, czy obie naraz, bowiem to drugie oznacza, że *implicite* zakładamy, że wybrane liczby są różne. Umówimy się, że obowiązuje pierwszy wariant wyboru, ale nie jest ważna kolejność tak wylosowanych liczb.

⁶ Tak nazwaliśmy losowanie dwóch liczb z odcinka.

Zobaczmy, jak będzie wyglądało zdarzenie opisujące w języku teorii prawdopodobieństwa powstanie figury płaskiej – trójkąta rozwartokątnego. Ponieważ w każdym trójkącie suma długości dwóch dowolnych jego boków jest większa od długości boku pozostałego, trójkąt ten (jako rozwartokątny) musi wyglądać tak jak to przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Trójkąt rozwartokątny o bokach $a, b, 1$

Z powyższej uwagi wynika, że wylosowane liczby $a, b \in (0, 1)$ muszą być takie, że $a + b > 1$. Niech A oznacza zdarzenie, że w wyniku wylosowania liczb powstał trójkąt rozwartokątny. Wtedy

$$\omega \in A \Rightarrow \omega = (a, b) \in \Omega: b > 1 - a.$$

Z drugiej strony, jeśli z liczb $a, b, 1$ ma powstać trójkąt jak na rys. 2, to ich długości muszą być takie, że $a + b > 1$ oraz

$$1 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta),$$

gdzie β jest miarą kąta rozwartego w tym trójkącie⁷. Ale wtedy $\cos(\beta) < 0$ i dlatego

$$a^2 + b^2 < 1.$$

Pokazaliśmy tym samym, że

$$A = \{\omega \in \Omega: b > 1 - a \text{ i } a^2 + b^2 < 1\}.$$

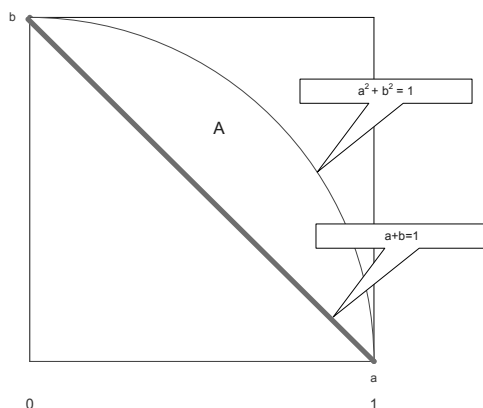
Oznacza to, że zdarzenie A jest podzbiorem borelowskim iloczynu kartezjańskiego $(0, 1) \times (0, 1)$ i dlatego σ -ciało wszystkich zdarzeń jest rodziną wszystkich podzbiorów borelowskich kwadratu $(0, 1) \times (0, 1)$. Mamy więc do czynienia z modelem geometrycznym płaskim przestrzeni probabilistycznej. W szczególności oznacza to, że $P(A)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia A liczymy według reguły

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

⁷ Jest to znane twierdzenie cosinusów.

gdzie symbolem $|A|$ oznaczyliśmy pole odpowiedniej figury płaskiej. Z rys. 3 można zauważyć, że $|A| = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ i dlatego $P(A) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

To, że liczba π pojawiła się akurat w rozwiązaniu tego problemu, nie powinno być zaskoczeniem – przecież był to problem związany z geometrią płaszczyzny. Jak zobaczymy, kolejny problem będzie już mniej intuicyjny i wymaga większej uwagi.



Rys. 3. Interpretacja geometryczna zdarzenia dla problemu trójkąta

1.3. Igła Buffona też potrzebuje liczby π

Wyobraźmy sobie, że mamy do dyspozycji płaszczyznę, na której usytuowano poziomo w odległości d proste równoległe. Eksperyment polega na tym, że opuszczamy na tę płaszczyznę igłę tej samej długości co d . Doświadczenie przebiega prawidłowo, jeśli igła na skutek upadku będzie leżała na powierzchni płaszczyzny.

Problem *igły Buffona*⁸ sprowadza się do następującego pytania:

z jakim prawdopodobieństwem igła po upadku przecięnie prosta na tej płaszczyźnie?

Zanim przejdziemy do opisu modelu probabilistycznego tego doświadczenia, zwrócimy uwagę na jeszcze kilka szczegółów:

1. Termin „przecięnie” wyklucza zjawisko *dotknięcie*, zatem igła może przeciąć co najwyżej jedną taką linię.
2. Umówimy się, że eksperymentator wykonujący rzuty igłą i odczytujący jej położenie po upadku zajmuje stałą orientację względem linii na płaszczyźnie.
3. Jeśli igła upadnie, to w przypadku kiedy nie jest prostopadła do linii, będziemy wyróżniali jej *lewy koniec*, w przeciwnym razie jej *dolny koniec*.

⁸ Właściwie George-Louis Leclerc, hrabia Buffon. Problem ten Leclerc sformułował po raz pierwszy w 1773 roku, rozwiązał dopiero cztery lata później.

Możemy teraz określić układ odniesienia, który pozwoli nam na opis leżącej po upadku igły na płaszczyźnie.

Układem tym będzie ta (jedyna) prosta, która znajduje się poniżej wyróżnionego końca naszej igły. Sam opis położenia igły będzie polegał na podaniu wartości dwóch liczb (x, α) , gdzie:

- x oznacza odległość końca igły od tej prostej,
- α jest miarą kąta skierowanego liczonego od tej prostej, w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara, do prostej wyznaczonej przez igłę.

Taki opis położenia igły, czyli opis wyniku doświadczenia, będzie zdarzeniem elementarnym. Zatem

$$\Omega = \{\omega = (x, \alpha) : x \in (0, d), \alpha \in [0, \pi)\}.$$

Niech A opisuje sytuację, kiedy w wyniku poprawnie przeprowadzonego eksperymentu igła przetnie jedną z linii.

Zauważmy, że

$$\omega \in A \Leftrightarrow x + d \sin \alpha > d, \text{ dla } \alpha \in (0, \pi),$$

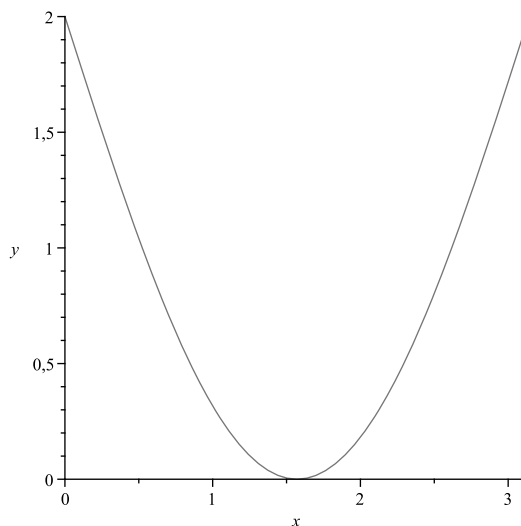
czyli

$$A = \{(x, \alpha) : \alpha \in (0, \pi), x = x(\alpha) \in (d(1 - \sin \alpha), d)\}.$$

Zbiór ten jest podzbiorem borelowskim płaszczyzny i mamy do czynienia, jak w poprzednim podrozdziale, z dwuwymiarowym modelem geometrycznym.

Z drugiej strony z teorii całki dobrze wiadomo, że jest to tzw. trapez krzywoliniowy (rys. 4), a jego wielkość, czyli pole powierzchni, można obliczyć za pomocą całki, dlatego

$$P(A) = \frac{1}{\pi d} \int_0^\pi (d - d(1 - \sin \alpha)) d\alpha = \frac{d}{\pi d} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$



Rys. 4. Interpretacja geometryczna zdarzenia dla problemu Buffona dla $d = 2$

Teraz wszystko jest jasne i nikogo nie powinno dziwić, że liczba π pojawia się w rozwiązaniu problemu Buffona. Opis probabilistyczny podkreśla związek rzutu igłą z geometrią – obrotem igły zauważanym z punktu widzenia linii poziomych pokrywających płaszczyznę.

1.4. Losowanie liczb względnie pierwszych a liczba π

Zacznijmy od definicji. Powiemy, że dwie liczby całkowite p, q są *względnie pierwsze*, jeśli ich największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1. Na przykład 4 i 8 nie są względnie pierwsze, natomiast 7 i 9 są względnie pierwsze. Wprost z definicji każde dwie liczby pierwsze muszą być względnie pierwsze. Ponadto łatwo uzasadnić⁹, że dwie kolejne liczby naturalne też są względnie pierwsze. Mimo że nie każde dwie liczby naturalne p, q są względnie pierwsze, to zawsze dzieląc obie przez ich największy wspólny dzielnik, dostaniemy dwie liczby p', q' , które już są względnie pierwsze. Ponadto, jeśli każda z liczb nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą, to sama jest liczbą pierwszą. Dalej skorzystamy z tej praktycznej uwagi. Umówimy się, że ograniczymy się tylko do zbioru liczb naturalnych.

Załóżmy, że wybór pary liczb będziemy traktowali jako zdarzenie elementarne. Ponieważ interesują nas tylko różne wylosowane liczby oraz nie ma powodów, aby spośród wylosowanych wyróżnić jedną z nich, przyjmijmy, że $\omega = \{a, b\}$. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana para liczb jest względnie pierwsza. Postawmy formalne pytanie:

Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A ?

Jeśli chcemy odnieść się do tego pytania, to musimy ustalić model probabilistyczny opisujący omawiane zjawisko. Wiemy już, że Ω jest zbiorem wszystkich dwuelementowych podzbiorów $\{n, m\}$, rodzina wszystkich możliwych zdarzeń jest rodziną wszystkich podzbiorów Ω . Pozostaje problem funkcji prawdopodobieństwa P . Ponieważ nie ma powodu, aby jakaś wylosowana para była wyróżniona, należy przyjąć, że w tym modelu dla każdej $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\})$ jest jednakowe¹⁰.

Z drugiej strony Ω nie jest zbiorem skończonym, więc gdyby $P(\{\omega\}) > 0$, to byłoby $P(\Omega) > 1$, co – jak dobrze wiemy – jest niemożliwe. Oznacza to, że nie mamy żadnych teoretycznych podstaw twierdzić *a priori*, że wybór pary liczb można opisać modelem probabilistycznym i na tej podstawie odpowiedzieć na postawione pytanie. Jak wykazaliśmy wyżej, takiego modelu po prostu nie ma, bowiem nie istnieje nieskończony model jednorodny.

Można jednak pozostać przy opisie probabilistycznym dyskutowanego zjawiska, o ile założymy, że wybór pary liczb będzie odbywał się ze skończonego podzbioru zbioru liczb naturalnych. Z formalnego punktu widzenia będziemy mieli wtedy do czynienia z ciągiem przestrzeni probabilistycznych $(\Omega_n, \Sigma_n, P_n)$ oraz ciągiem zdarzeń $A_n \in \Sigma_n$, gdzie $A_n = A \cap \Omega_n$,

⁹ Wystarczy skorzystać z zasady podzielności.

¹⁰ Taki model probabilistyczny nazywamy dyskretnym, jednorodnym (patrz np. [Rębowski 2006]).

$\bigcup A_n = A$ i ciąg $P_n(A_n) \rightarrow \mathbf{p}$ dla pewnej liczby $\mathbf{p} \in (0, 1)$. Wtedy liczbę \mathbf{p} tak skonstruowaną możemy nazwać *asymptotycznym prawdopodobieństwem* zdarzenia A . Powinniśmy jednak pamiętać, że liczba ta nie jest prawdopodobieństwem w rozumieniu teorii prawdopodobieństwa. Tak też będziemy rozumieli postawiony na wstępie problem. Poniżej w szczegółach podamy sposób wyliczenia wyrazów ciągu $P_n(A_n)$ i jego granicy \mathbf{p} , która, jak domyślamy się, związana jest z liczbą π .

Ustalmy w tym celu liczbę naturalną $n \geq 2$ i weźmy pod uwagę ciąg zbiorów

$$\Omega_n - \text{rodzina wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru } \{1, 2, \dots, n\}$$

z σ -ciałem zdarzeń Σ_n złożonym ze wszystkich podzbiorów Ω_n i prawdopodobieństwem klasycznym P_n . Przez P_n oznaczymy zbiór wszystkich liczb pierwszych mniejszych od n . Dla ustalonej liczby pierwszej $p \in P_n$, niech $A_{p,n}$ oznacza zdarzenie w Σ_n złożone z takich zdarzeń elementarnych $\omega = \{m, k\} \in \Omega_n$, że liczba p nie dzieli m i k . Dalej celem uproszczenia obliczeń założymy, że

$$n \in \{p_1 p_2, p_1 p_2 p_3, \dots\},$$

gdzie przez p_j oznaczyliśmy kolejne liczby pierwsze.

Ustalmy takie n i liczbę pierwszą $p_j < n$. Z definicji liczb względnie pierwszych (pisaliśmy o tym na wstępie) wynika, że

$$\bigcap_{p_j \in P_n} A_{n,p_j} = \{\omega \in \Omega_n : \omega = \{m, k\} \text{ oraz } p_j \text{ nie dzieli żadnej z nich}\}$$

Dlatego

$$A \cap \Omega_n = A_n = \bigcap_{p_j \in P_n} A_{n,p_j}.$$

Obliczymy najpierw $P_n(A_{p,n})$. W tym celu obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne mamy

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{|A_{n,p_j}^c|}{|\Omega_n|}.$$

Z opisu zdarzeń elementarnych wynika, że Ω_n jest zbiorem wszystkich dwuelementowych kombinacji zbioru n -elementowego, dlatego $|\Omega_n| = \binom{n}{2}$. Zliczymy elementy zbioru A_{n,p_j}^c . Z definicji elementy te są postaci

$$\omega = \{m, k\}, \text{ gdzie } p_j \text{ dzieli obie liczby } m, k.$$

Dla wygody założmy, że $m > k$ (wiemy, że zawsze są różne). Oznacza to, że jeśli

$$m \in \{p_j, 2p_j, \dots, sp_j\} \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

gdzie z założenia o wyborze n , $n = sp_j$ dla pewnej liczby s . Jeśli teraz wybierzemy $m = lp_j$ ($l = 1, 2, \dots, s$), to takiemu wyborowi odpowiada wybór liczby k też podzielnej przez p_j na $l - 1$ sposobów. Oznacza to, że

$$|A_{n,p_j}^c| = 0 + 1 + 2 + \dots + s - 1 = \frac{s}{2}(s - 1).$$

Stąd

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{\frac{s}{2}(s - 1)}{\binom{n}{2}},$$

co po uproszczeniu daje

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{s(s - 1)}{n(n - 1)}, \text{ skąd } P_n(A_{n,p_j}) = 1 - \frac{s(s - 1)}{n(n - 1)}, \text{ gdzie } s = \frac{n}{p_j}.$$

Porównamy teraz wyliczone prawdopodobieństwo zdarzenia A_{n,p_j} z iloczynem $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right)$. Nietrudno pokazać¹¹, że istnieje ciąg $\gamma_n(p_j)$, że dla każdego j

$$1 - \frac{1}{p_j^2} \leq P_n(A_{n,p_j}) \leq \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \gamma_n(p_j),$$

oraz ciąg $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \gamma_n(p_j)$ jest zbieżny do jedności. Mnożąc dla kolejnych liczb pierwszych $p_j \in \mathcal{P}_n$ ostatnią nierówność stronami, otrzymamy

$$\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \leq \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} P_n(A_{n,p_j}) \leq \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \gamma_n(p_j),$$

Można udowodnić, że¹²

$$P_n(A \cap \Omega_n) = P_n(A_n) = P_n\left(\bigcap_{p_j \in \mathcal{P}_n} A_{n,p_j}\right) = \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} P_n(A_{n,p_j}^c).$$

Ostatecznie pozwala to nam napisać następujące przybliżenie

$$P_n(A \cap \Omega_n) \approx \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right).$$

Musimy sobie teraz przypomnieć wynik z podrozdziału 2.3 pierwszej części pracy [Rębowski 2012b], stwierdzający, że iloczyn $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right)$ zbieżny jest do $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$. W takim razie dostaniemy

$$P_n(A \cap \Omega_n) \approx \mathbf{p} = \frac{6}{\pi^2}$$

albo precyzyjniej

$$P_n(A \cap \Omega_n) \longrightarrow \mathbf{p} = \frac{6}{\pi^2}.$$

¹¹ Szczegóły tego elementarnego rachunku pominięliśmy. Czytelnika zachęcamy mimo wszystko do jego powtórzenia.

¹² Wzór ten ma swoją interpretację probabilistyczną. Równość ta oznacza, że występujące w niej zdarzenia są *stochastycznie niezależne* (patrz [Weaver 1970]).

Przyznać trzeba, że wyniki ten jest zdumiewający z punktu widzenia obecności liczby π . Z drugiej strony należy też stwierdzić, że droga, jaka do niego prowadzi, wcale nie jest łatwa. Pominęliśmy przecież sporo szczegółów w przedstawionym rozumowaniu oraz skorzystaliśmy z wielu faktów. Taka jest właśnie matematyka!

2. Zakończenie

Zamiarem naszym było pokazanie w miarę w przystępny sposób podstawowych faktów związanych z liczbą π . Zależało nam na tym, aby zrobić to wszechstronnie, zarówno uwzględniając stronę merytoryczną zagadnienia, jak i nie mniej ważny aspekt historyczny. Zdajemy sobie doskonale sprawę, że o wielu problemach nie napisaliśmy, że pominęliśmy inne ważne¹³ czy wkład innych nie wymienionych tutaj uczonych. Jasne jest, że na kilkudziesięciu stronach jest to niemożliwe. Artykuł z powodów technicznych podzielony został na dwie części. Pierwsza zawiera aspekty analityczne zagadnienia, druga probabilistyczne. Oczywiście literatura przedmiotu poświęcona omawianej tematyce jest bardzo obszerna. Czytelnika bardzo zachęcamy do dalszego studiowania. Mamy nadzieję, że artykuł ten spełni swoją rolę – po jego lekturze Czytelnik zauważy piękno matematyki oraz jej moc. Zrozumie, że jej studiowanie wymaga, owszem, sporego zaangażowania i wysiłku intelektualnego, ale warto to robić. Zauważy też fenomen, który dobrze jest widoczny z perspektywy historii matematyki i nie tylko, polegający na tym, że byty kilkunastu ludzkich pokoleń potrafi połączyć produkt ludzkiego rozumu. Ta, nazwijmy ją, zasada ciągłości jest kluczowa dla człowieka. Jest gwarancją, że wkład jednostki ma charakter ponadczasowy i z tego punktu widzenia jest uniwersalny.

Dlatego uznaliśmy, że tym największym winni jesteśmy pamięć, zamieszczając w ostatnim rozdziale coś w rodzaju galerii ich portretów. Czytelnika zachęcamy do lektury pozycji o charakterze historycznym cytowanych w tym artykule celem wzbogacenia wiedzy o naszych bohaterach.

¹³ Chociażby słynną *zasadę nieoznaczoności* Heisenberga, czy też równanie pola grawitacyjnego ogólnej teorii względności Einsteina (patrz np. [Stein 2011]).

3. Galeria matematyków związanych z liczbą π



Rys. 5. Euklides (365–300 p.n.e.)



Rys. 6. Archimedes (287–212 p.n.e.)



Rys. 7. G. Cardano (1501–1576)



Rys. 8. L. van Ceulen (1540–1610)



Rys. 9. P. Fermat (1601–1665)



Rys. 10. J. Wallis (1616–1703)



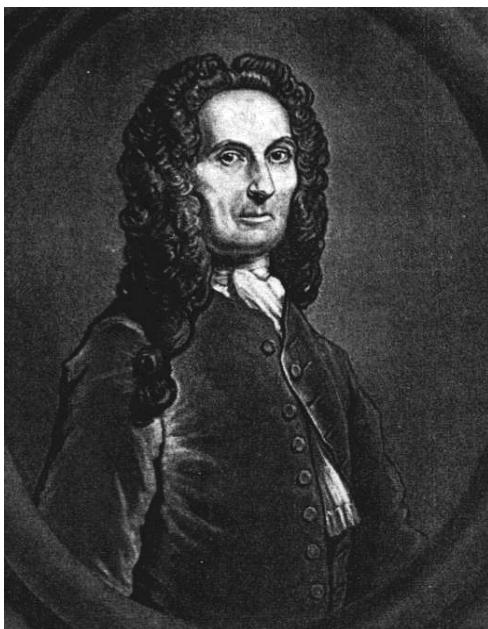
Rys. 11. I. Newton (1643–1727)



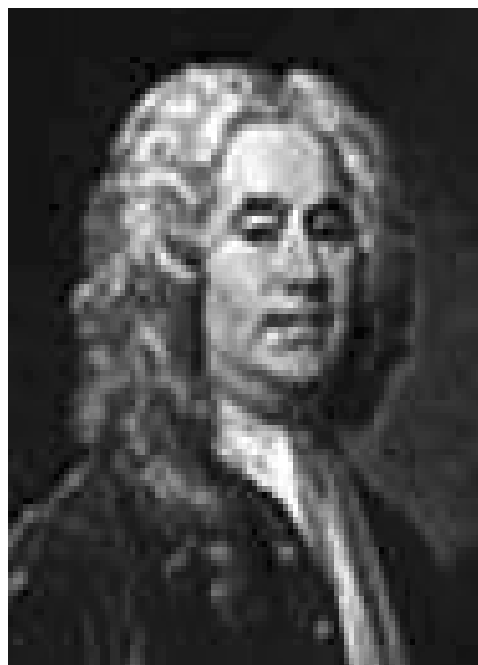
Rys. 12. G. W. Leibniz (1646–1716)



Rys. 13. J. Bernoulli (1667–1748)



Rys. 14. A. de Moivre (1667–1754)



Rys. 15. W. Jones (1675–1749)



Rys. 16. B. Taylor (1685–1731)



Rys. 17. L. Euler (1707–1783)



Rys. 18. J.H. Lambert (1728–1777)



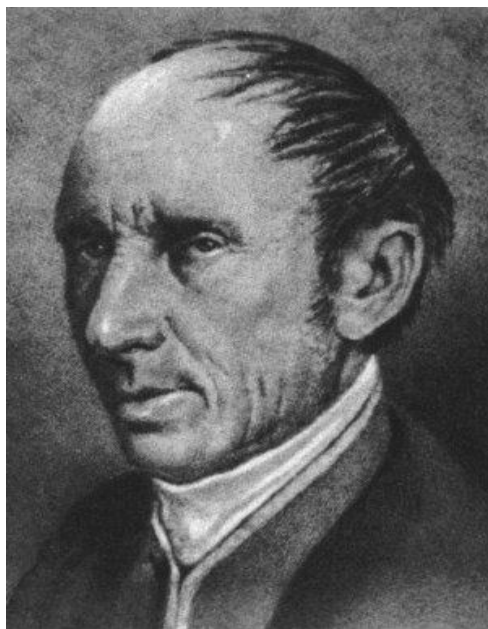
Rys. 19. P. Laplace (1749–1827)



Rys. 20. J.B.J. Fourier (1768–1830)



Rys. 21. C. F. Gauss (1777–1855)



Rys. 22. A. L. Cauchy (1789–1857)



Rys. 23. W. R. Hamilton (1805–1865)



Rys. 24. Ch. Hermite (1822–1901)



Rys. 25. B. Riemann (1826–1866)



Rys. 26. F. von Lindemann (1852–1939)



Rys. 27. J. Hadamard (1865–1963)



Rys. 28. S. Ramanujan (1887–1920)

Bibliografia

- Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1969.
- Rębowski R., *3,14 – czyli imieniny liczby π* , „Zeszyty Naukowe” PWSZ im. Witelona w Legnicy, w przygotowaniu.
- Rębowski R., *O liczbie π równej 3, 141592653... z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko. Część pierwsza*, „Zeszyty Naukowe” PWSZ im. Witelona w Legnicy 2011, nr 7.
- Rębowski R., *Podstawy metod probabilistycznych*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2006.
- Stein J.D., *Cosmic Numbers, The Numbers That Define Our UNIVERSE*, Basic Books, New York 2011.
- Weaver W., *Elementarz rachunku prawdopodobieństwa*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1970.

SUMMARY

On the number π equal to 3.141592653589793 . . . from the perspective of probability theory and not only.

Part two

The publication presents four classic situations concerning the appearance of the number π in probabilistic issues. Particular attention is given to geometric probabilistic model showing the example of the random structure of obtuse triangle and Buffon's needle problem. The solution of drawing co-prime numbers is shown in details with the special recall of the connection with the Riemann zeta function.

KEY WORDS: number π , Gaussian distribution, Buffon's needle, geometric probability.

Witold Urbanik

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

Jak wygląda elektron, gdy nikt nie patrzy?

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono w prosty sposób wyprowadzenie nierówności Bella, odgrywającej ważną rolę w próbach zrozumienia natury cząstek elementarnych. Nierówność ta, wyprowadzona przy pewnych „rozsądnych” założeniach realizmu i lokalności, nie jest spełniona w mikroświecie. Oznacza to więc, że owe założenia nie muszą należeć do paradygmatu poznania mikroświata. Jego „dziwność” stawia wysokie wymagania naszej wyobraźni opartej na intuicji wywodzącej się ze świata makroskopowego.

Słowa kluczowe: nierówność Bella, eksperyment Sterna–Gerlacha, mechanika kwantowa, splątanie kwantowe, realizm, lokalność

1. Wstęp. W jaki sposób istnieją cząstki elementarne?

Tytułowe pytanie może postawić każdy, kogo ciekawi świat, nie tylko ten, który możemy poznać własnym wzrokiem, dotykiem, słuchem... Ta sama dociekliwość kierowała Kolumbem, który chciał poznać, co jest za wielką wodą, czy pionierami badań kosmicznych, którzy chcieli zobaczyć drugą stronę Księżyca. To pytanie dotyczy bardzo podstawowych cech świata cząstek elementarnych – tego świata, którego dziwne prawa zaczęto poznawać u początków ubiegłego wieku, gdy powstawała nowa gałąź fizyki zajmująca się mikroświatem, zwana fizyką kwantową. Na drodze jej rozwoju napotkano problemy dotyczące głębokich filozoficznych podstaw istnienia świata fizycznego oraz granic jego poznania. I właśnie jeden z takich problemów zawiera proste z pozoru tytułowe pytanie. Trzeba jednak na wstępie stwierdzić, że tak postawione w zasadzie... **nie ma sensu** i – jeżeli już – to można je rozumieć tylko jako pewną metaforę. W odniesieniu do elektronu czasowniki „wyglądać” i „patrzyć” są nie na miejscu. Czy elektron lub inną cząstkę elementarną można w ogóle *zobaczyć*? Nasze oko widzi, a mózg analizuje informację zawartą w docierającym do niego strumieniu światła emitowanego przez przedmiot obserwacji lub od niego odbitego. Jak przekonaliśmy się w wieku XX, ale i znacznie wcześniej, niektórzy badacze przyrody intuicyjnie doszli do tego, że światło można traktować jako strumień cząstek zwanych fotonami. Jeśli przyrównamy cząstkę elementarną do ziarenka piasku, to czy moglibyśmy je wykryć, „oświetlając” je strumieniem wody z sikawki strażackiej? Do tego potrzeba bardziej subtelnych metod. Aby *zobaczyć* cząstkę elementarną, należy na przykład trafić ją inną pojedynczą cząstką

i zaobserwować, czyli zmierzyć przy pomocy czułych przyrządów, efekty tego zderzenia. Tak odkrywano cząstki elementarne i większe obiekty mikroświata, takie jak jądra atomów, a i nadal są nadzieje na dalsze odkrycia. W tym celu buduje się mniejsze czy większe „działa” rozpędzające cząstki elementarne. Do tego typu urządzeń należy niedawno zbudowany, a już słynny, Wielki Zderzacz Hadronów (LHC)¹.

Musimy się pogodzić z tym, że cząstki elementarnej nie możemy *zobaczyć* tak jak obiektu makroskopowego, jakim jest na przykład lecąca piłka. Istotna różnica polega na tym, że piłka jako obiekt makroskopowy istnieje dla nas poprzez **niezliczoną liczbę cech** ją określających: kolor, materiał, fakturę z jej drobnymi szczegółami, kształt... i tak dalej, i tak dalej. Ta mnogość cech tworzy tożsamość, niepowtarzalność i odróżnialność od innych obiektów. W przypadku pojedynczych cząstek elementarnych, np. elektronu, eksperyment dostarcza nam jedynie informacji o bardzo ograniczonej liczbie cech (atrybutów), zwykle tylko jednej (np. o położeniu, pędzie). Elektron lub inna cząstka jest dostępna – i w jakimś sensie istnieje dla nas – tylko poprzez ten atrybut powodujący subtelny reakcję naszej aparatury pomiarowej. Stwierdzenie „elektron znajduje się tu” jest skrótem myślowym. W istocie możemy powiedzieć tylko, że nasz przyrząd pomiarowy odebrał sygnał „bycia tu”, czyli że „pojawił się sygnał, że zdarzyło coś w tym, a nie innym miejscu”. Mając dostęp jedynie do atrybutów, dla uproszczenia języka naszego opisu dobudowujemy do nich pewną rzeczywistość, w której żyją hipotetyczne byty. Wyobraźmy sobie następującą, nieco makabryczną, sytuację. Od urodzenia żyjemy w całkowicie zaciemnionym pokoju i do tego mamy ograniczoną swobodę ruchu. Co pewien czas słyszymy bzyczenie. Wyobraźmy sobie, że za tym atrybutem stoi jakiś byt, który wysyła ten dźwięk. Decydujemy się nazywać ten byt „muchą”. W tej sytuacji „mucha” to w istocie dla nas synonim „czystego” atrybutu: „bzyczenia”. Jeśli usłyszymy inny dźwięk, to prawdopodobnie uznamy, że to już nie jest „mucha”. Pojawiają się jednak pewne problemy „metafizyczne”. Czy gdy słyszymy bzyczenie, to zawsze jest ta sama mucha? A może ta sama mucha może wydawać różne dźwięki? Tu musimy uważać! Zadając takie pytania, bezwiednie czynimy pewne z pozoru oczywiste założenie. Mianowicie przyjmujemy, że za dostępnymi nam atrybutami (cechami) stoją jakieś *byty, które posiadają te atrybuty nawet, gdy ich nie obserwujemy*. Innymi słowy – „przymiotniki” odpowiadają jakimś „rzeczownikom”. Taką postawę teoriopoznawczą polegającą na założeniu, że cechy obiektu istnieją niezależnie od obserwacji, nazywa się **realizmem**. Czasami dodaje się jeszcze przymiotnik **lokalny**, gdy twierdzimy, że o tym, co się fizycznie dzieje „tu i teraz”, decydują tylko czynniki, które występują „tu i teraz”. Czy realizm teoriopoznawczy ma jakąś rozsądną alternatywę we współczesnych naukach przyrodniczych? Czy cząstka elementarna może istnieć „w inny sposób” niż obiekt makroskopowy, na przykład piłka? Filozofowie wyraziliby to w pytaniu o ewentualną różnicę w *statusie ontycznym*, czyli „sposobie bycia”, między cząstką i piłką. Czy ma sens zastanawianie się nad problemami tego typu? Ano, poczekajmy.

¹ Więcej informacji o LHC można znaleźć np. na stronie: <http://lhc.fuw.edu.pl>

2. Dziwne prawa świata cząstek elementarnych

Ponieważ w mikroświecie mamy dostęp tylko do cech (atrybutów) cząstek elementarnych, a cechy są **nierozróżnialne** (jak w makroświecie – nie można odróżnić „kulistości” od „kulistości” czy „białości” od „białości”), to cząstki, a raczej te hipotetyczne obiekty, które nazywamy cząstkami, też są **nierozróżnialne**. Nie można do konkretnego elektronu przywiązać kokardki albo go zaobrączkować, by móc śledzić jego losy.

Innym „dziwnym” prawem mikroświata jest tak zwana **zasada nieoznaczoności Heisenberga**². Mówi ona, że nie można **jednocześnie** poznać **dokładnych** wartości pewnych wielkości fizycznych opisujących cząstkę. Nie wynika to z naturalnego ograniczenia dokładności naszych pomiarów wynikającego z niedoskonałości przyrządów pomiarowych lub naszych umiejętności, lecz jest to nieusuwalna cecha mikroświata. Na przykład, jeżeli znamy dokładne położenie elektronu, to nie możemy z dowolną dokładnością zmierzyć jego pędu. Ścisłej mówiąc, iloczyn wartości „niedokładności” określenia położenia (oznacmy ją przez Δx) oraz „niedokładności” pędu Δp nie może być mniejszy od pewnej określonej wartości, która jest wyrażona przez jakąś stałą o randze podstawowej stałej fizycznej \hbar zwanej **stałą Diraca**³ lub częściej po prostu „ \hbar kreślone”. Stała ta powiązana jest z inną zwaną **stałą Plancka**⁴ h wzorem $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Tak więc zasada nieoznaczoności może zostać wyrażona przez nierówność:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Podobna nierówność wiąże „niedokładność” określenia czasu Δt i energii ΔE :

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Ta ostatnia oznacza, że w przypadku **bardzo krótkich przedziałów czasu** (małe Δt) energia cząstki nie jest dokładnie określona (duża „niedokładność” ΔE), a więc na chwilę może zostać złamana... zasada zachowania energii – fundamentalna zasada fizyki, która głosi, że nie może powstać „coś” z „niczego”! Z pustki, która ma oczywiście energię zerową, mogą więc wyskakiwać cząstki, czyli obiekty o niezerowej energii, aby jednak zaraz zniknąć. Próżnia buzuje więc wciąż pojawiającymi się z niebytu i znikającymi wirtualnymi cząstkami.

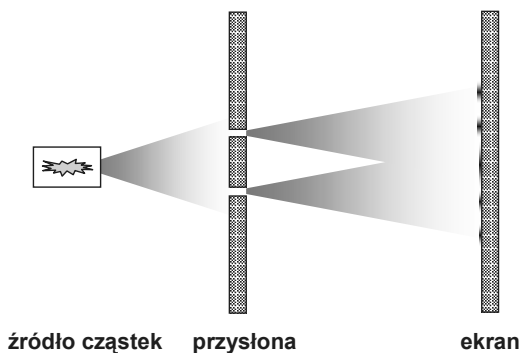
Zasada nieoznaczoności jest konsekwencją **nieprzemienności pomiarów** w ramach wyżej wspomnianych par wielkości fizycznych (x i p oraz t i E). Jeśli najpierw zmierzmy

² Werner Karl Heisenberg – niemiecki fizyk (1901–1976), laureat Nagrody Nobla w 1932 roku.

³ Paul Adrian Maurice Dirac – brytyjski matematyk i fizyk (1902–1984), laureat Nagrody Nobla w 1933 roku.

⁴ Max Karl Ernst Ludwig Planck – (1858–1947), laureat Nagrody Nobla w 1918 roku.

na przykład położenie x cząstki a potem jej pęd p , a następnie uczynimy to w odwrotnej kolejności, to wyniki będą różne. Innymi słowy pomiar jednej wielkości fizycznej wpływa na pomiar innej.



Rys. 1. Eksperyment z dwiema szczelinami (ilustracja własna)

Przedstawione powyżej „dziwne” prawa mikroświata są w pewnym sensie konsekwencją równie „dziwnej” i nieintuicyjnej własności cząstek. No właśnie, czy na pewno *cząstek*? Podczas pewnych eksperymentów obiekty, które zasiedlają mikroświat, zwane cząstkami, ukazują drugą twarz, a jest to twarz... fali. Jakże bowiem inaczej interpretować sytuację, gdy strumień elektronów lub fotonów (cząstek światła) przepuszczany przez dwie szczeliny w postawionej na jego drodze przesłonie daje na ekranie obraz interferencyjny (patrz rys. 1). Na ekranie widać bowiem obszary, które wskazują na wzajemne wygaszenie („anihilację”) dwu strumieni przepuszczanych przez szczeliny, oraz inne obszary, gdzie występuje wzmocnienie. Taki efekt jest charakterystyczny dla zjawisk falowych. A więc cząstki zachowują się w *tych eksperymentach* jak fale. Jako cząstki nie mogłyby przecież zniknąć przy wzajemnym spotkaniu. Nie obserwujemy znikania kul bilardowych, gdy zblizną się do siebie. W przypadku światła efekt interferencji nas nie dziwi, bo jesteśmy przyzwyczajeni do myślenia o nim jako o fali elektromagnetycznej, choć, jak wspomniano, można je traktować również jako strumień cząstek (fotonów). Już Izaak Newton przeczuwał, że można i tak patrzeć na światło.

W innych eksperymentach badane obiekty wyraźnie przejawiają naturę korpuskularną (cząsteczkową). Ta dwoistość okazywana przez obiekty mikroświata nazywana jest **dualizmem korpuskularno-falowym**. Ale nie jest to tylko właściwość cząstek elementarnych. Ów dualizm jest bowiem cechą całego świata fizycznego. Z każdym obiektem, także makroskopowym, można skojarzyć pewną falę, a z falą – cząstkę. Można traktować to tylko jako pewien ciekawy „fakt matematyczny”. Eksperymentalnie uzyskano jednak efekt interferencyjny nawet w przypadku obiektów większych niż cząstki elementarne, a mianowicie cząsteczek chemicznych zbudowanych z kilkudziesięciu atomów. Pozostaje pytanie: Jaki charakter ma owa fala związana z takim czy innym obiektem „korpuskularnym”? Jak należy ją interpretować? Zastanawiano się nad tym od początków fizyki kwantowej. Pozostawmy ten

problem na boku, bo nie jest on bezpośrednio związany z tytułowym pytaniem⁵. Wystarczy tylko wspomnieć, że gdy zwiększamy informację o obiekcie, to z fali staje się „bardziej” częstką. Efekt interferencyjny we wspomnianym wyżej eksperymencie z dwiema szczelinami znika, gdy kontrolujemy, przez którą szczelinę przeszła cząstka.

3. Eksperyment Sterna-Gerlacha, czyli jak można zmierzyć spin elektronu

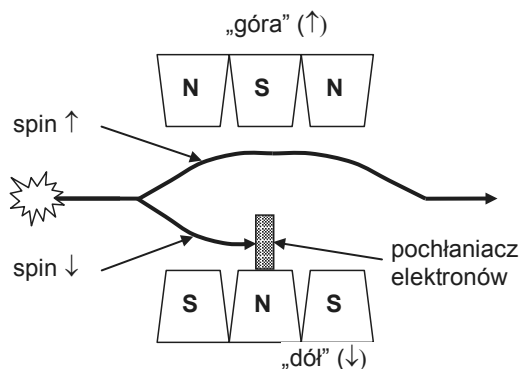
Wróćmy jednak do głównego tematu. Pobawimy się trochę elektronami, choć praktyczniej byłoby do tych celów użyć fotonów, które skutecznie są wykorzystywane w różnych wersjach eksperymentów podobnych opisanemu niżej. Doświadczenia te zostały zaliczone do grona tych najważniejszych, które przyniosły fizyce ważne i rozstrzygające wyniki. Dodatkowo ich wyjątkowość polega na przeniesieniu istotnego pytania z dziedziny filozofii przyrody (teorii poznania i bytu) do laboratorium fizycznego. Spekulatywna metoda filozofii nie dała definitywnej odpowiedzi – miał ją dać eksperyment. O jakie pytanie chodziło? Ano o to zawarte w tytule, czyli pytanie, czy realizm jest prawidłową postawą teoriopoznawczą w odniesieniu do fizyki kwantowej jako fizyki mikroświata, a w istocie całej fizyki, skoro z obiektów mikroświata zbudowany jest cały Wszechświat. Tu trzeba wspomnieć nazwisko Alaina Aspecta⁶, który wraz z grupą współpracowników na początku lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku z sukcesem kontynuował rozpoczęte o dekadę wcześniej eksperymenty w dziedzinie podstaw fizyki kwantowej. Później dołączył do tego nurtu badań Anton Zeilinger⁷.

Wróćmy do naszych elektronów. Każdy z nich oprócz elementarnego ładunku elektrycznego posiada pewną dodatkową własność określaną mianem **spinu**. Na użytek naszych rozważań wystarczy przyjąć, że spin czyni elektron małym magnesem. Okazuje się, że w polu magnetycznym rzut spinu w kierunku pola może przyjmować tylko określone dwie wartości, a mianowicie $\frac{1}{2}$ lub $-\frac{1}{2}$. Nie jest istotne, jakie to wartości – ważne, że są dwie. W fizyce kwantowej, co sugeruje w jej nazwie sam przymiotnik, wiele wielkości fizycznych jest skwantowanych, czyli może przyjmować tylko wartości dyskretne. Możemy sobie wyobrazić spin, a właściwie rzut spinu, jako strzałkę skierowaną w jedną bądź drugą stronę wzdłuż kierunku linii pola (umownie odpowiednio „w górę” lub „w dół”).

⁵ Zainteresowani podstawami fizyki współczesnej mogą sięgnąć do przystępnie napisanej książki Marcusa Chowna [Chown M.] oraz wielu innych publikacji o różnym poziomie trudności, ale i niestety różnej jakości. Przykładowo można polecić pozycję [Gribbin J.] lub trudniejszą i nieco kontrowersyjną [Penrose R.]. Wielką ilość wiedzy wspartej elementami multimedialnymi (zdjęcia, filmy, animacje) można znaleźć w internecie (np. powiązane z tematem [Harrison D.], [Czachor M.], [Mermin N. D.], [Schneider D. R.] oraz symulacja komputerowa eksperymentu związanego z nierównością Bella [internet]). Niestety, jak to w sieci, można trafić także na nierzetelne publikacje. Można jednak ufać stronom akademickim oraz powiązanym z organizacjami i agencjami badawczymi (np. NASA).

⁶ Alain Aspect – fizyk francuski.

⁷ Anton Zeilinger – fizyk austriacki.



Rys. 2. Filtr Sterna–Gerlacha (ilustracja własna)

Elektrony o różnej wartości spinu w kierunku pola magnetycznego poruszają się inaczej w tym polu. Pozwala to wydzielić ze strumienia elektronów tylko te, które mają określoną wartość spinu (rzutu spinu) w kierunku pola. Tylko one przechodzą przez taki filtr. Na rys. 2 przedstawiony jest uproszczony schemat takiego urządzenia zwanego filtrem Sterna⁸–Gerlacha⁹. Można dodatkowo obracać nim wokół osi nadbiegającego strumienia elektronów, czyli zmieniać kierunek „filtrującego” pola magnetycznego, mierząc w ten sposób udział elektronów przechodzących przez filtr w całym strumieniu.

4. Pomiar spinu dla elektronów splątanych

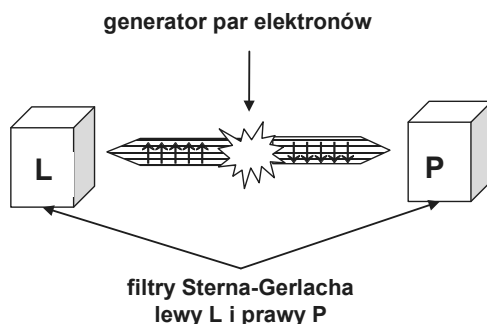
Przejdźmy do eksperymentu podobnego do przeprowadzanych przez wspomnianego Alaina Aspecta na fotonach. Potrzebne będą dwa filtry Sterna–Gerlacha i źródło strumienia elektronów – ale źródło bardzo specjalne. Generowane są w nim pary elektronów o spinach skorelowanych. Fizycy mówią wtedy o elektronach „splątanych”. Jeżeli na przykład cząstka bez spinu rozpada się na dwie cząstki, to ich spiny zgodnie z jedną z zasad zachowania, muszą być przeciwne (przeciwnie skierowane), czyli w sumie dawać spin zerowy. Na rys. 3 przedstawiony jest schemat układu doświadczalnego. Eksperyment polega na zliczaniu przejść elektronów przez lewy (L) i prawy (P) filtr przy różnych względnych ustawieniach ich kierunków przepuszczania. Fizyka kwantowa przewiduje, a eksperyment to potwierdza, że gdy kąt między tymi kierunkami jest równy φ , to na N stwierdzonych przejść elektronów przez

⁸ Otto Stern – niemiecki fizyk (1888-1969), odkrył spin elektronu w 1922, laureat Nagrody Nobla w 1943.

⁹ Walter Gerlach – niemiecki fizyk, (1889-1879).

jeden z filtrów przypada $M = \kappa \cdot N$ jednoczesnych przejść przez drugi z nich. Współczynnik κ wyrażony jest następującym wzorem:

$$\kappa = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$



Rys. 3. Eksperyment na parach elektronów (ilustracja własna)

Sprawdzimy powyższą regułę w szczególnych przypadkach. Gdy przekręcimy lewy filtr względem prawego o $\varphi = 180^\circ$, czyli ustawimy „do góry nogami”, to $\sin(90^\circ) = 1$, a więc $\kappa = 1$. Wynik wygląda na prawidłowy. Jak wyżej wspomniano, spiny elektronów z lewej wiązki są przeciwne do spinów z wiązki prawej. Jeżeli elektron przejdzie przez prawy filtr, to jego „splątany” przeciwnie skierowany towarzysz przejdzie przez filtr lewy ustawiony „do góry nogami”. Gdy kąt $\varphi = 0^\circ$, czyli oba filtry są ustawione tak samo, to $\kappa = 0$, bowiem $\sin(0^\circ) = 0$. To też zgadza się z naszą intuicją. Wspomniany splątany towarzysz elektronu nie przejdzie przez filtr lewy. Będą nam później potrzebne jeszcze dwie wartości współczynnika κ :

$$\varphi = 45^\circ \Rightarrow \kappa = 0,15,$$

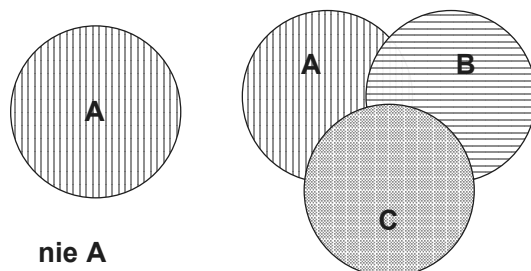
$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \kappa = 0,50.$$

Wynika stąd, choć na pierwszy rzut oka może to się wydawać dziwne, że gdy kierunki filtrów nie są równoległe, czyli $\varphi \neq 0^\circ$ i $\varphi \neq 180^\circ$, to jednak niektóre „lewe” elektrony przechodzą. Można tu wspomnieć, że podobne zjawisko występuje w przypadku przechodzenia światła spolaryzowanego przez parę polaryzatorów (filtrów polaryzacyjnych). Pamiętajmy jednak, że należy być ostrożnym przy stosowaniu w świecie cząstek elementarnych intuicji ze świata makroskopowego.

Przerwiemy ten wywód, aby poświęcić chwilę prostym, wręcz szkolnym, rozważaniom z dziedziny teorii mnogości¹⁰.

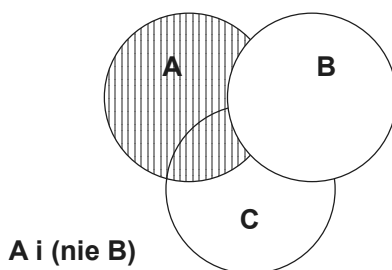
¹⁰ Ideę prostego wyprowadzenia nierówności Bella zaczerpnięto z [Harrison D.], podobnie w [Czachor M.].

5. Wyprowadzenie pewnej dość oczywistej formuły dla trzech zbiorów



Rys. 4 Diagramy Venna zbiorów (ilustracja własna)

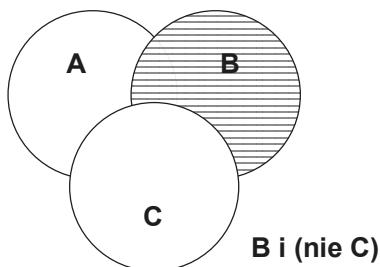
Abstrakcyjny zbiór, czyli zbiór „czegokolwiek”, będziemy symbolicznie oznaczać według powszechnie stosowanej konwencji zwanej diagramami Venna poprzez narysowanie koła. Na rys. 4 po lewej stronie mamy właśnie takie przykładowe koło przedstawiające zbiór, który nazwaliśmy A. Zakreskowane wewnątrz koła wraz z jego brzegiem graficznie wyobraża elementy należące do tego zbioru, a otoczenie koła, a więc „wszystko, co nie jest kołem”, reprezentuje elementy do tego zbioru nienależące, czyli tworzące jego dopełnienie, które oznaczymy przez „nie A”.



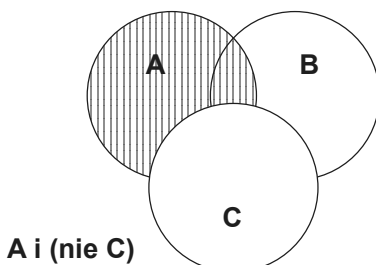
Rys. 5 Zakreskowany zbiór elementów należących do A, ale nie do B (ilustracja własna)

Gdy narysujemy kilka kół symbolizujących różne zbiory, ich zachodzące na siebie części przedstawiają wspólne elementy tych zbiorów. Na rys. 4 po prawej stronie widać najogólniejszą postać „rozetki” utworzonej z trzech kółek symbolizujących zbiory A, B i C. Mamy tu elementy należące tylko do jednego zbioru: obszar zakreskowany pionowo – do zbioru A, poziomo – do zbioru B i szary – do zbioru C. Poza tym w obszarze kratkowanym znajdują się elementy należące jednocześnie do dwu zbiorów A oraz B i podobnie pionowo zakreskowany szary obszar obejmuje elementy należące jednocześnie do A i C, a zakreskowany poziomo

szary obszar – elementy należące jednocześnie do B i C. W końcu środkowy szary kratkowany „nibytrójkąt” reprezentuje elementy wspólne dla wszystkich trzech zbiorów. Myśląc o trzech zbiorach zawsze możemy przywołać do wyobraźni taki obrazek bez niebezpieczeństwa utraty ogólności naszych rozważań.



Rys. 6 Zakreskowany zbiór elementów należących do B, ale nie do C (ilustracja własna)



Rys. 7 Zakreskowany zbiór elementów należących do A, ale nie do C (ilustracja własna)

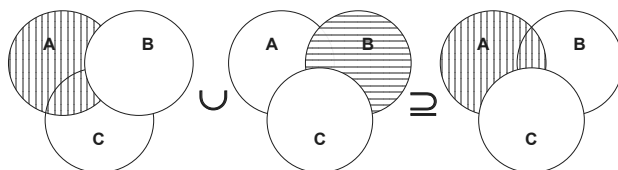
Na rys. 5 pionowymi liniami zaznaczono obszar symbolizujący te elementy zbioru A, które nie należą jednocześnie do zbioru B. Inaczej mówiąc, jest to zbiór będący częścią wspólną zbioru A i dopełnienia zbioru B (zbioru „nie B”), co zapisujemy $[A \cap \text{nie } B]$. Podobnie na Rys. 6 zakreskowano poziomo część wspólną zbioru B i dopełnienia zbioru C czyli zbiór $[B \cap \text{nie } C]$. I w końcu na rys. 7 pokazany jest zakreskowany zbiór elementów będący częścią wspólną zbioru A i dopełnienia zbioru C, czyli zbiór $[A \cap \text{nie } C]$. Tyle – miejmy nadzieję, że zbędnej – powtórki ze szkoły.

A teraz chwila skupienia. Zauważmy, że jeżeli dodamy do siebie zakreskowane obszary na rys. 5 i rys. 6, to ten obszar będzie zawierał w sobie obszar zaznaczony na rys. 7. Tak więc ten ostatni zbiór jest podzbiorem sumy dwu pozostałych zbiorów (patrz rys. 8), co można zapisać:

$$[A \cap \text{nie } C] \subseteq [A \cap \text{nie } B] \cup [B \cap \text{nie } C].$$

Wynika stąd w sposób oczywisty, że suma liczebności (liczby elementów), czyli mocy, zbioru $[A \cap \text{nie } B]$ oraz zbioru $[B \cap \text{nie } C]$ jest większa lub równa liczebności zbioru $[A \cap \text{nie } C]$:

$$\mathbf{Moc}[A \cap \text{nie } C] \subseteq \mathbf{Moc}[A \cap \text{nie } B] \cup \mathbf{Moc}[B \cap \text{nie } C].$$



Rys. 8 „Nierówność Bella” dla zbiorów (ilustracja własna)

6. Kulminacja, czyli nierówność Bella i jej konsekwencje

Od tej dosyć oczywistej nierówności tylko jeden krok do nierówności sformułowanej przez Bella¹¹ w roku 1964 w publikacji [Bell J. S.] – oczywiście w bardziej ogólnej formie. Nierówność Bella jest jednym z większych osiągnięć na drodze ku zrozumieniu praw fizyki kwantowej. Wystarczy tylko nadać abstrakcyjnym zbiorom A, B i C sens zbiorów wyników w przedstawionym wyżej eksperymencie na parach elektronów. Pamiętajmy, że kierunek spinu elektronu możemy określić bezpośrednio, gdy przejdzie przez filtr Sterna–Gerlacha ustawiony w określonym kierunku. Z drugiej strony można uzyskać pośrednio informację o jego spinie poprzez przejście lub nie jego towarzysza przez drugi filtr ustawiony inaczej. Na przykład prawy filtr jest ustawiony pod kątem 0° do pionu, a lewy pod kątem 45°. Załóżmy, że w przypadku obu filtrów obserwujemy przejście splątanych elektronów. Co więc w efekcie stwierdzamy? Prawy elektron **ma** spin w kierunku pionowym o zwrocie „w górę” i jednocześnie **nie ma** spinu pod kątem 45° do pionu „w górę”, bo taki ma jego towarzysz, a byłoby to niezgodne z zasadą zachowania spinu. Co oznacza w ostatnim przypadku termin „w górę”? Każdy filtr Sterna–Gerlacha można „zorientować” poprzez oznaczenie „góry”, na przykład tak jak pokazuje rys. 2. Ustalenie to pozostaje w mocy także przy obracaniu filtra.

W naszym rozumowaniu przyjęliśmy milcząco założenie, że elektron ma określony spin, także gdy go nie obserwujemy. Stanęliśmy więc na gruncie realizmu, co wydaje się dosyć rozsądnym podejściem do naszego eksperymentu. Wykonajmy serię pomiarów polegających na notowaniu faktów przejścia elektronów przez każdy z dwu filtrów Sterna–Gerlacha (patrz rys. 3) przy różnych ustawieniach kierunków przepuszczania lewego i prawego filtra. Generator znajdujący się między nimi wysyła pary splątanych elektronów w kierunku obu filtrów. Przyjmijmy więc, że

¹¹ John Stewart Bell – fizyk brytyjski (północnoirlandzki) (1928–1990).

- A – zbiór wyników, gdy zarejestrowaliśmy przejście elektronu przez prawy filtr ustawiony pod kątem 0° względem pionu i „do góry” (w skrócie: „w górę”/ 0°),
- B – zbiór wyników, gdy zarejestrowaliśmy przejście elektronu przez prawy filtr ustawiony pod kątem 45° względem pionu i „do góry” (w skrócie: „w górę”/ 45°),
- C – zbiór wyników, gdy zarejestrowaliśmy przejście elektronu przez prawy filtr ustawiony pod kątem 90° względem pionu i „do góry” (w skrócie: „w górę”/ 90°).

Dopełnienia tych zbiorów to zbiory wyników, gdy nie zarejestrowano przejścia elektronu. Na przykład „nie A” oznacza, że przez prawy filtr ustawiony pod kątem 0° względem pionu i „do góry” nie przeszedł elektron.

Spróbujmy dokonać pewnych operacji mnogościowych na wyżej zdefiniowanych zbiorach. Na przykład wyznaczmy część wspólną zbiorów A i nie B. Jak należy to rozumieć? Wynik obserwacji elektronu, u którego stwierdzono spin pionowy „w górę”, bo przeszedł przez tak ustawiony filtr, należy do zbioru A. Tymczasem drugi elektron, jego splątany towarzysz, przeszedł przez filtr ustawiony pod kątem 45° „w górę”. Można więc stwierdzić, że pierwszy elektron musi mieć przeciwny spin, czyli nie mógłby przejść przez filtr ustawiony pod kątem 45° „w górę”, a więc nie może należeć do zbioru B. Oznacza to, że należąc do zbioru A, jednocześnie należy do dopełnienia zbioru B, czyli należy do części wspólnej $[A \cap \text{nie B}]$ tych zbiorów.

Wyprowadzona wyżej nierówność dla liczności (inaczej: mocy) zbiorów nabrać może konkretnego sensu fizycznego i staje się wtedy jedną z możliwych wersji nierówności Bella:

$$\mathbf{Moc}\{\text{„w górę”}/0^\circ \text{ i nie „w górę”}/45^\circ\} + \mathbf{Moc}\{\text{„w górę”}/45^\circ \text{ i nie „w górę”}/90^\circ\} \leq \mathbf{Moc}\{\text{„w górę”}/0^\circ \text{ i nie „w górę”}/90^\circ\}$$

Spróbujmy wyrazić ją poprzez liczbę jednoczesnych przejść elektronów przez lewy (L) i prawy filtr (P). Zastosujemy notację skrótową. Na przykład zapis $\{\text{„w górę”}/0^\circ/P\}$ oznacza, że przez prawy filtr ustawiony pod kątem 0° do pionu przeszedł elektron o spinie „w górę”. Ta sama nierówność wygląda wtedy następująco:

$$\mathbf{Moc}\{\text{„w górę”}/0^\circ/P \text{ i „w górę”}/45^\circ/L\} + \mathbf{Moc}\{\text{„w górę”}/45^\circ/P \text{ i „w górę”}/90^\circ/L\} \leq \mathbf{Moc}\{\text{„w górę”}/0^\circ/P \text{ i „w górę”}/90^\circ/L\}.$$

W wyrażeniach po lewej stronie nierówności kierunki filtrów różnią się o 45° , a w wyrażeniu po prawej – o 90° . Jeżeli podzielimy obie strony powyższej nierówności przez liczbę wszystkich prób pomiaru spinu elektronu w dwu kierunkach, to zamiast liczności pojawiają się tam wartości wyrażone przez wyżej wspomniany współczynnik κ , czyli liczby określające, jaki ułamek z liczby wszystkich obserwacji stanowią jednoczesne przejścia splątanych elektronów przez dwa filtry Sterna–Gerlacha skrócone względem siebie o pewien kąt. Przywołajmy wcześniej podane wartości tego współczynnika:

$$\begin{aligned} \kappa \{ \text{„w górę” } P/0^\circ \text{ i „w górę” } L/45^\circ \} &\approx 0,15, \\ \kappa \{ \text{„w górę” } P/45^\circ \text{ i „w górę” } L/90^\circ \} &\approx 0,15, \\ \kappa \{ \text{„w górę” } P/0^\circ \text{ i „w górę” } L/90^\circ \} &= 0,5. \end{aligned}$$

Podstawiamy te wartości do wyprowadzonej nierówności i ...

$$0,15 + 0,15 = 0,3 < 0,5 \text{ !!?}$$

Nierówność nie jest spełniona! Dlaczego? Czyżby niesłuszne były założenia? Nierówność dla zbiorów wyprowadziliśmy, korzystając z *elementarnych zasad logiki i teorii mnogości*. Przyjęliśmy również w analizie eksperymentu postawę opierającą się na *realizmie poznawczym*, czyli twierdziliśmy, że *elektron ma określony kierunek spinu, nawet gdy go nie obserwujemy*. Czyżby jedno z tych założeń miało być nieprawdziwe? Chyba nie to pierwsze dotyczące prawdziwości logiki i teorii mnogości? Matematycy, i nie tylko oni, ostro by przetestowali. W takim razie trzeba pożegnać się z drugim założeniem. A więc jednak realizm poznawczy w przypadku mikroświata nie sprawdza się?

Jest jeszcze jedno wyjście. Może elektrony, które jednak poddają się realizmowi, ale potrafią w momencie pomiaru jakoś się porozumieć i „zmówić się” tak, aby dać taki zaskakujący rezultat eksperymentu. Tylko że wtedy to fizycy zaczynają kręcić nosem, bo takie przekazywanie informacji między elektronami dokonywałoby się z szybkością przewyższającą szybkość światła uważając za niemożliwe i mają na to argumenty!

W końcu powinna paść jednak odpowiedź na tytułowe pytanie. Jak wygląda elektron, gdy nikt na niego nie patrzy? **W ogóle nie wygląda!** Gdyby „jakoś wyglądał”, to spełniałby przecież **postulat realizmu**, czyli byłby obiektem „niosącym” **konkretną** wartość cechy (np. kierunek spinu), nawet wtedy, gdyby **nie był obserwowany**. Niespełnianie nierówności Bella w sytuacji wyżej rozważanej skłania nas jednak do wątplenia w słuszność postulatu realizmu. Konsekwencją jego odrzucenia będzie stwierdzenie, że dopiero **w momencie obserwacji** elektron, czy inny obiekt żyjący w mikroświecie, ukazuje „na zawołanie” **określoną wartość cechy**. Nie można nawet powiedzieć, że jakąś ma przed lub po momencie obserwacji (pomiaru). Można raczej twierdzić, że wtedy niesie wszystkie wartości naraz „w potencjalności”, czyli innymi słowy nie ma gotowej odpowiedzi na nasze pytanie o wynik pomiaru, a jedynie posiada wszystkie „możliwości” odpowiedzi. W momencie pomiaru wybiera jedną z nich.

Oto jeszcze jedna „dziwna”, żeby nie powiedzieć „dziwaczna”, własność kwantowego mikroświata, która stawia wysokie wymagania naszej wyobraźni.

Literatura

- Bell J.S., *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Physics 1, 1964, s. 195–200, (kopia: <http://www.drchinese.com/David/Bell.pdf>).
- Chown M., *Teoria kwantowa nie gryzie*, Zysk i S-ka, Poznań 2009.
- Czachor M., *O sposobach nieistnienia*, (http://www.mif.pg.gda.pl/kft/O_sposobach_nieistnienia.doc).
- Gribbin J., *W poszukiwaniu kota Schrödingera. Realizm w fizyce kwantowej*, Zysk i S-ka, Poznań 1997.
- Harrison D.M., *Bell's Theorem*, (<http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/BellsTheorem/BellsTheorem.html>).
- Mermin N.D., *Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory*, Physics Today, 1985 38-47, (<http://www.iafe.uba.ar/e2e/phys230/history/moon.pdf>).
- Penrose R., *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, PWN, Warszawa 2000.
- Schneider D.R., *EPR, Bell & Aspect: The Original References (in PDF Format)*, (http://www.drchinese.com/David/EPR_Bell_Aspect.htm).
- internet: <http://faraday.physics.utoronto.ca/PVB/Harrison/BellsTheorem/Flash/Mermin/Mermin.html>.

ABSTRACT

How does the electron look like when no-one is looking?

The paper contains a simple introduction to the Bell's inequality which is important in understanding the nature of elementary particles. The inequality was derived under "reasonable" assumption of realism and locality and is not satisfied in the quantum world of particles. It means that the above assumption does not necessarily belong to the quantum world paradigm.

Key words: Bell's inequality, Stern–Gerlach experiment, quantum mechanics, quantum entanglement, realism, locality

Tomasz Stechnij

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

O paradoksie Josepha Bertranda

Artykuł popularnonaukowy

STRESZCZENIE

Publikacja dotyczy niezbyt znanego „paradoksu”, opisanego przez Josepha Bertranda – matematyka francuskiego. Tematyka artykułu oscyluje wokół probabilistyki. Jest to dział matematyki nieczęsto lubiany przez studentów, a przecież bliski naturze naszego świata – bardziej niż choćby geometria analityczna. Popularnonaukowy charakter artykułu pozbawiony jest gruntownych formalizmów i skoncentrowany na „sensie tego wszystkiego”. W ramach rozpatrywania zagadnienia ukazano wiele pytań związanych z teorią poznania, a także z miejscem matematyki jako ludzkiego instrumentarium w naukowym myśleniu o Kosmosie.

Słowa kluczowe: popularnonaukowy, losowość, prawdopodobieństwo geometryczne, filozofia przyrody, paradoks matematyczny

1. Prawdopodobieństwo geometryczne

Prawdopodobieństwo czegoś, losowość, zmienność nieprzewidywalna to cechy zjawisk, które każdy człowiek raczej potrafi intuicyjnie zdefiniować, choćby enumeratywnie¹ mówiąc: los, ruletka!

Intuicyjne rozumienie prawdopodobieństwa towarzyszy nam od starożytności. Jednak – jak to w epistemologii² – różnie bywa, często poznanie intuicyjne, niepogłębione bywa zwodnicze – czasami zaś nie. Ale kiedy nie, a kiedy tak, nie wiadomo, trzeba to zbadać.

Pojęcie i pewien problem prawdopodobieństwa geometrycznego, o którym będzie tutaj mowa, też wydaje się być intuicyjny. Prawie każdy (w wieku większym lub równym wiekowi autora) grywał w „pchełki” (najlepsze były krążki wycięte z grubego papieru ściernego), czy „klasy” (malowane kredą na szkolnym chodniku) – nic prostszego, gry te „rządzą się” prawdopodobieństwem geometrycznym, które to pojęcie, powoli będzie stawać się coraz jaśniejszym. Podobnie na strzelnicy, gdy w wirującą tarczę próbujemy trafić lotką z kolorowym pędzelkiem, wygrywamy bombonierkę, bibułkowy kwiatek albo nic. Oczywiście we wspomnianych grach mamy determinizm dziełnego człowieka, chcącego trafić w takie czy

¹ Z łaciny: kolejne wymienianie, definiowanie przez wyliczanie przykładów.

² Epistemologia to dział filozofii zajmujący się kryteriami i granicami ludzkiego poznania.

inne pole, ale pola są różnych rozmiarów, cel ruchomy, co dodaje losowości – nieprzewidywalności, bo gdyby było inaczej, nie byłoby gry i Wszechświat zrobiłby się nudnawy.

Po krótkiej kosmologicznej refleksji wróćmy do geometrii.

Zadajmy sobie trud wyobrażenia jakiejś powierzchni, np. koła (tarczy na strzelnicy). Mamy więc pewną część płaszczyzny wyznaczoną okręgiem o promieniu R . Pomyślmy, ile jest sposobów trafienia w taką tarczę lotką z wiatrówki? Uwaga, przez dalszą część tekstu rozumować będą dwie, nieco różne mentalności: Matematyk i Fizyk. Matematyk powie: punktów koła jest nieskończenie wiele, traktując trafienie jako wybranie dowolnego punktu z zadanego obszaru, istnieje nieskończenie wiele sposobów trafienia tarczy.

Fizyk powie: średnica wbijanego ostrza nie jest nieskończenie mała, a tym bardziej zera, i wynosi φ (np. 1 mm), a ponadto i przede wszystkim zarówno średnica, jak i współrzędne położenia lotki są skwantowane! Nasze pociski układają się skokowo, jak ponumerowane tekturowe krążki umieszczane wewnątrz okrągłej ramki z dnem zaopatrzonym w przegrody. Jest to m.in. klasyczne zagadnienie logistyczne: jak umieścić n jednakowych puszek w jednowarstwowej skrzynce, tak aby zmieścić ich jak najwięcej. Sposobów wygenerowania tak zdefiniowanych matryc (tzw. parkietazy) jest skończenie wiele.

Fizyk, nieco lekkomyślnie, może jeszcze dywagować: skoro długość jest skwantowana, to okręgi nie istnieją, istnieją co najwyżej n -kąty („ n -kwanty”) foremne, co jeszcze bardziej upraszcza możliwe kombinacje układania puszek w okrągłej skrzynce. Bok każdego wielokąta ma 1 kwant długości, tarcza ma m kątów, a pocisk n , $m \gg n$ i tyle. Można to przecież obliczyć i narysować. Warto, np. w środowisku AutoCAD, narysować wielokąt foremny o 360 kątach i promieniu okręgu opisanego 1000, następnie skalując go, zastanowić się, czym różni się od okręgu o promieniu 1000.

Fizyk zada matematykowi także pytanie: w takim razie ile jest sposobów trafienia w okrąg tego koła („brzeg” naszej tarczy)? Oczywiście matematyk odpowie, że nieskończenie wiele, na co fizyk się uśmiechnie, a zawodowy strzelec roześmieje. Mamy tylko i aż matematykę – a „tutaj” nie zawsze część jest mniejsza od całości.

A teraz sformułujmy zadanie matematyczne:

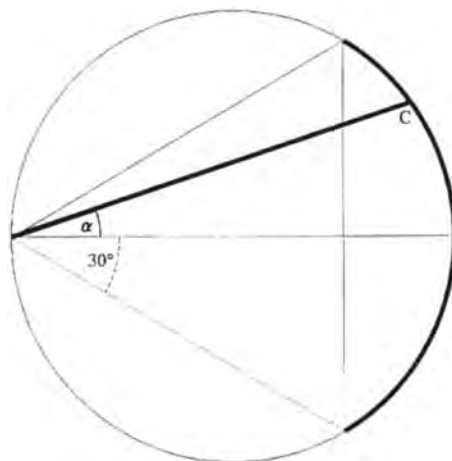
Niech $|\Omega|$ oznacza pole powierzchni koła, podzielmy je na części wpisany wewnątrz trójkątem foremnym. $|A|$ to pole powierzchni trójkąta. Ile wynosi prawdopodobieństwo trafienia na „chybił trafił” w trójkąt? Oczywiście $|A| : |\Omega|$. Powiedzmy, że na strzelnicy obszar trójkąta byłby premiovany czerwonym tekturowym kwiatkiem. Prawdopodobieństwo trafienia pozostałych obszarów tarczy wynosi: $(|\Omega| - |A|) : |\Omega|$. Wczuwając się w rolę właściciela strzelnicy – proszę uprzejmie... – ponownie tekturowy kwiatek, tym razem niebieski. Jak widać, pojęcie prawdopodobieństwa takiego zdarzenia nie powinno nastroczać trudności, jest ono intuicyjne i łatwo zrozumiałe. Ale...

Wydaje się, że sytuacja, w której r o z k ł a d jest dwupunktowy, czyli zdarzenia są dwa: kwiatek czerwony albo niebieski (o różnych prawdopodobieństwach zajścia) są wynikowo zredukowane do typowego rzutu monetą asymetryczną (np. orzeł z ołowiu, reszka z miedzi) – pozornie. Istota zjawiska jest inna, nasza przestrzeń zdarzeń (Ω) to zbiór nieskończony,

a klasyczna przestrzeń probabilistyczna monety jest skończona – orzeł, reszka. Definiując zdarzenie poprzez podział koła na wyróżnione obszary, dokonaliśmy redukcji zjawiska do wyboru dwupunktowego (zakładając oczywiście, że zawsze trafimy w tarczę) – czerwony albo niebieski kwiatek. Sposobów wygrania kwiatków jest nieskończenie wiele, bo na nieskończenie wiele sposobów mogą trafić w trójkąt albo w któryś z trzech odcinków koła. Cele dwa. Trajektorii lotu pocisku nieskończenie wiele?

2. Zadanie nr 1 i 2 i 3

Mamy okrąg o promieniu 1, w okrąg (podobnie jak poprzednio) wpisaliśmy trójkąt równoboczny. Rzucamy na nasz układ figur cięciwę C (np. bierkę losowo spuszczaną na kartkę z narysowanymi figurami). Jaka jest szansa, że cięciwa będzie dłuższa, niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Rozwiążemy to zadanie kilkoma „sposobami”.



Ryc. 1. Ilustracja zadania nr 1

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Grużewski 1966].

I. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy wybranie kąta α , tworzonego między zaczepioną w wierzchołku trójkąta cięciwą a średnicą położoną na dwusiecznej kąta α . Obracając teraz cięciwą, próbujemy wszystkie jej możliwe położenia i długości. Półprosta, na której konstruujemy cięciwę może zakreślić kąt π (180°), od kąta prostego do „minus prostego”. A zatem przestrzeń zdarzeń jest przedziałem $\Omega = [-\pi/2, \pi/2]$. Kiedy C będzie dłuższa od boku trójkąta? Rozwiązanie jest oczywiste i widać je na rysunku. Granicznym kątem jest $\pi/6$ (30°), wówczas to cięciwa pokrywa się z bokiem trójkąta, przy kącie $> 30^\circ$ albo, licząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara, przy kącie $< -30^\circ$ cięciwa będzie dłuższa od boku. A , zatem $A = [-\pi/2, \pi/2]$, czyli 60° . Obliczmy prawdopodobieństwo:

$$P = |A| : |\Omega| = 60^\circ : 180^\circ = 1/3.$$

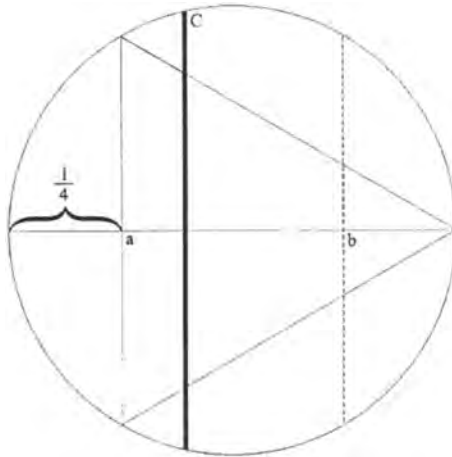
Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losowo zadana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg wynosi $1/3$.

Zadanie można by na tym zakończyć, wydaje się ono prostą (i już rozwiązaną) geometryczną łamigłówką. A jednak...

I'. Zastosujmy inne rozumowanie. Zapomnijmy chwilowo o rozumowaniu opartym na kątach. Jeśli wybierzemy losowo dwa punkty na okręgu i połączymy je cięciwą, to jak wybrać te punkty, aby spełnić warunek zadania ($C > a$)? Pierwszy punkt zadajmy dowolnie (np. wierzchołek trójkąta), pokonując po okręgu drogę równą $1/3$ długości okręgu lokalizujemy drugi punkt – „naprzeciwko” pierwszego. Okrąg podzieliliśmy na 3 części o długościach po $1/3 \cdot 2\pi R$. Łatwo zauważyć, że zdarzenie polegające na losowej lokalizacji drugiego punktu tak, aby powstała cięciwa była dłuższa od boku trójkąta, ma prawdopodobieństwo $1/3$. Wynik ten sam, ale droga do wyniku inna.

II. A teraz jeszcze inaczej. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy odległość środka skonstruowanej cięciwy od środka okręgu. Wówczas $\Omega = [0, 1]$, gdyż pamiętamy, że promień wynosi 1. Nasza cięciwa przesuwana się od „środku do brzegu”. Kiedy będzie dłuższa od boku trójkąta? Rzeczą oczywistą jest, że pomiędzy punktami a i b . Ponieważ $|ab| = R$, oraz zbiór punktów sprzyjających zdarzeniu $A = [0, 1/2]$, zatem

$$P = R/2 \cdot R = 1/2.$$

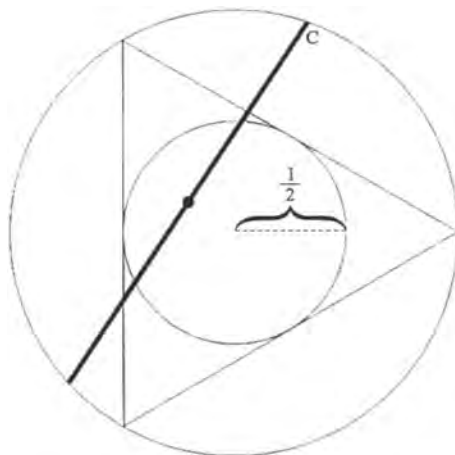


Ryc. 2. Ilustracja zadania II

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Gruzewski 1966]

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losowo zadana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, wynosi $1/2$.

Zaczyna być ciekawie, wynik jest różny od poprzednich, a rozumowanie wydaje się poprawne.



Ryc. 3. Ilustracja zadania III

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Gruzewski 1966]

III. Próba trzecia (ryc. 3). Zdarzenie elementarne to wybór dowolnego punktu wewnątrz naszego okręgu, czyli punktu „dużego” koła. Zdarzenie sprzyjające (sukces) zajdzie wtedy, gdy wybrany losowo punkt znajdzie się wewnątrz koła („małego”) wpisanego w rozważany trójkąt równoboczny. Kiedy tak się stanie, to dowolny pęk prostych przechodzących przez nasz wybrany punkt tworzy nieskończenie wiele cięciw spełniających warunek $C > a$. Stosunek promienia dużego koła do małego wynosi 2:1. Zatem zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = [0, 1]$. Zdarzenie sprzyjające to $A = [0, 1/4]$, bo pole „małego” koła wynosi $\pi \cdot (R/2)^2 = 1/4 \pi R^2$, czyli 1/4 pola „dużego” koła. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi 1/4.

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losowo zadana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg wynosi 1/4.

3. Paradoks

Paradoks? Jedno zadanie, trzy (może więcej?) różne, sprzeczne, wykluczające się wyniki?! Zaprezentowane zagadnienia roztrząsał francuski matematyk Joseph Louis François Bertrand w roku 1888, a może i wcześniej. Był bliski sformułowania nowej, odmiennej od klasycznej, teorii prawdopodobieństwa; gdyż jest to znakomity przykład, gdzie ilość zdarzeń sprzyjających jak i możliwych jest nieskończenie wielka, a nie (klasycznie) określona jakąś skończoną liczbą naturalną. Później na bazie jego dorobku pracował m.in. Pafnucy Czebyszew (1821–1894).

Kiedy spotykamy tego rodzaju łamigłówki, zastanawiamy się, gdzie tkwi pułapka, bo intuicyjnie jesteśmy przekonani, że gdzieś tkwi, że jednak nasz umysł jest spójny pomimo „dowodu”..., że nie jest.

Matematyk zagadnienie wyjaśniłby tak. Trzy przedstawione zadania nie są jednym i tym samym. Rzecz ma się względnie, zależy od przyjętego *universum*³, czyli Ω , kluczowy wpływ na obliczane prawdopodobieństwa ma wybór Ω – tj. sposób doboru zbioru zdarzeń elementarnych. Kolejnym istotnym aspektem jest sposób zadawania cięciw, zmienia on istotnie treść zadania. Co to znaczy losowo poprowadzić cięciwę? W trakcie rozważań dopowiedziano (nieco podstępnie) warunki definiowania cięciw według własnego uznania, dla każdego z przypadków inaczej. „Podstęp” leży bowiem w sposobach losowania położenia cięciw, które nie są wzajemnie równoznaczne przy trzech (czterech) różnych definicjach zbioru zdarzeń elementarnych. Po s a m o w o l n y m przyjęciu założeń dalej rozumowaliśmy prawidłowo. Ale prawidłowe sformułowanie zadania we fragmencie odnoszącym się do cięciwy koła powinno brzmieć: „...skonstruowano losowo cięciwę C w sposób...”. Jest to zatem dodanie do klasycznej definicji prawdopodobieństwa funkcji-uzupełnienia dla zbiorów nieskończonych, która w jednoznaczny sposób określi sposób losowania elementów z tego zbioru. Losowo to nie dowolnie!

Istotnym spostrzeżeniem jest również fakt, że operując na zbiorach nieskończonych, nie możemy stosować klasycznej definicji prawdopodobieństwa, rozumianej jako liczba zdarzeń sprzyjających $|A|$ do liczby wszystkich (policzalnych) zdarzeń elementarnych $|\Omega|$. Zastosowanie tej definicji na takie ciągłości jak współrzędne biegunowe (miary kątów), długości odcinków czy też pola powierzchni figur prowadzi do sprzecznych wyników.

Okazuje się, że nie „wszystkie drogi prowadzą do Rzymu”. W powyższym przypadku dedukcja formalnie poprawna okazała się niewystarczająca, zadanie musi być sformułowane nie tylko na poziomie warunków brzegowych zagadnienia, ale i na poziomie warunków brzegowych rozwiązania. Rozwiązanie zagadnienia nie może być tutaj tylko wynikiem toku dedukcyjnego, przyjmując jakąś nieznaną nam wcześniej jednoznaczną postać – musimy je wcześniej ograniczyć *a priori* do konkretnych przypadków, nie zaś oczekiwać, że wyłoni się samo, automatycznie, jak z treści szkolnego zadania.

Pewną analogią jest tzw. analiza starożytnych w zakresie rozwiązywania równań algebraicznych, z tym że otrzymywane rozwiązania są sprawdzalne i można odrzucić nieprawidłowe. W analizowanym przypadku nie ma takiej możliwości – rozwiązania są pozornie sprzeczne, ale wszystkie prawidłowe.

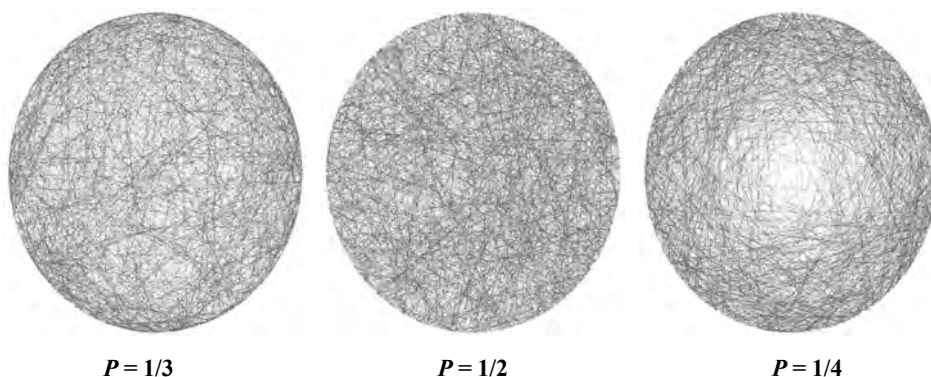
Zniecierpliwieni zapewne orzekną, że dywagacje zaczynają być jałowe – ile „w końcu” wynosi owo prawdopodobieństwo?! Jakie płyną utylitarne wnioski z naszego roztrząsania sprawy? Chcemy, podobnie jak nałogowy hazardzista kawaler de Méré i nieco mniej nałogowy hazardzista Pascal (Francja, wiek XVII), wiedzieć, jak obstawić u krupiera zakład w grze o wysoką stawkę. Nasze kasyno jest oparte na trójkąciku, patyczku i kółeczku. Empirycznie

³ Po łacinie znaczy: zupełność, ogół.

możemy rzucać patyczkiem na rysunek, wykonywać pomiary i dowiedzieć się, ile wynosi szacunkowe prawdopodobieństwo, tak jak w nieco innym zagadnieniu George Buffon w 1777 roku obliczył wartość liczby π .

Problem jednak tkwi w zaprojektowaniu eksperymentu (podejmowano nawet próby symulacji z zastosowaniem cząsteczek gazów), symulacja (jednoznaczna i powtarzalna) każdej z sytuacji wydaje się trudna. Najbardziej zbliżonym do eksperymentu fizycznego, a nie myślowego, wydaje się przypadek ostatni ($P=1/4$), łatwo jest empirycznie rozpoznać, czy cięciwa (rzucony pręt) przechodzi przez jakikolwiek punkt koła wpisanego w trójkąt, czy też nie. Organizując tego typu grę na podwórku albo w kasynie, przyjęcie takiego modelu byłoby dla graczy komunikatywne.

Ciekawe wyniki dają symulacje komputerowe metodami typu Monte Carlo. Zadając 3 różne warunki układania cięciw uzyskuje się 3 różne wyniki w postaci trzech różnych obrazów graficznych, powstających np. po pseudolosowaniu 500 cięciw w określonym polu. Są to ilustracje brzegowych warunków losowania, nie wyników.



Ryc. 4. Symulacja przypadków

Źródło: opracowanie własne na podstawie [<http://bayes.wustl.edu>]

Napisanie tego rodzaju programu w większości języków programowania (choćby w poczciwym Turbo Pascalu) nie powinno sprawić większego problemu – zachęcam, można wtedy „eksperymentować” do woli. Jednak pamiętajmy, że maszyna cyfrowa operuje skończonymi wartościami, a jej kwantem geometrii jest piksel. Maszyna to artefakt – nie przyroda, utopijny świat płyty głównej naszego „peceta” zapewne problem przyjmie i zniesie, ale niestety niewiele wniesie.

Podsumowując, należy zmartwić hazardystów – podpowiedzi brak!

4. Finał

Zachodzi pytanie metodologiczne, czy aby nasze „paradoksy” nie wynikają z przyjętego aksjomatycznie abstraktu figur geometrycznych. Jak daleko można budować abstrakcję, „wymyślać” problemy? Wielki Bertrand Russell (patrz: antynomia Russella albo paradoks zbioru wszystkich zbiorów Cantora) pokazał, że nie każda zbudowana formalnie poprawnie abstrakcja jest dopuszczalna – otóż, abstrakty mają swoje granice! Nasz problem okazał się raczej tymczasowym stanem niewiedzy, nieprawidłowym zdefiniowaniem warunków brzegowych, pomieszaniem pojęć. Na bazie języka matematyki, która stworzyła owo zagadnienie, można je objaśnić teorią prawdopodobieństwa w zbiorach nieskończonych, przyjmując aksjomatyczną definicję Kołmogorowa; chociaż fizyk powie nieco ironicznie, że to jest *idem per idem*⁴. Celem wyjaśnienia wymyślonego abstraktu posłużymy się kolejnym abstraktem.

Matematyka poszła w kierunku rozwoju pojęć nieskończoności i ciągłości. Takie pojęcia jak ciąg i granica to wynik tej drogi. Historycznie najpierw powstawały teorie nieskończenie małych liczb (twórca pochodnej Leibniz właśnie tym pojęciem się posługiwał). Teoria nieskończenie małych (i dużych) jest na nowo rozwinięta przez wspaniałego matematyka (urodzonego zresztą w Wałbrzychu) Abrahama Robinsona. Zasadniczo teoria ta lepiej tłumaczy świat, bo w świecie nic nie wskazuje na istnienie nieskończenie wielkich i ciągłych, za to bardzo małe, ale chyba skończone występują licznie.

Wróćmy jeszcze do empirii tarczy na strzelnicy. Fizyk powie tak, nawet jeżeli obszar trafienia grotu będzie bardzo mały, np. 1 \AA , to jednak skończenie mały. Równocześnie położenia naszych trafiających grotów lotek nie są ciągłe, są skwantowane, jeżeli ten kwant położenia będzie miał średnicę grotu – paradoksy znikają, lotka trafia tylko w matrycę wyznaczonych miejsc, to fizyka ciała stałego – krystalografia. Nie ma tu żadnych nieskończonych mnogości ani ciągłości, lecz jedynie zmiana skali na mikro.

Determinizm!? Tak, ale nie do ogarnięcia, bo skończenie małe są naprawdę małe i jest ich dużo, a aktualnie najlepsze maszyny cybernetyczne potrafią efektywnie operować algorytmem z kilkunastoma dynamicznie zależnymi od siebie zmiennymi. Analitycznie, na kartce papieru, mamy już problemy z dokładnym rozwiązaniem klasycznego zagadnienia mechaniki nieba – trzech, czterech grawitujących ciał. Czyli jednak probabilistko ratuj!

Fizyk podziękuje zatem matematykowi za teorię mnogości jak i statystykę z zastrzeżeniem, że to tylko modele, które owszem – pomagają. Współczesna probabilistyka pozwala zamodelować niezwykle skutecznie wiele procesów zachodzących w Kosmosie i w artefaktach. Jednak matematyka jest układem zastępczym, który pozwala rzeczywistość symulować, ale nie powinniśmy wniosków z tej symulacji *k a t e g o r y c z n i e* odnosić do przyrody, gdyż można dokonać *i n t e r w e n c j i* w rzeczywistość, a potem klócić się jak pewien kardynał z Galileuszem (spierano się o kraterę na Księżycu). Ów kardynał rzekł: Po cóż mam patrzeć

4 Znaczy: to samo przez to samo.

w teleskop, skoro, stosując zasady logiki Arystotelesa, dowiedziono, że Księżyc i planety są idealnie gładkimi kulami („kryształowymi”) i być inaczej nie może, bo nasz aparat wnioskujący jest nieomylny (a trzeba pamiętać, że ów kardynał był naprawdę b i e g ł y w logice!)? Aparat może i tak, ale dane wejściowe na pewno nie. Matematyka nie jest nauką absolutną, jest tylko modelowaniem świata, a nie jego zasadą. Doszliśmy do starego pytania, czy matematyka jest, czy my ją wymyślamy, powiedzmy tak – czy $e^{\pi i} + 1 = 0$ także w Galaktyce Andromedy? Nie wiem.

Na koniec do przemyślenia, „trzy grosze” od fizyka. Nieskończoność raczej nie istnieje, bo skoro nukleonów we Wszechświecie jest 10^{80} (albo inaczej mówiąc, masa Wszechświata jest skończona) to nie można napisać nieskończenie długiej książki (tym samym liczby), gdyż przetwarzając całą materię Kosmosu (w tym siebie samego) na pióro, inkaust i pergamin, w końcu... będziemy musieli postawić ostatnią kropkę.

Literatura

- Bronsztejn I.N., Siemiediajew K.A., *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1988.
- Grużewski A., *O prawdopodobieństwie i statystyce*, PZWS, Warszawa 1966.
- Rasiowa H., *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1973.
- Słownik wyrazów obcych*, PWN, Warszawa 1980.
- Stankiewicz J., Wilczek K., *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2000.

ABSTRACT

The Joseph Bertrand's paradox

The publication relates to the not very well-known „paradox”, described by Joseph Bertrand – the French mathematician. The subject matter of the article oscillates around probabilistic. This part of mathematics is infrequently popular by students, but is close the nature of our world – more than (for example) analytic geometry. The popular character of the article is devoid “hard formulas” and concentrated on the „sense of this all”. Many questions connected with the theory of the science, and also with the place of mathematics as human scientific thinking process.

Key words: popular the science, chance variation, geometrical probability, the philosophy of the nature, mathematical paradox.

Tomasz Stechnij

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

O paradoksie bliźniąt

Artykuł popularyzatorski

dedykowany tym, co lubią fizykę, czyli chyba nie nikomu

*Pamięci pewnego człowieka, który odszedł 13 czerwca
2010 roku, był bardzo dzielny całe życie, a najbardziej
w ostatniej chwili*

STRESZCZENIE

Publikacja zawiera elementarny opis kluczowych pytań szczególnej teorii względności Alberta Einsteina (1879–1955). Celem i zamiarem owego skromnego eseju jest popularyzacja fizyki jako fundamentalnej nauki przyrodniczej, w której zbiega się większość naukowych torów myślenia. Ukazane zostały podstawowe koncepcje relatywistyki Einsteina: przekształcenie Lorentza oraz pozostałe aspekty dylatacji czasu. Zaznaczono także szereg problemów filozofii nauki. Motywacją autora jest powrót do rdzennie przyrodniczego myślenia, analizowania zjawisk, fenomenów. Współczesność, niestety pełna jest tzw. „racji” zamiast zasad, a także „prawd” przegłosowywanych na wiecach, a nie odczytywanych z przyrody. „Względność”, wszechobecna we współczesnej postmodernistycznej strukturze cywilizacji, niewiele ma wspólnego, poza semantyką, z teorią względności. Z punktu widzenia nauki istotne są te racje, których człowiek nie uformował we własnym umyśle, ale które jego krytyczny umysł dostrzegł w przyrodzie.

Słowa kluczowe: popularnonaukowy, teoria względności, Einstein, transformacja Lorentza, podróż w czasie, paradoks bliźniąt.

1. Moja racja

*Mając dwadzieścia lat, myślałem tylko o kochaniu.
Potem kochałem już tylko myśleć.*

Albert Einstein

Zagadnienia poruszone w niniejszej publikacji to ikona nauki, a na pewno pop-nauki. Jak to z ikonami bywa, powstają legendy, zmyślenia, bajki.

Tytułowy temat jest znany, ale bywa, że niezgłębiony... Warto zatem, nie pomijając szczegółów i nie upraszczając nadmiernie, nieco zrozumieć ten kawałek wiedzy o Wszechświecie, którego jesteśmy uczestnikami.

Bez wątpienia autentyczne przyjęcie do wiadomości faktów, o których będzie mowa, może powodować napięcia. Osobiście znam tezy A. Einsteina od lat i autentycznie się oswoiłem. W treści opracowania zawartych jest wiele fragmentów interdyscyplinarnych, co powinno ułatwić zrozumienie przełomowego dla filozofii nauki nowego relatywistycznego sposobu widzenia przyrody.

Mam nadzieję, że Czytelnik przebrnie przez rozumowanie, które na wiele sposobów *de facto* zmierza ku jednolitym wnioskom.

2. Racja fizyka

Racja fizyka, Kaśka butów nie ma.

Józef M. Bocheński

Rzecz się ma następująco: dwaj bracia bliźniacy, Jacek i Placek udali się na dworzec astronautyczny. Jacek wsiadł do statku kosmicznego, pomachał przez luminofor na pożegnanie i odleciał. Odbył długo trwającą (według rozkładu jazdy na tablicy ogłoszeniowej dworca astronautycznego) w przeróżnych rejonach najbliższego Wszechświata podróż z różnymi prędkościami względem Ziemi, ale często były one $\approx 299\,792\,458$ m/s, po czym powrócił na naszą planetę – do Placka.

Niby nic takiego się nie stało, to przecież jak 2 lata rejsu trójmasztowcem wokół globu, po powrocie bracia są o 2 lata starsi, wesoło gaworzą przy golonce z chrzanem i oglądają fotografie z podróży – a jednak *w s z y s t k o* wskazuje na to, że nie!

A teraz jak zwykle od początku

Zacznijmy od fizykalnego faktu, że świat poznajemy my, ludzie, a nie np. ślimaki. Ponadto poznajemy go aparatem, który posiadamy, a jest tak, że podstawowym sygnałem, jaki odbieramy, jest światło, później dźwięk i inne. Z aspektu fizyki najważniejszym nośnikiem informacji (bodźcem) jest światło, fizjologicznie obsługiwane wzrokiem. Tak już jest i to jest nasz świat; niekoniecznie taki jest świat, ale my takim go obserwujemy, bo taki mamy umysł oraz jego uzbrojenie – zmysły. Gdybyśmy byli niewidomi – wszyscy bez wyjątku, n a s z ś w i a t (bo nie świat) zapewne wyglądałby w odbiorze inaczej... Podstawowym narzędziem poznania byłby sonar, aktualnie jest to kamera. U ślepego i głuche go psa przede wszystkim węch – no i jak wtedy zbudować kinematykę?!

W fizyce ukutym jest pojęcie **obserwatora**, które to w swoim źródłosłowie zawiera odwołanie do zmysłu wzroku, tak więc fizyk to przede wszystkim „wzrokowiec”.

Oczywistość tych spostrzeżeń (znów oko + światło) jest oczywista! Zatrzymując się jednak nad oczywistościami, możemy niejednokrotnie dostrzec (znów oko + światło) głębokie cechy przyrody.

Co to zatem znaczy **dostrzec, zaobserwować**? To znaczy zarejestrować pewien stan umysłu będący wynikiem działania światła (czym ono jest – pomijamy, wiemy, że na nas działa).

Obserwator odczytał napięcie woltomierza, wyniosło 7V; obserwator dostrzegł na radarze wrogi samolot; astronom ujrzął kometę w konstelacji Byka. Przytoczone tu zdarzenia to oddziaływanie między człowiekiem a zjawiskiem, kluczowym nośnikiem wiedzy o tych zjawiskach jest światło.

Światło jest strumieniem cząstek – taką definicję przyjmijmy. Wszystkich oponentów, zwolenników głębszej polowej, bardziej elektromagnetycznej wersji definicji światła uprasza się – na razie – o uprzejmą zgodę na naszą definicję.

Przypuśćmy, że jesteśmy na mistrzostwach w futbolu. Jeżeli w meczu piłkarskim zaszło zdarzenie gola, to wysła ono w stronę obserwatora strumień cząstek (nazywanych *fo t o n a - m i*), powodując u niego pewien stan umysłu, mianowicie zaobserwowanie gola. Zazwyczaj wszyscy na stadionie twierdzą, że jednocześnie i razem widzieli to, co widzieli: gol!

Światło, czyli fotony przemieszczają się w przestrzeni z pewną ograniczoną prędkością, wynosi ona 299 792 458 m/s w próżni absolutnej. Jest to fakt (potwierdzona stała) fizyczny, który Czytelnik musi przyjąć do wiadomości (oczywiście warto to sprawdzić). Z oczywistych zatem powodów nie może foton od piłki do oka obserwatora dolecieć natychmiast, niezwłocznie. Widzowie sportowego spektaklu siedzą w różnych odległościach od piłki, każdy z (powiedzmy) 60 tys. widzów w innej. Wniosek: gol jest zjawiskiem względnie nierównoczesnym, każdy z widzów obserwatorów zauważy go po różnym czasie ($t_1, t_2 \dots t_{60\,000}$) od faktu zaistnienia w bramce. Rzec można, każdy obserwator widzi „swojego” gola w swoim czasie (pada 60 tys. goli). Jeżeli ziemski mecz obserwowalibyśmy na planecie Uran, to sygnał telewizyjny, który (tak się składa) porusza się z prędkością identyczną jak światło (będziemy oznaczać ją c), dotarłby do nas w czasie $t_u \approx 2\text{h}40'$. Czyli nasz gol był „innym” golem niż ziemski, z naszego (fotel na Uranie) punktu obserwacji stwierdziliśmy, że na stadionie bramka padła o 2h40' później. Więc gol padł o 10:00, czy o 12:40 – jak to rozumieć? Inne pytanie do samodzielnej analizy: czy jest jakiś sposób, aby powiadomić o bramce kibica na Uranie, bez zwłoki, natychmiast, równocześnie ze zdarzeniem na ziemskim stadionie?

Rozważania powyższe są prawie oczywiste, zachęcamy jednak do ich dalszego samodzielnego rozpatrywania. W codzienności ignorujemy owe fakty, prędkość światła, $c \approx 1\,080\,000\,000$ km/h, co dla nas, istot dość powolnych, jawi się jako nieskończoność! Przeciętną obserwację zdarzeń rejestrujemy jako natychmiastową i równoczesną dla obserwatora stojącego obok.

Ale jest tak, że $c \neq \aleph_0^1$. Gdyby świat był przez nas przede wszystkim nasłuchiwany, a nie obserwowany, rozważania owe byłyby bardziej oczywiste i w sumie są, bo przecież każdy może w górach, lesie czy nad jeziorem krzyknąć i usłyszeć własne echo...

A teraz już fizyka

Spróbujmy nieco uściślić nasze rozumowanie. Postawmy problem dwóch stadionów: jeden na Ziemi, a drugi na Uranie. O godzinie 17:00 czasu ratuszowego w Krakowie mają rozpocząć się mecze na obu stadionach. Jak to zrobić? Proste, na $t_u = 2,66 h$ przed ziemską ratuszową 17:00 wysłać w kierunku Uranu sygnał z komendą: zaczynamy! Wyobraźmy sobie, że na obu planetach (stadionach) są zegary, są też komentatorzy sportowi, którzy je obserwują i śledzą mecz. Mają także monitory, na których z opóźnieniem obserwują drugie spotkania.

Pytanie: jak obserwować oba mecze równocześnie bez przesunięcia w czasie, tak aby na monitorach widzieć np. 17. minutę, sekund 5 jednego i drugiego meczu łącznie? Odpowiedź: usiąść pośrodku, w połowie drogi Ziemia–Uran, wówczas to zdarzenia zachodzące na obu planetach będą docierały do nas z jednakowym opóźnieniem, czyli będą obserwowane jako równoczesne, na monitorach w prawym górnym rogu ekranu ujrzemy dokładnie ten sam czas, np. 17. minutę meczu, sekund 5. Zdarzenia nadal są obserwowane z przesunięciem czasowym, ale są równoczesne dla obserwatora trzymającego równy dystans od stadionowych zegarów (ryc. 1).



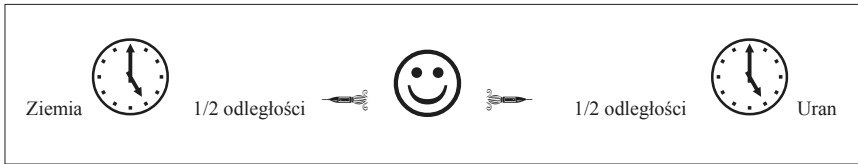
Ryc. 1. Względna równoczesność zdarzeń

Źródło: opracowanie własne.

Doszliśmy do zagadnienia *synchronizacji zegarów*. I nie jest to bynajmniej wyważanie otwartych drzwi. Zazwyczaj mówimy, że dwa zegary są zsynchronizowane, gdy pokazują ten sam odczyt. Po rozważaniach na poprzednich stronach wiemy, że znaczenie słowa „synchronizacja” i „ten sam” albo straciło sens, albo nabrało nowego... Zauważmy, dwa zdarzenia nazwiemy równoczesnymi (zsynchronizowanymi) wtedy, gdy obserwator znajdujący się dokładnie w połowie odległości pomiędzy nimi dozna tego samego stanu obserwacji. A jak zsynchronizować dwa odległe zegary? Należy, będąc w równej odległości od obu, wysłać impulsy synchronizujące (np. 2 rakiety) o identycznych prędkościach. Znając

¹ \aleph_0 – czytaj „alef zero”, hebrajska litera oznaczająca tutaj moc zbioru liczb naturalnych.

odległości i prędkości, możemy obliczyć przesunięcia odczytów czasów z zegarów na Ziemi i Uranie, czyli zsynchronizować zegary.



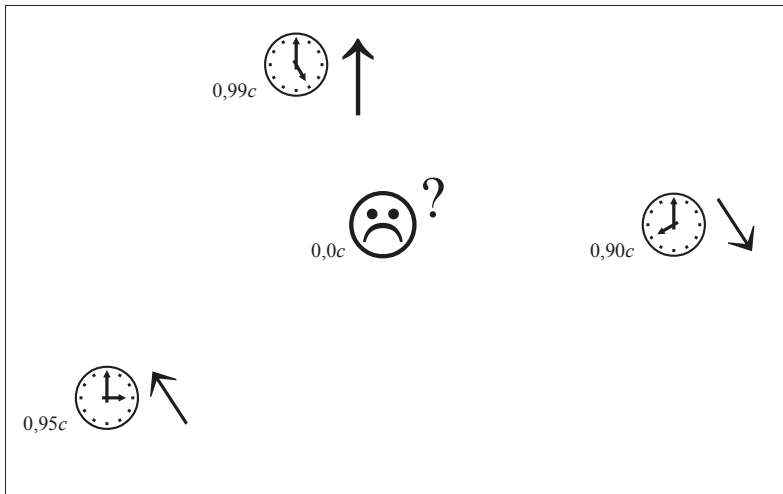
Ryc. 2. Synchronizacja zegarów

Źródło: opracowanie własne.

Warto zastanowić się, Szanowny Czytelniku, jak zsynchronizowałbyś trzy zegary (ryc. 3) poruszające się z prędkościami przyświatelnymi w różnych kierunkach płaszczyzny albo nawet przestrzeni. Wyniki rozmyślenia nad tym zagadnieniem są zdumiewające!

I jeszcze trzy definicje porządkujące pojęcia:

Z e g a r jest to układ, który wytwarza policzalne zdarzenia, po wytworzeniu zdarzenia wraca do stanu początkowego. Jest zatem układem pracującym cyklicznie. Mówiąc o czasie, mamy na myśli ilość „tyknięć” zegara. Nie zastanawiamy się (jeszcze), co to jest czas, ale tyknięcia umiemy policzyć. Z poprzednich rozważań wynika bardzo istotny warunek rzetelnego użycia zegara, musi on znajdować się blisko zdarzenia, tak aby droga światła od zdarzenia do zegara: $ct \cong 0$.



Ryc. 3. Problem synchronizacji trzech zegarów

Źródło: opracowanie własne.

Przypomnijmy, inercjalny układ odniesienia to taki, którego wektor prędkości jest niezmienny (czyli ma stałą wartość prędkości, kierunek i zwrot). Jest to twór wyidealizowany, matematyczny, fizycznie nieistniejący. W niniejszej publikacji domyślnie mówimy o układach inercjalnych i ruchu rozumianym jako jednostajny prostoliniowy. Czytając niniejszy artykuł, wydaje nam się, że jesteśmy układem spoczywającym, tylko co to znaczy „spoczywamy”?

Intuicja mówi, że prędkość c to to samo co v rowerzysty czy lokomotywy, a jednak nie! Prędkość c jest na szczególnych prawach, co należy teraz stanowczo powiedzieć. To, że światło w próżni zawsze porusza się z bezwzględną wartością c , jest udowodnione bezspornie – doświadczalnie. Konsekwencją tego jest niemożność klasycznego dodawania wektorów prędkości poruszających się ciał, gdyż światło zawsze porusza się względem „swojego” układu z prędkością światła, nie może zatem poruszać się np. z prędkością $3c$. Reguła „osobista” dowolnego układu fizycznego brzmi: „Nic nie może poruszać się szybciej od światła, względem mnie”. Wyprowadzając na kolejnych stronach wzór na dylatację czasu w przekształceniu Lorentza, będziemy korzystać z tego fundamentu oraz z równoważności układów poruszających się względem siebie ruchem jednostajnym. Dlaczego tak jest, że c jest w przyrodzie uprzywilejowane – a to już pytanie metafizyczne, w fizyce zazwyczaj nie chodzi o odpowiedź na pytanie „dlaczego”, tylko na „jak”?

Transformacja² Lorentza³

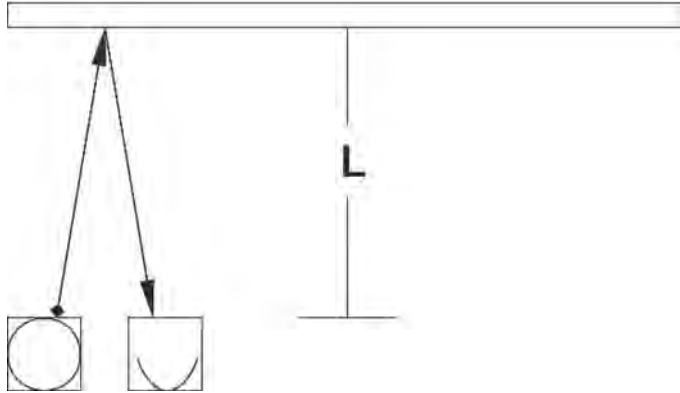
Przeprowadźmy teraz następujący eksperyment myślowy:

Z ruchomego źródła światła (np. latarki jadącej jednostajnie po prostej) wylatuje sygnał świetlny i dolatuje do lustra naprzeciwko, po czym wraca do odbiornika (oka). Ile to będzie trwało? Oczywiście (ryc. 4) dwukrotnie L/c , czyli jakiś czas T' (tyle czasu – 1 tyknięcie poczekamy na odbiór światła od momentu jego wysłania z latarki) w układzie (z punktu widzenia przesuwanej w prawo latarki) poruszającym się to:

$$T' = \frac{2L}{c}. \quad (1)$$

² Transformacja – z łaciny *transformatio*, znaczy przekształcenie, przeistoczenie.

³ Lorentz Hendrik (1853–1928), Holender, noblista z dziedziny fizyki.



Ryc. 4. Doświadczenie myślowe H. Lorentza

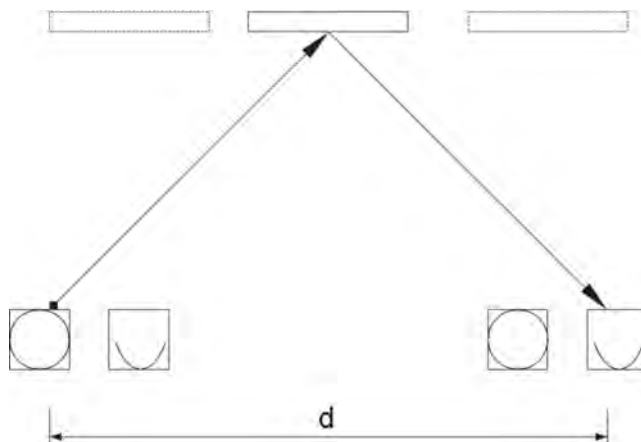
Źródło: opracowanie własne na podstawie [Szymacha 1985].

Precyzując sprawę, należy powiedzieć, że czas (oznaczymy go T) w układzie spoczynkowym (obserwacja sytuacji z punktu widzenia nieruchomego układu) będzie zależny od długości boku trójkąta h , a nie od jego wysokości L .

$$T = \frac{h}{c} + \frac{h}{c} = 2 \frac{h}{c}. \quad (2)$$

Zwróćmy uwagę na tę oczywistą różnicę, jest to moment kluczowy. Analogiczny eksperyment możemy przeprowadzić z piłką koszykową, z którą biegniemy. Jaki tor lotu z naszego punktu obserwacji wykonuje piłka? A jaki tor dostrzeże obserwator siedzący na ławce przy ścianie sali?

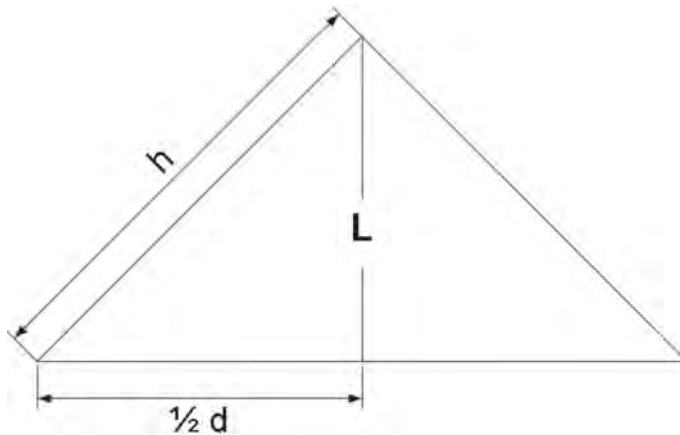
Cały układ (latarki, palca i oka) porusza się w prawo (ryc. 5). Przebył więc pewną drogę $d = vT$.



Ryc. 5. Przesunięcie układu źródła światła

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Szymacha 1985]

Dalej (ryc. 6) znajduje się trójkąt prostokątny, który podsumowuje całe zjawisko, trzeba go jedynie rozwiązać, co potrafiliby już pitagorejczycy.



Ryc. 6. Ilustracja do obliczenia dylatacji czasu

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Szymacha 1985]

$$h^2 = \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + L^2 \text{ – twierdzenie Pitagorasa.}$$

ale: $T = \frac{2h}{c}$, $d = vT$, $h = \frac{cT}{2}$ i oczywiście $\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}vT$.

Z poprzednich (ryc. 4 i 5) ilustracji wynika, że:

$$T' = \frac{2L}{c}, \quad L = \frac{cT'}{2}.$$

Ostatecznie po podstawieniu otrzymujemy:

$$\left(\frac{cT}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}vT\right)^2 + \left(\frac{cT'}{2}\right)^2.$$

Rozwiązując równanie ze względu na T uzyskujemy:

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v < c \quad . (3)$$

Wyprowadziliśmy jeden z najważniejszych wzorów (dylatacja⁴ czasu w przekształceniu Lorentza) neoklasycznej fizyki, co – jak widać – nie było trudne! Zadziwiające jest, iż takie rozumowanie mógł przeprowadzić Pitagoras (były wówczas zwierciadła, konie, wozy, światło i matematyka), mógł też wielki Newton, mógł każdy z nas, a jednak ta „oczywista oczywistość” dotknęła dopiero umysły Lorentza, Poincarego, Michelsona, Einsteina i może kilku innych. Prowadził je już w 1843 roku Doppler, ale jego wnioskowanie poszło w kierunku zmiany długości fali. Podobne rozważania można poprowadzić z piłeczką tenisową odbijającą się od ściany oraz biegnącym wzdłuż i w poprzek kortu tenisistą.

Po co jednak to zrobiliśmy („a po co nam to wszystko”)? To pytanie dla niektórych bywa denerwujące, inni czasami trzaskają drzwiami...

Odpowiedzmy: Możemy obliczyć, o ile różni się odczyt czasu trwania tego samego zdarzenia pomiędzy obserwatorem z zegarem poruszającym się z prędkością v , a spoczywającym względem niego innym obserwatorem również uzbrojonym w zegar.

Owo T ruchu światła (rozumianego fenomenologicznie, jako zjawisko) to jest pojęcie czasu w sensie fizyki zjawiska. Wyprowadziliśmy zależność między obserwowanymi wzajemnie odczytami zegarów w dwóch poruszających się względem siebie układach. Jak widać, odczyty te będą różne. Omawiane równanie nr 3 opisuje przesunięcie czasu jako parametru ruchu; przy prędkościach bliskich c opisuje opóźnienie rejestracji impulsu świetlnego jednego układu względem drugiego, w konsekwencji opisuje przesunięcia wskazań zegarów poruszających się w układach inercjalnych.

W tym miejscu odpowiemy częściowo na fundamentalne pytanie: Czym jest czas? W omawianym zagadnieniu pojęcie to jest inne niż zwyczajowo nabyte. Jest to parametr sygnału, jego przebiegu. Zasadniczo mówimy o czasie pokonania danej drogi przez foton (sygnał). Czas (tak to coś nazywamy) odnosi się tutaj nie do pojęcia abstrakcyjnego czy absolutnego, ale do względnego rejestrowania wskazań zegarów jednego układu w drugim układzie. Pomyślmy jak fizyk, obserwator świata, prozaicznie – czas to jakieś coś będące argumentem funkcji drogi $s(t)$ opisującej błysk świetlny i – jak się okazuje – takie rozumienie czasu jest wystarczająco uniwersalne i wyczerpująco proste; miast tysięcy stron poematów i traktatów popełnionych na temat czasu przed rokiem 1905 (gdyż wtedy to Albert Einstein opublikował rozważania, które tutaj prowadzimy, zawarte w ramach szczególnej teorii względności).

Dygresje do zastanowienia: jeśli (hipotetycznie) $v > c$, to wyrażenie podpierwiastkowe (wzór 3) jest ujemne, jaki i czy to ma sens fizyczny? W tym miejscu zachęcamy do zainteresowania się Hermanem Minkowskim oraz ponownego zastanowienia się, czy czas jest typowym skalarem. Przeanalizujmy ponadto, że w granicy, gdy $v \cong c$ zegary dla obserwatorów „zatrzymują się”, a gdy założymy zgodnie z mechaniką klasyczną, że $c \rightarrow \infty$, otrzymamy zrównanie odczytów zegarów $T = T'$, czyli brak efektu przesunięcia. Gdy $v \ll c$, problem

⁴ Łacińskie *dilatatio* znaczy zwłoka.

„znika”. Wracamy do tzw. przekształcenia Galileusza, które co prawda uwzględnia różnice prędkości, ale czas jest obligatoryjny i ten sam dla wszystkich układów, $T \equiv T'$. Po co odступujemy od przekształcenia Galileusza? Bo v układu może być bliskie c , a c jest skończone.

Analogią jest motocyklista jadący wzdłuż nasypu kolejowego ze stałą prędkością, np. 50 km/h, względem skarpy i „goniący” pociąg poruszający się ze stałą prędkością, powiedzmy 100 km/h. Dokonując pomiaru czasu (z poziomu wagonu albo motocykla) od jakiejś chwili własnej t_1 do t_2 , możemy zastosować równania liczące dylatację czasu:

$$T_{\text{motocykla}} = \frac{T'_{\text{pociągu}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{oraz} \quad T_{\text{pociągu}} = \frac{T'_{\text{motocykla}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Dylatacja jest symetryczna! A zatem z punktu widzenia pociągu odczyt czasu wydłużył się u motocyklisty, ale również z punktu widzenia motocyklisty odczytane wskazanie czasu było przesunięte, wydłużone (zegar tykał wolniej) w pociągu. Każdy porównuje wyniki ze swojego punktu widzenia!

I proszę, nauka nie zawsze potrzebuje od r a z u „trudnej” matematyki (o ile matematyka jest trudna?), ale zawsze potrzebuje zmyślnego koncygowania i wyobraźni. Szczególna teoria względności nie jest trudna do pojęcia i nie wymaga wielkiej abstrakcji, jest to taka nieco docieklawiej roztrząsana kinematyka Newtona.

A teraz bliźniaki

Klasyczna formuła dylatacji czasu ma (znaną nam już) postać:

$$T' = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Przy pewnych (poprzednio zreferowanych) założeniach jest ona prawdziwa. Ale zazwyczaj bywa błędnie rozumiana, upraszczana i dlatego zgubna we wnioskowaniu...

Obliczenia takie dotyczą pewnego „wyciętego” odcinka drogi oraz odczytów własnych zegarów dwóch inercjalnych układów i nie są precyzyjnie adekwatne do zagadnienia bliźniąt, które jest naszym tytułowym tematem.

Rozwińmy teraz typowe szkolne zadanie (jest w niejednym zbiorze):

Nasz brat – Astronauta odleciał w rakiecie poruszającej się z prędkością wynoszącą $0,8c$ względem Ziemi. Ile lat upłynęło na Ziemi, jeżeli w statku kosmicznym minęło (T') 30 lat (ale jakich?).

$$T = \frac{30}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} = \frac{30}{\sqrt{1 - 0,64c^2}} = \frac{30}{\sqrt{1 - 0,64}}, \quad T = \frac{30}{\sqrt{0,36}} = \frac{30}{0,6} = 50$$

Odpowiedź: Na Ziemi upłynęło 50 lat.

Rozwiązanie zadania zawiera następujące uproszczenie: zakłada, że oba układy braci poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym, jakby ten stan rzeczy był już zastany, ukształtowany, istniał dla potrzeb naszego zadania tekstowego (co nie jest prawdą – sytuacja musi się rozwijać, niezbędne są przyspieszenia, zmiany kierunków, prędkości etc.).

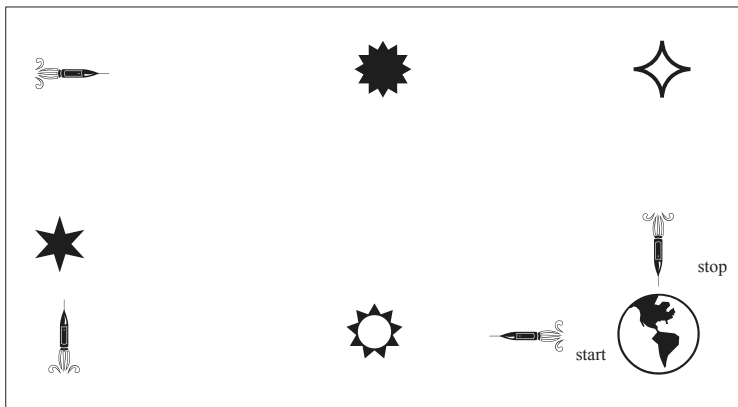
Szkolne ujęcie opisane powyżej nie oddaje precyzyjnie sensu zjawiska mającego miejsce w przypadku Jacka i Placka, ujmuje sytuację jakby była statyczną, gdzie występuje jedynie jedna prędkość oraz jakiś absolutnie naliczony odcinek czasu, np. 30 lat. Wykonywane „statyczne” obliczenie relatywistycznego wydłużenia czasu jest dużym uproszczeniem, które zmienia sens fizyczny rozpatrywanej sytuacji. Tymczasem jest nieco inaczej.

Modelowe zadanie jest prawdziwe, ale tylko w wyidealizowanym przypadku, gdy dwa układy inercjalne, już rozpedzone, poruszają się jednostajnie i prostoliniowo (bez wirowania) wzdłuż wspólnej osi, np. x . Prędkość jednego względem drugiego wynosi $0,8c$ i nikt nie zawraca.

Rzeczywiście tak rozpatrując kwestię Jacka, i Placka i jeden, i drugi jest starszy/młodszy. Czy to może być prawdą? O tym dalej.

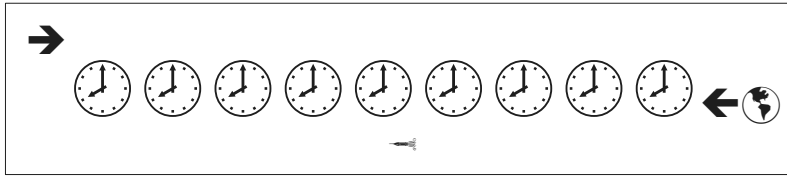
A teraz trochę formalniej

Plan lotu kosmonauty przedstawia rycina 7, model planu lotu rycina 8. Wyobraźmy sobie linię wielu zsynchronizowanych bliskich sobie zegarów, położonych na odcinku pewnej drogi, np. $s = ct = 1$ m (czyli $t = 3,33$ ns). Wzdłuż tej linii porusza się punkt (rakieta) ze zmiennym v , średnio bliskim c . Obserwatorzy znajdują się w zegarach oraz jeden obserwator w poruszającym się punkcie. Każdy z zegarów jest w bardzo bliskim (ze względu na $v \cong c$) sąsiedztwie innego. Wszyscy obserwatorzy notują, odczyty mogą różnić się zaledwie o $\Delta t \approx 3,33$ ns. Uszeregowane wyniki ich obserwacji tworzą kolejną oś zegarów *prim* (ryc. 9).



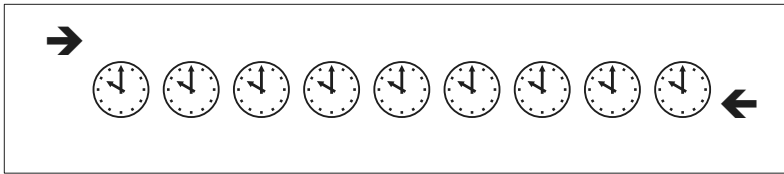
Ryc. 7. Lot kosmonauty pośród gwiazd

Źródło: opracowanie własne.



Ryc. 8. Model krótkiego odcinka lotu

Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 9. Zestaw zarejestrowanych obserwacji po przelocie rakiety, układ *prim*

Źródło: opracowanie własne.

Układ zegarów jest inercjalny. Układ lecącego punktu (czyli rakiety) nie. Jednak punkt poruszający się w granicy przebywa w pobliżu każdego z zegarów, tak iż ich prędkości wyrównują się $v = v'$, a obserwatorzy „w zegarach”, znajdując się co 1 metr, mogą dokonać pomiaru.

Wróćmy teraz do przekształcenia Lorentza, które z definicji dotyczy jedynie układów inercjalnych:

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Załóżmy, że rozpatrujemy przedziały (odcinki) czasowe przelotu punktu ΔT i $\Delta T'$. Wycinamy zatem pewien fragment zdarzeń (postrzeganych względnie) pomiędzy t_2 i t_1 . $\Delta T = t_2 - t_1$ oraz $\Delta T' = t'_2 - t'_1$. A zatem:

$$\Delta T = \frac{\Delta T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Delta T' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta T$$

Relacja jest tym dokładniejsza, im przedział (interwał⁵) czasowy jest krótszy. $\Delta T \rightarrow 0$ i $\Delta T' \rightarrow 0$, co daje postać różniczkową:

⁵ Po łacinie *intervallum* znaczy przerwę, odległość między dwoma punktami.

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt. \quad (5)$$

Założyliśmy, że nasze rozpatrywane przyrosty czasu są bardzo małe, a prędkość v zależy od czasu t , jest to niestałość ruchu statku kosmicznego.

Chcąc obliczyć całkowitą dylatację czasu tak sformułowanego przypadku, całkujemy obustronnie równanie 5 i otrzymujemy:

$$\int_0^{T'} dt' \approx \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \quad T' \approx \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt. \quad (6)$$

Całka z równania 6 (formalnie nie jest to całka Riemanna, toteż użyto symbolu \approx) ukazuje sumę czasów własnych wszystkich stowarzyszonych chwilowo zegarów. Symbol $v(t)$ jest prędkością punktu, a nie układu odniesienia! Zegary nie mogą być związane z punktem w ruchu (naliczanie czasu własnego rakiety), gdyż on przyspiesza, działają siły. Pomiar z zegara sztywno związanego z ciałem byłby nierzetelny, wpływ przyspieszenia (układ nie jest inercjalny) – brak spełnionych postulatów początkowych transformacji Lorentza, przestajemy poruszać się na polu kinematyki, a zaczynamy na polu dynamiki. Aby obliczyć czas własny punktu, całkujemy (czyli wysumowujemy) przedziały czasowe pomiarowej linii zegarów. Jest to sumowanie czasów zegarów inercjalnych, chwilowo stowarzyszonych z lecącym (układ nieinercjalny) punktem.

Odmierzamy zatem czas własny obiektu poprzez zegary układów, które obiekt mija, poruszając się, o ile znamy funkcje $v(t)$. W tym sensie jest to (równanie 6) następująca zależność:

$$T' \approx \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt.$$

Bliźniak Jacek przyspiesza, a Placek jest „inercjalny i siedzi na Ziemi”. Jedyne gdy przyspieszenie jest małe i ma niewielki wpływ na chód zegara poruszającego się, można go (zegar) wiązać sztywno z układem poruszającym się (czyli układ jest wtedy infinitezymalnie inercjalny). Dlatego zastosowaliśmy tok myślenia, który pozwolił „pozbyć” się problemu przyspieszenia.

Jak można wywnioskować z rozważań o bliźniakach, jedyne, co jest bezwzględnie mieralne, to przyspieszenie, a zatem także siły przez nie wywołwane (wciskanie Jacka w fotel gdzieś w okolicach Andromedy, kiedy „dał gaz w podłogę” po porannym postoju na śniadanie). Prędkości, czasy, ruch są niewyznaczalne. Ruch z przyspieszeniem nie jest względny (jak jednostajny bez przyspieszeń), ten, kto przyspiesza (doznaje sił bezwładności), porusza się.

Zilustrujmy to następującą analizą: jesteśmy w stanie zmierzyć przyspieszenie w sposób absolutny, ale nie możemy zmierzyć absolutnej prędkości czy położenie. Pomimo że znając funkcję położenia (ogólnie mówiąc drogę s), wyznaczymy prędkość:

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

a znając prędkość, wyznaczymy przyspieszenie:

$$\frac{dv}{dt} = a.$$

Cóż zatem takiego trudnego, znając przyspieszenie, wyznaczyć v i s ? A jednak, z pochodnej funkcji (co, miejmy nadzieję, każdy wie), nie można wyznaczyć funkcji w sposób jednoznaczny! Stała całkowania ma tutaj niebagatelne znaczenie fizyczne, zwłaszcza że operujemy na polu zjawisk relatywistycznych.

Podsumowując stan rzeczy, można rzec, że zgodnie ze szczególną teorią względności z punktu widzenia Placka, pozostającego cały czas na Ziemi, upływ czasu w rakiecie był spowolniony. Jeżeli Placek czekał na brata czas T (liczony jakimiś jednostkami „wewnętrzny” układu Placka, np. stoperem w jego kieszeni), to według niego podczas całej podróży kosmicznej Jacka aż do momentu jego powrotu upływ czasu w rakiecie powinien wynosić:

$$T' \approx \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt < T,$$

gdzie $v(t)$ jest zmienną (co bardzo ważne!) w czasie t prędkością statku, c – stałą, która wynosi 299 792 458 m/s.

Podkreślimy stosowane konsekwentnie oznaczenia. T' to czas płynący w statku kosmicznym (czyli układzie poruszającym się). T to czas spoczynkowy, płynący na Ziemi z punktu widzenia Ziemi oraz linii zegarów (ryc. 8).

Zegar

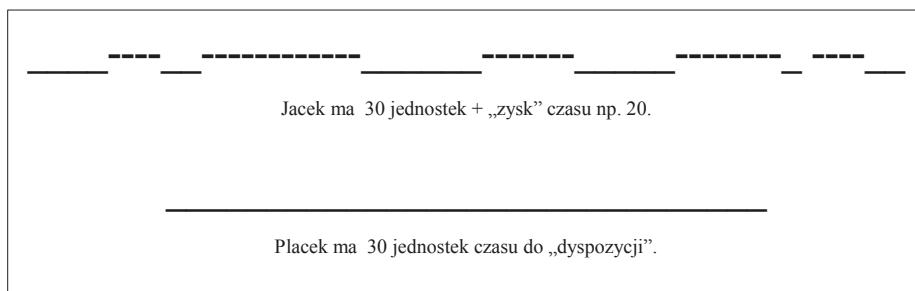
Należy zadać pytanie wprost dotyczące rozumienia omawianych zjawisk. Mówiąc intuicyjnie: czy spowolnienie zegarów jest realne? Tak. Każdy obserwator realnie widzi to, co widzi, takie ma odczyty zegarów. I to, co widzi, uważamy za realność, o czym była mowa w poprzednich częściach tekstu. Sens teorii nie dotyczy zmiany biegu poruszającego się zegara (jego czasu własnego) – skrót myślowy mówiący o tym, że poruszający się zegar działa wolniej (jakoby „zgestniał”), jest zwodniczy! W zakresie swojego własnego układu inercjalnego każdy zegar chodzi identycznie. Ale pomiar odstępów czasowych pomiędzy zdarzeniami już identyczny nie jest!

Przykładowo niech zegarem będzie zjawisko rozpadu jądra promieniotwórczego, średni czas (własny) życia jądra w jego układzie będzie zawsze niezmienny, np. $2\mu\text{s}$, ale odczytany przez różnych obserwatorów wyniesie np. $3\mu\text{s}$, $4\mu\text{s}$, $5\mu\text{s}$! Jeżeli nie mamy innych danych o zjawisku (danych dotyczących układów odniesienia) i znamy jedynie owe różne odczyty okresów życia jądra promieniotwórczego, nie jesteśmy w stanie dokonać weryfikacji pomiaru. Nie poznamy czasu własnego rozpadu konkretnego izotopu, ani nawet charakterystyki (typu) izotopu, bo który z czasów rozpadu jest tym „realnym”? Jeżeli jądro rozpadające, hipotetycznie, poruszałyby się z c , to jego $t \rightarrow \aleph_0$, czyli nigdy nie dowiemy się, że się rozpadło, dla nas (jesteśmy „inercjalni”) trwa wiecznie, ale ono samo w sobie już się rozpadło, po $2\mu\text{s}$ nie istnieje. Jednak jego $2\mu\text{s}$ to nasza wieczność, albo nasza „kiepska” wieczność to dla niego $2\mu\text{s}$ moment.

Jednoczesność

Przeprowadźmy teraz rozumowanie oparte na dylemacie równoczesności zdarzeń! O równoczesności (albo nierównoczesności) zdarzeń mowa była już na początku – był to problem stadionów. Wraz ze zmianą parametrów układu, w którym przebywa astronauta Jacek, zmienia się też relacja równoczesności zdarzeń odpowiadająca jego punktowi widzenia. Aspekt równoczesności zdarzeń jest kolejnym kluczem zrozumienia zjawiska, nie jedynie parametry wektora ruchu. Jak za chwilę postaramy się dowiedzieć, poszczególne chwile życia obu braci bywają jednoczesne albo niejednoczesne, zgodne w jednoczesności albo rozbieżne.

Bywały takie momenty życia obu braci, szóste rano, kiedy Jacek stał „zaczumowany” i razem (czyli jednocześnie z punktu widzenia nieruchomego obserwatora znajdującego się w połowie drogi pomiędzy nimi) zaczęli się golić. O $6.00 + \acute{I}$ statek Jacka dokonał szybkiego zwrotu w prawo o $\pi/4$ radiana i obrał kurs w kierunku gwiazdozbioru Oriona. Następnie Jacek, wciskając „gaz w podłogę”, spowodował „rozjechanie” się równoczesności golenia. Jacek zyskał czas, który „wypadł mu z ziemskiej rachuby”, wskutek zmian (wartości prędkości oraz przyspieszeń) równoczesności zdarzeń w jego układzie odniesienia. Na Ziemi z kolei czas płynął „swoim rytmem” na stoperze w kieszeni drugiego brata do momentu ich spotkania (czas czekania Placka). Prosta ilustracja zagadnienia równoczesności zdarzeń znajduje się na ryc. 10.



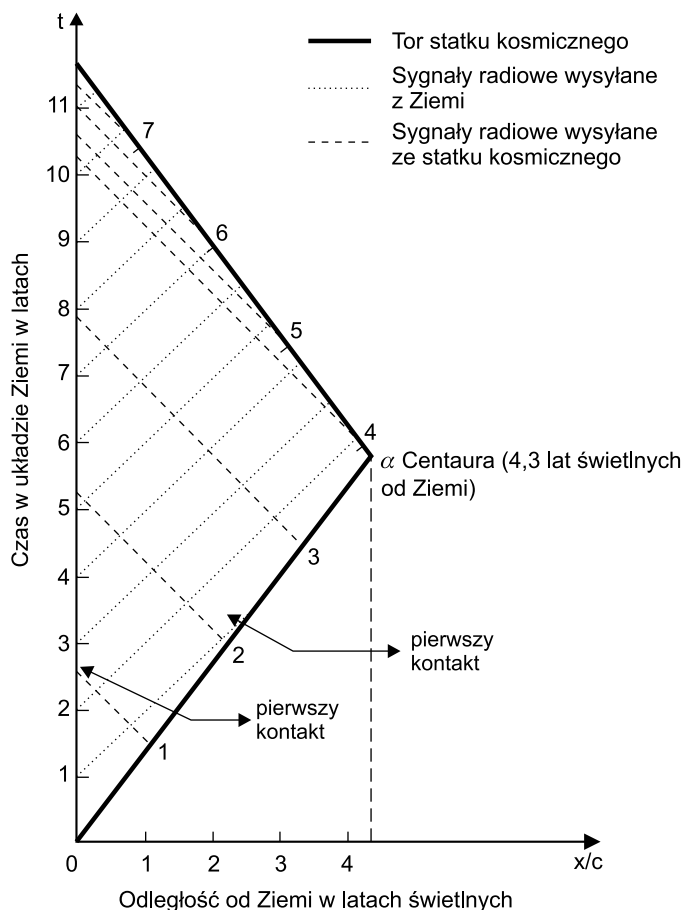
Ryc. 10. Zmiany równoczesności zdarzeń Jacka i Placka

Źródło: opracowanie własne.

Okresy życia Jacka równoczesne (oznaczone $____$) z odpowiednimi okresami życia Placka (oznaczone $____$ lub ---), są odpowiednio pofragmentowane.

Przypatrzmy się innej ilustracji (ryc. 11), pomocnej w zrozumieniu zjawisk równoczesności i nierównoczesności zdarzeń. Na ziemi Placek, posługując się radiem, pozdrawia cyklicznymi (1 raz na rok) impulsami brata (alfabetem Morse'a). Brat odpowiada. Sygnały jednak roz mijają się (oprócz pierwszego, kiedy obaj odbiorą sygnały po czasach własnych wynoszących 2,6) z powodu bliskich światłu prędkości lotu Jacka. Szybkość sygnału radiowego jest bezwzględna stała. Licząc ilość odebranych przez braci impulsów, możemy określić wzajemne przesunięcie czasowe. Diagram wykonany jest przy założeniach $v = 0,745c$ i $T' = 7,7$, a $T = 11,5$. Można samodzielnie wykonać obliczenia weryfikujące jego poprawność.

Warto zwrócić uwagę na zmianę częstotliwości sygnałów po zwrocie statku w kierunku Ziemi i zastanowić się, czym jest ona spowodowana?



Ryc. 11. Diagram kontaktów radiowych braci bliźniaków

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Ugarow 1985].

Rycina 11 (bardzo podręcznikowa) to zwielokrotniony przypadek układu lusterek, dzięki którym wyprowadziliśmy wzór dylatacji czasu (zwróćmy jeszcze raz uwagę) między dwoma inercjalnymi układami poruszającymi się na jednej osi. W diagramie zakładamy (nierealnie), że Jacek momentalnie startuje, później leci ($v = \text{const.}$), natychmiast zawraca, wraca i momentalnie ląduje.

Ale, czy to w ogóle działa?

Łatwo jest zrozumieć następujący fakt. Świat, który widzimy w naszym „teraz”, nie istnieje, skoro np. gromada M13 w Herkulesie jest odległa od nas o 25 100 lat świetlnych, to mogła (z jakiś powodów) już przestać istnieć, a my widzimy jej stan sprzed 25 100 lat, nie widzimy więc tego, co jest równoczesne z uderzeniem dzisiejszej kropli deszczu o parapet naszego domu, widzimy coś, czego już nie ma, ale co wysłało komunikat, że jest i ten komunikat właśnie dotarł.

Na podstawie szczególnej teorii względności wykonywane były (i są nadal) eksperymenty. Jeden z dwóch zsynchronizowanych zegarów atomowych umieszczano w szybkim samolocie, który odbywał długą podróż, po czym wracał na miejsce startu. Okazywało się, iż zegar, który odbył podróż, nieznacznie się opóźnił względem zegara, który cały czas pozostawał nieruchomy. W latach siedemdziesiątych XX wieku Joseph Hafele i Richard Keating wysłali 4 przenośne zegary cezowe w dwukrotną podróż dookoła świata na pokładach samolotów pasażerskich. Stwierdzono opóźnienia, uzyskana niepewność pomiarowa wyniosła 10%. Później fizycy z University of Maryland przeprowadzili podobne doświadczenie z jeszcze większą dokładnością. Dzięki kolejnym, trwającym po 15 godzin, lotom atomowego zegara wokół zatoki Chesapeake zdołali potwierdzić, że wartość dylatacji czasu równa jest wartości przewidywanej przez szczególną teorię względności z niepewnością pomiarową mniejszą niż 1%. Obecnie, gdy zegary atomowe przewozi się z miejsca na miejsce, na przykład w celu kalibracji, uwzględnia się dylatację czasu wywołaną ich ruchem!

Najciekawsze eksperymenty można jednak przeprowadzić w dziedzinie atomistyki, w mikroskali. Badano czas istnienia mionów (jedna z cząstek elementarnych) wytworzonych w górnych warstwach atmosfery. Rejestracja obecności mionów na poziomie morza, gdzie musiały dolecieć, oraz pomiary czasu ich życia udowodniły dylatację czasu. Bez obserwacji zjawiska opóźnienia czasu cząstki uległyby rozpadowi w trakcie drogi, zanim dotarłyby do powierzchni Ziemi, inaczej mówiąc, możliwym jest dla nich pokonanie drogi z górnych sfer atmosfery do powierzchni Ziemi tylko dzięki uzyskanej „premi” czasowej z tytułu przesunięcia. Miony za krótko istnieją i gdyby czas się dla nich nie wydłużał, rozpadłyby się w trakcie lotu. Obliczony „wydłużony” średni czas życia mionów poruszających się z prędkością $0,9994c$ względem laboratorium zgadzał się z empirycznie zmierzonym.

Nie wiadomo, dlaczego mezony się rozpadają i tworzą miony ani dlaczego w ogóle są (pytań o sens istnienia nie zadaje fizyka ale metafizyka), za to wiadomo, że podlegają prawom teorii względności. Analogiczne eksperymenty wykonuje się współcześnie w wielu akceleratorach cząstek elementarnych na świecie. To działa!!!

Antynomie fizyczne? Nie, tylko dydaktyczne

Przybliżyliśmy nieco sens fizyczny modelu „podróży w czasie”. Często zarysowana tutaj sytuacja (postrzegana symetrycznie), opatrywana mianem „paradoksu bliźniąt”, bywa podawana za przykład niespójności logicznej, paradoksu, jakiegoś rozumowania sprzecznego z porządkiem rzeczy.

Paradoksalne jest następujące spojrzenie: Z punktu widzenia Jacka, to Placek cały czas się poruszał i po powrocie, to Placek powinien być młodszy. Ot paradoks?! Nie, raczej błędna dydaktyka.

Układy nie są symetryczne, inercjalne względem siebie. Asymetria powstaje w chwili np. zawracania Jacka, który zmienia układ inercjalny i ma na to dowody empiryczne (przyspieszenia, a zatem siły bezwładności). Z kolei Placek jest stale w tym samym układzie inercjalnym, nie doznaje przyspieszeń!

Błąd w rozumowaniu doszukującym się paradoksu polega więc na niedostrzeganiu, iż układ Jacka nie jest inercjalny (statek musi poruszać się z przyspieszeniami, zmiennymi w czasie prędkościami) i dlatego modelujący zjawisko wzór (3) na dylatację czasu w przekształceniu (transformacji) Lorentza nie jest odpowiedni, jest on statycznie liczoną współczynnikiem T'/T albo na odwrót T/T' (co jest dla fizyki bez znaczenia, najważniejsze jest, jak to rozumiemy i czy rozumiemy). Przy założeniu istnienia układów inercjalnych (idealizm!) jest prawdą, że: $T'/T = const.$ oraz $T/T' = const.$ Jacek nie poruszał się ruchem jednostajnym prostoliniowym, wręcz przeciwnie – przyspieszał, zwalniał, skręcał etc., nie spełnił więc warunku dopuszczającego stosowania względem obu układów zasad równoważności dla układów inercjalnych. Sytuacja obu braci nie jest z punktu fizyki zjawiska jednakowa.

Zwróćmy jeszcze raz uwagę na sens wyprowadzonego wzoru (6) całkowitego względem czasu, właściwie (kinematycznie) modelującego problem bliźniąt. Człowiek wymyślił (a może odkrył) matematykę i nie po to operujemy całką, aby było trudniej..., ale po to, aby adekwatniej ukazać rzeczywistość.

W przypadku zagadnienia bliźniąt zastosowanie ma także ogólna teoria względności ujmująca zjawiska z punktu widzenia dynamiki, a nie jedynie kinematyki. Podróżny w Kosmosie będzie doznawał działania sił, gdyż będą miały miejsce przyspieszenia i opóźnienia. Sama kinematyka również wyjaśnia zjawisko; fizyka wymaga jednak dokładnego, a bywa że i powolnego myślenia. Uwagę skupiamy zatem na kinetycznej dylatacji czasu, a nie grawitacyjnej (dynamicznej). „Paradoks” można wyjaśnić bez ogólnej teorii względności, aczkolwiek daje ona pełniejszy obraz.

Podsumowując, dwóch wielkich powiedziałyby tak:

- Galileusz: jest absolutny czas, nie ma absolutnej prędkości, $c \rightarrow \infty$;
- Einstein: jest absolutna prędkość, nie ma absolutnego czasu, $c = idem$ ⁶!

Czy to jest powiązane z ilością zmarszczek na czole, to już inna sprawa...

⁶ Łacińskie *idem* znaczy: jak poprzednio, to samo.

Człowiek

Powstające napięcie ma mniej więcej taką formę: „A zatem jak to jest? Skoro urodziłem się na Ziemi i tu jest mój brat, to w wyniku »sztuczki« z czasem uciekłem czasowi, przecież na Ziemi mija 5000 lat, a u mnie chwila, niemożliwe. Odczyt »błysków« świetlnych to nie to samo co starzenie się!”

Ostatni w tej części problem to kwestia fizjologicznego upływu czasu, warto się tym zagadnieniem zainteresować. Nasz upływ czasu jest mierzony jakimiś niezmiennymi jednostkami o charakterze wewnętrznym, zasadniczo mierzymy go nieodwracalnością zdarzeń i procesów: ilość ziaren piasku przesypanych w klepsydrze, ilość drgań układu rezonującego, długość i siwość brody. Wszystkie te zjawiska to nieodwracalne procesy, które wartościujemy, skalujemy i nazywamy czasem.

Co do pewności, że broda jednego z braci będzie długa i siwa, to jej nie ma! Nikt tego nie sprawdził! Pozostaje nam jedynie „dowód myślowy” nie wprost. Doświadczenia myślowe, które przeprowadzamy, pozwalają jednak wnioskować, iż czas pojmowany przez osobę Placka w osobie Jacka będzie płynął wolniej, a dokładniej Astronauta ma więcej czasu względem Ziemianina. Zatem puls, przyrost włosów, replikacja DNA, mejoza i mitozą w komórkach, wszystko będzie biegło wolniej... Czy na pewno?

Fizyk powie: względem Ziemi na pewno, gdyż inaczej prawa fizyki byłyby zmienne, w zależności od układów inercjalnych. Podstawowym postulatem teorii względności, na którym zbudowane jest całe nasze rozumowanie, jest niezmiennosc praw w układach inercjalnych (czyli obserwatorzy w tych układach nie mogą odróżnić swojej rzeczywistości od innej – zasada względności), gdyby mogli np. po długości przyrastających paznokci, oznaczałoby to wyznaczenie czasu absolutnego mierzonego bezwzględnie, niezależnego od prędkości, sił i pól – od kilku stron staramy się pojąć, że tak właśnie nie jest! Przyrost włosów kosmonauty pozwoliłby jemu obliczyć bezwzględną prędkość statku, a to przeczy fundamentalnemu postulatowi teorii względności.

Dla Ziemianina, względem którego Astronauta się porusza, procesy u Astronauty jawią się jako dłuższe, spowolnione, ale Astronauta nie będzie tego osobiście odczuwał i nie może, gdyż wówczas mógłby dokonać pomiaru prędkości własnej, a ona – jak wiadomo – nie jest bezwzględnie mierzalna. Astronauta nie przeczyta w życiu więcej książek i nie zje większej ilości kotletów. Jego życie dla niego samego biegłoby jego własnym zwykłym tempem, nie uciekłoby śmierci. Ale mógłby zobaczyć Ziemię w roku 5000... Jest to pocieszające – Zasadniczo możemy dolecieć dość daleko, w krótkim czasie pokładowym. A co dzieje się wtedy na Ziemi? Wiemy – wszystko przemija i nic na to nie poradzimy.

Inna wątpliwość: człowiek to układ złożony, jak przebiega starzenie – wiadomo, ale dlaczego, nie wiadomo. To, że protony, elektrony podpadają pod zjawisko dylatacji czasu ich życia, niekoniecznie oznacza, że tak samo będzie zachowywał się układ z nich zbudowany, jakim jest człowiek, w którym zachodzą procesy biologiczne, mające swoje *modus*

*operandi*⁷, zgodne z fizyką ale zdeterminowane... czym, Kim, tego nauki przyrodnicze nie wiedzą.

A zatem może elektrony „żyją” dłużej, ale człowiek, w którym się kręciły, żył będzie i tak swoje 70–80 lat!? Jednak to by obalało podstawowy postulat teorii względności o niewyznaczalności czasu absolutnego i teoria popada w ruinę.

Wcześniej sformułowaliśmy definicję zegara jako układu mającego zdolność do cyklicznego powrotu do stanu wyjściowego po wykonaniu jakiegoś zdarzenia. Człowiek nie spełnia tej definicji, procesy fizjologiczne są nieodwracalne i nie mają cech cykli, rezonansu, tykania etc. Człowiek, jajko wysiadywane przez kurę i żaba nie są (w myśl tej definicji) zegarami.

Wyobraźmy sobie zegar – nie atomowy, który działa na zasadzie rozpadu, emisji i innych zjawiskach atomistyki, ale biologiczny. Czas rozwoju skrzeku żaby z gatunku *Z* wynosi N_i . Dla danej fazy rozwoju *i* zbudowaliśmy układ pomiarowy, umieściliśmy w „centrum” (a gdzie to jest?!) Wszechświata (zbudowaliśmy pankosmiczny system łączności z tym zegarem – tylko jak?!) i nasze żaby są bezwzględny metronomem Wszechświata \Rightarrow koniec teorii względności w formule z 1905 roku.

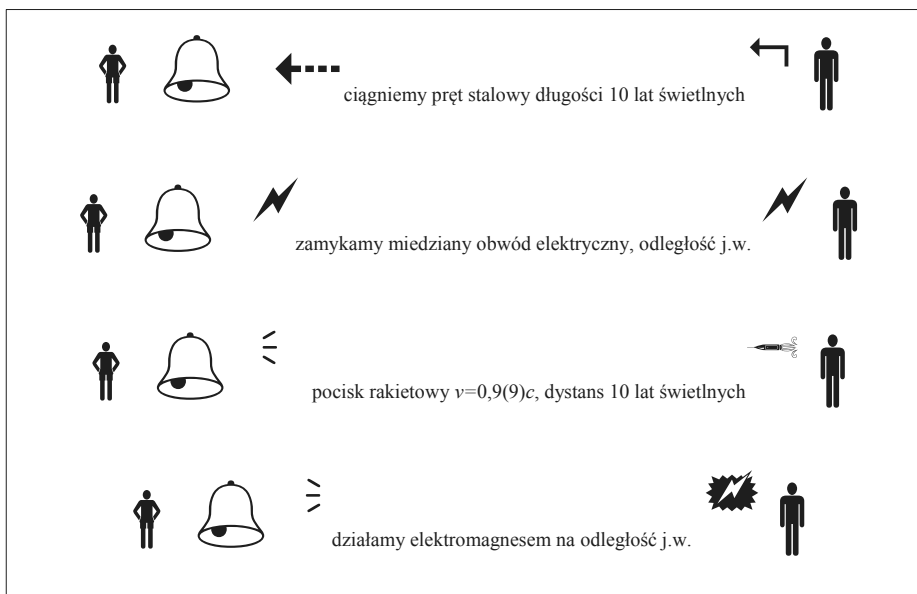
Człowiek musi być zegarem czasu własnego, chyba że jesteśmy wyjątkowi, „poza czasem”, dotyczy nas inny czas niż całej reszty Universum. Zegar mechaniczny, atomowy i każdy inny musi zatem mieć spowolniony obserwowany z Ziemi rytm, czyli spowolniony proces naliczający.

Kończąc spojrzenie fizyczne, warto powiedzieć, że problem bliźniaków jest technicznie nierealizowalny, na razie, daleko nam do maszyn osiągających prędkości bliskie fotonom... Na polu fizyki cząstek elementarnych zagadnienie to jest z kolei codziennością laboratoriów, gdzie np. strumienie protonów są rozpędzane do prędkości przyświatlnych, a wykonywanie obliczeń dylatacji czasu jest laboratoryjną koniecznością przy projektowaniu eksperymentu. W potężnych akceleratorach przyspiesza się cząstki do $v = 0,9955c$. Rozpędzenie ogromnego dzieła inżynierii, jakim jest statek kosmiczny, jak na razie jest nierealizowalne... Osobiście obstawiam, że finalnie to Placek będzie miał długą siwą brodę, a Jacek wciąż szarmancki wąsik...! Po powrocie bracia będą w różnym wieku biologicznym.

Zagadki „utrwalające wiadomości”

Czy i kiedy zadzwonią dzwonki (ryc. 12), który zadzwoni pierwszy? Wszystkie znajdują się obok siebie gdzieś daleko w pustej przestrzeni Kosmosu. Jest dwóch fizyków, jeden przy dzwonek, a jeden 10 lat świetlnych dalej przy różnych urządzeniach uruchamiających dzwonki. Wszystkie włączniki zostają uruchomione w jednym zsynchronizowanym momencie.

⁷ *modus operandi* – sposób działania, (parafrazując) system operacyjny



Ryc. 12. Zagadnienie oddziaływań we Wszechświecie

Źródło: opracowanie własne.

Podpowiedź: Impulsy o prędkości absolutnej c nie potrzebują do propagacji żadnego ośrodka („eteru”). Ale dźwięk potrzebuje, fala na jeziorze także. Prawidłowe odpowiedzi na owe zagadki pozwalają zrozumieć istotę nienatychmiastowości i nierównoczesności oddziaływań w fizyce.

3. Racja filozofa

Ponieważ nagłówek rozdziału mówi o filozofii (co mylnie sugeruje niektórym naukę nieprecyzyjną), nie pojawią się wzory, choć warto zauważyć, że filozofia to jak najbardziej „nauka ścisła”! Często wielu zapowiada zmierzch filozofii, współcześnie to raczej szeroko rozumiana fizyka zaczyna być filozofią, ale pamiętajmy, że filozofia była przez wieki napędem postępu myśli i zbyt wiele jej zawdzięczamy, aby tak od razu ją pogrzebać. Adresatami tego skromnego rozdziału są więc Czytelnicy o filozoficznych zainteresowaniach i skłonnościach..., czyli wszyscy.

Filozof (zwłaszcza ten euroazjatycki) ma zapewne kilka kwestii do roztrząśnienia w przedmiotowej sprawie. Nie znający dobrze fizyki, doszukałby się paradoksu już omówionego wcześniej: skoro dylatacja czasu jest symetryczna, to Jacek jest młodszy od Placka i Placek jest młodszy od Jacka. Ostatni sąd zaiste można by skierować do instancji logiki,

ale... ta kwestia została rozstrzygnięta wcześniej – przez racje fizyczne. Układy nie są faktycznie symetryczne, chociaż relacja dylatacji jest symetryczna.

Oczywiście podstawowym dylematem pozostaje...

Wehikuł czasu

Kolejna dygresja dla filozofii. W tym akurat zagadnieniu nikt nie przeczy odwiecznej zasadzie przyczynowości (owszem, są pola fizyki, gdzie bywa ona nieco pokrętna). Zasada ta wydaje się niezaprzeczalnym zdroworozsądkowym prawidłem świata. A jednak może jest tylko kolejnym zdroworozsądkowym mniemaniem, które – jak wiele podobnych – okazało się wadliwe. Tak więc to niekoniecznie paradoks, ale brak zrozumienia. Od czasu mechaniki kwantowej (a zwłaszcza elektrodynamiki kwantowej) przyczyna–skutek, poprzednik–następnik przestały być niezaprzeczalnymi sekwencjami.

Psychologiczny „paradoks” przyrodzonej zasady przyczynowości w zagadnieniu bliźniąt nie występuje.

Można „podróżować” w czasie tylko na zasadzie jednokierunkowej: ku przyszłości. Jeżeli (dla pewności medyka, a nie fizyka) zahibernowany człowiek ucieknie w statku kosmicznym (o przyświełnych szybkościach) przed ziemskim czasem o np. 30 lat, to wracając z podróży do „do życia”, zostanie opuszczone wcześniej niemowlę w postaci dorastającego 30-letniego mężczyzny. Zdarzenia te jednak są nieodwracalne i ewidentnie powiązane łańcuchem przyczynowo-skutkowym. Nie można już sprawić, aby mężczyzna był niemowlęciem, „duży osesek” nie może się cofnąć np. do daty startu statku kosmiczno-czasowego. Za to 30-latek może rozpocząć teraz swoją podróż kosmiczną i tym razem to on przeczeką w przestrzeni 30 lat, „doganiając” np. swojego rocznego syna, który po powrocie 30-letniego taty będzie miał np. 29 lat ziemskich!

Jestestwa ludzi (bliźniaków) są najprawdopodobniej zegarami mierzącymi czas własny, a na odczyt upływu czasu ma wpływ prędkość ruchu – co stwierdziliśmy jasno. W szczególnej teorii względności nie ma zatem mowy o swobodnie pojmowanej podróży w czasie, lecz jedynie o zjawiskach fizycznych, które choć nie są samowite, to jednak naturalne. Nie jest to przemieszczanie się w czasie, ale względna zmiana tempa jego upływu.

W naukach przyrodniczych jest wiele innych „niezwykłych”, ale przemyślanych koncepcji, np. lustrzanego Wszechświata Diraca czy wielu Cząso-Wszechświatów Everetta. Nie powinny one wzbudzać oporów. Dygresja bardzo osobista: Opory raczej powinny wzbudzać liczne lansowane, nieprzyrodnicze i płytkie „teoryjki”, których ostatnio (a rzekomo cywilizacja postępuje, przecież mamy XXI wiek!, za to bredni więcej niż w I wieku) i na które szkoda głowy, inkaustu i pióra (ale, jak powszechnie widać, nie telewizora).

Od wieków dla człowieka bywa, że najtrudniejszą rzeczą jest opisać świat i siebie takim, jaki jest. Przechabawnym jest, że nawet stojąc przed lustrem, pragnęlibyśmy często, aby światło załamywało się w sposób, który nas wypiękni... Tylko po co? Kosmos jest, jaki jest (wracając aż do arystotelesowskiej i średniowiecznej definicji prawdy: *veritas est adaequatio rei*

et intellectus⁸) i to bez względu na złożone intelektualnie i kulturowo umocowanie naszych (jakże często uwiedzionych) umysłów.

Gnoseologia

Problemem czasów Newtona i wcześniejszych było metafizyczne, a nawet transcendentne rozumienie czasu. Czas – pojmowany kiedyś – to trwanie świata, pewien matematyczny byt, będący rzeczą samą w sobie, nie związaną z niczym. Ponadto zakładanie, że prędkość światła jest nieskończona, było mało przyrodnicze, za to mocno matematyczne, platoniczne... Tak pojmowany czas był typem eteru, w którego biegu zanurzony jest Wszechświat, gdy tymczasem okazało się, że jest bardziej prozaicznie, nie ma wielkości (np. czasu, długości) istniejących absolutnie, w oderwaniu od rzeczy. Są one definiowane tylko i wyłącznie poprzez pomiar dla konkretnego obserwatora. Czas nie jest jednolitym strumieniem taktującym cały Wszechświat jedynym niezmiennym pulsem. Wyobrażenie o czasie absolutnym (metronomie Wszechświata) to nie paradoks, to stan umysłu.

Teoria względności wpłynęła zatem istotnie na zagadnienie pomiaru, czyli także epistemologii. Jeżeli różni obserwatorzy, z różnych układów, patrzą na jedno i to samo zjawisko, to pomiary związanych wielkości względnych dają różne wyniki, informacja o zjawisku dociera do tych obserwatorów w różnej formie. Nie ma pomiaru absolutnego, czyli tzw. prawdy obiektywnej o rzeczy, faktu obiektywnego.

Z metafizycznego rozumienia czasu wynikały również *a priori* założone równoczesności wszelakich zdarzeń. W światło-ogłądzie sprzed 1905 roku nikt nie zadawał wcześniej wprost tak oczywistego pytania: co to są zdarzenia równoczesne i czy aby nasze sądy o jednoczesności zdarzeń nie są błędne? Albo inaczej – cała fizyka sprzed 1905 roku zbudowana była na fundamencie pewności równoczesności zdarzeń ($c \rightarrow \infty$), ale nikt nie pytał o fundament... Było to pojęcie wprowadzone bez namysłu, jako zdroworozsądkowa oczywistość, i jak to często w przyrodzie bywa, nasz zdrowy rozsądek zawiódł. Zauważmy oczywistą słabość tych dogmatów, w przyrodzie każde 0 i ∞ są podejrzane...

Kluczowym pojęciem świata klasycznego jest ciało materialne, bryła w układzie Kartezjusza. Bryły te wypełniają (u Kartezjusza) pustą skrzynkę – przestrzeń, w fizyce Einsteina pojęciem kluczowym jest zdarzenie, coś, co miało miejsce w czasoprzestrzeni (x, y, z, t) . Stosunki w czasoprzestrzeni wyznaczają zdarzenia jako całość, czterowymiarową. Czterowymiarowość ujawniła się natychmiast po zakwestionowaniu absolutności czasu i równoczesności jego biegu dla wszystkich zdarzeń. Ani punkt przestrzeni (Newton), ani niezależny czas (Newton) nie mają fizycznego znaczenia (nie są umocowane w Kosmosie, ale jedynie w błędnych aksjomatach intelektu), znaczenie ma związek czterowymiarowy (Einstein). Ruch w czasoprzestrzeni generuje zdarzenia. Zdarzenie to nieoddzielony czas od przestrzeni (x, y, z, t) , nie zaś ruch punktu (czyli ciąg kolejnych x, y, z) i absolutne samoistne t „gdzieś obok”.

⁸ Sentencja łacińska: prawda jest zgodnością rzeczy i umysłu.

Dystansując się... Wszystko są to i tak operacje na abstrakcjach naszego umysłu. Oczywiście że ludzki umysł zniesie wszystko, ale w niniejszym opracowaniu staraliśmy się zadawać także pytania technika-inżyniera (może nieco uskrzydłonego), a nie aksjomatycznego geometry.

W świetle teorii względności nie da się również odsunąć od siebie (starych dla filozofii) pytań idealistów: neokantyzmu, machizmu i innych (odwiecznych) nurtów kwestionujących obiektywne istnienie (i poznanie) materii i świata. Mocnym zwolennikiem tego myślenia był H. Poincaré, jeden ze współtwórców teorii względności, który jako agnostyk nie rozwinął jej z powodu mniemania, że jest jedynie geometryczną zabawą bez korzyści i celowości dla społeczeństwa.

Nierozsądne jest jednak podejście ujmujące teorię względności jako efekt złudzeń optycznych, miraży czy też geometrycznych igraszek. Teoria ma fizyczny wymiar, odnosi się do pojęć fizyki, jest ponadto empirycznie umocowana. Rozwijając ten nurt pytań, zadajmy jeszcze jedno: Czy wszystkie nasze problemy wynikają z zasad propagacji światła i tego, że obserwacja jest oddziaływaniem elektromagnetycznym (czyli z graniczną prędkością rozchodzenia się $= c$) pomiędzy układami? Czas staje się wówczas parametrem sygnału, o czym wielokrotnie mówiliśmy.

A gdyby tak znaleźć inne oddziaływanie, szybsze od światła, inny rodzaj nośnika wiedzy – problemy nie znikną, pojawią się nowe, będziemy mieli tylko inną prędkość absolutną $> c$ – to nic nie zmieni. Nasz świat jest światem oddziaływań połowych. Aby zlikwidować relatywizm poznawczy, należałoby odkryć oddziaływania natychmiastowe, sposoby przesyłania i rejestracji danych bez zwłoki – temu przeczy całe dotychczasowe doświadczenie przyrodnicze.

Aby mówić o fizyce, a nie metafizyce, niezbędne jest zdefiniowanie pojęć fizycznych, mierzalnych wielkości, między którymi poszukujemy związków. Oczywiście jest, że to właśnie w zjawiskach elektromagnetycznych odnaleziono niezmienniki (poszukiwane od starożytności poprzez Abelarda i dalej), wielkości, które pozwalają przypisać pojęciu czasu (umocować je) znaczenie fizyczne.

4. Racja logika

*Logicus purus asinus est*⁹.

Faktycznie pseudo-paradoks bliźniąt rodzi się z nieprawidłowego sformułowania problemu, wtedy może stać się – pozornie – paradoksem w sensie logicznym. Chociaż nie jest to paradoks klasyczny (jak np. u Zenona z Elei), gdzie własność tworząca paradoks („paradoksalna”) jest immanentną, stanowi o jego istocie i zarazem jest kluczem rozwiązania, myślową pułapką, ale z wyjściem.

⁹ Średniowieczna sentencja łacińska: czysty logik jest osłem.

Zasadniczo po poprzednich rozważaniach logik-metodolog nie będzie miał zbyt wiele pracy do wykonania w kwestii paradoksu. Co najwyżej można przeanalizować semantykę wypowiedzi. Mit paradoksu został odmitologizowany i paradoks okazał się „paradoksem”, ten zaś – błędnie stosowanym pojęciem. Antynomii i paradoksów wewnątrz teorii brak.

Typowym, ale częstym, błędem poznawczym jest nierozróżnianie zbudowanego modelu matematycznego od realnej fizyki. Model odnosi się do abstrakcji matematycznej, która na wszystko (w ramach matematyki) pozwala, dopuszczając warianty: $c \rightarrow \infty$ i $v = c$. Interesuje nas zatem niezwykle sens matematyczny zbudowanego modelu, ale kiedy go zbadamy, to ostatecznie interesuje nas jego sens fizyczny. Poznając przyrodę, zawsze musimy rozróżniać sens matematyczny od fizycznego, dopuszczalne granice interpretacji wyznacza eksperyment, świat, a nie abstrakcja matematyki.

W niniejszej publikacji autor pragnął zrealizować alternatywne do typowego podejście. Zazwyczaj opracowania tego typu są albo dogmatycznie formalne („niech będzie”, „dane jest”, „istnieje taki, że” – znamy to...) albo fantastyczno-baśniowe („Star Trek 10²⁴”). Z jednych i z drugich niewiele wynika. Owszem, do niniejszego skromnego opracowania przydałaby się może bardziej rozbudowana część formalna (która jednak jest w stosownych opracowaniach), tutaj było jedynie kilka elementów. Ale i formalne zagadnienia potrzebują alternatywnego podejścia. Podręczniki za mało mówią o sensie „tego wszystkiego”, wchodząc natychmiast na wysokie obroty aparatu matematycznego (stosowanego często nieadekwatnie do potrzeb), epatując równaniami. Tylko po co, skoro sens fizyczny owego zagadnienia jest kluczem, a nie zasypanie problemu toną wzorów i tłumaczenie niezrozumiałego przez bardziej abstrakcyjne. Od pewnego momentu czytania takich pozycji Czytelnik realizuje już tylko igraszkę matematyczną, nie zastanawiając się, czy to wszystko ma sens i jaki... Czy aby nie jest to, co właśnie powstało, jedynie artefaktem matematyki? Matematyka jest potrzebna, nic lepszego nie wymyślono, ale trzeba z nią ostrożnie. Bo jest ona jedynie w naszych umysłach, a nie w Kosmosie. Foton nie zna elektrodynamiki kwantowej, a jednak „leci”, bocian nie zna aerodynamiki i równań różniczkowych, a jednak „leci”...

Brak wiedzy to nie paradoks. Wiele paradoksów w toku historii nauki rozpadło się, były jedynie etapem niewiedzy. Może one nie istnieją, bo rzeczywistość Kosmosu istnieje i nie rozpada się, rozpadają się za to nasze często nieudolne modele.

Na dzień dzisiejszy tak widzimy świat, może jutro będzie inaczej, jest kilka punktów, które dają podstawy do krytyki omawianej tutaj teorii (co nie było celem autora, celem było ukazanie postaci będącej dzisiaj kanonem), ale na razie trzyma się ona w miarę dobrze na pozycjach.

Zapewne formuła teorii przedstawiona w niniejszym artykule kiedyś całkowicie ustąpi miejsca bardziej pogłębionej analizie naszego świata, w końcu ma ona już 107 lat!

Piśmiennictwo

- Acosta V., Clowan C.L., Graham B.J., *Podstawy fizyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1987.
- Einstein A., *Istota teorii względności*, PWN, Warszawa 1958.
- Infeld L., *Albert Einstein*, PWN, Warszawa 1984.
- Jeżewski M., *Fizyka*, PWN, Warszawa 1970.
- Laue M. von, *Historia fizyki*, PWN, Warszawa 1957.
- Rogers E.M., *Fizyka dla dociekliwych. Cząsteczki i energia*, PWN, Warszawa 1967.
- Schutz B.F., *Wstęp do ogólnej teorii względności*, PWN, Warszawa 1995.
- Słownik wyrazów obcych*, PWN, Warszawa 1980.
- Szymacha A., *Szczególne teoria względności*, Wydawnictwa „Alfa”, Warszawa 1985.
- Ugarow W.A., *Szczególne teoria względności*, PWN, Warszawa 1985.

ABSTRACT

The gemini paradox

The publication contains the basic description of the key questions of the Albert Einstein (1879–1955) theory. The popularization of physics is aim and the intention of that essay, as the fundamental natural science. The basic conceptions of the Einstein: Lorentz's transformation and the remaining aspects of the time dilatation were showed. The problems of the philosophy was also marked: natural thinking and phenomena analysing. Essential of science is from the point, which the man did not form in the own mind, but which his critical mind perceived in the nature.

Key words: popular the science, relativity of Albert Einstein, Lorentz's transformation, trip in the time, gemini paradox.

