

Volodymyr Boychuk

**Procesy termomechaniczne
w przewodnikach niemetalowych
przy oddziaływaniu pola
elektromagnetycznego**

Volodymyr Boychuk

Procesy termomechaniczne w przewodnikach
niemetalowych przy oddziaływaniu pola
elektromagnetycznego

Spis treści

Spis najważniejszych oznaczeń	5
Wprowadzenie	7
Rozdział 1. Modelowanie procesów termomechanicznych w przewodnikach niemetalowych	11
1.1. Przegląd literatury problemu	11
1.2. Założenia modelowe	15
1.3. Właściwości pól fizycznych	18
1.3.1. Pole elektromagnetyczne	18
1.3.2. Pole temperatury	25
1.3.3. Pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń	27
1.3.4. Równania podstawowe	29
1.4. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego	30
1.4.1. Wyznaczanie pola elektromagnetycznego i temperatury	30
1.4.2. Wyznaczanie odkształceń i naprężeń	35
Rozdział 2. Procesy termomechaniczne w jednorodnym cylindrze	39
2.1. Sformułowanie zagadnienia brzegowego i algorytm rozwiązania	39
2.1.1. Wyznaczanie natężenia pola magnetycznego i temperatury	44
2.1.2. Wyznaczanie stanu naprężenia i odkształcenia	50
2.2. Płaskie zagadnienie osiowosymetryczne	53
2.2.1. Wyznaczanie pola elektromagnetycznego i temperatury	54
2.2.2. Wyznaczanie odkształceń i naprężeń	55
Rozdział 3. Procesy termomechaniczne w układzie współosiowych cylindrów	59
3.1. Sformułowanie zagadnienia brzegowego i algorytm rozwiązania	59
3.1.1. Pole elektromagnetyczne i temperatura	66
3.1.2. Pole naprężenia i odkształcenia	71
3.1.3. Pola kwaziustalone	75
3.2. Rozwiązanie dla cylindra dwuwarstwowego	86
3.2.1. Natężenie pola magnetycznego i temperatura	87
3.2.2. Stan naprężenia i odkształcenia	90
3.3. Rozwiązanie dla układu cylindrów współosiowych, rozdzielonych warstwą próżni	94
3.3.1. Pole elektromagnetyczne i temperatura	94

3.3.2.	Stan odkształcenia i naprężenia	98
3.4.	Obliczenia numeryczne	100
3.4.1.	Uwzględnienie zależności właściwości materiału od temperatury	102
3.4.2.	Uwzględnienie wymiany ciepła przez promieniowanie	102
3.4.3.	Analiza wyników obliczeń	107
Rozdział 4.	Przewodność elektryczna materiałów wieloskładniko- wych	109
4.1.	Współczynnik przewodności elektrycznej	109
4.2.	Pomiar przewodności elektrycznej	111
4.3.	Przewodność elektryczna materiałów cementowych	112
4.4.	Ocena procesu twardnienia zaczynu cementowego	116
Uwagi końcowe		119
Bibliografia		123
Streszczenia		132

Spis najważniejszych oznaczeń

H	—	Natężenie pola magnetycznego, $\frac{A}{m}$
E	—	Natężenie pola elektrycznego, $\frac{V}{m}$
B	—	Indukcja magnetyczna, T
D	—	Indukcja elektryczna, $\frac{C}{m^2}$
j	—	Gęstość prądu elektrycznego, $\frac{A}{m^2}$
Ω	—	Gęstość ładunków elektrycznych, $\frac{C}{m^3}$
ε	—	Przenikalność elektryczna, $\frac{F}{m}$
μ	—	Przenikalność magnetyczna, $\frac{H}{m_1}$
σ_e	—	Przewodność elektryczna, $\frac{Ohm \cdot m}{m}$
Q_*	—	Ciepło Joule'a, $\frac{W}{m^3}$
F	—	Siła ponderomotoryczna, $\frac{N}{m^3}$
T	—	Temperatura bezwzględna, K
q_λ	—	Strumień ciepła, $\frac{W}{m^2}$
λ	—	Współczynnik przewodności cieplnej, $\frac{W}{m \cdot K}$
u	—	Wektor przemieszczenia, m
ρ_V	—	Gęstość, $\frac{kg}{m^3}$
$\hat{\sigma}$	—	Tensor naprężenia, Pa
\hat{e}	—	Tensor odkształcenia, -

λ_*, μ_*	—	Współczynniki Lamego, Pa
\hat{I}	—	Tensor jednostkowy
ρ, φ, z	—	Współrzędne cylindryczne
t	—	Czas, s
\mathbf{n}	—	Jednostkowy wektor normalny do powierzchni
(k)	—	$= 1$ – obszar ciała, $= 0$ – obszar otoczenia

Wprowadzenie

W wielu technologicznych procesach wytwarzania i obróbki niemetalo-
wych materiałów przewodzących prąd elektryczny, zarówno tradycyjnych,
jak i nowych, wykorzystuje się zewnętrzne pole elektromagnetyczne sze-
rokiego zakresu częstotliwości. Niektóre elementy konstrukcyjne i wyroby
znajdują się pod wpływem takiego pola przy ich eksploatacji. Znane są spo-
soby obróbki wyrobów z takich materiałów z wykorzystaniem zmiennego w
czasie zewnętrznego pola elektromagnetycznego, których celem jest nagrze-
wanie lub stymulacja procesów zachodzących w nich przemian. Możliwość
bezkontaktowego sposobu przekazu energii do materiału, lokalny charakter
działania pola elektromagnetycznego, stosunkowo wysoka sprawność prze-
kazu energii na pewne podobszary czy składniki materiału dają perspektywy
takiej obróbki przewodników niemetalo-
wych.

Skutkiem działania pola elektromagnetycznego na materiał będący prze-
wodnikiem elektrycznym jest zarówno jego nagrzewanie się, jak i powstawa-
nie odkształceń i naprężeń mechanicznych. Naprężenia mechaniczne mogą
przekraczać wartości dopuszczalne i prowadzić do zniszczenia materiału.
Przy tym, na zachodzące w materiale procesy znaczny wpływ mają zmiany
niektórych jego właściwości. W procesie nagrzewania materiałów z wy-
korzystaniem zmiennego w czasie pola elektromagnetycznego osiągnęte są
znaczące temperatury, co powoduje wymianę ciepła przez promieniowanie.
Wymienione zjawiska mają również miejsce przy pomiarach właściwości
elektrycznych, ponieważ ich przeprowadzenie wiąże się z użyciem zewnętr-
znego oddziaływania polem elektromagnetycznym.

Niemetalowe przewodniki elektryczne są materiałami wieloskładniko-
wymi i charakteryzuje je jonowy mechanizm przewodzenia elektryczności.
Procesy przenoszenia ładunku elektrycznego oraz sprzężone z nimi zjawiska
termomechaniczne są dla ośrodków wieloskładnikowych stosunkowo mało
poznane. Ważnym elementem oceny przebiegu procesów termomechanicz-
nych w takich ośrodkach jest pomiar wielkości charakteryzujących właściwo-
ści materiału, w tym także właściwości elektrofizycznych. Przepływ prądu
elektrycznego w materiałach wieloskładnikowych zależy od struktury

takich materiałów, ich składu oraz od oddziaływań, zachodzących między poszczególnymi składnikami. Pomiar elektryczny daje możliwość pośredniego oszacowania innych, ważnych w zastosowaniach technologicznych właściwości materiałów. Do takich właściwości odnoszą się parametry charakteryzujące procesy cieplne, mechaniczne czy też zmiany spójności struktury wewnętrznej.

Celem proponowanego opracowania jest zbudowanie wariantu modelu termomechaniki niemetalewowych przewodników elektrycznych i metodologii badania sprzężonych procesów elektrofizycznych, cieplnych i mechanicznych w takich ciałach, spowodowanych wpływem zewnętrznego zmiennego w czasie, ustalonego lub kwaziustalonego pola elektromagnetycznego.

Dla osiągnięcia postawionego celu konieczne jest zbudowanie modelu ilościowego opisu sprzężonych procesów mechanicznych, cieplnych oraz elektrofizycznych w przewodnikach niemetalewowych. Przy tym należy rozwiązać szereg zagadnień o charakterze teoretycznym oraz praktycznym, a mianowicie:

- dokonać uogólnienia modelowego opisu oddziaływania pola elektromagnetycznego na wieloskładnikowe przewodniki elektryczne (ze składnikami, które mogą przenosić ładunek elektryczny);
- wyznaczyć czynniki wpływu pola elektromagnetycznego na stan termomechaniczny przewodników niemetalewowych;
- otrzymać układ równań fizycznych opisujących działanie pola elektromagnetycznego na niemetalewe przewodniki elektryczne;
- sformułować zagadnienia brzegowe dla wyznaczania sprzężonych pól: elektromagnetycznego, temperatury i stanu naprężeń, opisujących wymienione procesy fizyczne i odpowiadających warunkom oddziaływania ciała z otoczeniem;
- opracować algorytmy rozwiązywania i analizy numerycznej sformułowanych zagadnień fizyki matematycznej;
- zbadać, z wykorzystaniem zaproponowanego schematu obliczeniowego, wpływ działającego pola elektromagnetycznego, zmienności współczynników materiałowych i wymiany ciepła z otoczeniem na procesy termiczne i mechaniczne w przewodnikach niemetalewowych.

Do zbudowania własnego wariantu teorii termomechaniki przewodników niemetalewowych w polu elektromagnetycznym, w rozdziale 1 wykorzystano znane modelowe podejścia do mechaniki mieszanin i mechaniki pól sprzężonych, w szczególności kontynualny model mieszaniny z dominującym składnikiem (szkieletem) w strukturze materiału. Dla sformułowania równań fizycznych wykorzystano wyniki modelowania fenomenologicznego. Zakłada się także w opisie badanych zjawisk, że właściwości materiału charaktery-

zowane są wartościami efektywnymi odpowiednich współczynników materiałowych.

Przyjmuje się ponadto, że pole elektromagnetyczne, zarówno w przewodniku, jak i w otoczeniu — przybliżanym względem własności elektrycznych i magnetycznych próżnią, spełnia makroskopowe równania elektrodynamiki. Działanie takiego pola na materiał przewodzący powoduje produkcję ciepła, powstającego na skutek przepływu prądu elektrycznego oraz siły i momenty ponderomotoryczne. Wymienione czynniki działania wywołują procesy termomechaniczne, będące obiektem modelowania w ciele.

Przy formułowaniu równań wyjściowych modelu uwzględniono zależności efektywnych wartości współczynników materiałowych od temperatury oraz wzięto pod uwagę możliwą wymianę ciepła przez promieniowanie. Przyjęto przy tym, że materiał nie ulega polaryzacji i namagnesowaniu. Proces odkształcania się uważany jest za kwazistatyczny.

Przy takim podejściu, zagadnienie wyjściowe sprowadzono do sprzężonego nieliniowego układu równań elektrodynamiki i przewodnictwa cieplnego. Następnie wyznaczono stan mechaniczny z odpowiedniego zagadnienia termosprężystości, przy współczynnikach zależnych od zmiennych przestrzennych.

W celu rozwiązywania otrzymanych nieliniowych zagadnień brzegowych zaproponowano metodę iteracyjną. Przy tym, zależności temperaturowe współczynników materiałowych przedstawiono jako sumę wartości średniej na rozpatrywanym interwale temperatur oraz odchylenia od tej wartości. Za pierwsze przybliżenie wybierane jest tu rozwiązanie przy wartościach średnich, a w następnych — z uwzględnieniem odchylenia tych wielkości od średnich, obliczanego po temperaturze wyliczonej z poprzedniego przybliżenia. Taka linearyzacja pozwala w każdej iteracji rozwiązywać kolejno niesprężone równania elektrodynamiki, przewodnictwa cieplnego oraz mechaniki.

Wraz z przyjęciem do rozważań zewnętrznego oddziaływania pola elektromagnetycznego o charakterze okresowym równania wyjściowe sformułowano względem zespolonych, wolno zmieniających się w czasie amplitud. Zabieg ten pozwala zredukować wymiar zagadnienia brzegowego o zmienną czasową. Równania elektrodynamiki formułowane są zatem względem funkcji amplitudy składowej elektrycznej lub magnetycznej pola. Przy tym, podobnie jak w zagadnieniach dla przewodników o stałych współczynnikach materiałowych, pomijane są składowe periodyczne pól: termicznego i mechanicznych. Do rozwiązywania otrzymywanych w iteracjach zagadnień brzegowych stosowano numeryczną metodę różnic skończonych, przy wykorzystaniu stabilnego, niejawnego schematu różnicowego.

Opracowany model obliczeniowy w kolejnych rozdziałach 2 i 3, zastosowano do analizy termosprężystego stanu ciała cylindrycznego oraz układu współosiowych cylindrów, w okresowo zmiennym po czasie polu elektromagnetycznym. Realizowano przy tym algorytm obliczeniowy sformułowanych zagadnień oraz przeanalizowano wpływ zmienności właściwości materiału od temperatury oraz wymiany ciepłej promieniowaniem z otoczeniem na wynikające naprężenia mechaniczne w przewodniku. W rozdziale 3 przedstawiono wyniki przeprowadzonych obliczeń dla układu dwóch współosiowych cylindrów rozdzielonych warstwą próżni.

Rozpatrywany model opisu termomechanicznego zachowania się dla przewodników niemetalowych z wykorzystaniem opracowanej metody rozwiązywania sformułowanych zagadnień brzegowych pozwolił na ocenę wpływu oddziaływania pola elektromagnetycznego na stan termomechaniczny próbek przy pomiarach współczynnika przewodności elektrycznej materiału wieloskładnikowego. W rozdziale 4 przedstawiono wyniki pomiaru przewodności elektrycznej zaczynów cementowych i powiązanie zmiany w czasie wartości tej przewodności elektrycznej ze zmianami spójności struktury szkieletu fazy stałej. Zaproponowano na tej podstawie sposób oceny stanu zaawansowania procesu wiązania i twardnienia cementu.

Rozdział 1

Modelowanie procesów termomechanicznych w przewodnikach niemetalo- wych

1.1. Przegląd literatury problemu

Problemom modelowania i badania sprzężonych zjawisk elektromagnetycznych, cieplnych oraz mechanicznych poświęca się w literaturze naukowej dużo uwagi. W szeregu fundamentalnych monografii: Eringen [21], Maugina [58], Kaliskiego, Petykiewicza [42, 43], Nowackiego [67], Trusdella, Toupina [84], Wiśniewskiego, Staniszewskiego, Szymanika [89], Ambarcumaniana [94], Iliuszyna [120], Sedowa [143, 144], przedstawiono podstawy teoretyczne mechaniki ośrodków ciągłych z uwzględnieniem oddziaływania pól rozmaitej natury fizycznej (w tym także i elektromagnetycznych). W zaproponowanych modelach (pole elektromagnetyczne traktowane jest tu jako czynnik zewnętrzny) wpływ takiego pola na procesy termomechaniczne uwzględniany jest w równaniach bilansowych mechaniki przez siły objętościowe i momenty ponderomotoryczne, oraz źródła energii, które powstają w czasie oddziaływania ciała z polem elektromagnetycznym. Przy tym formułowane są równania elektrodynamiki (równania Maxwella), opisujące pole elektromagnetyczne w otoczeniu ciała (przyjmowanym zwykle względem własności elektrycznych i magnetycznych jako próżnia) oraz w poruszającym się ciele odkształcalnym, z uwzględnieniem jego właściwości elektromagnetycznych. Pole elektromagnetyczne w otoczeniu opisywane jest przez natężenie i indukcję pól: elektrycznego oraz magnetycznego (między którymi zachodzi zależność liniowa) oraz gęstość rozłożonych ładunków elektrycznych. Przy tym w rozważanym ciele wprowadzane są dodatkowe wielkości — prąd elektryczny, polaryzacja oraz namagnesowanie, opisujące jego właściwości elektromagnetyczne. Cechy te, pozwalają na wykorzystanie w rozważanych zagadnieniach termomechaniki założenia o wolno poruszających się ośrodkach (prędkość ośrodka jest mała w stosunku do prędkości światła w próżni).

Znane są opracowane przez wielu badaczy modele termomechaniki ciał z uwzględnieniem oddziaływania pola elektromagnetycznego, w których wy-

korzystano wymienione podejście. Różnią się one głównie formułowaniem równań elektrodynamiki oraz podejściem do określenia oddziaływań pola na ciało i zachodzących przepływów energii. Do najbardziej rozpowszechnionych modeli można zaliczyć:

- model statystyczny (S. de Groot, L. Suttorp [117])
- bazujący na teorii elektronowej model Lorentza [50, 145]
- model dwudipolowy Chu [17, 38, 70]
- model Maxwella-Minkowskiego [1, 30, 144]

Równoważność wspomnianych modeli (w odniesieniu do opisu stanu termomechanicznego ciał, będących przewodnikami elektrycznymi, przy uwzględnieniu polaryzacji oraz namagnesowania) w przybliżeniu nierelatywistycznym pokazana jest w monografii Huttera i van de Vena [38]. W pracy tej przedstawiono również zastosowanie opisu materialnego (Lagrange'a) w wymienionych teoriach ciał odkształcalnych, znajdujących się pod wpływem pola elektromagnetycznego oraz przedstawione metody linearyzacji równań różniczkowych dla ciał termosprężystych.

Na podstawie omówionych teorii, przy wykorzystaniu metod lokalnie równowagowej lub racjonalnej termodynamiki, zaproponowano szereg uogólnionych modeli opisujących sprężyste, lepkosprężyste, plastyczne zachowanie się stałych ciał odkształcalnych z uwzględnieniem polaryzacji i namagnesowania. W modelach tych brano pod uwagę nieliniowe właściwości ośrodków oraz rozmaite typy dyssypacji (mechaniczną, związane z procesami: przepływu ciepła, polaryzacji, namagnesowania) [59, 60, 80]. Są one uogólnieniem termomechanicznych modeli ośrodków prostych [69, 144] (jak w klasycznej termosprężystości) czy ośrodków z parametrami wewnętrznymi [18, 19] (termolepkosprężystości, termolepkoplastyczności).

Historycznie, zbudowanie konkretnych modeli mechaniki ośrodków ciągłych, z uwzględnieniem sprzężenia pól mechanicznych z polem elektromagnetycznym, wynikało z konieczności wykorzystania teorii naukowych na potrzeby różnych procesów technologicznych. Przykładem takich teorii są:

- teoria ciał piezoelektrycznych w nawiązaniu do zbudowania przetworników elektromechanicznych;
- teoria magnetosprężystości, badająca mechaniczne zachowanie się (w szczególności stateczność) nośników prądu w silnym polu magnetycznym;
- teoria rozchodzenia się fal w ciałach odkształcalnych (w szczególności wstępnie poddanych odkształceniom czy naprężeniom mechanicznym) z uwzględnieniem sprzężenia pól mechanicznych i elektromagnetycznego, w odniesieniu do problemów geofizyki, sejsmologii czy nieniszczących metod kontroli naprężeń w ciałach;

— teoria obróbki technologicznej (termicznej, mechanicznej itp.) wykorzystująca zewnętrzne oddziaływanie pola elektromagnetycznego (stałego czy zmiennego o różnych częstościach, w tym także wysokoczęstotliwościowego i nadwysokoczęstotliwościowego - termicznego czy laserowego). Rozszerzenie zakresu badań oddziaływania pola elektromagnetycznego na mechaniczne zachowanie się ośrodków materialnych uwarunkowane jest pojawieniem się nowych materiałów oraz zastosowaniem nowych metod ich produkcji i obróbki. Opracowanie podstaw teoretycznych obróbki termicznej ciał przewodzących z udziałem pola elektromagnetycznego jest ważnym kierunkiem mechaniki pól sprzężonych. Pozwala on przeprowadzić analizę działania tego pola na stan naprężeń i odkształceń w ciele oraz ustalić racjonalne technologie jego obróbki. Jednymi z pierwszych prac z tego zakresu są prace związane z obróbką indukcyjną przewodników elektrycznych [125, 138].

W badaniach tego rodzaju, przy wyznaczaniu stanu odkształceń i naprężeń, stosowano przybliżony schemat rozwiązywania, zgodnie z którym z równań elektrodynamiki (przy stałych właściwościach elektrofizycznych materiału przewodnika, zaniechaniu efektów sprzężenia i ruchu ciała) wyznacza się pole elektromagnetyczne w ciele i ciepło Joule'a. Ciepło Joule'a, uśrednione w okresie fali elektromagnetycznej, rozważano jako moc źródeł ciepła w równaniach kwazistatycznego niesprężonego liniowego zagadnienia termosprężystości. W dalszych badaniach (por. [109, 137]) uwzględniano wpływ pola na przewodzenie ciepła i odkształcenia poprzez zmienne w czasie ciepło Joule'a i siły ponderomotoryczne, które rozważane były jako objętościowe czynniki cieplne i siłowe w odpowiednich zagadnieniach termosprężystości. Z wykorzystaniem takiego modelu obliczeniowego, na podstawie równań sprzężonego liniowego dynamicznego zagadnienia termosprężystości, badano termomechaniczne zachowanie się przewodników elektrycznych spowodowane działaniem ustalonego (kwaziustalonego) pola elektromagnetycznego [137]. Przy tym zauważono zjawiska rezonansu spowodowane kwaziustalonymi składnikami sił ponderomotorycznych i ciepła oraz zbadano termomechaniczne zachowanie się ciał przy częstościach bliskich rezonansowym [109].

W pracach [54, 55] przedstawiono rozwiązania dynamicznych zagadnień magnetotermosprężystości dla sprężystego ferromagnetyka. Bazując na metodzie małego parametru, podano rozwiązania linearyzowanych równań problemu. Analizowano przy tym, na podstawie uzyskanego rozwiązania, rozprzestrzenianie się fal magnetotermosprężystych.

Przeprowadzono również badania dla ciał prostego kształtu, stanu naprężeń przy przebiegach przejściowych kwaziustalonego pola elektromagne-

tycznego oraz przy impulsowych obciążeniach magnetycznych [114]. Zaproponowano wariant termomechaniki przewodników elektrycznych przy oddziaływaniu na nie polem elektromagnetycznym, które ma charakter reżimu z modulowaniem amplitudy przy impulsowym sygnale modulującym [115].

W ostatnich latach obserwuje się coraz szerszy rozwój badań procesów elektromagnetycznych, cieplnych i mechanicznych w ciałach odkształcalnych w powiązaniu z przenoszeniem w nich masy. Historycznie jest to powiązane z problemami wytwarzania nowych materiałów (w tym także wieloskładnikowych) oraz prognozowaniem ich właściwości elektrycznych, magnetycznych, cieplnych i mechanicznych. Odpowiednie modele opisu termomechanicznego zachowania się ciał z uwzględnieniem dyfuzyjnych procesów oparte są na teorii mieszanin [7, 65, 144] czy też teorii odkształcalnych roztworów stałych [120, 107] i opisanych wyżej teorii oddziaływań elektromagnetycznych.

I tak, opracowany w [107] model n -składnikowego przewodzącego roztworu stałego naładowanych składników jest uogólnieniem „modelu deformacyjnego” [136] dla ciała nieferromagnetycznego (z pominięciem procesów polaryzacyjnych). W modelu tym, ciało jest rozpatrywane jako mieszanina n elektrycznie naładowanych składników: pozytywnie naładowanego szkieletu metalu podstawowego, elektronów przewodności oraz $n - 2$ rodzajów jonów rozpuszczonej domieszkowej substancji. Przenoszenie masy w roztworze (pomijając przenoszenie masy przez elektrony) jest opisywane (przy założeniu lokalnej równowagi cieplnej między składnikami) skalarnymi potencjałami chemicznymi domieszek i wiąże się z niejednorodnością rozkładów badanych pól koncentracji składników (dyfuzja Ficka), temperatury (termodyfuzja), odkształceń (mechanodyfuzja), termodynamicznego elektrycznego potencjału (charakteryzującego niejednorodność stanu energetycznego elektronów) oraz siłowym oddziaływaniem pola elektromagnetycznego na naładowane składniki domieszkowe. Bezpośredni wpływ przenoszenia masy na naprężenia wiąże się z naprężeniami koncentracyjnymi będącymi skutkiem nierównomiernego rozkładu rozpuszczonej substancji. Termodynamiczne modele mieszanin przewodzących (zarówno ciekłych jak i stałych), w których brano pod uwagę sprzężenie procesów mechanicznych, cieplnych oraz dyfuzyjnych wraz z elektromagnetycznymi na podstawie przybliżenia dyfuzyjnego rozważono w pracy [118]. Specyfika wpływu pola elektromagnetycznego na przenoszenie masy w mieszaninach w tym modelu uwzględniona została poprzez reaktywną dyfuzję składników jonowych.

Wpływ stałego pola elektrycznego na przenoszenie masy w przewodnikach niemetalowych badano w związku z ich właściwościami przenoszenia prądu elektrycznego. W znanych modelach elektrodyfuzji [46] przepływ

prądu w ciele wiąże się z dyfuzją nośników jonowych, w szczególności domieszkowych, pod wpływem sił pola elektrycznego.

W literaturze naukowej, w celu opisu sprzężonych procesów mechanicznych oraz termodyfuzyjnych w odkształcalnym nieferromagnetycznym przewodzącym ciele z elektrycznie neutralnymi domieszkami, które poddane działaniu pola elektromagnetycznego, zaproponowane zostały również modele obliczeniowe, które zbudowano jak uogólnienie znanych modeli mechanotermodyfuzji. W modelach tych wpływ pola na przenoszenie masy spowodowany jest działaniem pola odkształceń i temperatury w ciele [53].

Jeszcze jedno uogólnienie modeli termodyfuzji dla ciał z domieszkami zaproponowano w pracach Maruszewskiego [56, 57], w których uwzględniono wpływ magnetycznych właściwości ciała na przenoszenie masy (modele magnetotermodyfuzji) poprzez uzależnienie energetycznych charakterystyk domieszek (potencjałów chemicznych) od parametrów pola magnetycznego w ciele.

Podsumowując podany wyżej wybiórczy wykaz zaczerpniętych z literatury naukowej modeli opisu termomechanicznego zachowania się ciał w polu elektromagnetycznym, można wyszczególnić szereg problemów, związanych z modelowaniem sprzężonych procesów termomechanicznych w ciałach odkształcalnych, będących pod wpływem pola elektromagnetycznego, które potrzebują bardziej szczegółowych badań, a mianowicie:

- rozwój modeli ilościowego opisu i analizy przenoszenia masy i ciepła oraz odkształcania się w ciałach wieloskładnikowych o różnej przewodności elektrycznej przy działaniu pola elektromagnetycznego szerokiego zakresu częstotliwości;
- modelowanie procesów termomechanicznych, zachodzących w czasie wysokotemperaturowego nagrzewania wieloskładnikowych ciał przewodzących za pomocą pola elektromagnetycznego, które uwzględniają przemiany strukturalne materiału i ich wpływ na procesy mechaniczne;
- zbudowanie i rozwój teorii i metod rozwiązywania odpowiednich zagadnień fizyki matematycznej;
- opracowanie metodyk eksperymentalnego badania parametrów sprzężonych procesów mechanotermodyfuzyjnych dla konkretnych typów oddziaływania elektromagnetycznego.

1.2. Założenia modelowe

Rozważane jest zagadnienie wyznaczania pola temperatury oraz naprężeń mechanicznych w niemetalowych przewodnikach elektrycznych poddanych działaniu zewnętrznego pola elektromagnetycznego. Do niemetalo-

wych przewodników zaliczamy materiały wykazujące jonowy typ przewodzenia elektrycznego. Materiały takie zwykle są materiałami wieloskładnikowymi o strukturze porowatej.

Zewnętrzne, stałe lub zmienne w czasie, pole elektromagnetyczne wywołuje procesy elektryczne, cieplne oraz mechaniczne w ośrodku wieloskładnikowym, z którym powiązane są zmiany energetyczne [47, 77, 88, 90, 93]. Procesy te są sprzężone między sobą i punktem wyjścia do ich opisu jest cząsteczkowa budowa materii i założenie, że określone rodzaje składników przenoszą ładunek elektryczny. Wymienione składniki tworzą między sobą wiązania, które w określonych warunkach mogą ulegać zmianom.

Uwzględnienie oddziaływań między osobnymi cząstkami w ciałach makroskopowych nie jest jednak możliwe, jak również nie jest konieczne. Dla makroskopowego opisu zachowania się materiałów budowane są modele z wykorzystaniem założenia o ciągłym rozkładzie materii i wprowadzania parametrów polowych. Pozwala to na wykorzystanie aparatu matematycznego stosowanego przy opisie ośrodka ciągłego (model kontinuum materialnego). Modele, oparte na takim ujęciu, charakteryzuje mniejsza liczba niezależnych parametrów określających właściwości rozpatrywanych ośrodków i są one bardziej przydatne do opisu zachowania się ośrodka materialnego poddanego oddziaływaniom zewnętrznym. Jednak przejście od opisu cząsteczkowego do kontinuum związane jest z wykonaniem procedur uśredniania właściwości materiałowych oraz parametrów ujmujących procesy fizyczne, zachodzące pod wpływem działania zewnętrznego. Przy modelowaniu wprowadza się szereg parametrów, które nie występują w typowych opisach kontinuum materialnego. Z drugiej zaś strony większość technik pomiarowych bazuje na rozważaniach makroskopowych dla kontinuum materialnego.

Przedmiotem naszych rozważań są ciała stałe, w których zewnętrzne pole elektryczne wywołuje uporządkowany i ukierunkowany przepływ ładunku elektrycznego (płyne prąd elektryczny). Dla opisu takiego przepływu wykorzystamy współczynnik przewodności elektrycznej σ_e , będący współczynnikiem proporcjonalności między natężeniem \mathbf{E} pola elektrycznego oraz gęstości przepływającego prądu \mathbf{j} (prawo Ohma).

Przepływowi prądu elektrycznego towarzyszy powstanie ciepła oraz sił ponderomotorycznych powodujących nagrzewanie się oraz odkształcenia i naprężenia mechaniczne (zarówno na skutek nierównomiernego nagrzewania się ciała, jak i działania sił, które mają charakter sił objętościowych).

Przyjmujemy, że przemieszczenia, odkształcenia i ich prędkości w rozważanych ciałach, przy przyjętych parametrach oddziaływania elektromagnetycznego ($H_0 \leq 10^7 A/m$, gdzie H_0 — rząd wartości natężenia zewnętrznego pola magnetycznego) są na tyle małe, że spełniają założenia liniowej teo-

rii sprężystości [68, 122, 123], a wpływ ruchu na wielkości opisujące pole elektromagnetyczne jest pomijalny [63]. Dla rozpatrywanych materiałów efekty elektromechaniczne i termoelektryczne są małe i można je pominąć. W niniejszym opracowaniu ograniczymy rozważania do ciał stałych przewodzących będących ciałami niepolaryzowalnymi i nieferromagnetycznymi (elektrycznie i magnetycznie liniowymi).

Właściwości cieplne oraz mechaniczne rozważanych materiałów niemetalowych przewodzących wyznacza dominująca w ich składzie matryca, składająca się z fazy stałej; stąd podobieństwo takich materiałów do szkieł i materiałów ceramicznych. Charakterystycznym jest dla nich brak płaszczyzny płynięcia na diagramach obciążenie-odkształcenie, zaś granica sprężystości pokrywa się z granicą wytrzymałości.

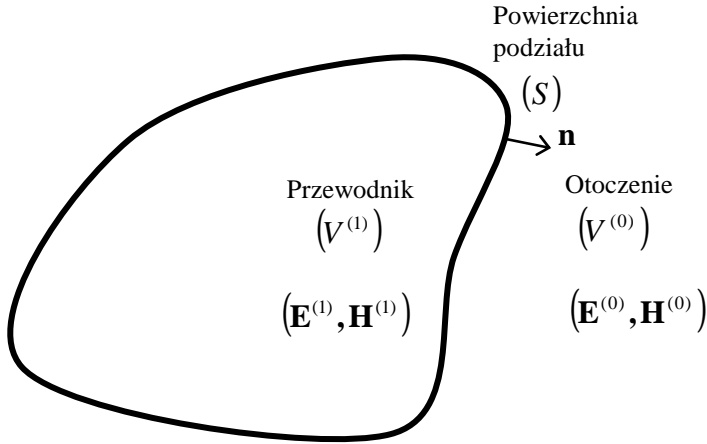
W niektórych przypadkach, przy nagrzewaniu przewodników niemetalowych, osiągane są znaczne temperatury (powyżej 1000°C), co powoduje konieczność uwzględnienia wymiany ciepła przez promieniowanie zarówno z otoczeniem, jak i między elementami powierzchni rozważanych ciał. Zakładamy, że materiały takie są nieprzezroczyste dla promieniowania cieplnego (podczerwonego zakresu częstości) i uwzględniane jest ono zatem w warunku brzegowym bilansu strumieni cieplnych na powierzchni ciała [96, 119, 128]. Dla przewodników niemetalowych charakterystyczna jest również istotna zależność współczynnika przewodności elektrycznej oraz cieplnych i mechanicznych właściwości ośrodka od temperatury.

W zagadnieniach określenia stanu naprężeń przewodników elektrycznych, przy stałych właściwościach materiałowych, w przypadku wszystkich częstości pola elektromagnetycznego, za wyjątkiem częstości rezonansowych, pola temperatury i naprężenia można określać wychodząc z uśrednionego w czasie, z uwagi na zmienność fali elektromagnetycznej, ciepła Joule'a [135, 137, 138]. Będziemy zakładać, że w rozpatrywanym zagadnieniu częstości ω pola elektromagnetycznego nie są częstościami rezonansowymi. Umożliwia to uwzględnienie w wykorzystywanym schemacie obliczeniowym wpływu kwaziustalonego pola elektromagnetycznego na procesy przewodnictwa ciepła i deformacji w ujęciu kwazistatycznym.

W takim sformułowaniu, wyjściowe zagadnienie opisuje się sprzężonym układem równań elektrodynamiki ośrodków nieruchomych i przewodnictwa cieplnego. Stan naprężeń określamy tu na podstawie równań niesprężonego kwazistatycznego zagadnienia termosprężystości ciał termoczułych przy odpowiednich warunkach początkowych i brzegowych [24, 102].

1.3. Właściwości pól fizycznych

1.3.1. Pole elektromagnetyczne



Rysunek 1.1. Pole elektromagnetyczne

Rozpatrywany jest izotropowy przewodnik elektryczny, który poddany działaniu zadanego w otoczeniu pola elektromagnetycznego.

Wyjściowym układem równań, opisującym zmiany pola elektromagnetycznego w przestrzeni i czasie, w układzie przewodnik – otoczenie, są równania Maxwella [50, 78, 145]

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(k)} &= \frac{\partial \mathbf{D}^{(k)}}{\partial t} + \mathbf{j}^{(k)}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(k)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}^{(k)}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D}^{(k)} &= \Omega^{(k)}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B}^{(k)} &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

dla obszaru ciała ($k = 1$) i otoczenia ($k = 0$), które w dalszych rozważaniach będziemy w przybliżeniu traktować jako próżnię ze względu na własności elektryczne i magnetyczne. Przez \mathbf{E} , \mathbf{H} oznaczono wektory natężenia pól elektrycznego oraz magnetycznego, \mathbf{B} , \mathbf{D} - indukcje magnetyczna i elektryczna, \mathbf{j} - gęstość prądu elektrycznego w ciele, Ω - gęstość ładunków elektrycznych.

Z równań (1.1) wynika również związek między objętościową gęstością ładunku elektrycznego $\Omega^{(k)}$ i gęstością prądu $\mathbf{j}^{(k)}$, który nosi nazwę prawa

zachowania ładunku. Działając operatorem div na równania (1.1)₁, zmieniając kolejność różniczkowania i wykorzystując równania (1.1)₃, otrzymujemy

$$\frac{\partial \Omega^{(k)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}^{(k)} = 0, \quad (k = 0, 1). \quad (1.2)$$

Celem ustalenia relacji, wiążących wartości wielkości elektromagnetycznych po różnych stronach powierzchni rozdziału (S), wychodzimy z równań Maxwella, zapisanych w postaci całkowej [50, 78]

$$\begin{aligned} \int_{(\Gamma)} \mathbf{H} dl &= \int_{(S)} (\mathbf{j})_n dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} (\mathbf{D})_n dS; \\ \int_{(\Gamma)} \mathbf{E} dl &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} (\mathbf{B})_n dS; \\ \int_{(S)} (\mathbf{D})_n dS &= \int_{(V)} \Omega_0 dV; \\ \int_{(S)} \mathbf{B}_n dS &= 0; \end{aligned} \quad (1.3)$$

gdzie (S) - dowolna powierzchnia oparta na konturze (Γ); (V) - obszar, ograniczony zamkniętą powierzchnią (S).

Z równań (1.3) można otrzymać następujące warunki brzegowe na granicy podziału ciało - otoczenie

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{(1)})_n &= (\mathbf{B}^{(0)})_n; \\ (\mathbf{D}^{(1)})_n - (\mathbf{D}^{(0)})_n &= \Omega_0 \quad \text{lub} \quad = 0; \\ (\mathbf{E}^{(1)})_\tau &= (\mathbf{E}^{(0)})_\tau; \\ (\mathbf{H}^{(1)})_\tau &= (\mathbf{H}^{(0)})_\tau; \\ \left(\frac{\partial \mathbf{D}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{j}^{(1)} \right)_n &= \left(\frac{\partial \mathbf{D}^{(0)}}{\partial t} \right)_n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

gdzie Ω_0 - powierzchniowa gęstość ładunku elektrycznego; indeksy n oraz τ oznaczają odpowiednio składowe normalną i styczną wektorów.

Z warunków (1.4)₂ i (1.4)₅, z uwzględnieniem równania ciągłości (1.2) wynika

$$(\mathbf{j}^{(1)})_n - (\mathbf{j}^{(0)})_n = -\frac{\partial \Omega_0}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Całkując równanie (1.5) po czasie, otrzymamy wzór

$$\Omega_0 = - \int_0^t (\mathbf{j}^{(1)})_n d\tau, \quad (1.6)$$

służący do wyznaczania ładunków powierzchniowych, przy znanych wektorach gęstości prądu na granicach podziału. Relacja (1.4)₂ daje tę samą wartość wyrażoną przez normalne składowe wektorów indukcji elektrycznej $\mathbf{D}^{(1)}$ i $\mathbf{D}^{(0)}$. Dlatego warunek, wiążący graniczne wartości indukcji i prądów może być zapisany jako

$$\left(\mathbf{D}^{(1)}\right)_n - \left(\mathbf{D}^{(0)}\right)_n = - \int_0^t (\mathbf{j}^{(1)})_n d\tau \quad (1.7)$$

Z warunku (1.4)₃ wynika ciągłość rzutu normalnego rot \mathbf{E} przy przejściu przez granicę podziału, a z (1.4)₄ — rzutu normalnego rot \mathbf{H} . Warunek (1.4)₂ pozwala wyznaczyć gęstość ładunków powierzchniowych Ω_0 przy znanych wartościach wektora indukcji elektrycznej w ośrodku.

Niezależnymi warunkami brzegowymi na granicy podziału ciało - otoczenie będą następujące związki

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E}^{(1)}\right)_\tau &= \left(\mathbf{E}^{(0)}\right)_\tau; \\ \left(\mathbf{H}^{(1)}\right)_\tau &= \left(\mathbf{H}^{(0)}\right)_\tau, \end{aligned} \quad (1.8)$$

które oznaczają ciągłość stycznych składowych natężenia pól elektrycznego i magnetycznego.

Dla określenia pola elektromagnetycznego w obszarze przewodnika elektrycznego i otoczenia, należy do warunków brzegowych dołączyć warunki w nieskończoności. Za taki warunek, w obszarze próżni zwykle przyjmowany jest warunek wypromieniowania [50, 79].

Relacje (1.1)–(1.8) są słuszne przy dowolnych zmianach temperatury ciała i zależnościach między indukcjami i natężeniami pola elektromagnetycznego.

Konkretne zależności właściwości materiału od temperatury oraz związki między wektorami natężenia i indukcjami pól elektrycznego i magnetycznego uwzględniają relacje fenomenologiczne, które uzupełniają układ równań (1.1).

Materiały niemetalowe mają właściwości polaryzacji i namagnesowania podobne do nieferromagnetycznych, niepolaryzowalnych przewodników

elektrycznych, tzn. $\varepsilon, \mu = \text{const}$. Z tej przyczyny, jak również z zależności współczynnika przewodności elektrycznej od temperatury T , wynika związek między wektorem gęstości prądu \mathbf{j} i natężeniem pola elektrycznego \mathbf{E} , który w takich ciałach przyjmujemy w postaci prawa Ohma

$$\mathbf{j}^{(1)} = \sigma_e(T)\mathbf{E}^{(1)}, \quad (1.9)$$

a relacje, wiążące wektory natężeń i indukcji pól elektrycznego i magnetycznego wybierzemy następująco

$$\mathbf{D}^{(1)} = \varepsilon\mathbf{E}^{(1)}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mu\mathbf{H}^{(1)}. \quad (1.11)$$

Oznaczono tu: ε, μ — przenikalności dielektryczna i magnetyczna, które są stałe i niezależne od temperatury. Wartości współczynnika przewodnictwa elektrycznego wyznaczone eksperymentalnie i podane w literaturze głównie w postaci tabel [101, 116].

Przy uwzględnieniu relacji (1.9)–(1.11), możemy układ równań (1.1) zapisać jako

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}^{(1)} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + \sigma_e \mathbf{E}^{(1)}; \\ \text{rot } \mathbf{E}^{(1)} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t}; \\ \text{div } \mathbf{E}^{(1)} &= \frac{\Omega^{(1)}}{\varepsilon}; \\ \text{div } \mathbf{H}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Uwzględniając rzędy członów wchodzących w te równania

$$\text{rot } \mathbf{H}^{(1)} \sim \frac{H_0}{L}; \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t} \sim \frac{\mu H_0}{\tau_0}; \quad \text{rot } \mathbf{E}^{(1)} \sim \frac{E_0}{L},$$

gdzie H_0, E_0 - rzędy wartości natężenia pola elektrycznego i magnetycznego; L - długości, τ_0 - czasu relaksacji, z pierwszego równania (1.12) otrzymamy

$$\frac{H_0}{L} = \sigma_e E_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma_e \tau} \right).$$

Stąd dochodzimy do wniosku, że jeżeli $\frac{\varepsilon}{\sigma_e \tau_0} \ll 1$, to drugi człon, tzn. prąd przesunięcia można pominąć. Przy tym, dla niemetalowych przewodników przy $\sigma_e = \text{const}$ dla $\tau_0 > 10^{-13}$ prądy przesunięcia mają wartość mniejszą

niż 1% prądów przewodności. Przy wzroście temperatury wartość współczynnika przewodności rośnie, dlatego przyjęte oszacowanie jest słuszne i w takim przypadku.

Z uwzględnieniem powyższego, wyjściowy układ równań opisujący pole elektromagnetyczne w niemetalowym przewodniku elektrycznym może być zapisany w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(1)} &= \sigma_e \mathbf{E}^{(1)}; \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t}; \\
 \operatorname{div} \mathbf{E}^{(1)} &= \frac{\Omega^{(1)}}{\varepsilon}; \\
 \operatorname{div} \mathbf{H}^{(1)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Równania (1.13) mogą być w znany sposób [23, 137] zredukowane do układu równań względem funkcji \mathbf{H} lub \mathbf{E} . Wyrażając za pomocą równania (1.13)₂ wektor $\mathbf{E}^{(1)}$ przez $\mathbf{H}^{(1)}$, po podstawieniu tego wyrażenia do równania (1.13)₁, otrzymamy

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\sigma_e} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(1)} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t}. \tag{1.14}$$

Z wykorzystaniem relacji

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot}(\alpha \operatorname{rot} \mathbf{F}) &= \alpha \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} \alpha \times \operatorname{rot} \mathbf{F}; \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F},
 \end{aligned}$$

gdzie Δ - operator Laplace'a, przejdziemy do równoważnego (1.14) układu równań

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{H}^{(1)} + \mu \sigma_e \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t} + \sigma_e \operatorname{grad} \frac{1}{\sigma_e} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(1)} &= 0, \\
 \operatorname{div} \mathbf{H}^{(1)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Układ równań elektrodynamiki (1.1) względem funkcji $\mathbf{H}^{(0)}$ dla obszaru otoczenia zewnętrznego ma postać

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{H}^{(0)} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t^2} &= 0, \\
 \operatorname{div} \mathbf{H}^{(0)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Przy $\sigma_e = \text{const}$, równania (1.15) zapiszemy odpowiednio

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{H}^{(1)} + \mu \sigma_e \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t} &= 0 \\
 \operatorname{div} \mathbf{H}^{(1)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Warunki brzegowe (1.8), na granicy układu ciało – otoczenie będą odpowiednio wynosiły

$$(\mathbf{H}^{(1)})_\tau = (\mathbf{H}^{(0)})_\tau; \quad \frac{1}{\sigma_e} \left(\text{rot } \mathbf{H}^{(1)} \right)_\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^t \left(\text{rot } \mathbf{H}^{(0)} \right)_\tau dt_0. \quad (1.18)$$

Warunek wypromieniowania wyrażony przez funkcje \mathbf{H} przyjmuje postać

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial \mathbf{H}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t} \right| = 0. \quad (1.19)$$

Kiedy określimy funkcje $\mathbf{H}^{(0)}$ i $\mathbf{H}^{(1)}$, to odpowiednie — $\mathbf{E}^{(0)}$ i $\mathbf{E}^{(1)}$ wyznaczymy ze wzorów

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} &= \frac{1}{\sigma_e} \text{rot } \mathbf{H}^{(1)} \\ \mathbf{E}^{(0)} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^t \left(\text{rot } \mathbf{H}^{(0)} \right) dt_0; \end{aligned} \quad (1.20)$$

Układ równań elektrodynamiki w przypadku, gdy jako poszukiwane funkcje wybrane zostaną $\mathbf{E}^{(1)}$ i $\mathbf{E}^{(0)}$, będzie następujący

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}^{(1)} - \text{grad div } \mathbf{E}^{(1)} &= \mu \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \mathbf{E}^{(1)} + \sigma_e \mu \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t}; \\ \text{div } \mathbf{E}^{(1)} &= \frac{\Omega^{(1)}}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

dla obszaru ciała i odpowiednio

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}^{(0)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}^{(0)}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{E}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

dla obszaru otoczenia.

Przy $\sigma_e = \text{const}$, równania (1.21) zapiszemy następująco

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}^{(1)} - \text{grad div } \mathbf{E}^{(1)} &= \sigma_e \mu \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t}; \\ \text{div } \mathbf{E}^{(1)} &= \frac{\Omega^{(1)}}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

W tym przypadku, przy wykorzystaniu równania ciągłości, otrzymujemy, że funkcja $\Omega^{(1)} = 0$ i równania (1.23) upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E}^{(1)} &= \sigma_e \mu \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{E}^{(1)} &= 0.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Warunki graniczne i wypromieniowania, wyrażone przez funkcje \mathbf{E} są analogiczne do relacji (1.18)–(1.19). Zatem

$$(\mathbf{E}^{(1)})_\tau = (\mathbf{E}^{(0)})_\tau; \quad \frac{1}{\mu} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} \right)_\tau = \frac{1}{\mu_0} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)} \right)_\tau.\tag{1.25}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial \mathbf{E}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t} \right| = 0.\tag{1.26}$$

Funkcje $\mathbf{H}^{(0)}$ i $\mathbf{H}^{(1)}$, przy wyznaczonych $\mathbf{E}^{(0)}$ i $\mathbf{E}^{(1)}$ zapiszemy jako

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\frac{1}{\mu} \int_0^t \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} dt_0; \quad \mathbf{H}^{(0)} = -\frac{1}{\mu_0} \int_0^t \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)} dt_0.\tag{1.27}$$

Ciepło Q_* produkowane w ciele na skutek przepływu prądu elektrycznego $\mathbf{j}^{(1)} = \sigma_e \mathbf{E}^{(1)}$ wyrażamy zgodnie ze znanym wzorem [137]

$$Q_* = \mathbf{j}^{(1)} \cdot \mathbf{E}^{(1)} = \sigma_e \mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{E}^{(1)},\tag{1.28}$$

a wyrażenie dla siły ponderomotorycznej zapiszemy odpowiednio

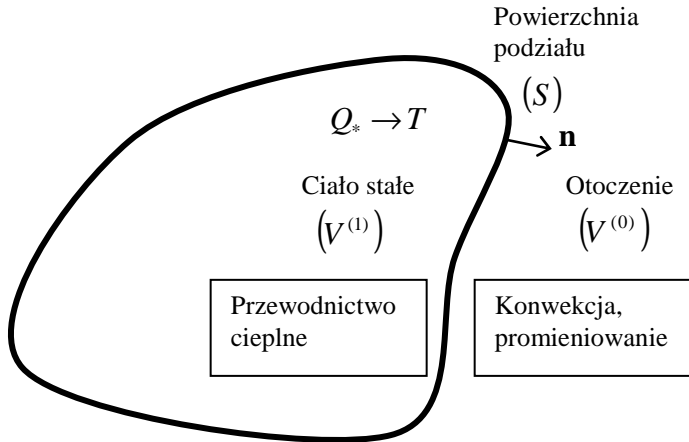
$$\mathbf{F}_* = \mu \mathbf{j}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(1)} = -\sigma_e \mathbf{E}^{(1)} \times \int_0^t \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} dt_0\tag{1.29}$$

W przypadku postawienia zagadnienia elektrodynamiki w funkcjach $\mathbf{H}^{(0)}$ i $\mathbf{H}^{(1)}$ wzór (1.28) wygodnie jest przedstawić jako

$$Q_* = \frac{1}{\sigma_e} \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(1)} \right)^2,\tag{1.30}$$

zaś wyrażenie (1.29) będzie wtedy miało postać

$$\mathbf{F}_* = \frac{\mu}{\sigma_e} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(1)}.\tag{1.31}$$



Rysunek 1.2. Pole temperatury

1.3.2. Pole temperatury

Ciepło Q_* , produkowane w ciele, jest ciągłym źródłem ciepła w równaniu przewodzenia ciepła [96, 97, 128]. W rozpatrywanym zagadnieniu takie równanie, przy współczynnikach cieplnych będących funkcjami temperatury, ma postać

$$\operatorname{div}[\lambda(T) \operatorname{grad} T] = c_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} - Q_* \quad (1.32)$$

Równanie (1.32) trzeba uzupełnić warunkami początkowymi i brzegowymi odpowiadającymi zadanym warunkom nagrzewania.

Przyjmujemy, że w chwili początkowej $t = 0$ temperatura ciała jest zadana i równa $T_p(\mathbf{r})$. Wtedy warunek początkowy wynosi

$$T(\mathbf{r}) = T_p(\mathbf{r}). \quad (1.33)$$

Ponieważ rozpatrywany jest zakres podwyższonych temperatur nagrzewania, przy formułowaniu cieplnych warunków brzegowych konieczne jest uwzględnienie strumieni ciepła będących skutkiem promieniowania [119]. Uważamy, że ciało jest nieprzezroczyste dla takiego promieniowania, a padający na jego powierzchnię strumień ciepła jest częściowo pochłaniany przez ciało, zaś częściowo odbija się, równomiernie rozpraszając się we wszystkich kierunkach (powierzchnia szara z odbiciem rozproszonym [119]). Odpowiednio do przyjętego modelu obliczeniowego, zapiszemy bilans strumieni

cieplnych na powierzchni S ciała. Wtedy dla elementarnego obszaru dS powierzchni S będziemy mieli

$$q_\lambda = q_{\text{konv}} + q_{\text{eff}} - q_{\text{pad}}. \quad (1.34)$$

Oznaczono tu : q_λ - gęstość strumienia ciepła, doprowadzanego (odprowadzanego) do powierzchni na skutek przewodnictwa cieplnego, q_{konv} - gęstość strumienia ciepła będącego skutkiem konwekcji, q_{pad} , q_{eff} - odpowiednio gęstości strumieni padającego i efektywnego, będących efektem promieniowania.

Gęstość strumienia ciepła, odprowadzanego od powierzchni na skutek konwekcji wyznacza się zgodnie z prawem Newtona, zgodnie z którym strumień q_{konv} jest proporcjonalny do różnicy temperatury ciała i otoczenia [128], tzn.

$$q_{\text{konv}} = H_*(T - T_S), \quad (1.35)$$

gdzie H_* - współczynnik przejmowania ciepła, T_S - temperatura otoczenia.

Gęstość efektywnego promieniowania powierzchni wyznacza się jako sumę gęstości strumieni własnego q_w i odbitego q_o

$$q_{\text{eff}} = q_w + q_o. \quad (1.36)$$

Dla powierzchni szarej z odbiciem rozproszonym gęstość promieniowania własnego jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury, a gęstość strumienia odbitego jest równa różnicy gęstości strumieni padającego i pochłoniętego [119]. Dlatego relację (1.36) możemy zapisać w postaci

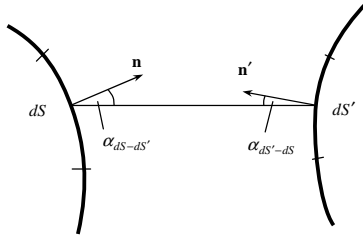
$$q_{\text{eff}} = \epsilon \sigma_0 T^4 + (1 - \epsilon) q_{\text{pad}}. \quad (1.37)$$

gdzie ϵ - współczynnik emisji powierzchni, σ_0 - stała Stefana-Boltzmann.

Sumaryczny strumień promieniowania padającego na elementarną powierzchnię dS wyznacza się jako sumę strumieni promieniowania na tę powierzchnię od wszystkich promieniujących elementarnych powierzchni

$$q_{\text{pad}} = \int_{(S')} q_{\text{eff}} d\mathcal{F}_{dS-dS'} dS' \quad (1.38)$$

gdzie $d\mathcal{F}_{dS-dS'} = \frac{1}{\pi l^2} \cos \alpha_{dS-dS'} \cos \alpha_{dS'-dS}$ - elementarny współczynnik kątowy między płaszczyznami dS' i dS , charakteryzujący część strumienia efektywnego promieniowania płaszczyzny dS' , która pada na płaszczyznę dS ; l - długość odcinka, łączącego te płaszczyzny, $\alpha_{dS-dS'}$ - kąt między wektorem normalnym do płaszczyzny dS i kierunkiem na dS' (rys. 1.3).



Rysunek 1.3. Określenie współczynników kątowych

Wyeliminujmy z relacji (1.35), (1.37), (1.38) wielkości q_{pad} oraz q_{eff} . Otrzymamy w ten sposób warunek brzegowy na powierzchni S ciała

$$q_{\lambda} - \epsilon \int_{(S')} \frac{1 - \epsilon'}{\epsilon'} q'_{\lambda} d\mathcal{F}_{dS-dS'} = \epsilon \sigma_0 T^4 -$$

$$- \epsilon \int_{(S')} \left[H_* (T' - T_S) + \sigma_0 (T')^4 \right] d\mathcal{F}_{dS-dS'} + H_* (T - T'), \quad (1.39)$$

gdzie q_{λ} wyznacza się z prawa Fouriera [96, 97, 128], tzn.

$$q_{\lambda} = - (\lambda \text{grad } T) \cdot \mathbf{n} \quad (1.40)$$

Dla przypadku, kiedy wymiany ciepła przez promieniowanie się nie uwzględnia, warunek brzegowy (1.39) przyjmie postać

$$q_{\lambda} = H_* (T - T'), \quad (1.41)$$

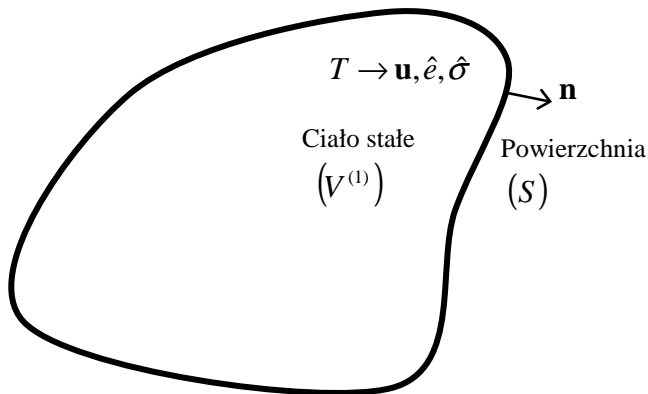
tzn. jest warunkiem brzegowym III rodzaju [128].

1.3.3. Pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń

Pole temperatur T jest przyczyną pojawienia się w ciele pola odkształceń $\hat{\epsilon}$ i naprężeń $\hat{\sigma}$. Wyjściowy układ równań termosprężystości [68, 123], służący do ich określenia, przy przyjętym schemacie obliczeniowym ma postać

$$\text{Div } \hat{\sigma} + \mathbf{F}_* = \rho V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.42)$$

$$\hat{\epsilon} = \text{Def } \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad (1.43)$$



Rysunek 1.4. Pola mechaniczne

a związek między tensorem odkształceń \hat{e} i naprężeń $\hat{\sigma}$ dany jest równaniami Duhamela-Neumanna

$$\hat{\sigma} = 2\mu_*(T)\hat{e} + [\lambda_*(T)e - \beta_*(T)\Phi(T)]\hat{I} \quad (1.44)$$

W powyższych równaniach \mathbf{u} - wektor przemieszczenia, $\Phi(T) = \int_{T_0}^T \alpha_T(\xi)d\xi$, $e = u_{k,k}$, $\beta_* = 3\lambda_* + 2\mu_*$, α_T - liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej, λ_* , μ_* - parametry Lamego, związane z modułem sprężystości E i współczynnikiem Poissona ν relacjami

$$\lambda_*(T) = \frac{\nu(T)E(T)}{[1 + \nu(T)][1 - 2\nu(T)]}; \quad \mu_*(T) = \frac{E(T)}{2[1 + \nu(T)]};$$

gdzie T - temperatura ciała określona na poprzednim etapie rozwiązywania zagadnienia, \hat{I} - tensor jednostkowy.

Mechaniczne warunki brzegowe odzwierciedlają sposób zamocowania ciała i mogą odpowiadać zadaniu na powierzchni sił

$$\sigma_{ij}n_j = p_i(\mathbf{r}_0, t), \quad (1.45)$$

i przemieszczeń

$$u_i = u_{i0}(\mathbf{r}_0, t) \quad (1.46)$$

lub i sił, i przemieszczeń (postać mieszana). Oznaczono tu $\{p_i\} = \mathbf{p}$ - wektor sił powierzchniowych, $\{u_{0i}\} = \mathbf{u}_0$ — wektor przemieszczeń na powierzchni ciała. Warunki początkowe dane są zależnością

$$\mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{przy } t = 0. \quad (1.47)$$

Zapiszmy teraz wyjściowe równania termosprężystości w przypadku, gdy za funkcje poszukiwane wybrano przemieszczenia \mathbf{u} . Podstawiając relacje (1.44) do (1.42) i zastępując w otrzymanych wyrażeniach odkształcenia przemieszczeniami — zgodnie ze wzorami Cauchy’ego (1.43) — otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mu_*(T)\Delta\mathbf{u} + [\mu_*(T) + \lambda_*(T)] \text{grad div } \mathbf{u} + \\ & + \text{grad } \lambda_*(T) \text{div } \mathbf{u} + 2 \text{Def } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mu_*(T) + \mathbf{F}_* = \\ & = \text{grad } [\beta_*(T)\Phi_*(T)] + \rho_V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Wybierając za funkcje poszukiwane naprężenia $\hat{\sigma}$, wyjściowy układ równań otrzymamy działając operatorem $\text{Ink } \hat{e} = \nabla \times \hat{e} \times \nabla$ na równania (1.43). Uwzględniając, że $\text{Ink Def} \equiv 0$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{Div } \hat{\sigma} + \mathbf{F}_* &= \rho_V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ \text{Ink } \left\{ \frac{1}{2G(T)} \hat{\sigma} + \left[\Phi(T) - \frac{\nu(T)}{E(T)} \sigma_{kk} \right] \hat{I} \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (1.49)$$

gdzie G - moduł ścinania.

1.3.4. Równania podstawowe

Pierwszym etapem rozwiązywania zagadnienia wyznaczania stanu termosprężystego przewodnika elektrycznego, którego właściwości materiałowe są zależne od temperatury, jest określenie pól elektromagnetycznego i temperatury. Za funkcje poszukiwane wybieramy intensywność pola magnetycznego \mathbf{H} i temperaturę T . Funkcje $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(0)}$, T spełniają równania (1.15), (1.16), (1.32) i tworzą następujący układ

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H}^{(1)} + \mu \sigma_e \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t} + \sigma_e \text{grad } \frac{1}{\sigma_e} \times \text{rot } \mathbf{H}^{(1)} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{H}^{(1)} = 0. \\ \Delta \mathbf{H}^{(0)} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t^2} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{H}^{(0)} = 0. \\ \text{div}[\lambda(T) \text{grad } T] &= c_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} - Q_* \end{aligned} \quad (1.50)$$

przy odpowiednich warunkach (1.18), (1.19), (1.33), (1.39).

Sprężone zagadnienie elektrodynamiki i przewodnictwa ciepła jest nieliniowe z uwagi na zależność charakterystyk materiału od temperatury, postaci źródeł ciepła i warunek brzegowy (1.39).

W drugim etapie rozwiązywania zagadnienia wyznaczania stanu termosprężystego przewodnika elektrycznego — przy znalezionym na pierwszym etapie polu temperatur T i siły ponderomotorycznej \mathbf{F}_* — wyznaczamy składowe wektora przemieszczeń \mathbf{u} oraz tensora naprężeń $\hat{\sigma}$. Za funkcję poszukiwaną wybierzemy wektor przemieszczeń \mathbf{u} . Funkcja \mathbf{u} spełnia równanie (1.48)

$$\begin{aligned} & \mu_*(T)\Delta\mathbf{u} + [\mu_*(T) + \lambda_*(T)] \text{grad div } \mathbf{u} + \\ & + \text{grad } \lambda_*(T) \text{ div } \mathbf{u} + 2 \text{Def } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mu_*(T) + \mathbf{F}_* = \\ & = \text{grad } [\beta_*(T)\Phi_*(T)] + \rho_V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

przy warunkach brzegowych (1.45) lub (1.46).

W zagadnieniu takim występujące w analizowanych równaniach współczynniki są, z powodu zależności własności materiałowych od temperatury, funkcjami współrzędnych.

Zapisane równania wyjściowe elektrodynamiki i termosprężystości pozwalają — przy konkretnych warunkach brzegowych i początkowych — określić pola: elektromagnetyczne, temperatury i mechaniczne.

1.4. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego

1.4.1. Wyznaczanie pola elektromagnetycznego i temperatury

Dla rozwiązania zagadnienia etapu pierwszego wykorzystamy metodę analityczno-numeryczną, bazującą na procesie iteracyjnym, zbudowanym następująco.

W rozpatrywanym przedziale temperatur nagrzewania (T_0, T_1) , gdzie T_1 jest charakterystyczną temperaturą nagrzewania, współczynniki materiałowe przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned} \sigma_e(T) &= \sigma_{e0} + \sigma_{e1}(T); \\ \lambda(T) &= \lambda_0 + \lambda_1(T); \\ c_V(T) &= c_{V0} + c_{V1}(T); \end{aligned} \quad (1.52)$$

gdzie σ_{e0} , λ_0 , c_{V0} oznaczają średnie wartości współczynników materiałowych w przedziale nagrzewania, tzn.

$$\begin{aligned}\sigma_{e0} &= \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} \sigma_e(T) dT; \\ \lambda_0 &= \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} \lambda(T) dT; \\ c_{V0} &= \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} c_V(T) dT;\end{aligned}\tag{1.53}$$

a σ_{e1} , λ_1 , c_{V1} - odchylenia rzeczywistych wartości tych wielkości od średnich.

Wtedy wyjściowy układ równań (1.15), (1.16), (1.18), (1.32), (1.33), (1.39) możemy zapisać jako

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{H}^{(1)} + \mu \sigma_{e0} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma_{e0} + \sigma_{e1}} \text{grad } \sigma_{e1} \times \text{rot } \mathbf{H}^{(1)} + \\ + \mu \sigma_{e1} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{H}^{(1)} &= 0;\end{aligned}\tag{1.54}$$

$$\Delta \mathbf{H}^{(0)} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t^2} = 0; \quad \text{div } \mathbf{H}^{(0)} = 0;\tag{1.55}$$

$$(\mathbf{H}^{(1)})_\tau = (\mathbf{H}^{(0)})_\tau; \quad \frac{1}{\sigma_{e0} + \sigma_{e1}} \left(\text{rot } \mathbf{H}^{(1)} \right)_\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\int_0^t \text{rot } \mathbf{H}^{(0)} dt_0 \right)_\tau;\tag{1.56}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial \mathbf{H}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(0)}}{\partial t} \right| = 0;\tag{1.57}$$

$$\lambda_0 \Delta T = c_{V0} \frac{\partial T}{\partial t} - Q_* - \text{div}(\lambda_1 \text{grad } T) + c_{V1} \frac{\partial T}{\partial t};\tag{1.58}$$

$$T(\mathbf{r}, 0) = T_p(\mathbf{r});\tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}q_\lambda - \epsilon \int_{(S')} \frac{1 - \epsilon'}{\epsilon'} q'_\lambda d\mathcal{F}_{dS-dS'} &= \epsilon \sigma_0 T^4 - \\ - \epsilon \int_{(S')} \left[H_* (T' - T_S) + \sigma_0 (T')^4 \right] d\mathcal{F}_{dS-dS'} &+ H_* (T - T').\end{aligned}\tag{1.60}$$

W równaniach tych oznaczono

$$q_\lambda = -(\lambda_0 \text{grad } T) \cdot \mathbf{n} - (\lambda_1 \text{grad } T) \cdot \mathbf{n};$$

$$Q_* = \frac{1}{\sigma_{e0} + \sigma_{e1}} \left(\text{rot } \mathbf{H}^{(1)} \right)^2.$$

Za pierwsze przybliżenie przyjmujemy rozwiązanie zagadnienia przy stałych współczynnikach materiałowych równych wartościom średnim σ_{e0} , λ_0 , c_{V0} , tzn. rozwiązanie zagadnienia przy znanym schemacie obliczeniowym [23, 137].

Odpowiednio do tego, wyznaczanie pola elektromagnetycznego i temperatury sprowadza się do rozwiązania liniowego zagadnienia elektrodynamiki

$$\Delta \mathbf{H}^{(1;1)} - \mu \sigma_{e0} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1;1)}}{\partial t} = 0; \quad \text{div } \mathbf{H}^{(1;1)} = 0; \quad (1.61)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{(0;1)} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^{(0;1)}}{\partial t^2} = 0; \quad \text{div } \mathbf{H}^{(0;1)} = 0; \quad (1.62)$$

$$(\mathbf{H}^{(1;1)})_\tau = (\mathbf{H}^{(0;1)})_\tau; \quad \frac{1}{\sigma_{e0}} \left(\text{rot } \mathbf{H}^{(1;1)} \right)_\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\int_0^t \mathbf{H}^{(0;1)} dt_0 \right)_\tau; \quad (1.63)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial \mathbf{H}^{(0;1)}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(0;1)}}{\partial t} \right| = 0, \quad (1.64)$$

określenia gęstości produkcji ciepła Joule'a przy wykorzystaniu znalezionej funkcji $\mathbf{H}^{(1;1)}$ i wzoru

$$Q_*^{(1)} = \frac{1}{\sigma_{e0}} \left[\text{rot } \mathbf{H}^{(1;1)} \right]^2, \quad (1.65)$$

oraz rozwiązania nieliniowego (z uwagi na nieliniowość warunku brzegowego (1.60)) zagadnienia przewodnictwa cieplnego

$$\lambda_0 \Delta T^{(1)} = c_{V0} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} - Q_*; \quad (1.66)$$

$$T^{(1)}(\mathbf{r}, 0) = T_p(\mathbf{r}); \quad (1.67)$$

$$q_\lambda^{(1)} - \epsilon \int_{(S')} \frac{1 - \epsilon'}{\epsilon'} q_\lambda'^{(1)} d\mathcal{F}_{dS-dS'} = \epsilon \sigma_0 \left(T^{(1)} \right)^4 -$$

$$- \epsilon \int_{(S')} \left[H_* \left(T'^{(1)} - T_S \right) + \sigma_0 \left(T'^{(1)} \right)^4 \right] d\mathcal{F}_{dS-dS'} +$$

$$+ H_* \left(T^{(1)} - T' \right). \quad (1.68)$$

Kolejne przybliżenia wyznaczamy z relacji

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H}^{(1;i)} - \mu \sigma_{e0} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1;i)}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma_{e0} + \sigma_{e1}(T^{i-1})} \text{grad} [\sigma_{e1}(T^{i-1})] \times \\ &\times \text{rot } \mathbf{H}^{(1;i-1)} + \mu \sigma_{e1}(T^{i-1}) \frac{\partial \mathbf{H}^{(1;i-1)}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{H}^{(1;i)} = 0; \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{(0;i)} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}^{(0;i)}}{\partial t^2} = 0; \quad \text{div } \mathbf{H}^{(0;i)} = 0; \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{e0}} \left(\text{rot } \mathbf{H}^{(1;i)} \right)_\tau &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\int_0^t \text{rot } \mathbf{H}^{(0;i)} dt_0 \right)_\tau + \frac{\sigma_{e1}(T^{i-1})}{\sigma_{e0} \varepsilon_0} \times \\ &\times \left(\int_0^t \text{rot } \mathbf{H}^{(0;i-1)} dt_0 \right)_\tau; \quad (\mathbf{H}^{(1;i)})_\tau = (\mathbf{H}^{(0;i)})_\tau; \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial \mathbf{H}^{(0;i)}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(0;i)}}{\partial t} \right| = 0, \quad (1.72)$$

oraz

$$\begin{aligned} \lambda_0 \Delta T^{(i)} &= c_{V0} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} - Q_* - \\ &- \text{div} \left[\lambda(T^{(i-1)}) \text{grad } T^{(i-1)} \right] + c_{V1}(T^{(i-1)}) \frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$T^{(i)}(\mathbf{r}, 0) = T_p(\mathbf{r}); \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} q_\lambda^{(i)} - \epsilon \int_{(S')} \frac{1 - \epsilon'}{\epsilon'} q_\lambda'^{(i)} d\mathcal{F}_{dS-dS'} &= \epsilon \sigma_0 \left(T^{(i)} \right)^4 - \\ &- \epsilon \int_{(S')} \left[H_* \left(T^{(i)} - T_S \right) + \sigma_0 \left(T'^{(i)} \right)^4 \right] d\mathcal{F}_{dS-dS'} + \\ &+ H_* \left(T^{(i)} - T' \right), \end{aligned} \quad (1.75)$$

gdzie

$$\begin{aligned} q_\lambda^{(i)} &= - \left(\lambda_0 \text{grad } T^{(i)} \right) \cdot \mathbf{n} - \left(\lambda_1(T^{(i-1)}) \text{grad } T^{(i-1)} \right) \cdot \mathbf{n}; \\ Q_*^{(i)} &= \frac{1}{\sigma_{e0} + \sigma_{e1}(T^{i-1})} \left[\text{rot } \mathbf{H}^{(1;i)} \right]^2. \end{aligned} \quad (1.76)$$

W ten sposób, w każdym kroku procesu iteracyjnego konieczne jest rozwiązanie w pierwszej kolejności zagadnienia elektrodynamiki (1.69) – (1.72), a następnie wyznaczenie z zagadnienia przewodnictwa cieplnego (1.73) – (1.75) pola temperatury $T^{(i)}$ przy wykorzystaniu już określonego pola $\mathbf{H}^{(1;i)}$.

W przypadku rozpatrywanych dalej procesów kwaziustalonych, kiedy to pole elektromagnetyczne w układzie wywołane jest zmiennym w czasie, zadanym kwaziustalonym polem elektromagnetycznym w otoczeniu, natężenie pola magnetycznego w (i)-tej iteracji będziemy wyznaczać w postaci

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(1;i)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{H}_A^{(1;i)}(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t} + \mathbf{H}_A^{(1;i)*}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t} \right], \\ \mathbf{H}^{(0;i)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{H}_A^{(0;i)}(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t} + \mathbf{H}_A^{(0;i)*}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t} \right].\end{aligned}\quad (1.77)$$

Amplitudy natężenia pola magnetycznego w ciele $\mathbf{H}^{(1;i)}$ i w próżni $\mathbf{H}^{(0;i)}$ będziemy uważać za wolno zmieniające się funkcje czasu tzn.

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial \mathbf{H}_A^{(0;i)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right| &\ll \omega \left| \mathbf{H}_A^{(0;i)}(\mathbf{r}, t) \right| \\ \left| \frac{\partial \mathbf{H}_A^{(1;i)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right| &\ll \omega \left| \mathbf{H}_A^{(1;i)}(\mathbf{r}, t) \right|\end{aligned}\quad (1.78)$$

Po podstawieniu wyrażeń (1.77) do wyjściowych równań elektrodynamiki (1.69)–(1.72) oraz uwzględnieniu warunków (1.78) otrzymamy dla iteracji (i) zagadnienie brzegowe wyznaczania amplitud natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H}^{(1;i)}$ i $\mathbf{H}^{(0;i)}$, które zapiszemy następująco

$$\Delta \mathbf{H}_A^{(1;i)} + i\mu_0\omega\sigma_{e0}\mathbf{H}_A^{(1;i)} = \mathbf{f}_1(T_{(i-1)}, \mathbf{H}_A^{(1;i-1)}); \quad \text{div } \mathbf{H}_A^{(1;i)} = 0; \quad (1.79)$$

$$\Delta \mathbf{H}_A^{(0;i)} + \varepsilon_0\mu_0\omega^2\mathbf{H}_A^{(0;i)} = 0; \quad \text{div } \mathbf{H}_A^{(0;i)} = 0; \quad (1.80)$$

$$\frac{1}{\sigma_{e0}} \left(\text{rot } \mathbf{H}_A^{(1;i)} \right)_\tau = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left(\text{rot } \mathbf{H}_A^{(0;i)} \right)_\tau + f_2(T_{(i-1)}, \mathbf{H}_A^{(1;i-1)}); \quad (1.81)$$

$$\left(\mathbf{H}_A^{(1;i)} \right)_\tau = \left(\mathbf{H}_A^{(0;i)} \right)_\tau ;$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial \mathbf{H}_A^{(0;1)}}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_A^{(0;1)} \right| = 0, \quad (1.82)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1(T_{(i-1)}, \mathbf{H}_A^{(1;i-1)}) &= \frac{1}{\sigma_{e1}(T^{(i-1)})} \text{grad } \sigma_{e1}(T^{(i-1)}) \times \text{rot } \mathbf{H}_A^{(1;i-1)} - \\ &- i\mu\omega\sigma_{e1}(T^{(i-1)})\mathbf{H}_A^{(1;i-1)};\end{aligned}$$

$$f_2(T_{i-1}, \mathbf{H}_A^{(1;i-1)}) = \frac{\sigma_{e1}(T^{(i-1)})}{i\varepsilon_0\sigma_{e0}\omega} \left(\text{rot } \mathbf{H}_A^{(0;i-1)} \right)_\tau .$$

W przypadku kwaziustalonego pola elektromagnetycznego wyrażenie dla uśrednionego w czasie wydzielanego ciepła wynosi

$$Q_{*0} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} Q_* dt. \quad (1.83)$$

W związku z tym, że pole temperatur T jest uwarunkowane uśrednionym w okresie $f = 2\pi/\omega$ wydzielanym ciepłem, przyjmijmy, że pole temperatur, a tym samym i $\sigma_e = \sigma_e(T)$ w okresie f , zmienia się stosunkowo mało, tzn. spełniony jest warunek

$$\left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| \ll \omega |T|.$$

Przy tym, zaniedbując zmienność w okresie uśredniania funkcji $\sigma_e(T)$, otrzymamy

$$Q_{*0} = \frac{1}{2\sigma_e(T)} \operatorname{rot} \mathbf{H}_A^{(1)} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_A^{(1)*}. \quad (1.84)$$

Wtedy wyrażenie $Q_{*(i)}$ we wzorze (1.76) z uwzględnieniem (1.83), (1.84) zapiszemy jako

$$Q_{*(i)} = \frac{1}{2[\sigma_{e0} + \sigma_{e1}(T^{i-1})]} \operatorname{rot} \mathbf{H}_A^{(1;i)} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_A^{(1;i)*}. \quad (1.85)$$

Zbudowany proces iteracyjny pozwala sprowadzić pierwszy etap wyjściowego kompleksowego zagadnienia wyznaczania stanu termosprężystego do zagadnień brzegowych elektrodynamiki i przewodnictwa cieplnego, do których można efektywnie stosować znane analityczne i numeryczne metody rozwiązywania.

1.4.2. Wyznaczanie odkształceń i naprężeń

Dla rozwiązania zadania drugiego etapu budujemy proces iteracyjny w sposób podobny jak przy rozwiązaniu zagadnienia etapu pierwszego.

Mechaniczne współczynniki materiałowe przedstawiamy w postaci podobnej do (1.52), tzn.

$$\begin{aligned} \lambda_*(T) &= \lambda_{*0} + \lambda_{*1}(T); \\ \mu_*(T) &= \mu_{*0} + \mu_{*1}(T); \\ \alpha_T(T) &= \alpha_{T0} + \alpha_{T1}(T); \end{aligned} \quad (1.86)$$

gdzie $\lambda_{*0}, \mu_{*0}, \alpha_{T0}$ — wartości średnie

$$\begin{aligned}\lambda_{*0} &= \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} \lambda_*(T) dT; \\ \mu_{*0} &= \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} \mu_*(T) dT; \\ \alpha_{T0} &= \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} \alpha_T(T) dT;\end{aligned}\tag{1.87}$$

a $\lambda_{*1}, \mu_{*1}, \alpha_{T1}$ — odchylenia wartości rzeczywistych współczynników materiałowych od średnich.

Wtedy wyjściowe równanie (1.48) będzie miało postać

$$\begin{aligned}\mu_{*0}(T)\Delta\mathbf{u} + [\mu_{*0} + \lambda_{*0}] \text{grad div } \mathbf{u} &= \text{grad} [\beta_*(T)\Phi(T)] + \rho_V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \\ - \mu_{*1}(T)\Delta\mathbf{u} - (\mu_{*1}(T) + \lambda_{*1}(T)) \text{grad div } \mathbf{u} - \\ (\text{grad } \lambda_*(T)) \text{div } \mathbf{u} - 2\text{Def } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mu_{*1}(T) - \mathbf{F}_*(T).\end{aligned}\tag{1.88}$$

Przy tym warunek brzegowy (1.46) nie zmieni się, a warunek (1.45), z uwzględnieniem (1.43), przyjmie postać

$$\begin{aligned}\left\{ 2\mu_{*0} \text{Def } \mathbf{u} + [\lambda_{*0} u_{k,k} - \beta_{*0} \alpha_{T0} (T - T_0)] \hat{I} \right\} \mathbf{n} &= \mathbf{p} - \\ - \left\{ 2\mu_{*1} \text{Def } \mathbf{u} + [\lambda_{*1} u_{k,k} - \beta_{*1} \Phi_1(T)] \hat{I} \right\} \mathbf{n} &\text{ przy } \mathbf{r} \in S,\end{aligned}\tag{1.89}$$

gdzie

$$\beta_{*0} = 3\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}; \quad \beta_{*1} = \beta_* - \beta_{*0}; \quad \Phi_1(T) = \Phi(T) - \alpha_{T0}(T - T_0).$$

Warunki początkowe dane są zależnością

$$\mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{przy } t = 0.\tag{1.90}$$

Za pierwsze przybliżenie wybieramy rozwiązanie zagadnienia, kiedy $\lambda_{*1}, \mu_{*1}, \alpha_{T1}$ będą równe zeru. Przy tym równanie wyjściowe służące do wyznaczenia funkcji \mathbf{u} będzie następujące

$$\begin{aligned}\mu_{*0}(T)\Delta\mathbf{u}^{(1)} + [\mu_{*0} + \lambda_{*0}] \text{grad div } \mathbf{u}^{(1)} &= \\ = \rho_V \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t^2} + \beta_{*0} \alpha_{T0} \text{grad } T - \mathbf{F}_*(T),\end{aligned}\tag{1.91}$$

a warunek brzegowy (1.89) i początkowy (1.90) możemy zapisać jako

$$\left\{ 2\mu_{*0} \text{Def } \mathbf{u}^{(1)} + \left[\lambda_{*0} u_{k,k}^{(1)} - \beta_{*0} \alpha_{T0} (T - T_0) \right] \hat{I} \right\} \mathbf{n} = \mathbf{p}; \quad (1.92)$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t} = 0 \quad \text{przy } t = 0. \quad (1.93)$$

Kolejne przybliżenia wyznaczamy z zależności

$$\mu_{*0}(T) \Delta \mathbf{u}^{(i)} + [\mu_{*0} + \lambda_{*0}] \text{grad div } \mathbf{u}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} \quad (1.94)$$

przy warunkach brzegowych

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}_0^{(i)} \quad \text{przy } \mathbf{r} \in S \quad (1.95)$$

lub

$$\begin{aligned} & \left\{ 2\mu_{*0} \text{Def } \mathbf{u}^{(i)} + \left[\lambda_{*0} u_{k,k}^{(i)} - \beta_{*0} \alpha_{T0} (T - T_0) \right] \hat{I} \right\} \mathbf{n} = \mathbf{p} - \\ & - \left\{ 2\mu_{*1} \text{Def } \mathbf{u}^{(i)} + \left[\lambda_{*1} u_{k,k}^{(i)} - \beta_{*1} \Phi_1(T) \right] \hat{I} \right\} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.96)$$

i początkowych

$$\mathbf{u}^i = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} = 0 \quad \text{przy } t = 0, \quad (1.97)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(i)} = & \rho_V \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(i-1)}}{\partial t^2} + \text{grad} [\beta_*(T) \Phi(T)] + \mu_{*1}(T) \Delta \mathbf{u}^{(i-1)} - \\ & - [\mu_{*1}(T) + \lambda_{*1}(T)] \text{grad div } \mathbf{u}^{(i-1)} - \text{grad } \lambda_{*1}(T) \text{div } \mathbf{u}^{(i-1)} - \\ & - 2 \text{Def } \mathbf{u}^{(i-1)} \cdot \text{grad} [\mu_{*1}(T)] - \mathbf{F}_*(T). \end{aligned}$$

Przy znalezionym wektorze przemieszczeń \mathbf{u} składowe tensora naprężeń wyznaczamy zgodnie z wynikającym z relacji (1.43), (1.44) wzorem

$$\hat{\sigma} = 2\mu_* \text{Def } \mathbf{u} + [\lambda_* u_{k,k} - \beta_* \Phi] \hat{I}. \quad (1.98)$$

Zaznaczmy, iż zagadnienia (1.94)–(1.96) w swej strukturze pokrywają się z zagadnieniami termosprężystości przy stałych współczynnikach materiałowych i dla ich rozwiązania mogą być stosowane znane metody termosprężystości [68, 105, 123].

Rozdział 2

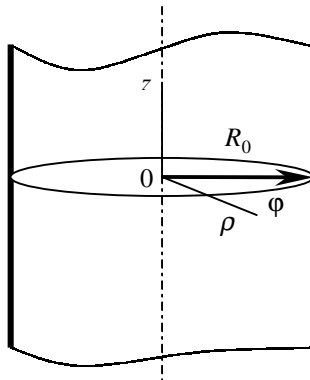
Procesy termomechaniczne w jednorodnym cylindrze

W tym rozdziale podane zostało rozwiązanie kompleksowego zagadnienia wyznaczania stanu termosprężystego cylindra, poddanego oddziaływaniu zewnętrznego, kwaziustalonego pola elektromagnetycznego.

2.1. Sformułowanie zagadnienia brzegowego i algorytm rozwiązania

Rozpatrzmy długi cylinder — wykonany z materiału przewodzącego prąd elektryczny, o promieniu R_0 — odniesiony do układu współrzędnych cylindrycznych (ρ, φ, z) , którego oś Oz pokrywa się z osią walca (rys. 2.1). Zewnętrzne pole elektromagnetyczne, zadane wektorem natężenia pola magnetycznego na powierzchni $\rho = R_0$, jest równe

$$\mathbf{H}^{(0)} = \{0; 0; H_z = H_0(\varphi, t) \sin \omega t\}. \quad (2.1)$$



Rysunek 2.1. Schemat cylindra oraz wyboru układu współrzędnych

Cylinder wymienia ciepło przez konwekcję i promieniowanie z otoczeniem o zadanej temperaturze T_0 . Jego powierzchnia jest wolna od zewnętrznego obciążenia mechanicznego.

Z analizy równań wyjściowych elektrodynamiki (1.15)–(1.20) wynika, iż w obszarze cylindra niezerowe będą: składowa $H_z(\rho, \varphi, t)$ natężenia pola magnetycznego i składowe $E_\rho(\rho, \varphi, t)$, $E_\varphi(\rho, \varphi, t)$ natężenia pola elektrycznego. W związku z tym, pola temperatury, naprężeń i odkształceń cylindra uważamy za niezależne od współrzędnej z , tzn. zakładamy, że $\mathbf{u} = \{u_\rho(\rho, \varphi, t), u_\varphi(\rho, \varphi, t), 0\}$, $T = T(\rho, \varphi, t)$.

Zgodnie ze schematem obliczeniowym rozwiązania zagadnienia wyznaczania stanu naprężeń i odkształceń, w etapie pierwszym określamy wzajemnie sprzężone pola elektromagnetyczne i temperaturowe w obszarze cylindra. Z równań (1.15) otrzymamy w rozpatrywanym przypadku następujące równanie

$$\nabla^2 H_z + \mu \sigma_e(T) \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{1}{\sigma_e(T)} \left[\frac{\partial \sigma_e(T)}{\partial \rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \sigma_e(T)}{\partial \varphi} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (2.2)$$

określające intensywność pola magnetycznego w obszarze cylindra. Oznaczono tu $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Równanie (2.2), razem z warunkiem początkowym

$$H_z = 0 \quad \text{przy} \quad t = 0 \quad (2.3)$$

i brzegowym (2.1), składają się na wyjściowe zagadnienie elektrodynamiki. Intensywność pola elektrycznego w ciele określamy przy tym zgodnie ze wzorami (1.20), tzn.

$$E_\rho = \frac{1}{\rho \sigma_e(T)} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}; \quad E_\varphi = -\frac{1}{\sigma_e(T)} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}. \quad (2.4)$$

Ciepło Joule'a (1.30) przedstawimy jako

$$Q_* = \sigma_e (E_\rho^2 + E_\varphi^2) = \frac{1}{\sigma_e} \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)^2 \right], \quad (2.5)$$

a równanie przewodnictwa ciepła (1.32) możemy zapisać w postaci

$$\lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + Q_* = c_V \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Przyjmujemy, że w chwili początkowej temperatura cylindra jest stała i równa temperaturze otoczenia T_0 , tzn. cieplny warunek początkowy (1.33) wyniesie

$$T = T_0 \quad \text{przy} \quad t = 0. \quad (2.7)$$

Powierzchnia cylindra jest wypukła, dlatego między elementarnymi obszarami tej powierzchni wymiana ciepła nie zachodzi ($d\mathcal{F}_{dS-dS'} = 0$) i cieplny warunek brzegowy (1.39) w tym przypadku będzie miał postać

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \rho} = \epsilon \sigma_0 T^4 + H_* (T - T') \quad \text{przy} \quad \rho = R_0. \quad (2.8)$$

Niezerowe przemieszczenia u_ρ i u_φ w cylindrze (przy pominięciu sił bezwładności dla rozważanego dalej przybliżenia kwazistatycznego [23, 68, 123]) spełniają równania

$$\begin{aligned} & \mu_* \nabla^2 u_\rho + (\lambda_* + \mu_*) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \rho} - \mu_* \frac{u_\rho}{\rho^2} - \frac{2\mu_*}{\rho^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \mu_*}{\partial \rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_*}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda_*}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\beta_* \Phi); \\ & \mu_* \nabla^2 u_\varphi + (\lambda_* + \mu_*) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \varphi} - \mu_* \frac{u_\varphi}{\rho^2} + \frac{2\mu_*}{\rho^2} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{\partial \mu_*}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu_*}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{\varepsilon_{kk}}{\rho} \frac{\partial \lambda_*}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\beta_* \Phi), \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie $\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\rho \right)$.

Warunki brzegowe (1.45) odpowiadające brakowi obciążenia mechanicznego na powierzchni bocznej cylindra przyjmą postać

$$\begin{aligned} & (2\mu_* + \lambda_*) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{\lambda_*}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\lambda_*}{\rho} u_\rho = \beta_* \Phi; \\ & \frac{\mu_*}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \mu_* \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\mu_*}{\rho} u_\varphi = 0 \quad \text{przy} \quad \rho = R_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Po wyznaczeniu z równań (2.9) pola przemieszczeń przy warunkach brzegowych (2.10), naprężenia w cylindrze znajdziemy ze wzorów

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= 2\mu_* \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \lambda_* \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) - \beta_* \Phi; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu_* \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) + \lambda_* \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) - \beta_* \Phi; \\ \sigma_{zz} &= \lambda_* \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) - \beta_* \Phi; \\ \sigma_{\rho\varphi} &= \sigma_{\varphi\rho} = \mu_* \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

które wynikają z zależności (1.44).

Wtedy, w rozpatrywanym przypadku, w każdym kroku procesu iteracyjnego rozwiązujemy kolejno następujące zagadnienia. Natężenie pola magnetycznego $H_z^{(i)}$ na i -tej iteracji wyznaczamy z równania

$$\begin{aligned} \nabla^2 H_z^{(i)} + \mu \sigma_{e0} \frac{\partial H_z^{(i)}}{\partial t} = & \frac{1}{\sigma_e(T^{(i-1)})} \frac{\partial \sigma_{e1}(T^{(i-1)})}{\partial \rho} \frac{\partial H_z^{(i-1)}}{\partial \rho} + \\ & + \frac{1}{\rho^2 \sigma_e(T^{(i-1)})} \frac{\partial \sigma_{e1}(T^{(i-1)})}{\partial \varphi} \frac{\partial H_z^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \mu \sigma_{e1}(T^{(i-1)}) \frac{\partial H_z^{(i-1)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.12)$$

przy warunkach:

— początkowym

$$H_z^{(i)} = 0 \quad \text{przy} \quad t = 0 \quad (2.13)$$

— brzegowym

$$H_z^{(i)} = H_0(\varphi, t) \sin \omega t \quad \text{przy} \quad \rho = R_0. \quad (2.14)$$

Następnie, po wyliczeniu rozkładu mocy produkcji ciepła $Q_*^{(i)}$ zgodnie ze wzorem

$$Q_*^{(i)} = \frac{1}{\sigma_e(T^{(i-1)})} \left[\left(\frac{\partial H_z^{(i)}}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial H_z^{(i)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right], \quad (2.15)$$

rozwiązujemy zagadnienie przewodnictwa ciepła

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial \varphi^2} \right) + Q_* - c_{V0} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} = P_*^{(i)}; \quad (2.16)$$

$$T^{(i)} = T_0 \quad \text{przy} \quad t = 0; \quad (2.17)$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \rho} = \epsilon \sigma_0 \left(T^{(i)} \right)^4 + H_* \left(T^{(i)} - T' \right) - P_{**}^{(i)} \quad \text{przy} \quad \rho = R_0. \quad (2.18)$$

Tu oznaczono:

$$\begin{aligned} P_*^{(i)} = & c_{V1}(T^{(i-1)}) \frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial t} - \lambda_1(T^{(i-1)}) \left(\frac{\partial^2 T^{(i-1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial \rho} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T^{(i-1)}}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial \lambda_1(T^{(i-1)})}{\partial \rho} \frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \lambda_1(T^{(i-1)})}{\partial \varphi} \frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial \varphi}; \\ P_{**}^{(i)} = & \lambda_1(T^{(i-1)}) \frac{\partial T^{(i-1)}}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

Przy tym współczynniki materiałowe σ_e , λ , c_V określone są wzorami (1.52) – (1.53).

Przy znalezionym polu temperatur T , składowe przemieszczeń u_ρ i u_φ w każdej iteracji wyznaczmy z układu równań

$$\begin{aligned} \mu_{*0} \nabla^2 u_\rho^{(i)} + (\lambda_{*0} + \mu_{*0}) \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{(i)}}{\partial \rho} - \mu_{*0} \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho^2} - \frac{2\mu_{*0}}{\rho^2} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} &= \Phi_\rho^{(i)}; \\ \mu_{*0} \nabla^2 u_\varphi^{(i)} + (\lambda_{*0} + \mu_{*0}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{(i)}}{\partial \varphi} - \mu_{*0} \frac{u_\varphi^{(i)}}{\rho^2} + \frac{2\mu_{*0}}{\rho^2} \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \varphi} &= \Phi_\varphi^{(i)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

gdzie wykorzystano zależności (1.94), (1.95) i (2.9), (2.10), oraz warunki brzegowe

$$\begin{aligned} (2\mu_{*0} + \lambda_{*0}) \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{\lambda_{*0}}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\lambda_{*0}}{\rho} u_\rho &= \bar{p}_1; \\ \frac{\mu_{*0}}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \varphi} + \mu_{*0} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\mu_{*0}}{\rho} u_\varphi &= \bar{p}_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

W powyższych zależnościach

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk}^{(i)} &= \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\rho^{(i)} \right); \\ \Phi_\rho^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial \rho} (\beta_* \Phi) - \mu_{*1} \nabla^2 u_\rho^{(i-1)} - (\lambda_{*1} + \mu_{*1}) \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \\ &+ \mu_{*1} \frac{u_\rho^{(i-1)}}{\rho^2} - \frac{2\mu_{*1}}{\rho^2} \frac{\partial u_\varphi^{(i-1)}}{\partial \varphi} - 2 \frac{\partial \mu_{*1}}{\partial \rho} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} - \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_{*1}}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi^{(i-1)}}{\rho} \right) + \varepsilon_{kk}^{(i-1)} \frac{\partial \lambda_{*1}}{\partial \rho}; \\ \Phi_\varphi^{(i)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\beta_* \Phi) - \mu_{*1} \nabla^2 u_\varphi^{(i-1)} - (\lambda_{*1} + \mu_{*1}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{(i-1)}}{\partial \varphi} + \\ &+ \mu_{*1} \frac{u_\varphi^{(i-1)}}{\rho^2} - \frac{2\mu_{*1}}{\rho^2} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mu_{*1}}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi^{(i-1)}}{\rho} \right) - \\ &- \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu_{*1}}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{u_\rho^{(i-1)}}{\rho} \right) + \frac{\varepsilon_{kk}^{(i-1)}}{\rho} \frac{\partial \lambda_{*1}}{\partial \varphi}; \\ \bar{p}_1 &= \beta_* \Phi - (2\mu_{*1} + \lambda_{*1}) \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{\lambda_{*1}}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi^{(i-1)}}{\partial \varphi} - u_\rho^{(i-1)} \right); \end{aligned}$$

$$\bar{p}_2 = -\frac{\mu_{*1}}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \mu_{*1} \frac{\partial u_\varphi^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{\mu_{*1}}{\rho} u_\varphi^{(i-1)};$$

zaś charakterystyki λ_* , μ_* , α_T dane są wzorami (1.86), (1.87).

W przypadku rozpatrywanego kwaziustalonego pola elektromagnetycznego (1.77), przy wyznaczaniu amplitudy natężenia pola magnetycznego $\bar{H}_z^{(i)}$ w i -tej iteracji — na podstawie relacji (1.79)–(1.82), (2.12) — dochodzimy do zadania

$$\nabla^2 \bar{H}_z^{(i)} + i\mu\omega\sigma_{e0} \bar{H}_z^{(i)} = \bar{f}_1; \quad (2.21)$$

$$\bar{H}_z^{(i)} = \bar{f}_2 \quad \text{przy} \quad \rho = R_0, \quad (2.22)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 = & \frac{1}{\sigma_e(T^{(i-1)})} \frac{\partial \sigma_e(T^{(i-1)})}{\partial \rho} \frac{\partial \bar{H}_z^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \sigma_e(T^{(i-1)})}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{H}_z^{(i-1)}}{\partial \varphi} \\ & - i\mu\omega\sigma_{e1}(T^{(i-1)}) \bar{H}_z^{(i-1)}; \quad \bar{f}_2 = H_0(\varphi, t)/2i. \end{aligned}$$

Pole temperatury określamy z zagadnienia (2.16)–(2.18), przy mocy produkcji ciepła $Q_*^{(i)}$, które obliczamy według wzoru (1.85), przyjmującego postać

$$Q_*^{(i)} = \frac{1}{\sigma_e(T^{(i-1)})} \left(\frac{\partial \bar{H}_z^{(i)}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial (\bar{H}_z^{(i)})^*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \bar{H}_z^{(i)}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial (\bar{H}_z^{(i)})^*}{\partial \varphi} \right). \quad (2.23)$$

Zatem składowe przemieszczeń wyznaczamy z zagadnienia (2.19)–(2.20).

2.1.1. Wyznaczanie natężenia pola magnetycznego i temperatury

W związku z tym, że funkcje $\bar{H}_z^{(i)}$, $T^{(i)}$ dla cylindra są okresowymi funkcjami zmiennej φ , będziemy szukać ich w postaci rozkładów w szeregi Fouriera.

Odpowiednio do tego amplitudę natężenia pola magnetycznego w obszarze cylindra przedstawimy w postaci szeregu względem funkcji $\{e^{in\varphi}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, tzn.

$$\bar{H}_z^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_{z,n}^{(i)} e^{in\varphi}. \quad (2.24)$$

Rozkładając funkcje \bar{f}_1 oraz \bar{f}_2 w szeregi Fouriera

$$\bar{f}_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}_{1,n} e^{in\varphi}; \quad \bar{f}_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}_{2,n} e^{in\varphi}; \quad (2.25)$$

gdzie

$$\bar{f}_{1,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1 e^{in\varphi}; \quad \bar{f}_{2,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_2 e^{in\varphi};$$

i przyrównując w relacjach (2.21)–(2.22) człony przy jednakowych harmonikach dla każdej funkcji $\bar{H}_{z,n}^{(i)}$, otrzymamy zagadnienie

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_{z,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{H}_{z,n}^{(i)}}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \bar{H}_{z,n}^{(i)} = \bar{f}_{1,n}; \quad (2.26)$$

$$\bar{H}_{z,n}^{(i)} = \bar{f}_{2,n} \quad \text{przy} \quad \rho = R_0. \quad (2.27)$$

W równaniach tych oznaczono $k^2 = i\mu\omega\sigma_{e0}$.

Rozwiązanie równania (2.26) ma postać

$$\bar{H}_{z,n}^{(i)} = D_1^n J_n(k\rho) + D_2^n N_n(k\rho) + \bar{H}_{z\,szcz,n}^{(i)}. \quad (2.28)$$

W powyższym rozwiązaniu oznaczono J_n , N_n - funkcje Bessela 1. i 2. rodzaju rzędu n , $\bar{H}_{z\,szcz,n}^{(i)}$ - cząstkowe rozwiązanie niejednorodnego równania (2.26), D_1^n , D_2^n - dowolne stałe. Rozwiązanie cząstkowe $\bar{H}_{z\,szcz,n}^{(i)}$ wyznaczmy metodą wariacji stałych. Przy tym otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{H}_{z\,szcz,n}^{(i)}(\rho, t) = & -\frac{\pi}{2} \int_0^\rho \bar{f}_{1,n}(\xi, t) N_n(k\xi) d\xi J_n(k\rho) + \\ & + \frac{\pi}{2} \int_0^\rho \bar{f}_{1,n}(\xi, t) J_n(k\xi) d\xi N_n(k\rho). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Spełniając warunek brzegowy (2.27) i warunek regularności przy $\rho = 0$, otrzymamy

$$D_1^n = \frac{\bar{f}_{2,n} - \bar{H}_{z\,szcz,n}^{(i)}}{J_n(kR_0)}; \quad D_2^n = 0. \quad (2.30)$$

Przy uwzględnieniu rozwiązania (2.30) w przypadku amplitudy natężenia pola magnetycznego ostatecznie otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{H}_z^{(i)}(\rho, \varphi, t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\bar{f}_{2,n} - \bar{H}_{z\,szcz,n}^{(i)}(R_0, t) \right] \frac{J_n(k\rho)}{J_n(kR_0)} + \right. \\ & \left. + \bar{H}_{z\,szcz,n}^{(i)}(\rho, t) \right\} e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Funkcję $T^{(i)}$ w każdej iteracji, podobnie jak i $\overline{H}_z^{(i)}$, wyznaczamy w postaci szeregu Fouriera, tzn.

$$T^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n^{(i)} e^{in\varphi} + T_n^{(i)*} e^{-in\varphi} \right). \quad (2.32)$$

Rozkłady Fouriera znanych funkcji $Q_*^{(i)}$, $P_*^{(i)}$, $P_{**}^{(i)}$ będą odpowiednio wynosiły

$$\begin{aligned} Q_*^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(T_{*,n}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{*,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right); \\ P_*^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_{*,n}^{(i)} e^{in\varphi} + P_{*,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right); \\ P_{**}^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_{**,n}^{(i)} e^{in\varphi} + P_{**,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_{*,n}^{(i)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_*^{(i)}(\rho, \varphi, t) e^{in\varphi} d\varphi; \\ P_{*,n}^{(i)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_*^{(i)}(\rho, \varphi, t) e^{in\varphi} d\varphi; \\ P_{**,n}^{(i)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{**}^{(i)}(\rho, \varphi, t) e^{in\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych harmonikach w równaniach (2.16)–(2.18) dochodzimy do następującego zbioru zagadnień do określenia funkcji $T_n^{(i)}(\rho, t)$

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T_n^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_n^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T_n^{(i)}}{\partial \varphi^2} \right) + Q_{*,n}^{(i)} = c_{V0} \frac{\partial T_n^{(i)}}{\partial t} + P_{*,n}^{(i)}; \quad (2.34)$$

$$T_n^{(i)} = T_{0,n} \quad \text{przy} \quad t = 0; \quad (2.35)$$

$$T_n^{(i)} = T_{pov,n}^{(i)} \quad \text{przy} \quad \rho = R_0. \quad (2.36)$$

W zależnościach tych oznaczono $T_{0,0} = T_0$, $T_{n,0} = 0$ przy $n \neq 0$. Przy tym wartości funkcji $T^{(i)}$ przy $\rho = R_0$ są poszukiwanymi funkcjami $T_{pov,n}^{(i)}(\varphi, t)$, które dla każdej chwili czasu t można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$T_{pov}^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(T_{pov,n}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{pov,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right). \quad (2.37)$$

Wprowadzenie funkcji $T_{pov}^{(i)}$ pozwala, do rozwiązania wyjściowego nieliniowego zagadnienia (2.16)–(2.18) wykorzystać w sposób efektywny metodę rozwiązania zagadnień liniowych. Mianowicie, funkcję poszukiwaną rozłożyć w szereg Fouriera, z następnym stosowaniem do rozwiązania już jednowymiarowych niestacjonarnych zagadnień (2.34)–(2.36) metody różnic skończonych, przy bezwarunkowo stabilnym, niejawnym schemacie różnicowym. W tym celu dzielimy czasowo-przestrzenny obszar zmiany zmiennych niezależnych ρ, t na prostokąty, z krokiem h po zmiennej ρ i krokiem τ po czasie. Ciągły rozkład funkcji w tym obszarze przybliżamy dyskretnymi wartościami w węzłach siatki. Równanie (2.34) aproksymujemy wzorami różnicowymi

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left(T_{n;\rho\bar{p}}^{(i)} + \frac{1}{\rho_p} T_{n;\bar{p}}^{(i)} - \frac{n^2}{\rho_p^2} T_{n;pq}^{(i)} \right) + Q_{*,n;pq}^{(i)} = \\ = c_{V0} T_{n;\tau}^{(i)} + P_{*,n;pq}^{(i)}; \quad p = \overline{2, N-1}; \quad q = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

z rzędem błędu $o(h^2 + \tau)$, a warunki początkowe oraz brzegowe (2.35)–(2.36) i warunek regularności relacjami

$$T_{n;p,1}^{(i)} = T_{0,n;p,1}^{(i)}, \quad p = \overline{1, N} \quad (2.39)$$

$$T_{n;1q}^{(i)} = T_{n;2q}^{(i)}; \quad T_{n;N,q}^{(i)} = T_{pov,n;q}^{(i)}; \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (2.40)$$

z rzędem błędu $o(h)$, gdzie N - wybrana liczba węzłów siatki wzdłuż współrzędnej ρ w obszarze cylindra, $f_{p,q} = f(\rho_p, t_q)$, a

$$f_{\bar{\rho}} = \frac{f_{p+1,q} - f_{p,q}}{h}; \quad f_{\rho} = \frac{f_{p,q} - f_{p-1,q}}{h}; \quad f_{\dot{\rho}} = \frac{f_{p+1,q} - f_{p-1,q}}{h};$$

odpowiednio prawa, lewa i środkowa pochodne różnicowe względem współrzędnej przestrzennej, zaś

$$f_{\tau} = \frac{f_{p,q} - f_{p,q-1}}{\tau};$$

różnicowa pochodna po czasie.

Równania (2.38)–(2.40) tworzą układ równań algebraicznych, służących do wyznaczenia wielkości $T_{n;p,q}^{(i)}$ w warstwie czasowej (q) przez nieznanne wielkości $T_{pov,n;q}^{(i)}$, będące współczynnikami rozkładu w szereg Fouriera funkcji $T_{pov}^{(i)}(\varphi, t)$ w chwili czasu $t = t_q$.

Do rozwiązania układu równań (2.38)–(2.40) wykorzystujemy metodę przegnania. Przyjmiemy

$$T_{n;p-1,q}^{(i)} = A_{n;p-1}^{(i)} T_{n;p,q}^{(i)} + B_{n;p-1}^{(i)}. \quad (2.41)$$

Współczynniki $A_{n;p}^{(i)}$ oraz $B_{n;p}^{(i)}$ obliczamy przy tym ze wzorów

$$A_{n;1}^{(i)} = 1; \quad B_{n;1}^{(i)} = 0; \quad A_{n;p}^{(i)} = - \left(\frac{\lambda_0}{h^2} - \frac{1}{2h\rho_p} \right) z_p^{-1};$$

$$B_{n;p}^{(i)} = \left(\frac{B_{n;p-1}^{(i)}}{2h\rho_p} - \frac{\lambda_0}{h^2} - Q_{*,n;p,q}^{(i)} + P_{*,n;p,q}^{(i)} - \frac{cV_0}{\tau} T_{n;p,q-1}^{(i)} \right); \quad p = \overline{2, N-1},$$

gdzie

$$z_p = \frac{2\lambda_0}{h^2} + \frac{A_{n;p-1}^{(i)}}{2h\rho_p} - \frac{cV_0}{\tau} + \frac{n^2}{\rho_p^2}.$$

Wartości funkcji $T_n^{(i)}$ będą wyznaczone we wszystkich węzłach siatki w warstwie czasowej (q), jeżeli będą znane jej graniczne wartości $T_{pov,n;q}^{(i)}$.

W celu wyznaczenia wprowadzonych wartości powierzchniowych $T_{pov,n;q}^{(i)}$ podstawiamy rozkłady (2.32) w warunek brzegowy (2.18), skąd otrzymamy

$$\begin{aligned} -\lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial T_n^{(i)}}{\partial \rho} e^{in\varphi} + \frac{\partial T_n^{(i)*}}{\partial \rho} e^{-in\varphi} \right) = \epsilon\sigma_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n^{(i)} e^{in\varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + T_n^{(i)*} e^{-in\varphi} \right) \right]^4 + H_* \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n^{(i)} e^{in\varphi} + T_n^{(i)*} e^{-in\varphi} \right) - T_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Zamieniając w wyrażeniu (2.42) operatory różniczkowe wzorami różnicowymi i rugując wartości $T_n^{(i)}$ w węzłach wewnętrznych siatki, z wykorzysta-

niem relacji (2.41), zapiszemy

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda_0}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[T_{pov,n;q}^{(i)} - \left(A_{n,N-1}^{(i)} T_{pov,n;q}^{(i)} + B_{n,N-1}^{(i)} \right) \right] e^{in\varphi} + \right. \\
& \left. + \left[T_{pov,n;q}^{(i)*} - \left(A_{n,N-1}^{(i)*} T_{pov,n;q}^{(i)} + B_{n,N-1}^{(i)*} \right) \right] e^{-in\varphi} + \right\} = \\
& = \epsilon\sigma_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_{pov,n;q}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{pov,n;q}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right) \right]^4 + \\
& + H_* \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_{pov,n;q}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{pov,n;q}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right) - T_0 \right] + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_{**,n}^{(i)} e^{in\varphi} + P_{**,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right). \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Przyrównując współczynniki przy jednakowych harmonikach, otrzymamy następujący układ nieliniowych równań algebraicznych do wyznaczania wartości $T_{pov,n;q}^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{0,N-1}^{(i)} \right) T_{pov,0;q}^{(i)} - B_{0,N-1}^{(i)} \right] = \\
& = H_* \left(T_{pov,0;q}^{(i)} - T_0 \right) + \epsilon\sigma_0 Z_0 + P_{**,0}^{(i)}; \\
& -\frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{1,N-1}^{(i)} \right) T_{pov,1;q}^{(i)} - B_{1,N-1}^{(i)} \right] = H_* T_{pov,1;q}^{(i)} + \epsilon\sigma_0 Z_1 + P_{**,1}^{(i)}; \\
& -\frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{2,N-1}^{(i)} \right) T_{pov,2;q}^{(i)} - B_{2,N-1}^{(i)} \right] = H_* T_{pov,2;q}^{(i)} + \epsilon\sigma_0 Z_2 + P_{**,2}^{(i)}; \\
& \dots \\
& -\frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{M,N-1}^{(i)} \right) T_{pov,M;q}^{(i)} - B_{M,N-1}^{(i)} \right] = \\
& = H_* T_{pov,M;q}^{(i)} + \epsilon\sigma_0 Z_M + P_{**,M}^{(i)}; \tag{2.44} \\
& \dots
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= Y_0^2 + 2Y_1 Y_1^* + \dots + 2Y_M Y_M^* + \dots \\
Z_1 &= Y_0^* Y_1 + Y_1^* + Y_2^* Y_3 + \dots + Y_{M-1}^* Y_M + \dots \\
Z_2 &= Y_1^2 + Y_0 Y_2^* + Y_1 Y_3^* + \dots + 2Y_{M-2}^* Y_M + \dots \\
&\dots \\
Y_0 &= \left(T_{pov,0;q}^{(i)} \right)^2 + 2T_{pov,1;q}^{(i)} T_{pov,1;q}^{(i)*} + \dots + 2T_{pov,M;q}^{(i)} T_{pov,M;q}^{(i)*} + \dots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= T_{pov,0;q}^{(i)} T_{pov,1;q}^{(i)} + T_{pov,1;q}^{(i)*} T_{pov,2;q}^{(i)} + \dots + T_{pov,M-1;q}^{(i)} T_{pov,M;q}^{(i)} + \dots; \\
Y_2 &= \left(T_{pov,1;q}^{(i)} \right)^2 + T_{pov,0;q}^{(i)*} T_{pov,2;q}^{(i)} + \dots + T_{pov,M-2;q}^{(i)} T_{pov,M;q}^{(i)} + \dots; \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ograniczając się w rozkładach (2.32) do skończonej liczby M składników, w (2.44) utrzymujemy taką samą liczbę równań do wyznaczenia $T_{pov,n;q}^{(i)}$, $n = \overline{1, M}$. W szczególności przy $M = 2$ taki układ równań możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned}
& - \frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{0,N-1}^{(i)} \right) T_{pov,0;q}^{(i)} - B_{0,N-1}^{(i)} \right] = \\
& = H_* \left(T_{pov,0;q}^{(i)} - T_0 \right) + \epsilon \sigma_0 Z_0 + P_{**,0}^{(i)}; \\
& - \frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{1,N-1}^{(i)} \right) T_{pov,1;q}^{(i)} - B_{1,N-1}^{(i)} \right] = \\
& H_* T_{pov,1;q}^{(i)} + \epsilon \sigma_0 Z_1 + P_{**,1}^{(i)}; \\
& - \frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{2,N-1}^{(i)} \right) T_{pov,2;q}^{(i)} - B_{2,N-1}^{(i)} \right] = \\
& H_* T_{pov,2;q}^{(i)} + \epsilon \sigma_0 Z_2 + P_{**,2}^{(i)},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
Z_0 &= Y_0^2 + 2Y_1 Y_1^* + 2Y_2 Y_2^*; \\
Z_1 &= Y_0 Y_1 + Y_1^* + Y_2; \quad Z_2 = Y_1^2 + Y_0 Y_2^*; \\
Y_0 &= \left(T_{pov,0;q}^{(i)} \right)^2 + 2T_{pov,1;q}^{(i)} T_{pov,1;q}^{(i)*} + 2T_{pov,2;q}^{(i)} T_{pov,2;q}^{(i)*}; \\
Y_1 &= T_{pov,0;q}^{(i)} T_{pov,1;q}^{(i)} + 2T_{pov,1;q}^{(i)*} T_{pov,2;q}^{(i)}; \\
Y_2 &= \left(T_{pov,1;q}^{(i)} \right)^2 + T_{pov,0;q}^{(i)*} T_{pov,2;q}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Układ równań dla określenia $T_{pov,n;q}^{(i)}$, $n = \overline{1, M}$ rozwiązujemy metodą prostej iteracji. Dokonując zwrotnego przegnięcia zgodnie ze wzorami (2.41) określamy wartości temperatury we wszystkich węzłach warstwy (q) w czasie.

2.1.2. Wyznaczanie stanu naprężenia i odkształcenia

. Zgodnie z wykorzystywanym procesem iteracyjnym wyznaczania przemieszczeń, przy rozwiązywaniu zagadnień (2.19)–(2.20) składowe $u_\rho^{(i)}$, $u_\varphi^{(i)}$ w

każdej iteracji przedstawiamy podobnie do funkcji $H_z^{(i)}$, $T^{(i)}$ w postaci szeregu Fouriera, tzn.

$$\begin{aligned} u_\rho^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_{\rho,n}^{(i)} e^{in\varphi} + u_{\rho,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right); \\ u_\varphi^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_{\varphi,n}^{(i)} e^{in\varphi} + u_{\varphi,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Po podstawieniu relacji (2.46) do równań (2.19)–(2.20) i przyrównaniu współczynników przy jednakowych harmonikach, otrzymamy równania

$$\begin{aligned} &\mu_{*0} \left[\frac{\partial^2 u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{1+n^2}{\rho^2} u_{\rho,n}^{(i)} \right] - \frac{2in\mu_{*0}u_{\varphi,n}^{(i)}}{\rho^2} + \\ &+ (\lambda_{*0} + \mu_{*0}) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(u_{\rho,n}^{(i)} + inu_{\varphi,n}^{(i)} \right) \right] = \Phi_{\rho,n}^{(i)}; \\ &\mu_{*0} \left[\frac{\partial^2 u_{\varphi,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{1+n^2}{\rho^2} u_{\varphi,n}^{(i)} + \frac{2inu_{\rho,n}^{(i)}}{\rho^2} \right] + \\ &+ in \frac{\lambda_{*0} + \mu_{*0}}{\rho} \left[\frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(u_{\rho,n}^{(i)} + inu_{\varphi,n}^{(i)} \right) \right] = \Phi_{\varphi,n}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

i warunki brzegowe

$$\begin{aligned} &(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) \frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*0}}{\rho} \left(u_{\rho,n}^{(i)} - inu_{\varphi,n}^{(i)} \right) = \bar{F}_{1,n}^{(i)}; \\ &\mu_{*0} \frac{\partial u_{\varphi,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\mu_{*0}}{\rho} u_{\varphi,n}^{(i)} + \frac{in\mu_{*0}u_{\rho,n}^{(i)}}{\rho} = \bar{F}_{2,n}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

z których wyznaczamy funkcje $u_{\rho,n}^{(i)}$, $u_{\varphi,n}^{(i)}$.

Zagadnienie (2.47) – (2.48) rozwiązujemy metodą różnic skończonych. Wykorzystujemy przy tym siatkę, wprowadzoną przy rozwiązaniu zagadnienia przewodnictwa ciepła. Zamieniając podobnie jak w zagadnieniu przewodnictwa ciepła operatory różniczkowe w wyjściowym układzie równań (2.47) i w warunkach brzegowych (2.48) różnicowymi, otrzymamy układ równań

$$L \cdot X = G, \quad (2.49)$$

gdzie

$$L = \begin{pmatrix} L_1^0 & L_1^+ & & & \\ L_2^- & L_2^0 & L_2^+ & & \\ & L_3^- & L_3^0 & L_3^+ & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & L_{N-1}^- & L_{N-1}^0 & L_{N-1}^+ \\ & & & & L_N^0 & L_N^+ \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{N-1} \\ X_N \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_{N-1} \\ G_N \end{pmatrix},$$

oraz

$$X_p = \left(u_{\rho,n;p,q}^{(i)} \quad u_{\varphi,n;p,q}^{(i)} \right)^T;$$

$$L_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad L_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$L_p^- = \begin{pmatrix} (\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h\rho_p} \right) & -\frac{in(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})}{2h\rho_p} \\ \frac{in(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})}{2h\rho_p} & \mu_{*0} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h\rho_p} \right) \end{pmatrix};$$

$$L_p^0 = \begin{pmatrix} L_{p;1,1}^0 & L_{p;1,2}^0 \\ L_{p;2,1}^0 & L_{p;2,2}^0 \end{pmatrix}$$

$$L_{p;1,1}^0 = -(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h\rho_p} \right) - \frac{\mu_{*0}n^2}{\rho_p^2}$$

$$L_{p;1,2}^0 = -L_{p;2,1}^0 = -\frac{in(\lambda_{*0} + 3\mu_{*0})}{\rho_p^2}$$

$$L_{p;2,2}^0 = \mu_{*0} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h\rho_p} \right) - \frac{(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})n^2}{\rho_p^2}$$

$$L_p^+ = \begin{pmatrix} (\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h\rho_p} \right) & \frac{in(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})}{2h\rho_p} \\ -\frac{in(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})}{2h\rho_p} & \mu_{*0} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h\rho_p} \right) \end{pmatrix};$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} \Phi_{\rho,n;p,q}^{(i)} \\ \Phi_{\varphi,n;p,q}^{(i)} \end{pmatrix}; \quad p = \overline{2, N-1}; \quad L_N^- = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}}{h} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_{*0}}{h} \end{pmatrix};$$

$$L_N^0 = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}}{h} + \frac{in\lambda_{*0}}{R_0} & -\frac{in\lambda_{*0}}{R_0} \\ \mu_{*0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R_0} \right) & \frac{in\mu_{*0}}{R_0} \end{pmatrix}; \quad G_N = \begin{pmatrix} \bar{P}_{1,n;N,q}^{(i)} \\ \bar{P}_{2,n;N,q}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Przy rozwiązywaniu układu równań (2.49) stosujemy metodę przegania macierzowego, o ile układ ten ma macierz blokowo-trzechdiagonalną z blokami w postaci macierzy drugiego rzędu. W tym celu przyjmujemy

$$X_{p-1} = A_{p-1}X_p + B_{p-1}, \quad p = \overline{2, N}. \quad (2.50)$$

Wtedy dla obliczenia współczynników przegania, którymi są macierze A_p i wektory B_p , otrzymamy

$$A_1 = -(L_1^0)^{-1}L_1^+; \quad A_p = -(L_p^{-1} + L_p^0)^{-1}L_p^+; \quad B_1 = (L_1^0)^{-1}G_1;$$

$$B_p = (L_p^{-1} + L_p^0)^{-1}(G_p - L_p^-B_{p-1}), \quad p = \overline{2, N-1}. \quad (2.51)$$

Zatem po obliczeniu X_N z wyrażenia

$$X_N = (L_N^-A_{N-1} + L_N^0)^{-1}(G_N - L_N^-B_{N-1}) \quad (2.52)$$

wyznaczamy wartości X_p , $p = \overline{1, N-1}$, tzn. przemieszczenia we wszystkich węzłach siatki.

Przy wykorzystaniu wzorów różniczkowania numerycznego z wyrażen (2.11) wyznaczamy naprężenia.

2.2. Płaskie zagadnienie osiowosymetryczne

Rozpatrzmy zagadnienie wyznaczania stanu termosprężystego niemetalowego przewodzącego prąd elektryczny długiego cylindra, na powierzchni ($\rho = R_0$) którego zadany jest okresowy w czasie wektor natężenia pola magnetycznego

$$\mathbf{H}^{(0)} = (0, 0, H_z = H_0 e^{i\omega t}) \quad (2.53)$$

z amplitudą H_0 . Między cylindrem i otoczeniem zachodzi wymiana ciepła przez konwekcję i promieniowanie. Wyznamy pole elektromagnetyczne w obszarze cylindra, odpowiadające mu ciepło Joule'a, pola temperatur i naprężeń. Z analizy układu równań (2.2)–(2.8) zastosowanego do sformułowanego zagadnienia wynika, że niezerowe w obszarze cylindra będą:

składowe $H_z(\rho, t)$ natężenia pola magnetycznego i $E_\varphi(\rho, t)$ natężenia pola elektrycznego. Przy tym wydzielane ciepło (2.5) będzie funkcją tylko współrzędnej ρ i czasu t , i jako skutek — $T = T(\rho, t)$. Stan naprężenia odpowiadający polu temperatur $T(\rho, t)$ będzie poszukiwany przy odkształceniu $\varepsilon_{zz} = 0$ (odkształcenia płaskie). Wtedy dla wektora przemieszczenia mamy $\mathbf{u} = (u_\rho, 0, 0)$.

2.2.1. Wyznaczanie pola elektromagnetycznego i temperatury

Przy wyznaczaniu funkcji $H_z^{(i)}$ oraz $T^{(i)}$, wyjściowymi zagadnieniami są (2.12)–(2.13) i (2.16)–(2.18). W rozpatrywanym przypadku, poszukiwane wielkości nie zależą od zmiennej φ , skąd wynika, że w szeregu (2.24) niezerowy będzie tylko składnik przy $n = 0$. Wtedy rozwiązanie (2.31) możemy zapisać następująco

$$\overline{H}_z^{(i)}(\rho, t) = \frac{\bar{f} - \overline{H}_{z\text{szcz}}^{(i)}(R_0, t)}{J_0(kR_0)} J_0(k\rho) + \overline{H}_{z\text{szcz}}^{(i)}(\rho, t), \quad (2.54)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \overline{H}_{z\text{szcz}}^{(i)}(\rho, t) = & -\frac{\pi}{2R_0} \left[\int_0^\rho \bar{f}(\xi, t) N_0(k\xi) d\xi J_0(k\rho) + \right. \\ & \left. + \int_0^\rho \bar{f}(\xi, t) J_0(k\xi) d\xi N_0(k\rho) \right]; \\ \bar{f} = & \frac{1}{\sigma_e(T^{(i-1)})} \frac{\partial \sigma_e(T^{(i-1)})}{\partial \rho} \frac{\partial \overline{H}_z^{(i-1)}}{\partial \rho} - i\mu\omega\sigma_e(T^{(i-1)}) \overline{H}_z^{(i-1)}. \end{aligned}$$

W szeregu (2.32) funkcji $T^{(i)}$ niezerowy będzie tylko składnik $T_0^{(i)}$. Przy tym funkcję $T_0^{(i)}(\rho, t)$ określimy podaną wyżej metodą różnic skończonych, podobnie jak rozwiązanie zagadnienia różnicowego (2.38)–(2.40) przy $n = 0$. Za pomocą metody przegnania, opisywanego równaniem (2.41) schemat różnicowy redukuje się na każdej warstwie czasowej do równania algebraicznego rzędu czwartego

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_0}{h} \left[\left(1 - A_{0,N-1}^{(i)}\right) T_{pov,q}^{(i)} - B_{0,N-1}^{(i)} \right] = H_* \left(T_{pov,q}^{(i)} - T_0 \right) + \\ \epsilon\sigma_0 \left(T_{pov,q}^{(i)} \right)^4 - \frac{\lambda_1}{h} \left[\left(1 - A_{0,N-1}^{(i)}\right) T_{pov,q}^{(i)} - B_{0,N-1}^{(i)} \right] T_{pov,q}^{(i)}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

otrzymywanego podobnie jak układ równań (2.44).

Wartość temperatury określamy rozwiązując równanie (2.55) metodą połowienia odcinka $[T_{pov,q}^{(i)}, T_q^*]$ — tzn. metodą iteracyjną z gwarantowaną zbieżnością. W rozpatrywanym zagadnieniu nagrzewania wartość temperatury $T_{pov,q}^{(i)}$ w czasie τ jest mniejsza od T_1 i nie może przewyższyć wielkości $T_{pov,q-1}^{(i)} + Q_{*max}^{(i)}\tau$, która byłaby osiągnięta przy równomiernie rozłożonych źródłach ciepła $Q_{*max}^{(i)}$ równych wartości źródeł na powierzchni $\rho = R_0$ i przy jej izolacji cieplnej. W celu zmniejszenia początkowego odcinka podziału będziemy wybierać wielkość $T_{pov,q-1}^{(i)} + Q_{*max}^{(i)}\tau$ za górną wartość przedziału w kroku (q) po czasie. Podkreślimy, że taki wybór T_q^* doprowadza do istotnego przyspieszenia procedury numerycznego rozwiązania zagadnienia.

2.2.2. Wyznaczanie odkształceń i naprężeń

Stan odkształcenia i naprężenia, przy znanym polu temperatury, zgodnie z przyjętym schematem obliczeniowym, określamy jako rozwiązanie zagadnienia (2.19)–(2.20). Przy tym w szeregu (2.46) niezerowa jest tylko składowa $u_{\rho,0}^{(i)}$. Do określenia funkcji $u_{\rho,0}^{(i)}$ można, podobnie jak i przy wyznaczaniu temperatury T , zastosować metodę różnic skończonych i sprowadzić zagadnienie do liniowego układu równań algebraicznych (2.49), który ma macierz trójdiagonalną, pozwalającą zastosować przy rozwiązaniu metodę przegnania.

Jednak w rozpatrywanym przypadku zagadnienia wyznaczania stanu termosprężystego, wyrazy składników przemieszczenia i naprężeń mogą być określone prościej z rozwiązań analitycznych. Ponieważ tylko składnik u_ρ wektora przemieszczenia jest niezerowy, zagadnienie (2.19)–(2.20) przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 u_\rho^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho^2} = \bar{\Phi}_\rho^{(i)}, \quad (2.56)$$

$$(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \mu_{*0} \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho} = \bar{P}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_0, \quad (2.57)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\rho^{(i)} = & \left\{ \frac{\partial(\beta_*\Phi)}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial^2 u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{u_\rho^{(i-1)}}{\rho^2} \right) - \right. \\ & - (\lambda_{*1} + \mu_{*1}) \left(\frac{\partial^2 u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{u_\rho^{(i-1)}}{\rho^2} \right) + \mu_{*1} \frac{u_\rho^{(i-1)}}{\rho^2} - \\ & \left. - 2 \frac{\partial \mu_{*1}}{\partial \rho} \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \lambda_{*1}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{u_\rho^{(i-1)}}{\rho} \right) \right\} (\lambda_{*1} + 2\mu_{*1})^{-1}; \end{aligned}$$

$$\bar{P}^{(i)} = \beta_* \Phi - (\lambda_{*1} + 2\mu_{*1}) \frac{\partial u_\rho^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*1}}{\rho} u_\rho^{(i-1)}.$$

Rozwiązanie ogólne równania (2.56) możemy zapisać w postaci

$$u_\rho^{(i)} = C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} + u_{\rho_{szcz}}^{(i)}. \quad (2.58)$$

Rozwiązanie szczególne niejednorodnego równania (2.56), określone metodą wariacji stałych, będzie

$$u_{\rho_{szcz}}^{(i)} = \frac{\rho}{2} \int_0^\rho \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr - \frac{1}{2\rho} \int_0^\rho r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr \quad (2.59)$$

Wtedy rozwiązanie (2.58) przyjmie postać

$$u_\rho^{(i)} = C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} + \frac{\rho}{2} \int_0^\rho \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr - \frac{1}{2\rho} \int_0^\rho r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr. \quad (2.60)$$

Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy z warunku regularności rozwiązania, przy $\rho = 0$, i warunku brzegowego (2.57). Przy tym mamy

$$C_1 = \frac{\bar{P}^{(i)}}{2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})} - \frac{\mu_{*0}}{2R_0^2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})} \int_0^{R_0} r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^{R_0} \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr; \quad (2.61)$$

$$C_2 = 0.$$

Ostatecznie otrzymamy rozwiązanie

$$u_\rho^{(i)} = \frac{\bar{P}^{(i)} \rho}{2\lambda_{*0} + \mu_{*0}} - \frac{\mu_{*0} \rho}{2R_0^2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})} \int_0^{R_0} r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr - \frac{1}{2\rho} \int_0^\rho \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr. \quad (2.62)$$

Niezerowe składowe tensora naprężenia w rozpatrywanym przypadku możemy, na podstawie relacji (2.11), wyrazić przez funkcje $u_\rho^{(i)}$ wzorami

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho\rho} &= (\lambda_* + 2\mu_*) \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \lambda_* \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho} - \beta_* \Phi; \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_* \frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + (\lambda_* + 2\mu_*) \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho} - \beta_* \Phi; \\
 \sigma_{zz} &= \lambda_* \left(\frac{\partial u_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{u_\rho^{(i)}}{\rho} \right) - \beta_* \Phi.
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Po podstawieniu rozwiązania (2.62) w zależności (2.63) i uporządkowaniu, otrzymamy wyrażenia dla składowych naprężeń w cylindrze

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho\rho}^{(i)} &= \frac{\lambda_* + \mu_*}{\lambda_{*0} + \mu_{*0}} \bar{P}^{(i)} - \frac{\mu_{*0}(\lambda_* + \mu_*)}{R_0^2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})} \int_0^{R_0} r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr + \\
 &+ \frac{\mu_*}{\rho^2} \int_0^\rho r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr - \beta_* \Phi; \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} &= \frac{\lambda_* + \mu_*}{\lambda_{*0} + \mu_{*0}} \bar{P}^{(i)} - \frac{\mu_{*0}(\lambda_* + \mu_*)}{R_0^2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})} \int_0^{R_0} r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr - \\
 &- \frac{\mu_*}{\rho^2} \int_0^\rho r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr - \beta_* \Phi; \\
 \sigma_{zz}^{(i)} &= \lambda_* \left(\frac{\bar{P}^{(i)}}{2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})} - \frac{2\mu_{*0}}{R_0^2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})} \int_0^{R_0} r^2 \bar{\Phi}_\rho^{(i)}(r) dr \right) - \beta_* \Phi.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Zaznaczmy również, że przy niezależnych od temperatury współczynnikach materiałowych, z równań (2.64) dochodzimy do znanych wyrażeń dla składowych naprężeń w osiowymym zagadnieniu płaskim termo-

sprężystości

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(i)} &= \sigma_0 \left[\frac{1}{R_0^2} \int_0^{R_0} rT(r,t)dr - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho rT(r,t)dr \right]; \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} &= \sigma_0 \left[\frac{1}{R_0^2} \int_0^{R_0} rT(r,t)dr - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho rT(r,t)dr - T(\rho,t) \right]; \\ \sigma_{zz}^{(i)} &= \sigma_0 \left[\frac{\lambda_{*0}}{\lambda_{*0} + \mu_{*0}} \int_0^{R_0} rT(r,t)dr - T(\rho,t) \right],\end{aligned}\quad (2.65)$$

gdzie

$$\sigma_0 = \frac{2\mu_{*0}(3\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})\alpha T_0}{\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}}.$$

Przy obliczeniach składowych przemieszczeń i naprężeń odpowiednio z wzorów (2.62) i (2.64), wykorzystujemy procedurę całkowania numerycznego [110, 130]. Zamieniając całki kwadraturami trapezów, z relacji (2.62) w przypadku przemieszczeń $u_\rho^{(i)}$ otrzymamy

$$u_{\rho;p,q}^{(i)} = \frac{\bar{P}_{p,q}^{(i)}\rho_p}{2\lambda_{*0} + \mu_{*0}} - \frac{\mu_{*0}\rho_p}{2R_0^2(\lambda_{*0} + \mu_{*0})}I_{N-1} - \frac{1}{2\rho_p}I_p, \quad (2.66)$$

a z wzorów (2.64) dla naprężeń $\sigma_{\rho\rho}^{(i)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}$, $\sigma_{zz}^{(i)}$ —

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho;p,q}^{(i)} &= \frac{\lambda_{*;p,q} + \mu_{*;p,q}}{\lambda_{*0} + \mu_{*0}} \left(\bar{P}_{p,q}^{(i)} - \frac{\mu_{*0}}{R_0^2}I_{N-1} \right) + \frac{\mu_{*;pq}}{\rho_p^2}I_p - \beta_{*;p,q}\Phi_{p,q}; \\ \sigma_{\varphi\varphi;p,q}^{(i)} &= \frac{\lambda_{*;p,q} + \mu_{*;p,q}}{\lambda_{*0} + \mu_{*0}} \left(\bar{P}_{p,q}^{(i)} - \frac{\mu_{*0}}{R_0^2}I_{N-1} \right) - \frac{\mu_{*;pq}}{\rho_p^2}I_p - \beta_{*;p,q}\Phi_{p,q}; \\ \sigma_{zz;p,q}^{(i)} &= \frac{\lambda_{*;p,q}}{\lambda_{*0} + \mu_{*0}} \left(\frac{\bar{P}_{p,q}^{(i)}}{2} - \frac{2\mu_{*0}}{R_0^2}I_{N-1} \right) - \beta_{*;p,q}\Phi_{p,q},\end{aligned}\quad (2.67)$$

gdzie

$$I_p = \sum_{n=1}^p \left(\rho_{n+1}^2 \Phi_{\rho;n+1,q}^{(i)} + \rho_n^2 \Phi_{\rho;n,q}^{(i)} \right) h_\rho.$$

Przy tym błąd wzorów (2.66) oraz (2.67) jest wielkością rzędu $o(h^2)$. Dlatego, że na każdej iteracji obliczenia prowadzone są zgodnie ze wzorami rekurencyjnymi (2.66) i (2.67), proponowany algorytm prowadzi do istotnego przyspieszenia procesu obliczeniowego w porównaniu do podanego dla zagadnienia płaskiego, gdzie na każdej iteracji jest rozwiązywany układ równań algebraicznych (2.49).

Rozdział 3

Procesy termomechaniczne w układzie współosiowych cylindrów

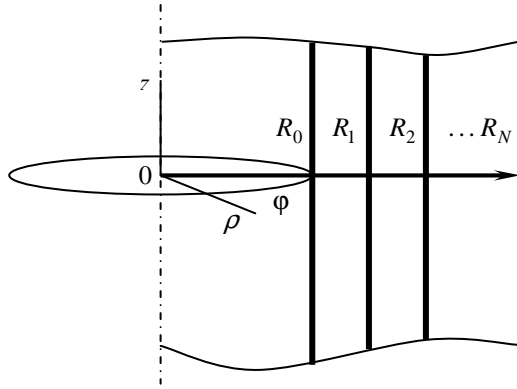
Prezentowany rozdział poświęcony jest wyznaczaniu pól temperatury i naprężeń w układach współosiowych cylindrów, kiedy niektóre z nich rozdzielone są warstwą ośrodka, przyjmowanego w przybliżeniu jako próżnia. Wychodząc z rozważań ogólnych podanych w rozdziale 1, równania wyjściowe zapisano dla każdego z obszarów jednorodnych, tworzących układ. Sformułowano uogólnione warunki wymiany cieplnej przez warstwę próżni. Zaproponowano algorytm rozwiązania zagadnień w iteracjach, podobny do zbudowanego dla cylindra jednorodnego [31, 112].

Zbadano zachowanie termomechaniczne układu współosiowych cylindrów w zewnętrznym jednorodnym kwaziustalonym polu elektromagnetycznym. Podano wyniki badania termosprężystego stanu układu z uwzględnieniem wpływu wymiany ciepła przez promieniowanie między powierzchniami, rozdzielonymi warstwą próżni.

3.1. Sformułowanie zagadnienia brzegowego i algorytm rozwiązania

Rozpatrywany jest układ długich współosiowych niemetalowych przewodników elektrycznych, wykonanych z różnych materiałów (rys. 3.1). Sąsiednie powierzchnie cylindrów są rozdzielone dielektrycznym ośrodkiem, traktowanym dalej względem własności elektrycznych i magnetycznych w przybliżeniu jako próżnia, lub też stykają się. W pierwszym przypadku przyjmujemy, że między cylindrami zachodzi wymiana ciepła przez promieniowanie i są one mechanicznie nie związane, a w drugim — że ma miejsce doskonały kontakt termomechaniczny. Rozwiązywane jest zagadnienie o wyznaczaniu pola elektromagnetycznego, ciepła Joule'a, pól temperatury i naprężeń, które powstają w takim układzie pod wpływem pola elektromagnetycznego, zadanego wielkością stycznej składowej natężenia pola magnetycznego na powierzchni zewnętrznej $\rho = R_N$ układu postaci

$$\mathbf{H}_N^{(0)} = \{0, 0, H_0(\varphi, t) \sin \omega t\}. \quad (3.1)$$



Rysunek 3.1. Schemat układu współosiowych cylindrów

Z analizy równań wyjściowych elektrodynamiki (1.15)–(1.20), zapisanych dla każdego z jednorodnych obszarów układu, otrzymamy, że powstające w ciałach pole elektromagnetyczne przy oddziaływaniu zewnętrznym, zadany relacją (3.1), jest opisywane niezerową składową $H_{z(l)}$ wektora natężenia pola magnetycznego i składowymi $E_{\rho(l)}$ i $E_{\varphi(l)}$ wektora natężenia pola elektrycznego, które nie zależą od współrzędnej z . Odpowiednio do tego pole temperatury oraz stan naprężenia i odkształcenia każdego cylindra uważamy za niezależne od współrzędnej z , tzn. przyjmujemy

$$T_{(l)} = T_{(l)}(\rho, \varphi, t); \quad \mathbf{u}_{(l)} = \{u_{\rho(l)}(\rho, \varphi, t), u_{\varphi(l)}(\rho, \varphi, t), 0\}. \quad (3.2)$$

Przy wyznaczaniu szukanych pól w takim układzie równania wyjściowe (1.15), (1.32), (1.44), (1.48) zapisujemy dla obszaru każdego cylindra. Do nich dodajemy również równania elektrodynamiki (1.16) dla obszarów próżni, rozdzielających cylindry.

Natężenie pola magnetycznego w obszarze każdego cylindra przewodzącego spełnia równania (1.15), które w danym przypadku w układzie współrzędnych cylindrycznych mają postać

$$\begin{aligned} \nabla^2 H_{z(l)}^{(1)} + \mu\sigma_{e(l)} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{\sigma_{e(l)}} \frac{\partial \sigma_{e(l)}}{\partial \rho} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1)}}{\partial \rho} - \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \sigma_{e(l)}}{\partial \varphi} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1)}}{\partial \varphi}, \quad (l = \overline{1, N_1}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

zaś w obszarach próżni między cylindrami — równania (1.16), które możemy zapisać jako

$$\nabla^2 H_{z(l)}^{(0)} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_{z(l)}^{(0)}}{\partial t^2} = 0, \quad (l = \overline{1, N_0}). \quad (3.4)$$

W równaniach tych oznaczono: N_1 - liczba przewodzących cylindrów, N_0 - liczba obszarów rozdzielających cylindry, $N = N_0 + N_1$ - sumaryczna liczba rozpatrywanych obszarów, $H_{z(l)}^{(1)}$, $H_{z(l)}^{(0)}$ - odpowiednio natężenie pola magnetycznego w rozważanym obszarze (l) (cylindra przewodzącego lub próżni).

Warunki początkowe przy nieobecności pola elektromagnetycznego w chwili początkowej $t = 0$ dane są przy tym zależnościami

$$H_{z(l)}^{(1)} = 0 \quad \text{przy} \quad t = 0, \quad (l = \overline{1, N_1}); \quad (3.5)$$

$$H_{z(l)}^{(0)} = 0; \quad \frac{\partial H_{z(l)}^{(0)}}{\partial t} = 0 \quad \text{przy} \quad t = 0, \quad (l = \overline{1, N_1}). \quad (3.6)$$

Warunki brzegowe (1.18) na granicach podziału $\rho = R_j$ ciała przewodzące – próżnia mają postać

$$\int_0^t \frac{\partial H_{z(m)}^{(0)}}{\partial \rho} dt_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{e(l)}(T_{(l)})} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1)}}{\partial \rho}; \quad (3.7)$$

$$H_{z(l)}^{(1)} = H_{z(m)}^{(0)} \quad \text{przy} \quad \rho = R_j,$$

gdzie (m) - numer obszaru próżni, sąsiadującej z (l) cylindrem, R_j - promień powierzchni podziału. W przypadku, kiedy na powierzchni $\rho = R_j$ kontaktują dwa sąsiednie przewodzące cylindry, takie warunki możemy zapisać

$$\frac{1}{\sigma_{e(l)}(T_{(l)})} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\sigma_{e(l+1)}(T_{(l+1)})} \frac{\partial H_{z(l+1)}^{(1)}}{\partial \rho}; \quad (3.8)$$

$$H_{z(l)}^{(1)} = H_{z(l+1)}^{(0)} \quad \text{przy} \quad \rho = R_j.$$

Relacje (3.3)–(3.8), razem z warunkiem brzegowym (3.1), tworzą wyjściowe równania elektrodynamiki, które spełniają funkcje $H_{z(m)}^{(0)}$ ($m = \overline{1, N_0}$) i $H_{z(l)}^{(1)}$ ($l = \overline{1, N_1}$).

Przy tym natężenie pola elektrycznego wyznacza się z relacji (1.20), zapisanych dla każdego z rozpatrywanych obszarów, tzn.

$$\begin{aligned} E_{\rho^{(l)}}^{(0)} &= \frac{1}{\rho\epsilon_0} \int_0^t \frac{\partial H_{z^{(l)}}^{(0)}}{\partial \varphi} dt_0; \\ E_{\varphi^{(l)}}^{(0)} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^t \frac{\partial H_{z^{(l)}}^{(0)}}{\partial \rho} dt_0, \quad (l = \overline{1, N_0}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

dla obszarów próżni, oraz

$$\begin{aligned} E_{\rho^{(l)}}^{(1)} &= \frac{1}{\rho\sigma_{e(l)}} \frac{\partial H_{z^{(l)}}^{(1)}}{\partial \varphi}; \\ E_{\varphi^{(l)}}^{(1)} &= -\frac{1}{\sigma_{e(l)}} \frac{\partial H_{z^{(l)}}^{(1)}}{\partial \rho}, \quad (l = \overline{1, N_1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

dla obszarów przewodzących cylindrów.

Rozkład gęstości mocy wydzielanego ciepła w każdym przewodzącym cylindrze z uwzględnieniem relacji (3.10) określa wyrażenie

$$Q_{*(l)} = \frac{1}{\sigma_{e(l)}} \left[\left(\frac{\partial H_{z^{(l)}}^{(1)}}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial H_{z^{(l)}}^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right], \quad (l = \overline{1, N_1}). \quad (3.11)$$

Pole temperatury, wynikające w układzie, spełnia równania przewodnictwa ciepła (1.32), które w każdym z rozpatrywanych obszarów cylindrów przewodzących ma postać

$$\lambda_{(l)} \nabla^2 T_{(l)} + \frac{\partial T_{(l)}}{\partial \rho} \frac{\partial \lambda_{(l)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \lambda_{(l)}}{\partial \varphi} + Q_{*(l)} = c_{V(l)} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Początkowy warunek cieplny, odpowiadający zadanemu w chwili czasu $t = 0$ rozkładowi temperatury będzie miał postać

$$T_{(l)} = T_{p(l)} \quad \text{przy} \quad t = 0, \quad (l = \overline{1, N_1}). \quad (3.13)$$

Sformułujemy również warunki brzegowe wymiany ciepła między sąsiednimi powierzchniami cylindrów. W przypadku, kiedy cylindry dzieli warstwa próżni, warunki brzegowe wymiany ciepła (1.39) między powierzchniami $\rho = R_j$ i $\rho = R_{j+1}$ możemy zapisać tak:

— na powierzchni $\rho = R_j$

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda(j)} - \frac{\epsilon_j(1 - \epsilon_{j+1})}{\epsilon_{j+1}} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} q'_{\lambda(j+1)} L_{S-S'} d\varphi' &= \\
 &= \epsilon_j \sigma_0 [T_{(l)}]^4 - \epsilon_j \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} \sigma_0 [T'_{(l+1)}]^4 L_{S-S'} d\varphi';
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

— na powierzchni $\rho = R_{j+1}$

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda(j+1)} - \frac{\epsilon_{j+1}(1 - \epsilon_j)}{\epsilon_j} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} q'_{\lambda(j)} L_{S-S'}^{(1)} d\varphi' + (1 - \epsilon_j) \times \\
 \times \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} q_{\lambda(j+1)} L_{S-S'}^{(2)} d\varphi' &= \epsilon_{j+1} \sigma_0 [T_{(l+1)}]^4 - \\
 - \epsilon_{j+1} \left\{ \int_{\psi^-}^{\psi^+} \sigma_0 [T'_{(l)}]^4 L_{S-S'}^{(1)} d\varphi' + \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} \sigma_0 [T'_{(l+1)}]^4 L_{S-S'}^{(2)} d\varphi' \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

W równaniach tych oznaczono:

$$\begin{aligned}
 L_{S-S'} &= \frac{R_{j+1}}{d^3} [d^2 \cos(\varphi' - \varphi) + R_j R_{j+1} \sin^2(\varphi' - \varphi)]; \\
 L_{S-S'}^{(1)} &= \frac{R_j}{d^3} [d^2 \cos(\varphi' - \varphi) + R_j R_{j+1} \sin^2(\varphi' - \varphi)]; \\
 L_{S-S'}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2}; \quad d^2 = R_j^2 + R_{j+1}^2 - 2R_j R_{j+1} \cos(\varphi' - \varphi); \\
 q_{\lambda(j)} &= -\lambda_{(l)} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_j}; \quad q'_{\lambda(j)} = -\lambda_{(l)} \frac{\partial T'_{(l)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_j}; \\
 \psi_1^\pm &= \varphi \pm \arccos \frac{R_j}{R_{j+1}}; \quad \psi_2^\pm = \varphi \pm 2 \arccos \frac{R_j}{R_{j+1}}.
 \end{aligned}$$

Za warunek graniczny cieplny na powierzchni $\rho = R_j$ stykających się ciał przewodzących przyjmujemy warunek równości na granicy podziału

temperatur oraz strumieni ciepłych, tzn. warunki *IV* rodzaju [96], które dla sąsiadujących (*l*)-go i (*l*+1)-go przewodzących cylindrów przyjmą postać

$$T_{(l)} = T_{(l+1)}; \quad \lambda_{(l)} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial \rho} = \lambda_{(l+1)} \frac{\partial T_{(l+1)}}{\partial \rho} \quad \text{przy} \quad \rho = R_j. \quad (3.16)$$

Warunek brzegowy (1.41), wymiany ciepła przez konwekcję z zewnętrznym środowiskiem temperatury T_0 zapiszemy jako

$$-\lambda_{(N_1)} \frac{\partial T_{(N_1)}}{\partial \rho} = H_*(T_{(N_1)} - T_0) \quad \text{przy} \quad \rho = R_N. \quad (3.17)$$

Stan naprężenia i odkształcenia w każdym z cylindrów układu przy znanych funkcjach $T_{(l)}$ wyznaczamy z równań (1.42)–(1.44). Wybierając za poszukiwane funkcje przemieszczenia $u_{\rho(l)}$ oraz $u_{\varphi(l)}$, z relacji (1.48) otrzymamy następujący układ równań dla ich wyznaczania

$$\begin{aligned} & \mu_{*(l)} \nabla^2 u_{\rho(l)} + (\lambda_{*(l)} + \mu_{*(l)}) \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}}{\partial \rho} - \mu_{*(l)} \frac{u_{\rho(l)}}{\rho^2} - \\ & - 2 \frac{\mu_{*(l)}}{\rho^2} \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \mu_{*(l)}}{\partial \rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_{*(l)}}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}}{\rho} \right) + \varepsilon_{kk(l)} \frac{\partial \lambda_{*(l)}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\beta_{*(l)} \Phi(l)); \\ & \mu_{*(l)} \nabla^2 u_{\varphi(l)} + (\lambda_{*(l)} + \mu_{*(l)}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}}{\partial \varphi} - \mu_{*(l)} \frac{u_{\varphi(l)}}{\rho^2} + \\ & + 2 \frac{\mu_{*(l)}}{\rho^2} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{*(l)}}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} - \frac{u_{\varphi(l)}}{\rho} \right) + \\ & + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu_{*(l)}}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} - \frac{u_{\rho(l)}}{\rho} \right) + \\ & + \frac{\varepsilon_{kk(l)}}{\rho} \frac{\partial \lambda_{*(l)}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\beta_{*(l)} \Phi(l)). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na sąsiadujących powierzchniach cylindrów, rozdzielonych warstwą próżni, przyjmujemy, że wektor obciążenia zewnętrznego $\{p_i\}$ jest równy zeru (tzn. przyjmujemy te powierzchnie za wolne od obciążenia zewnętrznego). Przewodzące cylindry rozpatrujemy jako nie powiązane mechanicznie. Wtedy warunki brzegowe przy $\rho = R_l$ (wynikają z (1.45)) mają postać

$$\begin{aligned} & (\lambda_{*(l)} + 2\mu_{*(l)}) \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \rho} + \frac{\lambda_{*(l)}}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} + u_{\rho(l)} \right) = \beta_{*(l)} \Phi(l); \\ & \frac{\mu_{*(l)}}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} + \mu_{*(l)} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}}{\rho} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Przy kontaktujących się przewodzących cylindrach z różnych materiałów przyjmujemy, że na powierzchniach sprężenia spełnione są warunki doskonałego kontaktu mechanicznego, tzn.

$$\mathbf{u}_{(l)} = \mathbf{u}_{(l+1)}; \quad \hat{\sigma}_{(l)} \mathbf{n} = \hat{\sigma}_{(l+1)} \mathbf{n} \quad \text{przy} \quad \rho = R_j. \quad (3.20)$$

Wyrażając składowe tensora naprężenia przez przemieszczenia otrzymamy

$$\begin{aligned} u_{\rho(l)} &= u_{\rho(l+1)}; \quad u_{\varphi(l)} = u_{\varphi(l+1)}; \\ (\lambda_{*(l)} + 2\mu_{*(l)}) \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \rho} + \frac{\lambda_{*(l)}}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} + u_{\rho(l)} \right) - \beta_{*(l)} \Phi_{(l)} &= \\ (\lambda_{*(l+1)} + 2\mu_{*(l+1)}) \frac{\partial u_{\rho(l+1)}}{\partial \rho} + \frac{\lambda_{*(l+1)}}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l+1)}}{\partial \varphi} + u_{\rho(l+1)} \right) - & \\ - \beta_{*(l+1)} \Phi_{(l+1)}; & \\ \frac{\mu_{*(l)}}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} + \mu_{*(l)} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}}{\rho} \right) &= \\ = \frac{\mu_{*(l)}}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} + \mu_{*(l)} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}}{\rho} \right). & \end{aligned} \quad (3.21)$$

Naprężenia w układzie cylindrów przy określonych z zagadnień (3.18) – (3.21) składowych przemieszczeń $u_{\rho(l)}$, $u_{\varphi(l)}$ obliczamy ze wzorów

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho(l)} &= 2\mu_{*(l)} \frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \rho} + \lambda_{*(l)} \left(\frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\rho(l)}}{\rho} \right) - \beta_{*(l)} \Phi_{(l)}; \\ \sigma_{\varphi\varphi(l)} &= 2\mu_{*(l)} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\rho(l)}}{\rho} \right) + \\ &+ \lambda_{*(l)} \left(\frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\rho(l)}}{\rho} \right) - \beta_{*(l)} \Phi_{(l)}; \\ \sigma_{zz(l)} &= \lambda_{*(l)} \left(\frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\rho(l)}}{\rho} \right) - \beta_{*(l)} \Phi_{(l)}; \\ \sigma_{\rho\varphi(l)} &= \mu_{*(l)} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\rho(l)}}{\partial \varphi} - u_{\varphi(l)} \right) + \frac{\partial u_{\varphi(l)}}{\partial \rho} \right], \quad (l = \overline{1, N_1}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

które wynikają z relacji (1.44) zapisanych dla obszaru każdego przewodzącego cylindra układu.

Dla rozwiązania sformułowanego zagadnienia (3.1), (3.3)–(3.8), (3.12) – (3.21) stosujemy metodę iteracyjną, zbudowaną analogicznie do podanej w poprzednim rozdziale.

3.1.1. Pole elektromagnetyczne i temperatura

Pierwszym etapem rozwiązywania zagadnienia o wyznaczaniu stanu termospężystego układu współosiowych przewodników cylindrycznych jest obliczenie pola elektromagnetycznego i temperatury. Wielkości $\sigma_{e(l)}$, $\lambda_{(l)}$, $c_{V(l)}$ w obszarze każdego cylindra (l) podobnie, jak (1.52) i (1.53) przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned}\sigma_{e(l)}(T) &= \sigma_{e(l)0} + \sigma_{e(l)1}(T); \\ \lambda_{(l)}(T) &= \lambda_{(l)0} + \lambda_{1(l)}(T); \\ c_{V(l)}(T) &= c_{V(l)0} + c_{V(l)1}(T),\end{aligned}\tag{3.23}$$

gdzie $\sigma_{e(l)0}$, $\lambda_{(l)0}$, $c_{V(l)0}$ - wartości średnie współczynników materiałowych w rozpatrywanym przedziale temperatur, a $\sigma_{e(l)1}$, $\lambda_{(l)1}$, $c_{V(l)1}$ - odchylenia rzeczywistych wartości tych wielkości od średnich. Za pierwsze przybliżenie wybieramy rozwiązanie zagadnienia, kiedy współczynniki materiałowe są stałe i równe średnim $\sigma_{e(l)0}$, $\lambda_{(l)0}$, $c_{V(l)0}$. Odpowiednio do tego, w pierwszym przybliżeniu zagadnienie sprowadza się do wyznaczania natężeń pola magnetycznego $H_{z(l)}^{(1;1)}$, $H_{z(l)}^{(0;1)}$ z równań elektrodynamiki

$$\nabla^2 H_{z(l)}^{(1;1)} + \mu \sigma_{e(l)0} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;1)}}{\partial t} = 0, \quad (l = \overline{1, N_1});\tag{3.24}$$

$$\nabla^2 H_{z(l)}^{(0;1)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_{z(l)}^{(0;1)}}{\partial t^2} = 0, \quad (l = \overline{1, N_0}),\tag{3.25}$$

przy warunkach początkowych

$$H_{z(l)}^{(1;1)} = 0 \quad \text{przy } t = 0, \quad (l = \overline{1, N_1});\tag{3.26}$$

$$H_{z(l)}^{(0;1)} = 0; \quad \frac{\partial H_{z(l)}^{(0;1)}}{\partial t} = 0 \quad \text{przy } t = 0, \quad (l = \overline{1, N_0})\tag{3.27}$$

i brzegowych

— na granicach podziału *przewodzący cylinder-próżnia*

$$H_{z(l)}^{(0;1)} = H_{z(m)}^{(1;1)}; \quad \int_0^t \frac{\partial H_{z(l)}^{(0;1)}}{\partial \rho} dt_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{e(l)0}} \frac{\partial H_{z(m)}^{(1;1)}}{\partial \rho}\tag{3.28}$$

— na granicach podziału *sąsiadujących przewodzących cylindrów*

$$H_{z(l)}^{(1;1)} = H_{z(l+1)}^{(1;1)}; \quad \frac{1}{\sigma_{e(l)0}} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;1)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\sigma_{e(l+1)0}} \frac{\partial H_{z(l+1)}^{(1;1)}}{\partial \rho}\tag{3.29}$$

— na powierzchni zewnętrznej układu

$$H_{z(N)}^{(1;1)} = H_0(\varphi, t) \sin \omega t. \quad (3.30)$$

Zatem gęstość mocy wydzielanego ciepła obliczamy ze wzoru

$$Q_{*(l)}^{(1)} = \frac{1}{\sigma_{e(l)0}} \left[\left(\frac{\partial H_{z(l)}^{(1;1)}}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial H_{z(l)}^{(1;1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right];$$

a z równania przewodnictwa cieplnego

$$\lambda_{(l)0} \nabla^2 T_{(l)}^{(1)} + Q_{*(l)}^{(1)} = c_{V(l)0} \frac{\partial T_{(l)}^{(1)}}{\partial t} \quad (3.31)$$

wyznaczamy pole temperatury w przewodzących cylindrach przy warunkach początkowych

$$T_{(l)}^{(1)} = T_{p(l)} \quad \text{przy} \quad t = 0 \quad (3.32)$$

i brzegowych:

— na sąsiadujących powierzchniach $\rho = R_j$ i $\rho = R_{j+1}$ *cylindrów, rozdzielonych warstwą próżni*

$$q_{\lambda(j)0} - \frac{\epsilon_j(1 - \epsilon_{j+1})}{\epsilon_{j+1}} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} q'_{\lambda(j)0} L_{S-S'} d\varphi' = \epsilon_j \sigma_0 \left[T_{(l)}^{(1)} \right]^4 - \quad (3.33)$$

$$\epsilon_j \sigma_0 \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} \left[T_{(l)}^{(1)} \right]^4 d\varphi' \quad \text{przy} \quad \rho = R_j;$$

$$\begin{aligned}
& q_{\lambda(j+1)0} - \frac{\epsilon_{j+1}(1 - \epsilon_j)}{\epsilon_j} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} q'_{\lambda(j)0} L_{S-S'}^{(1)} d\varphi' + \\
& (1 - \epsilon_j) \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} q'_{\lambda(j+1)0} L_{S-S'}^{(2)} d\varphi' = \epsilon_{j+1} \sigma_0 \left[T_{(l+1)}^{(1)} \right]^4 - \\
& - \epsilon_{j+1} \sigma_0 \left\{ \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} \left[T_{(l)}^{(1)} \right]^4 L_{S-S'}^{(1)} d\varphi' + \right. \\
& \left. + \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} \left[T_{(l+1)}^{(1)} \right]^4 L_{S-S'}^{(2)} d\varphi' \right\} \quad \text{przy } \rho = R_{j+1}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

— na powierzchniach $\rho = R_j$ podziału *stykających się ciał*

$$T_{(l)}^{(1)} = T_{(l+1)}^{(1)}; \quad \lambda_{(l)0} \frac{\partial T_{(l)}^{(1)}}{\partial \rho} = \lambda_{(l+1)0} \frac{\partial T_{(l+1)}^{(1)}}{\partial \rho}, \tag{3.35}$$

gdzie

$$q_{\lambda(j)0} = - \lambda_{(l)0} \frac{\partial T_{(l)}^{(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_j}.$$

Kolejne przybliżenia określamy w następujący sposób. Natężenia $H_{z(l)}^{(1;i)}$ i $H_{z(l)}^{(0;i)}$ pola magnetycznego w warstwach układu w (i) -tej iteracji wyznaczamy z równań

$$\nabla^2 H_{z(l)}^{(1;i)} + \mu \sigma_{e(l)0} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial t} = f_{1(l)}^{(i)}, \tag{3.36}$$

zapisanych dla obszarów przewodzących cylindrów $l = \overline{1, N_1}$ i równań

$$\nabla^2 H_{z(l)}^{(0;i)} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 H_{z(l)}^{(0;i)}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.37}$$

— dla obszarów próżni $l = \overline{1, N_0}$, przy warunkach początkowych

$$H_{z(l)}^{(1;i)} = 0 \quad (l = \overline{1, N_1}) \quad \text{przy } t = 0 \tag{3.38}$$

$$H_{z(l)}^{(0;i)} = 0; \quad \frac{\partial H_{z(l)}^{(0;i)}}{\partial t} = 0 \quad (l = \overline{1, N_0}) \quad \text{przy } t = 0 \tag{3.39}$$

i brzegowych:

— na granicach podziału $\rho = R_j$ przewodzący cylinder – próżnia

$$H_{z(l)}^{(0;i)} = H_{z(m)}^{(1;i)}; \quad \int_0^t \frac{\partial H_{z(l)}^{(0;i)}}{\partial \rho} dt_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{e(l)0}} \frac{\partial H_{z(m)}^{(1;i)}}{\partial \rho} + f_{2(l)}^{(i)} \quad (3.40)$$

— na powierzchniach $\rho = R_j$ stykających się cylindrów

$$H_{z(l)}^{(1;i)} = H_{z(l+1)}^{(1;i)}; \quad \frac{1}{\sigma_{e(l)0}} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\sigma_{e(l+1)0}} \frac{\partial H_{z(l+1)}^{(1;i)}}{\partial \rho} + f_{3(l)}^{(i)} \quad (3.41)$$

— na zewnętrznej powierzchni $\rho = R_N$ układu

$$H_{z(N)}^{(1;i)} = H_0(\varphi, t) \sin \omega t. \quad (3.42)$$

W równaniach tych oznaczono

$$\begin{aligned} f_{1(l)}^{(i)} &= \frac{1}{\sigma_{e(l)}(T_{(l)}^{(i-1)})} \frac{\partial \sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)})}{\partial \rho} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i-1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sigma_{e(l)}(T_{(l)}^{(i-1)})} \times \\ &\times \frac{\partial \sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)})}{\partial \varphi} \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i-1)}}{\partial \varphi} - \mu_{(l)} \sigma_{e(l)}(T_{(l)}^{(i-1)}) \frac{\partial H_{z(l)}^{(0;i-1)}}{\partial t}; \\ f_{2(l)}^{(i)} &= \frac{\sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)})}{\sigma_{e(l)0}} \int_0^t \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i-1)}}{\partial \rho} dt_0; \\ f_{2(l)}^{(i)} &= \sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)}) \frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i-1)}}{\partial \rho} - \sigma_{e(l+1)1}(T_{(l+1)}^{(i-1)}) \frac{\partial H_{z(l+1)}^{(1;i-1)}}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

Zatem po obliczeniu rozkładu mocy ciepła Joule'a ze wzorów

$$Q_{*(l)}^{(i)} = \frac{1}{\sigma_{e(l)}(T_{(l)}^{(i-1)})} \left[\left(\frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial H_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \quad (l = \overline{1, N_1}) \quad (3.43)$$

rozwiązujemy zagadnienie przewodnictwa cieplnego

$$\lambda_{(l)0} \nabla^2 T_{(l)}^{(i)} + Q_{*(l)}^{(i)} - c_{V(l)0} \frac{\partial T_{(l)}^{(i)}}{\partial t} = \mathcal{P}_{*(l)}^{(i)}, \quad (3.44)$$

$$T_{(l)}^{(i)} = T_{p(l)} \quad \text{przy} \quad t = 0; \quad (3.45)$$

$$\lambda_{(l)0} \frac{\partial T_{(l)}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\epsilon_j(1 - \epsilon_{j+1})}{\epsilon_{j+1}} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} \lambda_{(j)0} \frac{\partial T'_{(l)}^{(i)}}{\partial \rho} L_{S-S'} d\varphi' = \epsilon_j \sigma_0 \left[T_{(l)}^{(i)} \right]^4 - \quad (3.46)$$

$$\epsilon_j \sigma_0 \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} \left[T'_{(l)}^{(i)} \right]^4 d\varphi' + f_{4(l)}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_j;$$

$$\lambda_{(l+1)0} \frac{\partial T_{(l+1)}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\epsilon_{j+1}(1 - \epsilon_j)}{\epsilon_j} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} \lambda_{(l)0} \frac{\partial T'_{(l)}^{(i)}}{\partial \rho} L_{S-S'}^{(1)} d\varphi' +$$

$$(1 - \epsilon_j) \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} \lambda_{(l+1)0} \frac{\partial T_{(l+1)}^{(i)}}{\partial \rho} L_{S-S'}^{(2)} d\varphi' = \epsilon_{j+1} \sigma_0 \left[T_{(l+1)}^{(i)} \right]^4 - \quad (3.47)$$

$$- \epsilon_{j+1} \sigma_0 \left\{ \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} \left[T'_{(l)}^{(i)} \right]^4 L_{S-S'}^{(1)} d\varphi' + \right.$$

$$\left. + \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} \left[T'_{(l+1)}^{(i)} \right]^4 L_{S-S'}^{(2)} d\varphi' \right\} + f_{5(l)}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_{j+1};$$

$$T_{(l)}^{(i)} = T_{(l+1)}^{(i)}; \quad \lambda_{(l)0} \frac{\partial T_{(l)}^{(i)}}{\partial \rho} = \lambda_{(l+1)0} \frac{\partial T_{(l+1)}^{(i)}}{\partial \rho} + f_{6(l)}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_l; \quad (3.48)$$

$$- \lambda_{(N)0} \frac{\partial T_{(N)}^{(i)}}{\partial \rho} = H_*(T_{(N)}^{(i)} - T_0) + f_{7(N)}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_N, \quad (3.49)$$

gdzie

$$\mathcal{P}_{*(l)}^{(i)} = c_{V(l)1} \left(T_{(l)}^{(i-1)} \right) \frac{\partial T_{(l)}^{(i-1)}}{\partial t} - \lambda_{(l)1} \left(T_{(l)}^{(i-1)} \right) \nabla^2 T_{(l)}^{(i-1)} +$$

$$+ \frac{\partial \lambda_{(l)1} \left(T_{(l)}^{(i-1)} \right)}{\partial \rho} \frac{\partial T_{(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \lambda_{(l)1} \left(T_{(l)}^{(i-1)} \right)}{\partial \varphi};$$

$$f_{4(l)}^{(i)} = \lambda_{(l)1} \left(T_{(l)}^{(i-1)} \right) \frac{\partial T_{(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{\epsilon_j(1 - \epsilon_{j+1})}{\epsilon_{j+1}} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} \lambda_{(l)1} \frac{\partial T'_{(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} L_{S-S'}^{(1)} d\varphi';$$

$$f_{5(l)}^{(i)} = \lambda_{(l+1)1} \left(T_{(l+1)}^{(i-1)} \right) \frac{\partial T_{(l+1)}^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{\epsilon_{j+1}(1 - \epsilon_j)}{\epsilon_j} \int_{\psi_1^-}^{\psi_1^+} \lambda_{(l)1} \frac{\partial T_{(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} L_{S-S'}^{(1)} d\varphi' +$$

$$+ (1 - \epsilon_{j+1}) \int_{\psi_2^-}^{\psi_2^+} \lambda_{(l+1)1} \frac{\partial T_{(l+1)}^{(i-1)}}{\partial \rho} L_{S-S'}^{(2)} d\varphi';$$

$$f_{6(l)}^{(i)} = -\lambda_{(l)1} \left(T_{(l)}^{(i-1)} \right) \frac{\partial T_{(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \lambda_{(l+1)1} \left(T_{(l+1)}^{(i-1)} \right) \frac{\partial T_{(l+1)}^{(i-1)}}{\partial \rho};$$

$$f_{6(l)}^{(i)} = \lambda_{(N)1} \left(T_{(N)}^{(i-1)} \right) \frac{\partial T_{(N)}^{(i-1)}}{\partial \rho};$$

$\rho = R_j, \rho = R_{j+1}$ - odpowiadają powierzchniom podziału ciała przewodzące - próżnia, a $\rho = R_l$ - powierzchni podziału przewodzących cylindrów.

3.1.2. Pole naprężenia i odkształcenia

Przemieszczenia $u_{\rho(l)}, u_{\varphi(l)}$ w każdym cylindrze wyznaczamy przy znanym już polu temperatury $T_{(l)}$ (określonym z zagadnienia (3.18)–(3.21)) podobnie, jak i w cylindrze jednorodnym. Mechaniczne współczynniki materiałowe w każdym cylindrze przedstawimy zgodnie ze wzorami (1.86), tzn. w postaci

$$\begin{aligned} \mu_{*(l)} &= \mu_{*(l)0} + \mu_{*(l)1}; \\ \lambda_{*(l)} &= \lambda_{*(l)0} + \lambda_{*(l)1}; \\ \alpha_{T(l)} &= \alpha_{T(l)0} + \alpha_{T(l)1}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

gdzie $\mu_{*(l)0}, \lambda_{*(l)0}, \alpha_{T(l)0}$ - wartości średnie współczynników, $\mu_{*(l)1}, \lambda_{*(l)1}, \alpha_{T(l)1}$ - odchylenia rzeczywistych wartości tych wielkości od średnich.

Pierwsze przybliżenie określamy jako rozwiązanie postawionego zagadnienia (3.18)–(3.21) przy, $\mu_{*(l)1}, \lambda_{*(l)1}, \alpha_{T(l)1}$ równych zeru. Wtedy w

pierwszym przybliżeniu dla układu cylindrów funkcje $u_{\rho(l)}^{(1)}$, $u_{\varphi(l)}^{(1)}$ spełniają równania

$$\begin{aligned}
& \mu_{*(l)0} \nabla^2 u_{\rho(l)}^{(1)} + (\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0}) \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}^{(1)}}{\partial \rho} - \mu_{*(l)0} \frac{u_{\rho(l)}^{(1)}}{\rho^2} - \\
& - \frac{2\mu_{*(l)0}}{\rho^2} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\partial \varphi} = (3\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \alpha_{T(l)0} \frac{\partial T(l)}{\partial \rho}; \\
& \mu_{*(l)0} \nabla^2 u_{\varphi(l)}^{(1)} + (\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}^{(1)}}{\partial \rho} - \mu_{*(l)0} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(1)}}{\partial \varphi} - \\
& - \mu_{*(l)0} \frac{u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\rho^2} = (3\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \alpha_{T(l)0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial T(l)}{\partial \varphi},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

i warunki brzegowe:

- na nieobciążanych powierzchniach kontaktu $\rho = R_j$ ciało przewodzące — próżnia

$$\begin{aligned}
& (\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} u_{\rho(l)}^{(1)} = \\
& = (3\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \alpha_{T(l)0} (T - T_0); \\
& \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\rho};
\end{aligned} \tag{3.52}$$

- na powierzchniach kontaktu $\rho = R_j$ sąsiadujących przewodzących cylindrów

$$\begin{aligned}
& u_{\rho(l)}^{(1)} = u_{\rho(l+1)}^{(1)}; \quad u_{\varphi(l)}^{(1)} = u_{\varphi(l+1)}^{(1)}; \\
& (\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\partial \varphi} + u_{\rho(l)}^{(1)} \right) = \\
& = (\lambda_{*(l+1)0} + 2\mu_{*(l+1)0}) \frac{\partial u_{\rho(l+1)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*(l+1)0}}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l+1)}^{(1)}}{\partial \varphi} + u_{\rho(l+1)}^{(1)} \right) + \\
& + (3\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \alpha_{T(l)0} (T - T_0) - \\
& - (3\lambda_{*(l+1)0} + 2\mu_{*(l+1)0}) \alpha_{T(l+1)0} (T - T_0); \\
& \mu_{*(l)0} \left(\frac{\partial u_{\rho(l)}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\rho} \right) =
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$= \mu_{*(l+1)0} \left(\frac{\partial u_{\rho(l+1)}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l+1)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l+1)}^{(1)}}{\rho} \right).$$

Następne przybliżenia wyznaczamy z równań

$$\begin{aligned} \mu_{*(l)0} \nabla^2 u_{\rho(l)}^{(i)} + (\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0}) \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}^{(i)}}{\partial \rho} - \mu_{*(l)0} \frac{u_{\rho(l)}^{(i)}}{\rho^2} - \\ - \frac{2\mu_{*(l)0}}{\rho^2} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i)}}{\partial \varphi} = \bar{\Phi}_{\rho(l)}^{(i)} \quad (l = \overline{1, N_1}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \mu_{*(l)0} \nabla^2 u_{\varphi(l)}^{(i)} + (\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}^{(i)}}{\partial \rho} - \mu_{*(l)0} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i)}}{\partial \varphi} - \\ - \mu_{*(l)0} \frac{u_{\varphi(l)}^{(i)}}{\rho^2} = \bar{\Phi}_{\varphi(l)}^{(i)} \quad (l = \overline{1, N_1}) \end{aligned}$$

przy warunkach brzegowych:

— na swobodnych od obciążenia zewnętrznego powierzchniach kontaktu $\rho = R_j$ ciało przewodzące - próżnia

$$\begin{aligned} (\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} u_{\rho(l)}^{(i)} = P_{1(l)}^{(i)}; \\ \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}^{(1)}}{\rho} = P_{2(l)}^{(i)}; \end{aligned} \quad (3.55)$$

— na powierzchniach kontaktu $\rho = R_j$ sąsiadujących przewodzących cylindrów

$$\begin{aligned} u_{\rho(l)}^{(i)} = u_{\rho(l+1)}^{(i)}; \quad u_{\varphi(l)}^{(i)} = u_{\varphi(l+1)}^{(i)}; \\ (\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i)}}{\partial \varphi} + u_{\rho(l)}^{(i)} \right) = \\ = (\lambda_{*(l+1)0} + 2\mu_{*(l+1)0}) \frac{\partial u_{\rho(l+1)}^{(i)}}{\partial \rho} - \\ - \frac{\lambda_{*(l+1)0}}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi(l+1)}^{(i)}}{\partial \varphi} + u_{\rho(l+1)}^{(i)} \right) + P_{3(l)}^{(i)} \\ \mu_{*(l)0} \left(\frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}^{(i)}}{\rho} \right) = \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$= \mu_{*(l+1)0} \left(\frac{\partial u_{\rho(l+1)}^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l+1)}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l+1)}^{(i)}}{\rho} \right) + P_{4(l)}^{(i)}.$$

W związkach tych oznaczono

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\rho(l)}^{(i)} &= \frac{\partial \beta_{*(l)} \Phi(l)}{\partial \rho} - \mu_{*(l)1} \nabla^2 u_{\rho(l)}^{(i-1)} - (\lambda_{*(l)1} + \mu_{*(l)1}) \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \\ &+ \frac{\mu_{*(l)1}}{\rho^2} \left(u_{\rho(l)}^{(i-1)} - 2 \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} \right) - 2 \frac{\partial \mu_{*(l)1}}{\partial \rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_{*(l)1}}{\partial \varphi} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\rho} \right) + \frac{\partial \lambda_{*(l)1}}{\partial \rho} \varepsilon_{kk(l)}^{(i-1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\varphi(l)}^{(i)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \beta_{*(l)} \Phi(l)}{\partial \varphi} - \mu_{*(l)1} \nabla^2 u_{\varphi(l)}^{(i-1)} - (\lambda_{*(l)1} + \mu_{*(l)1}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{kk(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \\ &+ \frac{\mu_{*(l)1}}{\rho^2} \left(u_{\varphi(l)}^{(i-1)} - 2 \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} \right) - \\ &- 2 \frac{\partial \mu_{*(l)1}}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\rho} \right) - \\ &- \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu_{*(l)1}}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \frac{u_{\rho(l)}^{(i-1)}}{\rho} \right) + \frac{\partial \lambda_{*(l)1}}{\partial \varphi} \frac{\varepsilon_{kk(l)}^{(i-1)}}{\rho}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1(l)}^{(i)} &= \beta_{*(l)} \Phi(l) - (\lambda_{*(l)1} + 2\mu_{*(l)1}) \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \\ &+ \frac{\lambda_{*(l)1}}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \frac{\lambda_{*(l)1}}{u_{\rho(l)}} \frac{(i-1)}{\rho}; \end{aligned}$$

$$P_{2(l)}^{(i)} = \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\rho};$$

$$\begin{aligned}
P_{3(l)}^{(i)} &= \beta_{*(l)} \Phi_{(l)} - (\lambda_{*(l)1} + 2\mu_{*(l)1}) \frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{\lambda_{*(l)1}}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \\
&- \frac{\lambda_{*(l+1)}}{u_{\rho(l)}^{(i-1)}} - \beta_{*(l+1)} \Phi_{(l+1)} + (\lambda_{*(l+1)1} + 2\mu_{*(l+1)1}) \frac{\partial u_{\rho(l+1)}^{(i-1)}}{\partial \rho} - \\
&- \frac{\lambda_{*(l+1)1}}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l+1)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} + \frac{\lambda_{*(l+1)1}}{u_{\rho(l+1)}^{(i-1)}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{4(l)}^{(i)} &= \mu_{*(l+1)1} \left(\frac{\partial u_{\rho(l+1)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_{\varphi(l+1)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{u_{\varphi(l+1)}^{(i-1)}}{\rho} \right) - \\
&- \mu_{*(l)1} \left(\frac{\partial u_{\rho(l)}^{(i-1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\partial \rho} + \frac{u_{\varphi(l)}^{(i-1)}}{\rho} \right).
\end{aligned}$$

3.1.3. Pola kwaziustalone

Dla rozpatrywanego dalej kwaziustalonego pola elektromagnetycznego (3.1) natężenia $H_{z(l)}^{(1;i)}$ i $H_{z(l)}^{(0;i)}$ pola magnetycznego w każdej warstwie układu w kolejnych iteracjach przedstawimy w postaci

$$H_{z(l)}^{(1;i)}(\rho, \varphi, t) = \frac{1}{2} \left[\bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}(\rho, \varphi, t) e^{i\omega t} + \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)*}(\rho, \varphi, t) e^{-i\omega t} \right] \quad (3.57)$$

w obszarach przewodzących cylindrów ($l = \overline{1, N_1}$) oraz —

$$H_{z(l)}^{(0;i)}(\rho, \varphi, t) = \frac{1}{2} \left[\bar{H}_{z(l)}^{(0;i)}(\rho, \varphi, t) e^{i\omega t} + \bar{H}_{z(l)}^{(0;i)*}(\rho, \varphi, t) e^{-i\omega t} \right] \quad (3.58)$$

w obszarach warstw próżni ($l = \overline{1, N_0}$).

Przy tym dla funkcji $\bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}$ i $\bar{H}_{z(l)}^{(0;i)}$ spełniają warunki podobne do (1.78), tzn.

$$\left| \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial t} \right| \ll \omega \left| \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)} \right|; \quad \left| \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(0;i)}}{\partial t} \right| \ll \omega \left| \bar{H}_{z(l)}^{(0;i)} \right|. \quad (3.59)$$

Po podstawieniu wzorów (3.57)–(3.58) do związków (3.36)–(3.41) otrzymamy z nich zagadnienia brzegowe dla wyznaczania kolejnych przybliżeń wartości amplitud natężeń pola magnetycznego. Z uwzględnieniem warunków (3.45) dla wyznaczania funkcji $\bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}$ i $\bar{H}_{z(l)}^{(0;i)}$ przejdziemy do równań

$$\nabla^2 \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)} + \mu_{(l)} \sigma_{e(l)0} i\omega \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)} = \bar{f}_{1(l)}^{(i)}, \quad (l = \overline{1, N_1}); \quad (3.60)$$

$$\nabla^2 \bar{H}_{z(l)}^{(0;i)} + \varepsilon_0 \mu_0 \sigma_{e(l)0} \omega^2 \bar{H}_{z(l)}^{(0;i)} = 0, \quad (l = \overline{1, N_0}) \quad (3.61)$$

przy warunkach brzegowych

— na powierzchniach podziału $\rho = R_j$ cylinder-próżnia

$$\bar{H}_{z(l)}^{(1;i)} = \bar{H}_{z(l)}^{(0;i)}; \quad \frac{1}{\sigma_{e(l)0}} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(0;i)}}{\partial \rho} + \bar{f}_{2(l)}^{(i)} \quad (3.62)$$

— na powierzchniach podziału przewodzących cylindrów $\rho = R_j$

$$\bar{H}_{z(l)}^{(1;i)} = \bar{H}_{z(l+1)}^{(1;i)}; \quad \sigma_{e(l+1)0} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \sigma_{e(l)0} \frac{\partial \bar{H}_{z(l+1)}^{(1;i)}}{\partial \rho} + \bar{f}_{3(l)}^{(i)} \quad (3.63)$$

— na powierzchni zewnętrznej $\rho = R_N$ układu

$$\bar{H}_{z(N)}^{(1;i)} = \bar{f}_{4(l)}^{(i)}. \quad (3.64)$$

W zależnościach powyższych oznaczono

$$\begin{aligned} \bar{f}_{1(l)}^{(i)} &= \frac{1}{\sigma_{e(l)}(T_{(l)}^{(i-1)})} \frac{\partial \sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)})}{\partial \rho} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i-1)}}{\partial \rho} + \\ &+ \frac{1}{\rho^2 \sigma_{e(l)}(T_{(l)}^{(i-1)})} \frac{\partial \sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)})}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i-1)}}{\partial \varphi} - \\ &- i\omega \mu_{(l)} \sigma_{e(l)}(T_{(l)}^{(i-1)}) \bar{H}_{z(l)}^{(1;i-1)}; \end{aligned}$$

$$\bar{f}_{2(l)}^{(i)} = \frac{\sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)})}{i\omega \sigma_{e(l)0} \varepsilon_0} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(0;i-1)}}{\partial \rho};$$

$$\bar{f}_{3(l)}^{(i)} = \sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)}) \frac{\partial \bar{H}_{z(l+1)}^{(1;i)}}{\partial \rho} - \sigma_{e(l+1)1}(T_{(l+1)}^{(i-1)}) \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \rho};$$

$$\bar{f}_{4(l)}^{(i)} = -iH_0(\varphi, t).$$

Pole temperatury $T_{(l)}^{(i)}$ w kolejnych przybliżeniach dla rozpatrywanego układu wyznaczamy z zadania (3.44)–(3.49) przy następujących wyrażeniach dla ciepła $Q_{*(l)0}^{(i)}$ w każdej przewodzącej warstwie

$$Q_{*(l)0}^{(i)} = \frac{1}{\sigma_{e(l)1}(T_{(l)}^{(i-1)})} \left\{ \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \rho} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)*}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{H}_{z(l)}^{(1;i)*}}{\partial \varphi} \right\}, \quad (3.65)$$

które są zapisane z uwzględnieniem wzorów (1.85) i (3.57).

Składowe wektora przemieszczeń $u_{\rho^{(l)}}^{(i)}$, $u_{\varphi^{(l)}}^{(i)}$ na każdej iteracji wyznaczamy z zagadnienia brzegowego (3.30)–(3.31), wykorzystując określone na poprzednim etapie wyjściowego zagadnienia pole temperatury.

Podobnie, jak dla jednorodnego cylindra amplitudę natężenia pola magnetycznego w każdym z podobszarów poszukujemy w postaci szeregów Fouriera. Wtedy —

$$\bar{H}_{z^{(l)}}^{(1;i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(1;i)} e^{in\varphi}, \quad (l = \overline{1, N_1}) \quad (3.66)$$

— dla obszarów przewodzących cylindrów, oraz

$$\bar{H}_{z^{(l)}}^{(0;i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(0;i)} e^{in\varphi}, \quad (l = \overline{1, N_0}) \quad (3.67)$$

— dla obszarów próżni między przewodzącymi cylindrami.

Po podstawieniu rozkładów (3.67), (3.67) w zależności wyjściowe (3.60) – (3.64) i przyrównaniu współczynników przy jednakowych harmonikach otrzymamy dla wyznaczania funkcji $\bar{H}_{z^{(l),n}}^{(0;i)}$, $\bar{H}_{z^{(l),n}}^{(1;i)}$ układ równań

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k_l^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(1;i)} = \bar{f}_{1^{(l),n}}^{(i)}, \quad (l = \overline{1, N_1}); \quad (3.68)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k_0^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(0;i)} = 0, \quad (l = \overline{1, N_0}) \quad (3.69)$$

przy warunkach brzegowych

— na powierzchniach podziału cylinder–próżnia

$$\bar{H}_{z^{(l),n}}^{(1;i)} = \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(0;i)}; \quad \frac{1}{\sigma_{e(l)0}} \frac{\partial \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0} \frac{\partial \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(0;i)}}{\partial \rho} + \bar{f}_{2^{(l),n}}^{(i)} \quad (3.70)$$

— na powierzchniach podziału przewodzących cylindrów

$$\bar{H}_{z^{(l),n}}^{(1;i)} = \bar{H}_{z^{(l+1),n}}^{(1;i)}; \quad \sigma_{e(l+1)0} \frac{\partial \bar{H}_{z^{(l),n}}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \sigma_{e(l)0} \frac{\partial \bar{H}_{z^{(l+1),n}}^{(1;i)}}{\partial \rho} + \bar{f}_{3^{(l),n}}^{(i)} \quad (3.71)$$

— na powierzchni zewnętrznej układu

$$\bar{H}_{z^{(N_1),n}}^{(1;i)} = \bar{f}_{4^{(l),n}}^{(i)}. \quad (3.72)$$

Rozwiązania ogólne równań (3.68) mają postać

$$\bar{H}_{z(l),n}^{(1;i)}(\rho, t) = D_{(l),n}^{(1)} J_n(k_l \rho) + D_{(l),n}^{(2)} N_n(k_l \rho) + \bar{H}_{z(l)szcz,n}^{(1;i)}(\rho, t); \quad (3.73)$$

zaś równań (3.69) odpowiednio —

$$\bar{H}_{z(l),n}^{(0;i)}(\rho, t) = E_{(l),n}^{(1)} J_n(k_0 \rho) + E_{(l),n}^{(2)} N_n(k_0 \rho). \quad (3.74)$$

Rozwiązania szczególne $\bar{H}_{z(l)szcz,n}^{(1;i)}$, wyznaczone metodą wariacji stałych, zapiszemy jako

$$\begin{aligned} \bar{H}_{z(l)szcz,n}^{(1;i)}(\rho, t) = & -\frac{\pi}{2} \left[\int_{R_j}^{\rho} \bar{f}_{1(l)}^{(i)}(\xi, t) N_n(k_l \xi) d\xi \cdot J_n(k_l \rho) + \right. \\ & \left. + \int_{R_j}^{\rho} \bar{f}_{1(l)}^{(i)}(\xi, t) J_n(k_l \xi) d\xi \cdot N_n(k_l \rho) \right], \end{aligned} \quad (3.75)$$

gdzie R_j - promień powierzchni wewnętrznej (l) cylindra. Stałe $D_{(l),n}^{(1)}$, $D_{(l),n}^{(2)}$ ($l = \overline{1, N_1}$), $E_{(l),n}^{(1)}$, $E_{(l),n}^{(2)}$ ($l = \overline{1, N_0}$) określane są z układu równań algebraicznych, otrzymanych w iteracjach z warunków (3.70)–(3.72). Taki układ równań zawiera związki:

$$\begin{aligned} & D_{(l_1),n}^{(1)} J_n(k_{l_1} R_j) + D_{(l_1),n}^{(2)} N_n(k_{l_1} R_j) + \bar{H}_{z(l_1)szcz,n}^{(1;i)}(R_j, t) = \\ & E_{(l_0),n}^{(1)} J_n(k_0 R_j) + E_{(l_0),n}^{(2)} N_n(k_0 R_j); \\ & \frac{k_{l_1}}{\sigma_{\epsilon(l_1)0}} \left\{ D_{(l_1),n}^{(1)} [J_{n-1}(k_{l_1} R_j) - J_{n-1}(k_{l_1} R_j)] + \right. \\ & D_{(l_1),n}^{(2)} [N_{n-1}(k_{l_1} R_j) - N_{n-1}(k_{l_1} R_j)] \left. \right\} + \frac{\partial \bar{H}_{z(l_1)szcz,n}^{(1;i)}}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=R_j} = \quad (3.76) \\ & = \frac{k_0}{i\omega \epsilon_0} \left\{ E_{(l_0),n}^{(1)} [J_{n-1}(k_0 R_j) - J_{n-1}(k_0 R_j)] + \right. \\ & \left. + E_{(l_0),n}^{(2)} [N_{n-1}(k_0 R_j) - N_{n-1}(k_0 R_j)] \right\} + \bar{f}_{2(l),n}^{(i)}, \end{aligned}$$

odpowiadające warunkom brzegowym na powierzchniach podziału $\rho = R_j$ cylinder - próżnia; związki:

$$\begin{aligned}
& D_{(l),n}^{(1)} J_n(k_l R_k) + D_{(l),n}^{(2)} N_n(k_l R_k) + \bar{H}_{z^{(l)}szcz,n}^{(1;i)}(R_k, t) = \\
& D_{(l+1),n}^{(1)} J_n(k_{l+1} R_k) + D_{(l+1),n}^{(2)} N_n(k_{l+1} R_k) + \bar{H}_{z^{(l+1)}szcz,n}^{(1;i)}(R_k, t); \\
& \frac{k_l}{\sigma_{e(l)0}} \left\{ D_{(l),n}^{(1)} [J_{n-1}(k_l R_k) - J_{n-1}(k_l R_k)] + \right. \\
& \left. D_{(l),n}^{(2)} [N_{n-1}(k_l R_j) - N_{n-1}(k_l R_j)] \right\} + \left. \frac{\partial \bar{H}_{z^{(l)}szcz,n}^{(1;i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_k} = \\
& = \frac{k_{l+1}}{\sigma_{e(l+1)0}} \left\{ D_{(l+1),n}^{(1)} [J_{n-1}(k_{l+1} R_k) - J_{n-1}(k_{l+1} R_k)] + \right. \\
& \left. D_{(l+1),n}^{(2)} [N_{n-1}(k_{l+1} R_k) - N_{n-1}(k_{l+1} R_k)] \right\} + \\
& + \left. \frac{\partial \bar{H}_{z^{(l+1)}szcz,n}^{(1;i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_j} + \bar{f}_{3(l),n}^{(i)},
\end{aligned} \tag{3.77}$$

odpowiadające warunkom brzegowym na powierzchniach podziału $\rho = R_j$ dwu przewodzących cylindrów oraz —

$$\begin{aligned}
& D_{(N_1),n}^{(1)} J_n(k_{N_1} R_N) + D_{(N_1),n}^{(2)} N_n(k_{N_1} R_N) + \\
& + \bar{H}_{z^{(N_1)}szcz,n}^{(1;i)}(R_N, t) = \bar{f}_{4(N),n}^{(i)},
\end{aligned} \tag{3.78}$$

wynikające z warunku brzegowego na zewnętrznej powierzchni układu. Równania (3.76) – (3.78), razem z warunkiem regularności rozwiązania przy $\rho = 0$, tworzą pełny układ równań algebraicznych dla wyznaczania $D_{(l),n}^{(1)}$, $D_{(l),n}^{(2)}$ ($l = \overline{1, N_1}$), i $E_{(l),n}^{(1)}$, $E_{(l),n}^{(2)}$ ($l = \overline{1, N_0}$).

Przy wyznaczaniu kolejnych przybliżeń $T_{(l)}^{(i)}$ pola temperatury z zagadnienia (3.44)–(3.49), przedstawimy te funkcje również w postaci rozkładu w szereg Fouriera

$$T_{(l)}^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{(l),n}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{(l),n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right], \quad (l = \overline{1, N_1}). \tag{3.79}$$

Przyjmijmy wartości funkcji $T_{(l)}^{(i)}$ na powierzchniach podziału środowisk $\rho = R_j$ za podlegające dalszemu wyznaczeniu nieznane funkcje $T_{(j)pow}^{(i)}$

zmiennych φ i t , które również przedstawimy w postaci szeregów Fouriera

$$T_{(j)\text{pov}}^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{(j)\text{pov},n}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{(j)\text{pov},n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right], \quad (j = \overline{1, N}). \quad (3.80)$$

Po podstawieniu rozkładów (3.79) w wyjściowe związki (3.44)–(3.49) i przyrównaniu współczynników przy jednakowych harmonikach, otrzymamy następujące zadania dla wyznaczania funkcji $T_{(l),n}^{(i)}$ ($l = \overline{1, N_1}$)

$$\lambda_{(l)0} \nabla^2 T_{(l),n}^{(i)} + Q_{*(l),n}^{(i)} - c_{V(l)0} \frac{\partial T_{(l),n}^{(i)}}{\partial t} = \mathcal{P}_{*(l),n}^{(i)}; \quad (3.81)$$

$$T_{(l),n}^{(i)} = T_{0(l),n} \quad \text{przy } t = 0; \quad (3.82)$$

$$T_{(l),n}^{(i)} = T_{(l^+)\text{pov},n}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_{l^+}; \quad (3.83)$$

$$T_{(l),n}^{(i)} = T_{(l^-)\text{pov},n}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_{l^-}.$$

We wzorach (3.81)–(3.83) promienie wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni l -tego cylindra oznaczono odpowiednio R_{l^+} i R_{l^-} .

Wprowadzamy w rozważania równomierną siatkę w każdym z cylindrów z krokiem $h_{(l)}$ odpowiednio po współrzędnej ρ i krokiem τ po czasie. Z wykorzystaniem aproksymacji różnicowej operatorów różniczkowych, zamieniamy równania (3.81) na warstwie czasowej q odpowiednimi równaniami różnicowymi

$$\begin{aligned} \lambda_{(l)0} \left(T_{(l),n;\rho\bar{p}}^{(i)} + \frac{1}{\rho_p} T_{(l),n;\bar{\rho}}^{(i)} - \frac{n^2}{\rho^2} T_{(l),n;pq}^{(i)} \right) + Q_{(l),n;pq}^{(i)} = \\ = c_{V(l)0} T_{(l),n;\tau}^{(i)} + \mathcal{P}_{*(l),n;pq}^{(i)}; \quad p = \overline{2, N_{(l)} - 1}; \quad q = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.84)$$

z rzędem błędu $o(h^2 + \tau)$, $h = \max_l h_{(l)}$, a warunki (3.82)–(3.83) — następującymi

$$T_{(l),n;p1}^{(i)} = T_{0(l),n;p}, \quad p = \overline{1, N_{(l)}}; \quad (3.85)$$

$$T_{(l),n;1q}^{(i)} = T_{(l^-)\text{pov},n;q}^{(i)}; \quad T_{(l),n;1q}^{(i)} = T_{(l^+)\text{pov},n;q}^{(i)}, \quad (3.86)$$

z rzędem błędu $o(h)$. Z układu równań (3.84)–(3.86) wyznaczmy wartości funkcji $T_{(l),n}^{(i)}$ dla chwili czasu $t = t_q$ w wewnętrznych węzłach siatki, tzn. wielkości $T_{(l),n;pq}^{(i)}$, $p = \overline{2, N_{(l)} - 1}$ przez wartości $T_{(j)\text{pov},n}^{(i)}$, $j = \overline{1, N}$ temperatury na powierzchniach. Wtedy

$$\begin{aligned} T_{(l),n;pq}^{(i)} = L_{(l),n;pq}^{(i)-} T_{(l^-)\text{pov},n;q}^{(i)} + L_{(l),n;pq}^{(i)+} T_{(l^+)\text{pov},n;q}^{(i)} + \\ + M_{(l),n;pq}^{(i)}, \quad p = \overline{2, N_{(l)} - 1}; \quad q = 2, 3, \dots; \quad (l = \overline{1, N_1}). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Należy zaznaczyć, iż algorytm obliczenia współczynników $L_{(l),n;pq}^{(i)-}$, $L_{(l),n;pq}^{(i)+}$, $M_{(l),n;pq}^{(i)}$ oraz ich struktura zależą od schematu konkretnego układu warstwowego. Dalej algorytm obliczenia tych współczynników będzie pokazany na przykładzie cylindra dwuwarstwowego oraz układu dwu współosiowych cylindrów, rozdzielonych warstwą próżni.

Po zamianie operatorów różniczkowych w warunkach (3.46)–(3.47) operatorami różnicowymi i wyeliminowaniu z nich za pomocą wzorów (3.87) wartości funkcji $T_{(l),n}^{(i)}$ w wewnętrznych węzłach siatki, otrzymamy następujące związki

$$\begin{aligned}
& -\lambda_{(l)0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(U_{(l^+),n}^{(i)} e^{in\varphi} + U_{(l^+),n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right) \right] + \\
& + \frac{2\epsilon_j(1 - \epsilon_{j+1})}{\epsilon_{j+1}} \lambda_{(l)0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} U_{(l+1)^-,m}^{(i)} L_{S-S',m,n} \right] e^{in\varphi} + \right. \\
& \left. + \left[\sum_{m=0}^{\infty} U_{(l+1)^-,m}^{(i)*} L_{S-S',m,n} \right] e^{-in\varphi} \right\} = \\
& = \epsilon_j \sigma_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(Z_{(l^+),n}^{(i)} e^{in\varphi} + Z_{(l^+),n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right) \right] - \\
& 2\epsilon_j \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_{(l+1)^-,m}^{(i)} L_{S-S',m,n} \right] e^{in\varphi} + \right. \\
& \left. + \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_{(l+1)^-,m}^{(i)*} L_{S-S',m,n} \right] e^{-in\varphi} \right\}, \\
& -\lambda_{(l+1)0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(U_{(l+1)^+,n}^{(i)} e^{in\varphi} + U_{(l+1)^+,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right) \right] + \\
& + \frac{2\epsilon_{j+1}(1 - \epsilon_j)}{\epsilon_j} \lambda_{(l)0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} U_{(l)^-,m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(1)} \right] e^{in\varphi} + \right. \\
& \left. + \left[\sum_{m=0}^{\infty} U_{(l)^-,m}^{(i)*} L_{S-S',m,n}^{(1)} \right] e^{-in\varphi} \right\} + \\
& + 2(1 - \epsilon_{j+1}) \lambda_{(l+1)0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} U_{(l+1)^-,m}^{(i)} L_{S-S',m,n} \right] e^{in\varphi} + \right.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{m=0}^{\infty} U_{(l+1)^-,m}^{(i)*} L_{S-S',m,n} \right] e^{-in\varphi} + \left. \right\} = \tag{3.89} \\
& = 2\epsilon_{j+1}\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[Z_{(l+1)^-,n}^{(i)} e^{in\varphi} + Z_{(l+1)^-,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right] + \\
& - 2\epsilon_{j+1}\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_{(1),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(1)} \right] e^{in\varphi} + \right. \\
& - 2\epsilon_{j+1}\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_{(1),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(1)} \right] e^{in\varphi} + \right. \\
& - 2\epsilon_{j+1}\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_{(2),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(2)} \right] e^{in\varphi} + \right. \\
& \left. \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_{(2),m}^{(i)*} L_{S-S',m,n}^{(2)*} \right] e^{-in\varphi} \right\} + \\
& \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_{5(l),n}^{(i)} e^{in\varphi} + f_{5(l),n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right], \right.
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
U_{(l^+),n}^{(i)} &= \frac{1}{h_{(l)}} \left(T_{(l^+)\text{pov},n;q}^{(i)} - L_{(l),n;pq}^{(i)-} T_{(l^-)\text{pov},n;q}^{(i)-} \right. \\
&\quad \left. - L_{(l),n;pq}^{(i)+} T_{(l^+)\text{pov},n;q}^{(i)} + M_{(l),n;pq}^{(i)} \right) \\
U_{(l+1)^-,n}^{(i)} &= \frac{1}{h_{(l+1)}} \left(T_{(l+1)^-\text{pov},n;q}^{(i)} - L_{(l+1),n;pq}^{(i)-} T_{(l+1)^-\text{pov},n;q}^{(i)-} \right. \\
&\quad \left. - L_{(l+1),n;pq}^{(i)+} T_{(l+1)^+\text{pov},n;q}^{(i)} + M_{(l+1),n;pq}^{(i)} \right) \\
Z_{(l)0} &= Y_{(l)0}^2 + 2Y_{(l)1}Y_{(l)1}^* + \dots + 2Y_{(l)M}Y_{(l)M}^* + \dots \\
Z_{(l)1} &= Y_{(l)0}Y_{(l)1} + Y_{(l)1}^*Y_{(l)2} + \dots + Y_{(l)M-1}^*Y_{(l)M} + \dots \\
&\dots \quad \dots \\
Y_{(l)0} &= \left(T_{(l)\text{pov},0;q}^{(i)} \right)^2 + 2T_{(l)\text{pov},1;q}^{(i)*} T_{(l)\text{pov},1;q}^{(i)} + \dots \\
Y_{(l)1} &= T_{(l)\text{pov},0;q}^{(i)*} T_{(l)\text{pov},1;q}^{(i)} + T_{(l)\text{pov},1;q}^{(i)*} T_{(l)\text{pov},2;q}^{(i)} + \dots \\
&\dots \quad \dots
\end{aligned}$$

Podobnie z warunków (3.48)–(3.49) otrzymamy

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{(l)^+\text{pov},n}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{(l)^+\text{pov},n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right] = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{(l+1)^-\text{pov},n}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{(l+1)^-\text{pov},n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{(l)0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[U_{(l)^+,n}^{(i)} e^{in\varphi} + U_{(l)^+,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right] = \\ & = \lambda_{(l+1)0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[U_{(l+1)^-,n}^{(i)} e^{in\varphi} + U_{(l+1)^-,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{(N_1)0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[U_{(N_1)^+,n}^{(i)} e^{in\varphi} + U_{(N_1)^+,n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right] = \\ & = H_* \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[T_{(l)^+\text{pov},n}^{(i)} e^{in\varphi} + T_{(l)^+\text{pov},n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right] - T_0 \right\} + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_{7(N_1),n}^{(i)} e^{in\varphi} + f_{7(N_1),n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Przyrównując w związkach (3.88)–(3.92) współczynniki przy jednakowych harmonikach, dochodzimy do następującego układu równań algebraicznych dla poszukiwanych współczynników

$$\begin{aligned} & -\lambda_{(l)0} U_{(l)^+,n}^{(i)} + \frac{2\epsilon_j(1-\epsilon_{j+1})}{\epsilon_{j+1}} \lambda_{(l)0} \sum_{m=0}^M U_{(l)^+,m}^{(i)} L_{S-S',m,n} = \\ & = \epsilon_j \sigma_0 Z_{(l),n}^{(i)} - 2\epsilon_j \sigma_0 \sum_{m=0}^M Z_{(l),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}; \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_{(l+1)0} U_{(l+1),n}^{(i)} + \frac{2\epsilon_{j+1}(1-\epsilon_j)}{\epsilon_j} \lambda_{(l)0} \sum_{m=0}^M U_{(l)^+,m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(1)} + \\ & + 2(1-\epsilon_{j+1}) \lambda_{(l)0} \sum_{m=0}^M U_{(l)^+,m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(2)} = \epsilon_{j+1} \sigma_0 Z_{(l),n}^{(i)} - \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$-2\epsilon_{j+1} \sigma_0 \left[\sum_{m=0}^M Z_{(l),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(1)} + \sum_{m=0}^M Z_{(l),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(2)} \right] + f_{5(l),n}^{(i)};$$

$$T_{(l)^+\text{pov},n}^{(i)} = T_{(l+1)^-\text{pov},n}^{(i)}; \quad (3.95)$$

$$\lambda_{(l)0}U_{(l)+,n}^{(i)} = \lambda_{(l+1)0}U_{(l+1)-,n}^{(i)}; \quad (3.96)$$

$$\lambda_{(N_1)0}U_{(N_1)+,n}^{(i)} = H_* \left(T_{(N_1)+\text{pov},n}^{(i)} - T_{0,n} \right) + f_{7(N_1),n}^{(i)}, \quad (3.97)$$

podobnego do układu równań (2.44). Po rozwiązaniu układu równań (3.93)–(3.97), obliczamy za pomocą wzorów (3.87) wartości funkcji $T_{(l),n}^{(i)}$ we wszystkich węzłach wybranej siatki.

Składowe $u_{\rho(l)}^{(i)}$, $u_{\varphi(l)}^{(i)}$ wektora przemieszczeń w przybliżeniu (i) również poszukujemy w postaci odpowiednich szeregów Fouriera

$$\begin{aligned} u_{\rho(l)}^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_{\rho(l),n}^{(i)} e^{in\varphi} + u_{\rho(l),n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right); \\ u_{\varphi(l)}^{(i)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_{\varphi(l),n}^{(i)} e^{in\varphi} + u_{\varphi(l),n}^{(i)*} e^{-in\varphi} \right). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Po podstawieniu przedstawień (3.98) w związku (3.54)–(3.56) i przyrównaniu współczynników przy jednakowych harmonikach, otrzymamy układ równań dla wyznaczania funkcji $u_{\rho(l),n}^{(i)}$, $u_{\varphi(l),n}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \left(\frac{\partial^2 u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\rho^2} \right) - \frac{\mu_{*(l)0} n^2}{\rho^2} u_{\rho(l),n}^{(i)} + \\ + \frac{in(\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0})}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{in(\lambda_{*(l)0} + 3\mu_{*(l)0})}{\rho^2} u_{\varphi(l),n}^{(i)} = \bar{\Phi}_{\rho(l),n}^{(i)}; \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \mu_{*(l)0} \left(\frac{\partial^2 u_{\varphi(l),n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi(l),n}^{(i)}}{\rho^2} \right) + (\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \frac{n^2}{\rho^2} u_{\varphi(l),n}^{(i)} + \\ + in(\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} + in(\lambda_{*(l)0} + 3\mu_{*(l)0}) \frac{u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\rho^2} = \bar{\Phi}_{\varphi(l),n}^{(i)}. \end{aligned}$$

przy warunkach brzegowych:

— na swobodnych od obciążenia zewnętrznego powierzchniach kontaktu cylinder - próżnia

$$\begin{aligned} (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \frac{\partial u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} \left(inu_{\varphi(l),n}^{(i)} + u_{\rho(l),n}^{(i)} \right) = \bar{P}_{1(l),n}^{(i)}; \\ \frac{\partial u_{\varphi(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} u_{\rho(l),n}^{(i)} - u_{\varphi(l),n}^{(i)} = \bar{P}_{1(l),n}^{(i)}; \end{aligned} \quad (3.100)$$

— na powierzchniach styku sąsiadujących przewodzących cylindrów

$$\begin{aligned}
& u_{\rho^{(l)},n}^{(i)} = u_{\rho^{(l+1),n}}^{(i)}; \quad u_{\varphi^{(l)},n}^{(i)} = u_{\varphi^{(l+1),n}}^{(i)}; \\
& (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \frac{\partial u_{\rho^{(l)},n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho} \left(inu_{\varphi^{(l)},n}^{(i)} + u_{\rho^{(l)},n}^{(i)} \right) - \\
& - \bar{P}_{3(l),n}^{(i)} = (2\mu_{*(l+1)0} + \lambda_{*(l+1)0}) \frac{\partial u_{\rho^{(l+1),n}}^{(i)}}{\partial \rho} - \\
& - \frac{\lambda_{*(l+1)0}}{\rho} \left(inu_{\varphi^{(l+1),n}}^{(i)} + u_{\rho^{(l+1),n}}^{(i)} \right); \tag{3.101} \\
& \frac{\partial u_{\varphi^{(l)},n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} u_{\rho^{(l)},n}^{(i)} - u_{\varphi^{(l)},n}^{(i)} - \bar{P}_{4(l),n}^{(i)} = \\
& = \frac{\partial u_{\varphi^{(l+1),n}}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} u_{\rho^{(l+1),n}}^{(i)} - u_{\varphi^{(l+1),n}}^{(i)} + \bar{P}_{4(l),n}^{(i)}
\end{aligned}$$

Zagadnienie (3.99)–(3.101), jak i analogiczne (2.47)–(2.48) dla jednorodnego cylindra, rozwiązujemy metodą różnic skończonych, wykorzystując siatkę wprowadzoną przy rozwiązaniu zagadnienia przewodnictwa ciepła. Po zamianie w związkach wyjściowych (3.99)–(3.101) operatorów różniczkowych przez różnicowe, z równań (3.99) otrzymamy następujące zależności

$$\begin{aligned}
& (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \left(u_{\rho^{(l),n;\rho\bar{\rho}}}^{(i)} + \frac{1}{\rho_p} u_{\rho^{(l),n;\bar{\rho}}}^{(i)} - \frac{u_{\rho^{(l),n;p}}^{(i)}}{\rho_p^2} \right) - \\
& - \frac{\mu_{*(l)0}n^2}{\rho_p^2} u_{\rho^{(l),n;p}}^{(i)} + \frac{in(\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0})}{\rho_p} u_{\varphi^{(l),n;\bar{\rho}}}^{(i)} \rho - \\
& - \frac{in(\lambda_{*(l)0} + 3\mu_{*(l)0})}{\rho_p^2} u_{\varphi^{(l),n;p}}^{(i)} = \bar{\Phi}_{\rho^{(l),n;p}}^{(i)}; \\
& \mu_{*(l)0} \left(u_{\varphi^{(l),n;\rho\bar{\rho}}}^{(i)} + \frac{1}{\rho_p} u_{\varphi^{(l),n;\bar{\rho}}}^{(i)} - \frac{u_{\varphi^{(l),n;p}}^{(i)}}{\rho^2} \right) + \\
& + (\lambda_{*(l)0} + 2\mu_{*(l)0}) \frac{n^2}{\rho_p^2} u_{\varphi^{(l),n;p}}^{(i)} + \\
& + in(\lambda_{*(l)0} + \mu_{*(l)0}) \frac{1}{\rho_p} u_{\rho^{(l),n;\bar{\rho}}}^{(i)} + \\
& + in(\lambda_{*(l)0} + 3\mu_{*(l)0}) \frac{u_{\rho^{(l),n;p}}^{(i)}}{\rho_p^2} = \bar{\Phi}_{\varphi^{(l),n;p}}^{(i)} \quad p = \overline{1, N^{(l)}}. \tag{3.102}
\end{aligned}$$

a z warunków brzegowych (3.100)–(3.101) — zależności:

$$\begin{aligned} & (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) u_{\rho(l),n;\rho}^{(i)} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{\rho_j} \left(inu_{\varphi(l),n;p}^{(i)} + u_{\rho(l),n;p}^{(i)} \right) = \\ & = \bar{P}_{1(l),n;p}^{(i)}; \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} & u_{\varphi(l),n;\rho}^{(i)} - \frac{in}{\rho_p} u_{\rho(l),n;p}^{(i)} - u_{\varphi(l),p;n}^{(i)} = \bar{P}_{1(l),n;p}^{(i)}; \\ & u_{\rho(l),n;N(l)}^{(i)} = u_{\rho(l+1),n;1}^{(i)}; \quad u_{\varphi(l),n;N(l)}^{(i)} = u_{\varphi(l+1),n;1}^{(i)}; \\ & (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) u_{\rho(l),n;\rho}^{(i)} - \frac{\lambda_{*(l)0}}{R_j} \left(inu_{\varphi(l),n;N(l)}^{(i)} + u_{\rho(l),n;N(l)}^{(i)} \right) - \\ & - \bar{P}_{3(l),n;N(l)}^{(i)} = (2\mu_{*(l+1)0} + \lambda_{*(l+1)0}) u_{\rho(l+1),n;\rho}^{(i)} - \\ & - \frac{\lambda_{*(l+1)0}}{R_j} \left(inu_{\varphi(l+1),n;1}^{(i)} + u_{\rho(l+1),n;1}^{(i)} \right); \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} & u_{\varphi(l),n;\rho}^{(i)} - \frac{in}{R_j} u_{\rho(l),n;N(l)}^{(i)} - u_{\varphi(l),n;N(l)}^{(i)} - \bar{P}_{4(l),n;N(l)}^{(i)} = \\ & = u_{\varphi(l+1),n;\rho}^{(i)} - \frac{in}{R_j} u_{\rho(l+1),n;1}^{(i)} - u_{\varphi(l+1),n;1}^{(i)} + \bar{P}_{4(l),n;N(l)}^{(i)} \end{aligned}$$

Zależności (3.102)–(3.104) tworzą układ liniowych równań algebraicznych dla wyznaczania wartości funkcji $u_{\rho(l),n}$ oraz $u_{\varphi(l),n}$ we wszystkich węzłach siatki. Układ ten rozwiązujemy za pomocą metody eliminacji Gaussa [99, 110]. Następnie ze wzorów (3.22) z wykorzystaniem relacji różniczkowania numerycznego, określamy naprężenia w każdym z rozpatrywanych cylindrów.

3.2. Rozwiązanie dla cylindra dwuwarstwowego

Rozpatrzmy układ z dwu współosiowych cylindrów z różnych materiałów, który poddany działaniu pola elektromagnetycznego, zadanego wektorem natężenia pola magnetycznego ze składowymi:

$$H_\rho(\rho, \varphi, t) = H_\varphi(\rho, \varphi, t) = 0; \quad H_z(\rho, \varphi, t) = H_{z0}(\varphi)e^{i\omega t} \quad (3.105)$$

na powierzchni zewnętrznej $\rho = R_2$ układu. Na powierzchni $\rho = R_1$ między cylindrami ma miejsce doskonały kontakt elektromagnetyczny i termomechaniczny. Powierzchnia zewnętrzna $\rho = R_2$ jest wolna od obciążenia mechanicznego i znajduje się w warunkach konwekcyjnej wymiany ciepła z otoczeniem, którego temperatura wynosi T_0 . Określony jest stan termomechaniczny takiego układu, spowodowany działaniem zawewnętrznego pola elektromagnetycznego, zadanego warunkiem (3.105).

3.2.1. Natężenie pola magnetycznego i temperatura

Zgodnie z przedstawionym schematem obliczeniowym, funkcje $\bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}$ i $T_{(l)}^{(i)}$ na każdej iteracji poszukujemy, rozwiązując zagadnienie elektrodynamiki (3.60), (3.63), (3.105), a zatem przewodnictwa cieplnego (3.44), (3.45), (3.48), (3.49). Po przedstawieniu wyznaczonych funkcji $\bar{H}_{z(l)}^{(1;i)}$ ($l = 1, 2$) w postaci szeregów Fouriera (3.66) zagadnienie (3.68)–(3.72) dla wyznaczania współczynników $\bar{H}_{z(l),n}^{(1;i)}$ w rozważanym przypadku zapiszemy w postaci:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k_l^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] \bar{H}_{z(l),n}^{(1;i)} = \bar{f}_{1(l),n}^{(i)} \quad (l = 1, 2); \quad (3.106)$$

$$\sigma_{e(2)0} \frac{\partial \bar{H}_{z(1),n}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \sigma_{e(1)0} \frac{\partial \bar{H}_{z(2),n}^{(1;i)}}{\partial \rho} + \bar{f}_{4(1),n}^{(i)}; \quad (3.107)$$

$$\bar{H}_{z(1),n}^{(1;i)} = \bar{H}_{z(2),n}^{(1;i)} \quad \text{przy} \quad \rho = R_1;$$

$$\bar{H}_{z(2),n}^{(1;i)} = H_{0,n}/2i \quad \text{przy} \quad \rho = R_2, \quad (3.108)$$

gdzie $k_l^2 = i\mu_0\omega\sigma_{e(l)0}$, ($l = 1, 2$).

Rozwiązania ogólne równań (3.106) mają postać (3.73), przy czym rozwiązania szczególne niejednorodnych równań określone są związkami (3.75). Układ równań (3.76)–(3.78) dla wyznaczania stałych $D_{(l),n}^{(1)}$, $D_{(l),n}^{(2)}$ ($l = 1, 2$) w danym przypadku będzie miał postać

$$\begin{aligned} A_{11,n}D_{(1),n}^{(1)} + A_{12,n}D_{(1),n}^{(2)} &= B_{1,n}; \\ A_{21,n}D_{(1),n}^{(1)} + A_{22,n}D_{(1),n}^{(2)} + A_{23,n}D_{(2),n}^{(1)} + A_{24,n}D_{(2),n}^{(2)} &= B_{2,n}; \\ A_{31,n}D_{(1),n}^{(1)} + A_{32,n}D_{(1),n}^{(2)} + A_{33,n}D_{(2),n}^{(1)} + A_{34,n}D_{(2),n}^{(2)} &= B_{3,n}; \\ A_{43,n}D_{(2),n}^{(1)} + A_{44,n}D_{(2),n}^{(2)} &= B_{4,n}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

W równaniach tych oznaczono

$$\begin{aligned} A_{11,n} &= J_n(0); & A_{12,n} &= 0; \\ A_{21,n} &= J_n(k_1 R_1); & A_{22,n} &= N_n(k_1 R_1); \\ A_{23,n} &= J_n(k_2 R_1); & A_{24,n} &= N_n(k_2 R_1); \\ A_{31,n} &= \frac{\sigma_{e(2)0}}{2} k_1 [J_{n-1}(k_1 R_1) - J_{n+1}(k_1 R_1)]; \\ A_{32,n} &= \frac{\sigma_{e(2)0}}{2} k_1 [N_{n-1}(k_1 R_1) - N_{n+1}(k_1 R_1)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{33,n} &= \frac{\sigma_{e(1)0}}{2} k_2 [J_{n-1}(k_2 R_1) - J_{n+1}(k_2 R_1)]; \\
A_{34,n} &= \frac{\sigma_{e(1)0}}{2} k_2 [N_{n-1}(k_2 R_1) - N_{n+1}(k_2 R_1)]; \\
A_{43,n} &= J_n(k_2 R_2); \quad A_{44,n} = N_n(k_2 R_2); \\
B_{1,n} &= 0; \quad B_{2,n} = \bar{H}_{z(2)szcz,n}^{(i)}(R_1, t) - \bar{H}_{z(1)szcz,n}^{(i)}(R_1, t); \\
B_{3,n} &= \bar{f}_{4(1),n}^{(i)}(R_1) + \\
&+ \frac{k_1}{2} [J_{n-1}(k_1 R_1) - J_{n+1}(k_1 R_1)] \int_0^{R_1} \pi \bar{f}_{1(1),n}^{(i)}(\xi, t) N_n(k_1 \xi) d\xi + \\
&+ \frac{k_1}{2} [N_{n-1}(k_1 R_1) - N_{n+1}(k_1 R_1)] \int_0^{R_1} \pi \bar{f}_{1(1),n}^{(i)}(\xi, t) J_n(k_1 \xi) d\xi; \\
B_{4,n} &= \frac{1}{2i} \bar{H}_{z(2)pov,n}^{(i)} - \bar{H}_{z(2)szcz,n}^{(i)}(R_2, t).
\end{aligned}$$

Funkcje $T_{(l)}^{(i)}$ ($l = 1, 2$) temperatury w kolejnych przybliżeniach wyznaczamy również w postaci (3.79). Zagadnienie (3.81)–(3.83) przyjmuje przy tym postać

$$\begin{aligned}
\lambda_{(l)0} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right] T_{(l),n}^{(i)} + Q_{*(l),n}^{(i)} - \\
- c_{V(l)0} \frac{\partial T_{(l),n}^{(i)}}{\partial t} = \mathcal{P}_{*(l),n}^{(i)}, \quad (l = 1, 2)
\end{aligned} \tag{3.110}$$

$$T_{(l),n}^{(i)} = T_{0(l),n}^{(i)} \quad \text{przy } t = 0 \tag{3.111}$$

$$\left. \begin{aligned}
T_{(1),n}^{(i)} &= T_{(2),n}^{(i)}; \\
\lambda_{(1)0} \frac{\partial T_{(1),n}^{(i)}}{\partial \rho} &= \lambda_{(2)0} \frac{\partial T_{(2),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \bar{f}_{6(1),n}^{(i)}
\end{aligned} \right\} \quad \text{przy } \rho = R_1 \tag{3.112}$$

$$-\lambda_{(2)0} \frac{\partial T_{(2),n}^{(i)}}{\partial \rho} = H_* T_{(2),n}^{(i)} + \bar{f}_{7(1),n}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_2 \tag{3.113}$$

Zagadnienie (3.110)–(3.113) rozwiązujemy metodą różnic skończonych. Równania (3.110) aproksymujemy związkami różnicowymi

$$\begin{aligned}
\lambda_{(l)0} \left[T_{(l),n;\rho\bar{p}}^{(i)} \frac{1}{\rho_p} T_{(l),n;\bar{p}}^{(i)} - \frac{n^2}{\rho_p^2} T_{(l),n;pq}^{(i)} \right] + Q_{*(l),n;pq}^{(i)} - c_{V(l)0} T_{(l),n;\tau}^{(i)} = \\
= \mathcal{P}_{*(l),n;pq}^{(i)}, \quad p = \overline{2, N_{(l)}} - 1 \quad q = 2, 3, \dots \quad (l = 1, 2)
\end{aligned} \tag{3.114}$$

z rzędem błędu $o(h^2+\tau)$, $h = \max(h_1, h_2)$, a brzegowe i początkowe warunki (3.111)–(3.113) — związkami

$$T_{(l),n;p1}^{(i)} = T_{0(l),n;p1}^{(i)}; \quad p = \overline{1, N(l)} \quad (l = 1, 2) \quad (3.115)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{(1),n;N_1q}^{(i)} &= T_{(2),n;1q}^{(i)}; \\ \lambda_{(1)0} T_{(1),n;\rho}^{(i)} &= \lambda_{(2)0} \frac{\partial T_{(2),n;\rho}^{(i)}}{\partial \rho} - \bar{f}_{6(1),n;N_1q}^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad q = 2, 3, \dots \quad (3.116)$$

$$-\lambda_{(2)0} T_{(2),n;\rho}^{(i)} = H_* T_{(2),n;N_2q}^{(i)} + \bar{f}_{7(1),n;N_2q}^{(i)} \quad q = 2, 3, \dots \quad (3.117)$$

z rzędem błędu $o(h)$. W równaniach tych N_1, N_2 - wybrana liczba węzłów siatki względem współrzędnej ρ w obszarze każdego cylindra, h_1, h_2 - kroki siatki. Zależności (3.114)–(3.117) tworzą układ liniowych równań algebraicznych dla wyznaczania wartości $T_{(l),n;pq}^{(i)}$ na warstwie czasowej q .

Układ równań (3.114)–(3.117) rozwiązujemy metodą przegnania [110, 124]. Dla tego położymy

$$T_{(1),n;p-1,q}^{(i)} = A_{(1),n;p-1,q}^{(i)} T_{(1),n;p,q}^{(i)} + B_{(1),n;p-1,q}^{(i)}, \quad (\overline{p = 1, N_1 - 1}) \quad (3.118)$$

$$T_{(2),n;p-1,q}^{(i)} = A_{(2),n;p-1,q}^{(i)} T_{(2),n;p,q}^{(i)} + B_{(2),n;p-1,q}^{(i)}, \quad (\overline{p = 2, N_2}). \quad (3.119)$$

Współczynniki przegnania $A_{(l),n;p-1,q}^{(i)}, B_{(l),n;p-1,q}^{(i)}$ obliczamy zgodnie z następującymi wzorami

$$\begin{aligned} A_{(1),n;1,q}^{(i)} &= 1; \quad B_{(1),n;1,q}^{(i)} = 0; \\ A_{(1),n;p,q}^{(i)} &= - \left(\frac{\lambda_{(1)0}}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 \rho_p} \right) Z_{(1)p}^{-1} \quad (\overline{p = 2, N_1}); \\ B_{(1),n;p,q}^{(i)} &= \left[\frac{B_{(1),n;p-1,q}^{(i)}}{2h_1 \rho_p} - \frac{\lambda_{(1)0}}{h_1^2} - Q_{*(1)n;p,q}^{(i)} + \mathcal{P}_{*(1)n;p,q}^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{cV_{(1)0}}{\tau} T_{(1),n;p,q-1}^{(i)} \right] Z_{(1)p}^{-1} \quad (\overline{p = 2, N_1}); \\ A_{(2),n;N_2,q}^{(i)} &= \frac{1}{1 + h_2 H_*}; \quad B_{(2),n;N_2,q}^{(i)} = \frac{h_2 \bar{f}_{7,(2),n;p,q}^{(i)}}{1 + h_2 H_*}; \\ A_{(2),n;p,q}^{(i)} &= - \left(\frac{\lambda_{(2)0}}{h_2^2} + \frac{1}{h_2 \rho_p} \right) Z_{(2)p}^{-1} \quad (\overline{p = 1, N_2 - 1}); \\ B_{(2),n;p,q}^{(i)} &= \left[\frac{B_{(2),n;p+1,q}^{(i)}}{2h_2 \rho_p} - \frac{\lambda_{(2)0}}{h_2^2} - Q_{*(2)n;p,q}^{(i)} + \mathcal{P}_{*(2)n;p,q}^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{cV_{(2)0}}{\tau} T_{(2),n;p,q-1}^{(i)} \right] Z_{(2)p}^{-1} \quad (\overline{p = 1, N_2 - 1}); \end{aligned} \quad (3.120)$$

otrzymanymi ze związków (3.115)–(3.117), gdzie

$$Z_{(1)p} = \frac{2\lambda_{(1)0}}{h_1^2} + \frac{A_{(1),n;p-1,q}^{(i)}}{2h_1\rho_p} - \frac{c_{V(1)0}}{\tau} + \frac{n^2}{\rho_p^2};$$

$$Z_{(2)p} = \frac{2\lambda_{(2)0}}{h_2^2} + \frac{A_{(2),n;p+1,q}^{(i)}}{2h_2\rho_p} - \frac{c_{V(2)0}}{\tau} + \frac{n^2}{\rho_p^2}.$$

Z zależności (3.117) uwzględniając wyrażenia (3.118) i (3.119) otrzymujemy

$$\begin{aligned} T_{(1),n;N_1,q}^{(i)} &= T_{(2),n;1,q}^{(i)} = \left[B_{(1),n;N_1-1,q}^{(i)} + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_{(2)0}h_1}{\lambda_{(1)0}h_2} B_{(2),n;2,q}^{(i)} + \frac{h_1}{\lambda_{(1)0}} \bar{f}_{7,(2),n;p,q}^{(i)} \right] \times \\ &\times \left[1 - A_{(1),n;N_1-1,q}^{(i)} + \frac{\lambda_{(2)0}h_1}{\lambda_{(1)0}h_2} \left(1 - A_{(2),n;2,q}^{(i)} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Wzory (3.118)–(3.119) pozwalają (przy wykorzystaniu $T_{(1),n;N_1,q}^{(i)}$ oraz $T_{(2),n;1,q}^{(i)}$) obliczyć wartości poszukiwanych funkcji we wszystkich węzłach rozpatrywanej siatki.

3.2.2. Stan naprężenia i odkształcenia

Odpowiednio do wykorzystywanego schematu obliczeniowego, zagadnienie (3.99)–(3.101) dla wyznaczania współczynników $u_{\rho(l),n}^{(i)}$, $u_{\varphi(l),n}^{(i)}$ ($l = 1, 2$) rozkładów (3.98) składowych $u_{\rho(l)}^{(i)}$, $u_{\varphi(l)}^{(i)}$ wektora przemieszczeń w i -tej iteracji zapiszemy następująco

$$\begin{aligned} \mu_{*(l)0} &\left[\frac{\partial^2 u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{1+n^2}{\rho^2} u_{\rho(l),n}^{(i)} - \frac{2in}{\rho^2} u_{\varphi(l),n}^{(i)} \right] + \\ (\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) &\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(u_{\rho(l),n}^{(i)} + inu_{\varphi(l),n}^{(i)} \right) \right] = \bar{\Phi}_{\rho(l),n}^{(i)}; \\ \mu_{*(l)0} &\left[\frac{\partial^2 u_{\varphi(l),n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{1+n^2}{\rho^2} u_{\varphi(l),n}^{(i)} + \frac{2in}{\rho^2} u_{\rho(l),n}^{(i)} \right] + \\ \frac{in}{\rho} (\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) &\left[\frac{\partial u_{\rho(l),n}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(u_{\rho(l),n}^{(i)} + inu_{\varphi(l),n}^{(i)} \right) \right] = \bar{\Phi}_{\varphi(l),n}^{(i)}; \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$G = (G_{(1)1} \quad G_{(1)2} \quad \dots \quad G_{(1)N_1} \quad G_{(2)1} \quad \dots \quad G_{(2)N_2})^T;$$

$$X_{(l)p} = \left(u_{\rho^{(l),n;pq}}^{(i)} \quad u_{\varphi^{(l),n;pq}}^{(i)} \right); \quad p = \overline{1, N_l}, \quad (l = 1, 2);$$

$$L_{(1)1}^0 = L_{(1)1}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_{(1)1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$L_{(l)p}^- = \begin{pmatrix} (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \left(\frac{1}{h_l} - \frac{1}{2h_l\rho_p} \right) & -\frac{in}{2h_l\rho_p} (\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \\ \frac{in}{2h_l\rho_p} (\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) & \mu_{*(l)0} \left(\frac{1}{h_l} - \frac{1}{2h_l\rho_p} \right) \end{pmatrix};$$

$$L_{(l)p}^0 = \begin{pmatrix} (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \left(\frac{1}{h_l} - \frac{1}{2h_l\rho_p} \right) - & -\frac{in}{\rho_p^2} (3\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \\ -\frac{-\mu_{*(l)0}h_l^2}{\rho_p^2} & -\mu_{*(l)0} \left(\frac{2}{h_l^2} - \frac{1}{\rho_p^2} \right) - \\ \frac{in}{\rho_p^2} (3\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) & -\frac{h_l^2}{\rho_p^2} (\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \end{pmatrix};$$

$$L_{(l)p}^+ = \begin{pmatrix} (2\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \left(\frac{1}{h_l} - \frac{1}{2h_l\rho_p} \right) & \frac{in}{2h_l\rho_p} (\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) \\ -\frac{in}{2h_l\rho_p} (\mu_{*(l)0} + \lambda_{*(l)0}) & \mu_{*(l)0} \left(\frac{1}{h_l} - \frac{1}{2h_l\rho_p} \right) \end{pmatrix};$$

$$G_{(l)p} = \left(\bar{\Phi}_{\rho^{(l),n;pq}}^{(i)} \quad \bar{\Phi}_{\varphi^{(l),n;pq}}^{(i)} \right), \quad p = \overline{2, N_l - 1}, \quad (l = 1, 2);$$

$$L_{(1)N_1}^- = \begin{pmatrix} -2\mu_{*(1)0} + \lambda_{*(1)0} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_{*(1)0}}{h_1} \end{pmatrix};$$

$$L_{(1)N_1}^0 = \begin{pmatrix} (2\mu_{*(1)0} + \lambda_{*(1)0}) \frac{1}{h_1} + \frac{in}{R_1} \lambda_{*(1)0} & -\frac{in}{R_1} \lambda_{*(1)0} \\ \mu_{*(1)0} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{R_1} \right) & \frac{in}{R_1} \mu_{*(1)0} \end{pmatrix};$$

$$L_{(2)0}^0 = \begin{pmatrix} (2\mu_{*(2)0} + \lambda_{*(2)0}) \frac{1}{h_2} + \frac{in}{R_1} \lambda_{*(2)0} & -\frac{in}{R_1} \lambda_{*(1)0} \\ \mu_{*(2)0} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{R_1} \right) & \frac{in}{R_1} \mu_{*(2)0} \end{pmatrix};$$

$$L_{(2)0}^+ = \begin{pmatrix} (2\mu_{*(2)0} + \lambda_{*(2)0}) \frac{1}{h_2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_{*(2)0}}{h_2} \end{pmatrix}; \quad G_{(1)N_1} = \left(\bar{P}_{3(1),n}^{(i)} \quad \bar{P}_{4(1),n}^{(i)} \right);$$

$$L_{(1)N_1+1}^0 = L_{(2)1}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad L_{(2)1}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_{(2)1} = (0 \ 0);$$

$$L_{(2)N_2}^0 = \begin{pmatrix} -(2\mu_{*(2)0} + \lambda_{*(2)0}) \frac{1}{h_2} + \frac{1}{R_2} \lambda_{*(2)0} & -\frac{in}{R_2} \lambda_{*(2)0} \\ -\mu_{*(2)0} \left(\frac{1}{h_2 - \frac{1}{R_2}} \right) & \frac{in}{R_2} \mu_{*(2)0} \end{pmatrix}$$

$$L_{(2)N_2}^- = \begin{pmatrix} -(2\mu_{*(2)0} + \lambda_{*(2)0}) \frac{1}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_{*(2)0}}{h_2} \end{pmatrix};$$

$$G_{(2)N_2} = \left(\bar{P}_{1(2),n}^{(i)} \quad \bar{P}_{2(2),n}^{(i)} \right);$$

Dla rozwiązania układu równań (3.125) stosujemy metodę przegnania macierzewego. Dlatego położymy

$$X_{(1)p-1} = A_{(1)p-1} X_{(1)p} + B_{(1)p-1}, \quad p = \overline{1, N_1 - 1}; \quad (3.126)$$

$$X_{(2)p+1} = A_{(2)p+1} X_{(2)p} + B_{(2)p+1}, \quad p = \overline{2, N_2}. \quad (3.127)$$

Wtedy dla wyznaczania współczynników przegnania $A_{(l)p}$ i $B_{(l)p}$ otrzymamy

$$A_{(1)1} = -(L_{(1)1}^0)^{-1} L_{(1)1}^+; \quad B_{(1)1} = -(L_{(1)1}^0)^{-1} G_{(1)1};$$

$$A_{(1)p} = -(L_{(1)p}^- A_{(1)p-1} + L_{(1)p}^0)^{-1} L_{(1)p}^+;$$

$$B_{(1)p} = (L_{(1)p}^- A_{(1)p-1} + L_{(1)p}^0)^{-1} (G_{(1)p} - L_{(1)p-1}^- B_{(1)p-1}); \quad p = \overline{1, N_1 - 1};$$

$$A_{(2)N_2} = -(L_{(2)N_2}^0)^{-1} L_{(1)1}^-; \quad B_{(2)N_2} = -(L_{(2)N_2}^0)^{-1} G_{(2)N_2};$$

$$A_{(2)p} = -(L_{(2)p}^- A_{(2)p+1} + L_{(2)p}^0)^{-1} L_{(1)p}^-;$$

$$B_{(2)p} = (L_{(2)p}^+ A_{(2)p+1} + L_{(1)p}^0)^{-1} (G_{(2)p} - L_{(2)p+1}^+ B_{(1)p+1}); \quad p = \overline{2, N_2 - 1}.$$

Wielkości $X_{(1)N_1}$ i $X_{(2)1}$ obliczamy z relacji

$$\begin{aligned} X_{(1)N_1} = X_{(2)1} = & (L_{(1)N_1}^- A_{(1)N_1-1} - (L_{(2)1}^0 A_{(2)2} - L_{(2)0})^{-1} \times \\ & \times (L_{(2)0}^0 B_{(2)2} - L_{(1)N_1}^- B_{(1)N_1-1}). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Zatem ze wzorów przegnania odwrotnego (3.126)–(3.127) odszukujemy wartości $X_{(l)p}$, ($p = \overline{1, N_l - 1}$), tzn. przemieszczenia we wszystkich węzłach wybranej siatki, i z wyrażeń (3.22) wykorzystując wzory różniczkowania numerycznego wyznaczamy naprężenia.

3.3. Rozwiązanie dla układu cylindrów współosiowych, rozdzielonych warstwą próżni

Rozwiązywane jest zagadnienie określenia stanu termomechanicznego układu, składającego się ze współosiowych cylindrów, rozdzielonych warstwą próżni. Na powierzchni zewnętrznej $\rho = R_3$ układu zadana jest wartość składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego

$$H_{z(3)}(\rho = R_3, \varphi, t) = H_{z0}(\varphi)e^{i\omega t}. \quad (3.129)$$

Między powierzchniami cylindrów $\rho = R_1$ i $\rho = R_2$ zachodzi wymiana ciepła przez promieniowanie, a na powierzchni zewnętrznej układu $\rho = R_3$ - przez konwekcję (z otoczeniem o temperaturze T_0). Cylindry są mechanicznie nie powiązane, a ich powierzchnie są nieobciążone.

3.3.1. Pole elektromagnetyczne i temperatura

W rozpatrywanym przypadku, zagadnienie (3.68)–(3.72) wyznaczania współczynników szeregów (3.66), (3.67) może być zapisane w następującej postaci

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k_l^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] \bar{H}_{z(l),n}^{(1;i)} = \bar{f}_{1(l),n}^{(i)}, \quad (l = 1, 2); \quad (3.130)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(k_l^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] \bar{H}_{z,n}^{(0;i)} = 0; \quad (3.131)$$

$$\frac{1}{\sigma_{e(l)0}} \frac{\partial \bar{H}_{z(l),n}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0} \frac{\partial \bar{H}_{z,n}^{(0;i)}}{\partial \rho} + \bar{f}_{2(l),n}^{(i)}; \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_{z(l),n}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \frac{\partial \bar{H}_{z,n}^{(0;i)}}{\partial \rho} \quad \text{przy} \quad \rho = R_l, \quad (l = 1, 2).$$

$$\frac{\partial \bar{H}_{z(l),n}^{(1;i)}}{\partial \rho} = \frac{1}{2i} H_{z0,n} \quad \text{przy} \quad \rho = R_3. \quad (3.133)$$

Rozwiązanie ogólne równań (3.130), (3.131) ma postać (3.73), (3.74), a rozwiązanie szczególne równania (3.130) (wyznaczone metodą wariacji stałych) — postać (3.75). Stałe $D_{(l),n}^{(1)}$, $D_{(l),n}^{(2)}$ ($l = 1, 2$) i $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$ w tych relacjach znajdujemy z układu równań algebraicznych, otrzymanym z warunków (3.132), (3.133) i warunku regularności rozwiązania przy $\rho = 0$. Układ ten zapiszemy w następującej postaci

$$\check{A}\bar{D} = \bar{B}, \quad (3.134)$$

gdzie

$$D = \left\{ D_{(1),n}^{(1)}, D_{(1),n}^{(2)}, E_n^{(1)}, E_n^{(2)}, D_{(2),n}^{(1)}, D_{(2),n}^{(2)} \right\},$$

\check{A} — macierz z elementami:

$$A_{11} = 0; \quad A_{12} = 1; \quad A_{13} = A_{14} = A_{15} = A_{16} = 0;$$

$$A_{21} = J_n(k_1 R_1); \quad A_{22} = N_n(k_1 R_1); \quad A_{23} = J_n(k_0 R_1);$$

$$A_{24} = N_n(k_0 R_1); \quad A_{25} = A_{26} = 0;$$

$$A_{31} = \frac{k_1}{\sigma_{e(1)0}} [J_{n-1}(k_1 R_1) - J_{n+1}(k_1 R_1)];$$

$$A_{32} = \frac{k_1}{\sigma_{e(1)0}} [N_{n-1}(k_1 R_1) - N_{n+1}(k_1 R_1)];$$

$$A_{33} = \frac{k_0}{i\omega\varepsilon_0} [J_{n-1}(k_0 R_1) - J_{n+1}(k_0 R_1)];$$

$$A_{34} = \frac{k_0}{i\omega\varepsilon_0} [N_{n-1}(k_0 R_1) - N_{n+1}(k_0 R_1)];$$

$$A_{35} = A_{36} = A_{41} = A_{42} = 0;$$

$$A_{43} = \frac{k_0}{i\omega\varepsilon_0} [J_{n-1}(k_0 R_2) - J_{n+1}(k_0 R_2)];$$

$$A_{44} = \frac{k_0}{i\omega\varepsilon_0} [N_{n-1}(k_0 R_2) - N_{n+1}(k_0 R_2)];$$

$$A_{45} = \frac{k_2}{\sigma_{e(2)0}} [J_{n-1}(k_2 R_2) - J_{n+1}(k_2 R_2)];$$

$$A_{46} = \frac{k_2}{\sigma_{e(2)0}} [N_{n-1}(k_2 R_2) - N_{n+1}(k_2 R_2)];$$

$$A_{51} = A_{52} = 0; \quad A_{53} = J_n(k_0 R_2); \quad A_{54} = N_n(k_0 R_2);$$

$$A_{55} = J_n(k_2 R_2); \quad A_{56} = N_n(k_2 R_2);$$

$$A_{61} = A_{62} = A_{63} = A_{64} = 0; \quad A_{65} = J_n(k_2 R_3); \quad A_{66} = N_n(k_2 R_3);$$

a \bar{B} — wektor prawych części, równych

$$B_1 = 0; \quad B_2 = \left(H_{z(1)\text{szcz},n}^{(1;i)} \right) \Big|_{\rho=R_1};$$

$$B_3 = \left[\bar{f}_{2(1),n}^{(i)} - \left(\frac{\partial H_{z(1)\text{szcz},n}^{(1;i)}}{\partial \rho} \right) \right] \Big|_{\rho=R_1};$$

$$B_4 = \left[\bar{f}_{5(1),n}^{(i)} - \left(\frac{\partial H_{z(2)szcz,n}^{(1;i)}}{\partial \rho} \right) \right] \Big|_{\rho=R_2};$$

$$B_5 = \left(H_{z(2)szcz,n}^{(1;i)} \right) \Big|_{\rho=R_2};$$

$$B_6 = \left(\frac{1}{2i} H_{z0,n} - H_{z(2)szcz,n}^{(1;i)} \right) \Big|_{\rho=R_3}.$$

Zagadnienie (3.81) – (3.83) wyznaczenia współczynników $T_{(l),n}^{(i)}$ ($l = 1, 2$) szeregu (3.79) funkcji $T^{(l)}$ w iteracjach zapiszemy w postaci

$$\lambda_{(l)0} \nabla^2 T_{(l),n}^{(i)} + Q_{*(l),n}^{(i)} - c_{V(l)0} \frac{\partial T_{(l),n}^{(i)}}{\partial t} = \mathcal{P}_{*(l),n}^{(i)}, \quad (l = 1, 2); \quad (3.135)$$

$$T_{(l),n}^{(i)} = T_{0(l),n} \quad \text{przy } t = 0, \quad (l = 1, 2); \quad (3.136)$$

$$T_{(1),n}^{(i)} = T_{(1)\text{pov},n}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_1; \quad (3.137)$$

$$T_{(2),n}^{(i)} = T_{(2)\text{pov},n}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_2; \quad (3.138)$$

$$-\lambda_{(l)0} \frac{\partial T_{(2),n}^{(i)}}{\partial \rho} = H_*(T_{(2),n}^{(i)} - T_{0,n}) + \bar{f}_{z(2),n}^{(i)} \quad \text{przy } \rho = R_3. \quad (3.139)$$

Odpowiadające temu równaniu zagadnienie różnicowe ma postać

$$\lambda_{(1)0} \left(T_{(1),n;\rho\bar{\rho}}^{(i)} + \frac{1}{\rho_p} T_{(1),n;\bar{\rho}}^{(i)} - \frac{n^2}{\rho_p^2} T_{(1),n;pq}^{(i)} \right) + Q_{*(1),n;pq}^{(i)} =$$

$$= c_{V(1)0} T_{(2),n;\tau}^{(i)} + \mathcal{P}_{*(2),n;pq}^{(i)}, \quad (p = \overline{2, N_1 - 1}; \quad q = 2, 3, \dots); \quad (3.140)$$

$$T_{(1),n;p1}^{(i)} = T_{0(1),n;p}, \quad p = \overline{1, N_1}; \quad (3.141)$$

$$T_{(1),n;1q}^{(i)} = T_{(1),n;2q}^{(i)}; \quad T_{(1),n;N_1q}^{(i)} = T_{(1)\text{pov},n;q}^{(i)}; \quad q = 2, 3, \dots \quad (3.142)$$

$$\lambda_{(2)0} \left(T_{(2),n;\rho\bar{\rho}}^{(i)} + \frac{1}{\rho_p} T_{(2),n;\bar{\rho}}^{(i)} - \frac{n^2}{\rho_p^2} T_{(2),n;pq}^{(i)} \right) + Q_{*(2),n;pq}^{(i)} =$$

$$= c_{V(2)0} T_{(2),n;\tau}^{(i)} + \mathcal{P}_{*(2),n;pq}^{(i)}, \quad (p = \overline{2, N_2 - 1}; \quad q = 2, 3, \dots); \quad (3.143)$$

$$T_{(2),n;p1}^{(i)} = T_{0(2),n;p}, \quad p = \overline{1, N_2}; \quad (3.144)$$

$$T_{(2),n;N_1q}^{(i)} = T_{(2)\text{pov},n;q}^{(i)}; \quad (3.145)$$

$$\lambda_{(2)0} T_{(2),n;p}^{(i)} = H_* \left(T_{(2),n;N_2q}^{(i)} - T_{0,n;q} \right) + f_{7(2),n;pq} \quad q = 2, 3, \dots$$

Przyjmując wielkości $T_{(1)\text{pov},n;q}^{(i)}$ oraz $T_{(2)\text{pov},n;q}^{(i)}$ jako znane na warstwie czasowej (q), układy równań algebraicznych (3.140)–(3.142) względem wielkości $T_{(1),n;pq}^{(i)}$, ($p = \overline{1, N_1}$) i (3.143)–(3.145) względem $T_{(2),n;pq}^{(i)}$, ($p = \overline{1, N_2}$) rozwiązujemy z wykorzystaniem metody przegniania. Przy tym zgodnie ze wzorami (3.118)–(3.120) obliczamy współczynniki $A_{(1),n;p}^{(i)}$; $B_{(1),n;p}^{(i)}$ ($p = \overline{1, N_1}$) oraz $A_{(2),n;p}^{(i)}$; $B_{(2),n;p}^{(i)}$, ($p = \overline{1, N_2}$).

Układ równań (3.93)–(3.97) dla wyznaczania wartości $T_{(l)\text{pov},n;q}^{(i)}$, ($l = 1, 2$) w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_{(1)0}U_{(1),n}^{(i)} + \frac{2\epsilon_1(1-\epsilon_1)\lambda_{(2)0}}{\epsilon_2} \sum_{m=0}^M U_{(2),m}^{(i)} L_{S-S',m,n} = \\
 & = \epsilon_1\sigma_0 Z_{(1),n}^{(i)} - 2\epsilon_1\sigma_0 \sum_{m=0}^M Z_{(2),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}; \\
 & -\lambda_{(2)0}U_{(2),n}^{(i)} + \frac{2\epsilon_2(1-\epsilon_1)\lambda_{(1)0}}{\epsilon_1} \sum_{m=0}^M U_{(1),m}^{(i)} L_{S-S',m,n} + \quad (3.146)
 \end{aligned}$$

$$2(1-\epsilon_2) \sum_{m=0}^M U_{(2),m}^{(i)} L_{S-S',m,n} = \epsilon_2\sigma_0 Z_{(2),n}^{(i)} -$$

$$2\epsilon_2\sigma_0 \left[\sum_{m=0}^M Z_{(1),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(1)} + \sum_{m=0}^M Z_{(2),m}^{(i)} L_{S-S',m,n}^{(2)} \right] + f_{5(l),n}^{(i)},$$

gdzie

$$U_{(1),n}^{(i)} = \frac{1}{h_1} \left[T_{(1)\text{pov},n;q}^{(i)} - \left(A_{(1),n;N_1-1}^{(i)} T_{(1)\text{pov},n;q}^{(i)} + B_{(1),n;N_1-1}^{(i)} \right) \right];$$

$$U_{(2),n}^{(i)} = \frac{1}{h_2} \left[\left(A_{(2),n;2}^{(i)} T_{(1)\text{pov},n;q}^{(i)} + B_{(1),n;2}^{(i)} \right) - T_{(2)\text{pov},n;q}^{(i)} \right];$$

$$Z_{(l),0} = Y_{(l)0}^2 + 2Y_{(l)1}Y_{(l)1}^* + 2Y_{(l)2}Y_{(l)2}^* + \dots + 2Y_{(l)M}Y_{(l)M}^*;$$

$$Z_{(l),1} = Y_{(l)0}Y_{(l)1} + Y_{(l)1}^*Y_{(l)2} + 2Y_{(l)2}^*Y_{(l)3} + \dots + Y_{(l)M-1}^*Y_{(l)M};$$

...

$$\begin{aligned}
 Y_{(l)0} &= (T_{(l)\text{pov},0;q}^{(i)})^2 + 2T_{(l)\text{pov},1;q}^{(i)} T_{(l)\text{pov},0;q}^{(i)*} + \dots + \\
 &+ 2T_{(l)\text{pov},M;q}^{(i)} T_{(l)\text{pov},M;q}^{(i)*};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{(l)0} &= T_{(l)\text{pov},0;q}^{(i)} T_{(l)\text{pov},1;q}^{(i)} + T_{(l)\text{pov},1;q}^{(i)*} T_{(l)\text{pov},2;q}^{(i)} + \dots + \\
 &+ T_{(l)\text{pov},M-1;q}^{(i)*} T_{(l)\text{pov},M;q}^{(i)};
 \end{aligned}$$

...

Układ równań (3.146) podobnie jak (2.44) rozwiązujemy z wykorzystaniem metody prostej iteracji.

3.3.2. Stan odkształcenia i naprężenia

W rozpatrywanym układzie cylindry są między sobą mechanicznie nie związane i swobodne od obciążenia mechanicznego. Dlatego stan naprężenia wynikający w każdym z nich wyznacza się niezależnie dla cylindra pełnego oraz wydrążonego. Rozwiązanie zagadnienia dla jednorodnego cylindra pełnego podano w rozdziale 2. Podamy analogiczne relacje dla wyznaczania naprężeń w cylindrze wydrążonym. Przy tym indeks (l), odpowiadający numerowi kolejnemu cylindra, opuszczamy.

W celu wyznaczania współczynników $u_{\rho,n}^{(i)}$, $u_{\varphi,n}^{(i)}$ szeregów (3.98), przyjdziemy w zagadnieniu (3.99)–(3.101) do układu równań postaci

$$\begin{aligned} & \mu_{*0} \left[\frac{\partial^2 u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{1+n^2}{\rho^2} u_{\rho,n}^{(i)} - \frac{2in}{\rho^2} u_{\varphi,n}^{(i)} \right] + \\ & + (\lambda_{*0} + \mu_{*0}) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(u_{\rho,n}^{(i)} + inu_{\varphi,n}^{(i)} \right) \right] = \bar{\Phi}_{\rho,n}^{(i)}; \\ & \mu_{*0} \left[\frac{\partial^2 u_{\varphi,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{1+n^2}{\rho^2} u_{\varphi,n}^{(i)} - \frac{2in}{\rho^2} u_{\rho,n}^{(i)} \right] + \\ & + (\lambda_{*0} + \mu_{*0}) \frac{in}{\rho} \left[\frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(u_{\rho,n}^{(i)} + inu_{\varphi,n}^{(i)} \right) \right] = \bar{\Phi}_{\varphi,n}^{(i)}, \end{aligned} \quad (3.147)$$

zaś odpowiednie warunki brzegowe dla $\rho = R_1$ oraz $\rho = R_2$ będą

$$\begin{aligned} & (\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) \frac{\partial u_{\rho,n}^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{\lambda_{*0}}{\rho} \left(u_{\rho,n}^{(i)} - inu_{\varphi,n}^{(i)} \right) = \bar{P}_{1,n}^{(i)}; \\ & \frac{\partial u_{\varphi,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(u_{\rho,n}^{(i)} - inu_{\varphi,n}^{(i)} \right) = \bar{P}_{1,n}^{(i)}. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Aproksymując operatory różniczkowe w zagadnieniu (3.147) – (3.148) operatorami różnicowymi, otrzymamy następujący układ równań algebraicznych

$$L \cdot X = G, \quad (3.149)$$

gdzie

$$L = \begin{pmatrix} L_1^0 & L_1^+ & & & \\ L_2^- & L_2^0 & L_2^+ & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & L_N^- & L_N^0 & \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_N \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
X_p &= \left(u_{\rho,n;pq}^{(i)} \quad u_{\varphi,n;pq}^{(i)} \right)^T, \quad p = \overline{1, N}; \\
L_1^0 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_1}(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) + \frac{\lambda_{*0}}{R_1} & -\frac{in}{R_1}\lambda_{*0} \\ \frac{in}{R_1}\lambda_{*0} & -\mu_{*0}\left(1 + \frac{1}{R_1}\right) \end{pmatrix}; \\
L_1^+ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) & 0 \\ 0 & \frac{\mu_{*0}}{h_1} \end{pmatrix}; \quad G_1 = \begin{pmatrix} P_{1,n;pq} \\ P_{1,n;pq} \end{pmatrix}; \\
L_p^- &= \begin{pmatrix} (\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{2h_1\rho_p}\right) & -\frac{in}{2h_1\rho_p}(\lambda_{*0} + \mu_{*0}) \\ \frac{in}{2h_1\rho_p}(\lambda_{*0} + \mu_{*0}) & \mu_{*0}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{2h_1\rho_p}\right) \end{pmatrix}; \\
L_p^0 &= \begin{pmatrix} -(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})\left(\frac{2}{h_1^2} - \frac{1}{\rho_p^2}\right) - \frac{\mu_{*0}}{\rho_p^2} & -\frac{in}{2h_1\rho_p^2}(\lambda_{*0} + 3\mu_{*0}) \\ \frac{in}{2h_1\rho_p^2}(\lambda_{*0} + 3\mu_{*0}) & -\mu_{*0}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{\rho_p^2}\right) - \frac{n^2}{\rho_p^2}(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) \end{pmatrix}; \\
L_p^+ &= \begin{pmatrix} (\lambda_{*0} + 2\mu_{*0})\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{2h_1\rho_p}\right) & \frac{in}{2h_1\rho_p}(\lambda_{*0} + \mu_{*0}) \\ -\frac{in}{2h_1\rho_p}(\lambda_{*0} + \mu_{*0}) & \mu_{*0}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{2h_1\rho_p}\right) \end{pmatrix}; \\
G_p &= \left(\bar{\Phi}_{\rho,n;pq}^{(i)} \quad \bar{\Phi}_{\varphi,n;pq}^{(i)} \right)^T \quad p = \overline{2, N-1}; \\
L_N^- &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_1}(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_{*0}}{h_1} \end{pmatrix}; \\
L_N^0 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_1}(\lambda_{*0} + 2\mu_{*0}) & -\frac{in}{R_2}\lambda_{*0} \\ \mu_{*0}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{R_2}\right) & \frac{in}{R_2}\lambda_{*0} \end{pmatrix}; \quad G_N = \begin{pmatrix} \bar{P}_{1,n;Nq}^{(i)} \\ \bar{P}_{2,n;Nq}^{(i)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Do rozwiązania układu równań (3.149) stosujemy (podobnie jak do układu (2.49)), algorytm metody przegnięcia macierzowego, który określają relacje (2.50)–(2.52). Po wyznaczeniu przemieszczeń, naprężenia i odkształcenia określamy w każdym cylindrze ze wzorów analogicznych do otrzymanych przy rozpatrywaniu cylindra pełnego.

3.4. Obliczenia numeryczne

Niniejszy podrozdział przedstawia wyniki badań numerycznych stanu termomechanicznego układu współosiowych niemetalicznych przewodzących cylindrów, rozdzielonych warstwą próżni: pełnego wykonanego z *SiC* i zewnętrznego — z grafitu. Układ znajduje się pod wpływem jednorodnego harmonicznego pola elektromagnetycznego, zadanego wyrażeniem (3.1) przy $H_0 = const$ i częstotliwości $\omega = 3141s^{-1}$. Zewnętrzna powierzchnia układu $\rho = R_2$ jest izolowana cieplnie, a między powierzchniami $\rho = R_0$ i $\rho = R_1$ zachodzi wymiana ciepła przez promieniowanie. Powierzchnie te uważane za dyfuznie szare o współczynnikach emisji równych $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.85$. Cylindry są mechanicznie nie związane, a ich powierzchnie nie są poddane obciążeniu zewnętrznemu.

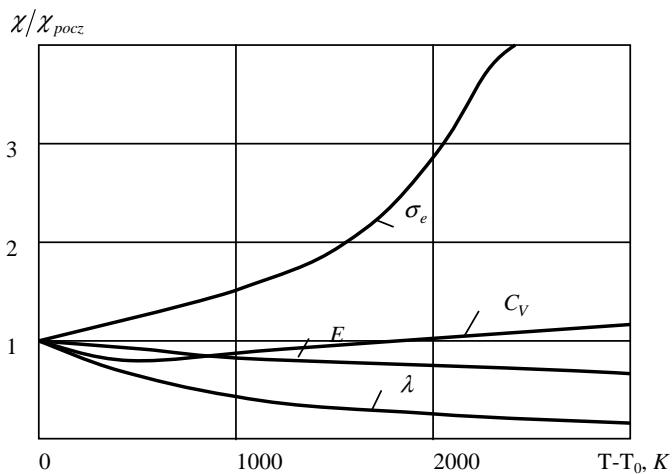
Początkowe wartości współczynnika przewodności elektrycznej σ_e , współczynnika przewodności cieplnej λ , pojemności cieplnej C_V , gęstości γ , modułu Younga E , współczynnika Poissona ν oraz współczynnika rozszerzalności cieplnej α_T wymienionych materiałów, przy temperaturze $T_0 = 293K$ przedstawia tabela 3.1. Rysunki 3.2 i 3.3 ilustrują względną zmianę (w stosunku do wartości przy temperaturze początkowej) wybranych współczynników materiałowych rozważanych materiałów od temperatury. Wielkości, które nie są pokazane na wykresach, zmieniają się z temperaturą nieznacznie i ich wartości przyjmowane są jako stałe.

Tablica 3.1. Wartości współczynników materiałowych przy temperaturze początkowej [101, 132, 150]

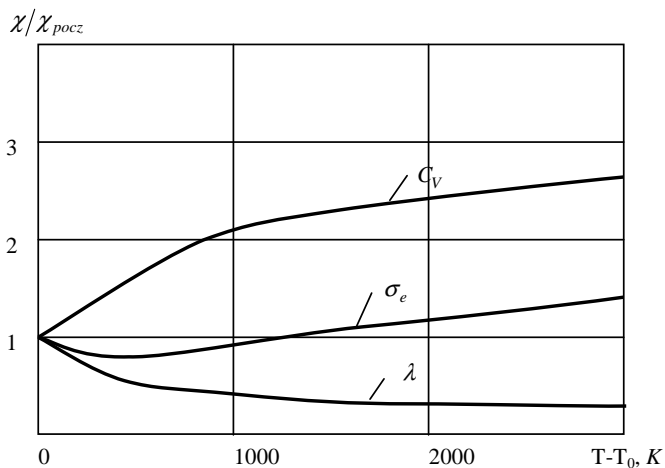
Współczynnik	<i>SiC</i>	Grafit
$\sigma_e, \text{ Ohm} \cdot \text{m}^{-1}$	1.88e4	9.5e4
$\lambda, \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{S})$	111.5	23
$C_V, \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{S})$	2.225e6	1.64e6
$\gamma, \text{ kg}/(\text{m}^3)$	1500	2000
$E \text{ N}/(\text{m}^2)$	39.4e10	6.1e10
ν	0.3	0.33
$\alpha_T, \text{ K}^{-1}$	4.7e-6	5.88e-6

Do przeprowadzenia obliczeń wykorzystane zostały algorytmy opracowane w rozdziale 2 oraz niniejszym rozdziale 3. Algorytmy te zostały zrealizowane w postaci zestawu programów komputerowych w języku algorytmicznym FORTRAN IV.

Celem przeprowadzenia obliczeń jest ilustracja proponowanego schematu obliczeniowego oraz ilościowa ocena wpływu na zmianę termomechanicznego stanu przewodników niemetalowych, poddanych oddziaływa-



Rysunek 3.2. Zmiana współczynników materiałowych dla SiC przy zmianie temperatury [132, 150]



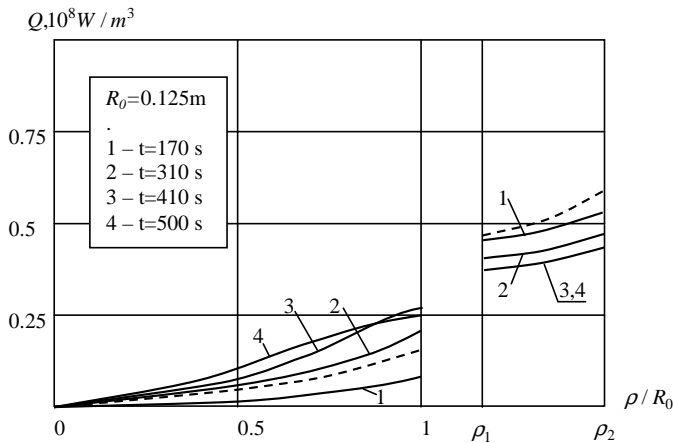
Rysunek 3.3. Zmiana współczynników materiałowych dla grafitu przy zmianie temperatury [132, 150]

niu kwaziustalonego pola elektromagnetycznego. Badano przy tym wpływ zmienności właściwości materiałowych od zmiany temperatury oraz wymiany ciepła promieniowaniem na zachodzące procesy termomechaniczne.

Wyniki obliczeń, przeprowadzonych dla przedstawionego układu ilustrują wykresy na rysunkach 3.4 – 3.13.

3.4.1. Uwzględnienie zależności właściwości materiału od temperatury

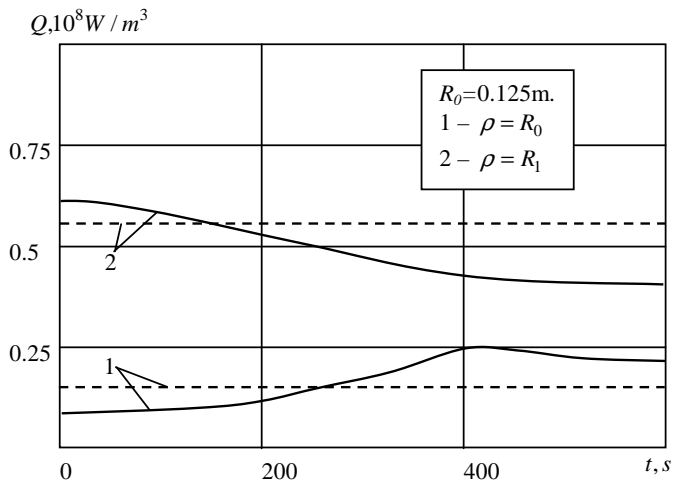
Rys. 3.4 pokazuje przy $H_0 = 2.0 \cdot 10^5 A/m$ zależność od radialnej współrzędnej *wydzielanego ciepła na skutek przepływu prądu* dla ustalonych chwil, a rys. 3.5 — od czasu dla ustalonych wartości ρ . Odpowiednie zależności temperatury w układzie, przedstawione są na rys. 3.6 i 3.7, a niezerowych składowych tensora naprężenia — na rys. 3.8 – 3.10. Dla porównania, na rys. 3.4 – 3.10 liniami przerywanymi pokazane zostały wymienione zależności przy stałych charakterystykach materiału, równych wartościom uśrednionym w rozważanym przedziale temperatur ($293K, 3000K$).



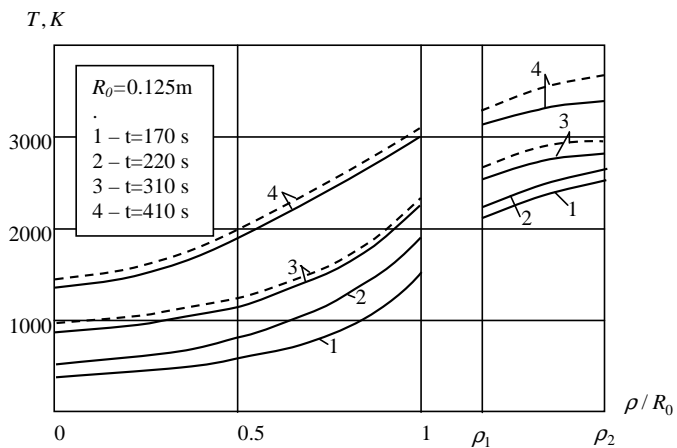
Rysunek 3.4. Rozkład względem współrzędnej przestrzennej gęstości mocy ciepła Joule'a

3.4.2. Uwzględnienie wymiany ciepła przez promieniowanie

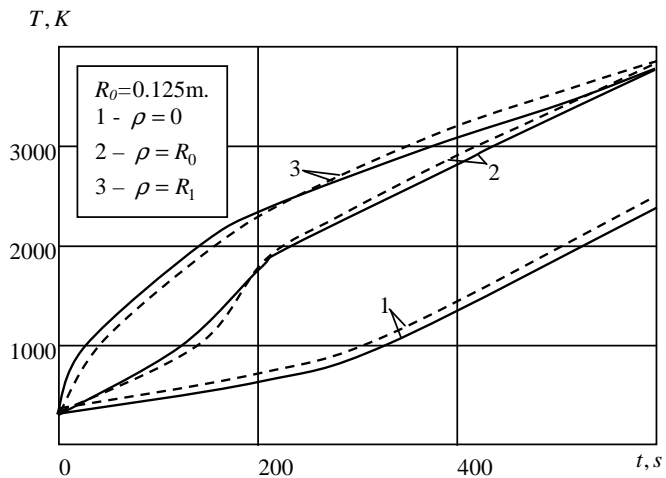
Wyniki obliczeń rozkładów ciepła Joule'a, temperatury i naprężeń, z uwzględnieniem wymiany ciepłej przez promieniowanie między powierzchniami $\rho = R_0$ i $\rho = R_1$ układu, podane są na rys. 3.11 – 3.13. Rys. 3.11 ilustruje przy $H_0 = 2.0e5 A/m$ rozkłady względem współrzędnej ρ gęstości



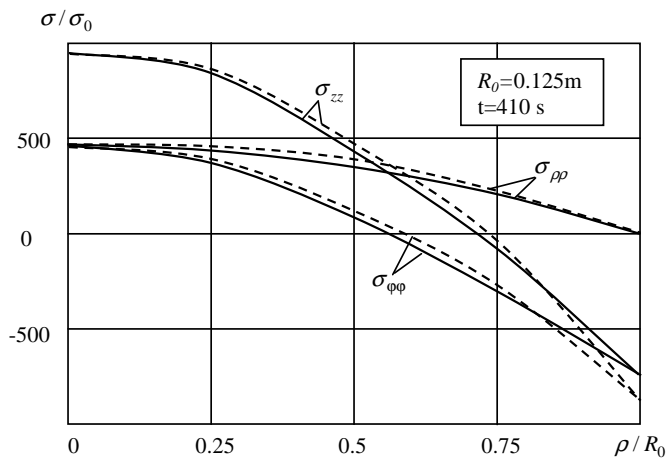
Rysunek 3.5. Zależności gęstości mocy ciepła Joule'a od czasu



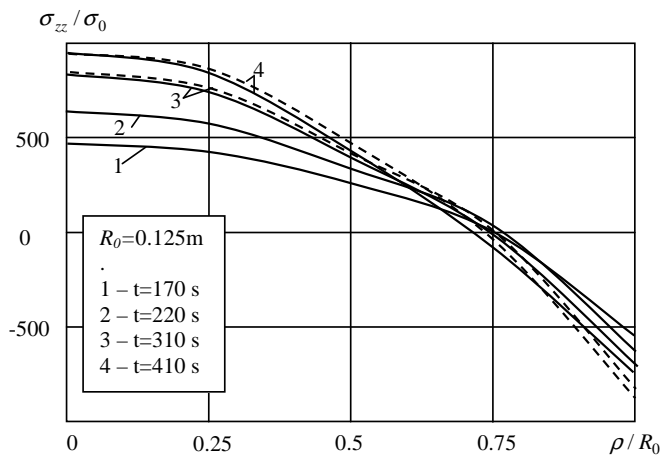
Rysunek 3.6. Rozkład względem współrzędnej przestrzennej temperatury



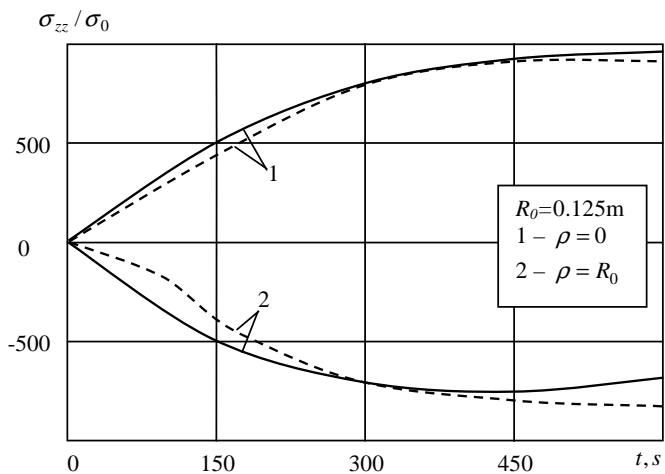
Rysunek 3.7. Zależności temperatury od czasu



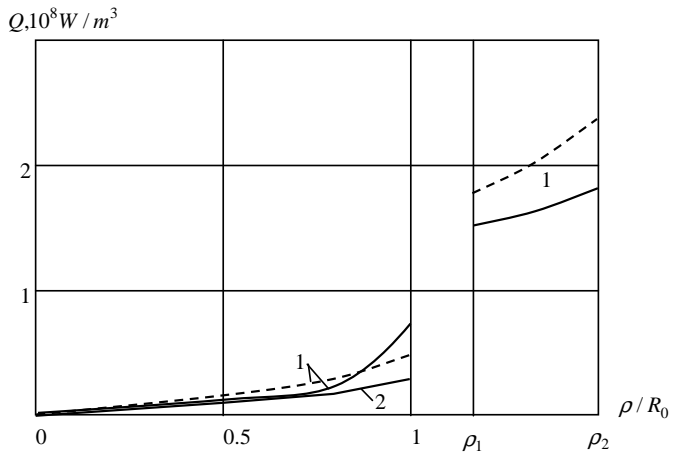
Rysunek 3.8. Rozkłady względem współrzędnej przestrzennej naprężeń



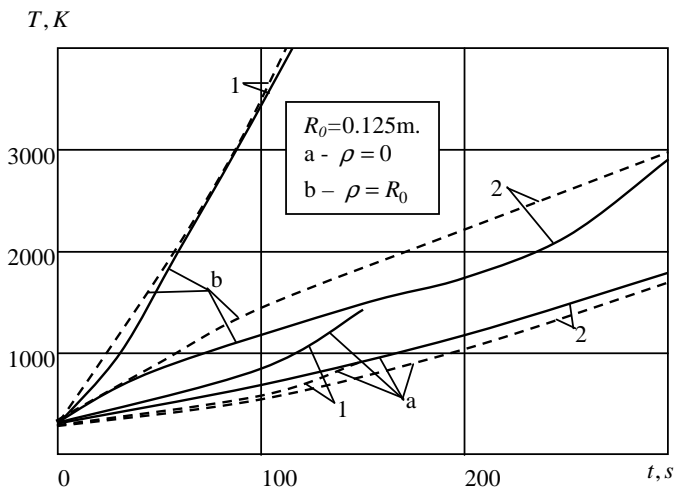
Rysunek 3.9. Rozkład względem współrzędnej przestrzennej naprężeń σ_{zz}



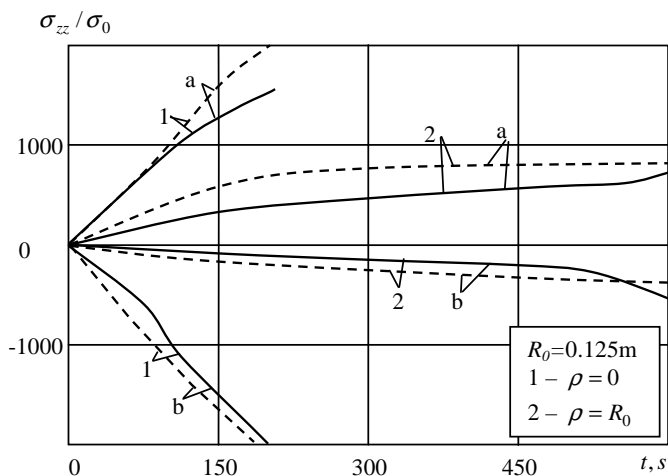
Rysunek 3.10. Zależności naprężeń σ_{zz} od czasu



Rysunek 3.11. Rozkład względem współrzędnej przestrzennej gęstości mocy ciepła Joule'a



Rysunek 3.12. Zależności temperatury od czasu



Rysunek 3.13. Zależności naprężeń σ_{zz} od czasu

mocy ciepła Joule'a, a rys. 3.12 oraz 3.13 zależności temperatury T i naprężeń σ_{zz} od czasu. Krzywe z numerem 1 odpowiadają układowi cylindrów, a krzywe 2 — jednemu izolowanemu cylindrowi. Liniami przerywanymi pokazane zostały odpowiednie rozkłady obliczone przy współczynnikach materiałowych równych wartościom uśrednionym w zakresie temperatur nagrzewania.

3.4.3. Analiza wyników obliczeń

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń przeanalizowano wpływ na stan naprężenia w układzie zarówno zmienności poszczególnych właściwości materiału wraz ze zmianą temperatury, tak i warunków wymiany ciepła z otoczeniem. Z dokonanej analizy wyników numerycznych rozwiązanego zagadnienia dla układu ciał cylindrycznych otrzymano:

- Skutkiem zmienności właściwości materiału jest zmiana w czasie wartości mocy wydzielanego ciepła Joule'a. Przy tym jego rozkład staje się bardziej nierównomierny. Jest to przyczyną zwiększenia gradientu pola temperatury oraz zwiększenia poziomu naprężeń. Największy wpływ na zwiększenie gradientu temperatury ma wzrost w czasie nagrzewania przewodności elektrycznej.
- Przy założeniu stałych wartości współczynników materiałowych otrzymuje się zawyżone wartości naprężeń na początkowym etapie działania pola elektromagnetycznego, a przy osiągnięciu zadanej temperatury —

zanizone. Przy tym dla rozpatrywanych materiałów czas osiągnięcia tej temperatury jest większy od rzeczywistego.

- Wymiana ciepła z otoczeniem przez promieniowanie na powierzchni zewnętrznej, prowadzi do zwiększenia wynikających naprężeń. Maksymalnego przyrostu przy tym doznają rozciągające naprężenia na powierzchni zewnętrznej układu.
- W procesie nagrzewania, kiedy temperatura powierzchni jest poniżej $1000K$, wymiana ciepła przez promieniowanie w rozważanym schemacie daje znikomy wpływ na osiągane przy tym naprężenia.
- Wymiana ciepła przez promieniowanie, zachodząca między sąsiadującymi powierzchniami cylindrów, prowadzi do zwiększenia gradientu temperatury i odpowiednio do zwiększenia naprężeń. Obecność zewnętrznego cylindra o większym współczynniku przewodności elektrycznej prowadzi do zmniejszenia czasu, potrzebnego do osiągnięcia zadanej temperatury. Jednak towarzyszy temu zwiększenie poziomu osiąganych naprężeń.

Przedstawiony schemat obliczeniowy może być wykorzystany do ilościowej oceny parametrów nagrzewania przy zbudowaniu efektywnych schematów obróbki termicznej elementów z niemetalowych przewodników elektrycznych z udziałem pola elektromagnetycznego. Z drugiej zaś strony pozwala on na oszacowanie warunków oddziaływania polem elektromagnetycznym przy pomiarach ważnych w zastosowaniach właściwości elektrycznych takich materiałów. Osiągnięcie żądanej dokładności przy pomiarach właściwości elektrycznych wymaga wyeliminowania innych wpływów na mierzone wielkości, w tym również od nagrzewania się i towarzyszących jemu naprężeń. Proponowane rozwiązanie modelowe umożliwia dokonanie oceny takiego wpływu.

Rozdział 4

Przewodność elektryczna materiałów wieloskładnikowych

Niniejszy rozdział poświęcony jest opracowaniu schematu pomiarowego przewodności elektrycznej w materiałach wieloskładnikowych. Opisano stanowisko badawcze właściwości elektrycznych twardniejących zaczynów cementowych. Przeprowadzone pomiary stanowią podstawę oceny zaawansowania procesu twardnienia takich materiałów.

4.1. Współczynnik przewodności elektrycznej

Jak wspomniano wyżej, przewodniki wieloskładnikowe, do których zaliczać będziemy również ośrodki porowate, różnią się zasadniczo mechanizmem przenoszenia ładunku elektrycznego. Przewodniki takie nazywane są przewodnikami II rodzaju, czy również przewodnikami jonowymi. W odróżnieniu od przewodników metalowych, ośrodki takie tworzą złożony układ składników o różniących się między sobą właściwościach. Między składnikami mają miejsce wzajemne oddziaływania, co przejawia się przede wszystkim w zachodzących w takich ciałach procesach fizykochemicznych, cieplnych oraz mechanicznych [5, 81, 91]. W ośrodku takim również odbywają się przemiany strukturalne. Przejawia się proces ten jako twardnienie materiału.

W stanie wyjściowym materiał początkowo wykazuje właściwości cieczy lepkiej, i stopniowo powstaje w nim struktura szkieletu o malejącej porowatości i coraz wyraźniejszych właściwościach ciała stałego. Proces ten jest nazywany zwykle procesem wiązania i twardnienia (ang. *setting and hardening*) materiału porowatego. Tworzy się przy tym nieruchoma matryca fazy stałej z rozwiniętą siecią porów. Zarówno w porach, jak i na powierzchni podziału przestrzeni porowej i matrycy zachodzą procesy wymiany masy, ładunku elektrycznego, energii oraz mechaniczne. Obecność w rozważanym układzie składników naładowanych elektrycznie jest przyczyną pojawienia się swobodnych nośników ładunku elektrycznego i materiały takie stają się przewodnikami elektryczności. Pod wpływem zewnętrznego pola elektromagnetycznego zachodzi w nich proces przenoszenia (transportu) ładunku

elektrycznego. Zmiana struktury ośrodka porowatego, której przejawem jest zmiana udziału objętościowego porów, spójności matrycy oraz przestrzeni porowej, udziału masowego poszczególnych składników i inne, mają wpływ na właściwości elektryczne, w tym także przewodnictwa elektrycznego. Z drugiej zaś strony, zmiany właściwości elektrycznych takich ośrodków są źródłem informacji o zachodzących w nich procesach przemian strukturalnych.

Jak już wspomniano w podrozdziale 1.2, przepływ prądu elektrycznego przez materiały będące przewodnikami elektrycznymi, charakteryzowany jest tzw. efektywnym współczynnikiem przewodnictwa właściwego σ_e będącego współczynnikiem proporcjonalności między natężeniem pola elektrycznego \mathbf{E} wywołującego przepływ prądu a gęstością strumienia \mathbf{j} przepływającego ładunku elektrycznego w prawie Ohma (1.9), którego słuszność dla przewodników pierwszego rodzaju (elektronowych) jest potwierdzona doświadczalnie.

Zasadniczo innym rodzajem przewodników elektryczności są przewodniki jonowe. Dla opisu właściwości elektrycznych w takich przewodnikach rozważa się ośrodek wieloskładnikowy, który jest mieszaniną składników: obojętnych elektrycznie o gęstości $\rho^{(0)}$ oraz n_1 , n_2 rodzajów składników (jonów) naładowanych dodatnio i ujemnie z udziałami masowymi $\rho^{\gamma+}$, $\rho^{\gamma-}$. Przy tym $\rho = \rho^{(0)} + \sum_{\gamma+=1}^{n_1} \rho^{\gamma+} + \sum_{\gamma-=1}^{n_2} \rho^{\gamma-}$ - jest gęstością rozważanej mieszaniny.

W rozważanym medium na składniki naładowane elektrycznie (jony) działa ze strony pola elektromagnetycznego siła objętościowa \mathbf{F} wyrażona następująco:

$$\rho^\alpha \mathbf{F}^\alpha = \rho^\alpha e^\alpha \mathbf{E} \quad (4.1)$$

która powoduje przyspieszony ruch składnika równoważony oporem środowiska ciekłego:

$$\rho^\alpha e^\alpha \mathbf{E} = \eta \mathbf{v}^\alpha \quad (4.2)$$

gdzie \mathbf{E} - natężenie pola elektrycznego, η - współczynnik oporu, zależny od lepkości cieczy, \mathbf{v}^α — średnia prędkość jonów rodzaju α . Dlatego możemy przyjąć, że średnia prędkość poruszania się jonów (zarówno dodatnich jak i ujemnych) jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego

$$\mathbf{v}^\alpha = u^\alpha \mathbf{E} \quad (4.3)$$

Współczynnik proporcjonalności u^α jest nazywany ruchliwością jonów [46]. Został on wprowadzony w elektrochemii i określa on zdolność składnika do przenoszenia ładunku elektrycznego. Przy tym

$$\mathbf{j}^\alpha = \rho^\alpha e^\alpha u^\alpha \mathbf{E} \quad (4.4)$$

jest strumieniem ładunku elektrycznego związanego z transportem składnika α . Sumaryczny strumień ładunku elektrycznego \mathbf{j} (prąd elektryczny) wyznaczmy jako sumę strumieni parcjalnych:

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} \mathbf{j}^{\alpha}, \quad \text{lub} \quad \mathbf{j} = \sum_{\gamma+} \rho^{\gamma+} e^{\gamma+} u^{\gamma+} \mathbf{E} + \sum_{\gamma-} \rho^{\gamma-} e^{\gamma-} u^{\gamma-} \mathbf{E} \quad (4.5)$$

Oznaczmy przez $e^{\gamma+}$ oraz $e^{\gamma-}$ ładunek elektryczny jednostki masy obecnych w ośrodku kationów oraz anionów. Możemy przy tym wprowadzić globalny współczynnik

$$\sigma_e = \sum_{\gamma+} \rho^{\gamma+} e^{\gamma+} u^{\gamma+} + \sum_{\gamma-} \rho^{\gamma-} e^{\gamma-} u^{\gamma-} \quad (4.6)$$

będący odpowiednikiem współczynnika przewodności elektrycznej dla rozważanego ośrodka wieloskładnikowego. Wielkość ta jest zależna od udziału masowego składników ośrodka oraz parametrów wyznaczających ich ruchliwość. Zatem w materiałach, będących wieloskładnikowymi przewodnikami elektryczności, mimo zasadniczo odmiennych mechanizmów przenoszenia ładunku elektrycznego, można wprowadzić wielkość σ_e , która cechuje przepływ prądu elektrycznego podobnie do prawa Ohma, stosowanego do opisu przewodności elektrycznej w przewodnikach I rodzaju.

4.2. Pomiar przewodności elektrycznej

Dla pomiaru właściwości elektrycznych materiałów, będących przewodnikami elektryczności, istnieje szereg technik, podstawowym elementem których jest obserwacja procesów zachodzących w próbce badanego materiału przy działaniu zewnętrznego pola elektromagnetycznego [52, 85]. Pole takie może być wywołane rozmaitymi sposobami, wśród których można wyszczególnić dwa podstawowe: kontaktowy oraz bezkontaktowy. Pierwszy sposób przewiduje podłączenie próbki badanego materiału do obwodu elektrycznego i obserwacji przepływającego prądu elektrycznego. Bezkontaktowa metoda pomiaru wykorzystuje próbkę umieszczoną w polu generowanym przez znane źródło i pośrednie wyznaczanie cech elektrycznych na podstawie efektu wynikowego działania takiego pola. I pierwszy, i drugi sposób mają wspólne cechy wynikające z konieczności ujęcia wpływu zewnętrznego oddziaływania elektromagnetycznego na materiał.

Przyłożenie do próbki różnicy potencjałów wywołuje powstanie w niej pola elektromagnetycznego. Naładowane elektrycznie składniki ośrodka na skutek działania na nie sił pochodzenia elektrycznego wprowadzane są w uporządkowany ruch i przez próbkę płynie prąd. Podstawą do wyznaczenia

oporności układu jest pomiar natężenia przepływającego prądu. Zastosowanie przy tym prądu stałego nie jest możliwe ze względu na proces elektrolizy próbki. Na elektrodach doprowadzających napięcie do próbki (powierzchnia kontaktowa) również zachodzi oddziaływanie polaryzacyjne z materiałem próbki. Wytwarza się siła elektromotoryczna na powierzchni kontaktu, która uniemożliwia dokładne pomiary przepływającego prądu. W pracach Hammonda i Robsona [33], Monfore'a [62], dotyczących pomiaru oporności próbek betonowych, wykorzystano źródło niskiego napięcia ze zmianą polarności dwa razy na sekundę. Problem obejścia wpływu efektów polaryzacyjnych rozwiązany został przez Hanssona [34], Hughesa [35] przez wprowadzenie funkcji ujmującej zależność przepływającego prądu od stosowanego napięcia. Przeprowadzane były pomiary z szeregiem niskich napięć (4, 6, 8 Volt) i analizowane ustalone przepływy prądu. W większości pomiarów stosowany jest obecnie przepływ prądu zmiennego, co pozwala minimalizować, a przy zastosowaniu wyższych częstości, wyeliminować wpływ efektów polaryzacyjnych.

Przewodniki wieloskładnikowe są strukturami niejednorodnymi, dlatego istotny wpływ na dokładność przeprowadzanego pomiaru ma kształt próbki oraz sposób włączenia jej w obwód elektryczny. Przy pomiarach wykorzystywane są próbki w kształcie pryzm, kostek, czy też cylindrów. Wybór kształtu próbki podyktowany jest łatwością podłączenia doprowadzających elektrod, zapewniający dobry kontakt elektryczny oraz możliwie najbardziej dokładne zapewnienie jednokierunkowego przepływu nośników elektryczności. Kontakt elektrod doprowadzających napięcie, ze względu na niejednorodność materiału, powinien zachodzić na możliwie dużej powierzchni. Z drugiej strony, wymóg jednokierunkowości przepływu prądu elektrycznego wymaga zmniejszenia pola przekroju poprzecznego próbek.

Elektrody doprowadzające, wykorzystywane w pomiarach, są również różnego typu. Najczęściej używane są miedziane, ale w niektórych przypadkach stosowane także elektrody stalowe lub z innych materiałów dobrze przewodzących. Pewny kontakt próbki z przewodnikiem doprowadzającym prąd zapewnia wykorzystanie farb lub past dobrze przewodzących prąd elektryczny. Elkey i Sellevold [20, 73] wykazali, iż wyniki pomiarów zależne są od ciągłości kontaktu między elektrodami i próbką.

4.3. Przewodność elektryczna materiałów cementowych

Opisowi technologii otrzymania cementowych materiałów budowlanych poświęcono wiele publikacji w literaturze naukowej i technicznej [28, 45, 66], w których przedstawiane badania wpływu poszczególnych składników, do-

datków, domieszek oraz warunków oddziaływania zewnętrznego na właściwości gotowych materiałów. Materiały cementowe w budownictwie wykorzystywane są bardzo szeroko i zatem zachodzi konieczność prowadzenia badań pozwalających głębiej poznać ich właściwości. Dużo uwagi w tych badaniach poświęcono opisowi przemian chemicznych oraz fizycznych i analizowany wpływ tych przemian na materiał końcowy. Pomiary właściwości elektrycznych takich materiałów są dodatkowym źródłem informacji o procesach fizycznych zachodzących w trakcie zabiegów technologicznych.

W cementowych materiałach budowlanych podstawowym składnikiem, który zapewnia utworzenie się szkieletu ciała stałego, jest cement. Cement jest mineralnym materiałem hydraulicznym, i po zmieszaniu z odpowiednią ilością wody zachodzi proces finalizowany tworzeniem się nierozpuszczalnych w wodzie związków, które łącząc się między sobą oraz ze składnikami wypełniacza, tworzą szkielet przyszłego elementu w fazie stałej. Znajomość zmiany w czasie przewodności elektrycznej materiału pozwala na ocenę postępu w tworzeniu się ciągłej struktury fazy stałej szkieletu.

Zasadę przeprowadzenia pomiaru przewodności elektrycznej zaczynów cementowych ilustruje rys. 4.1. Pojemnik z materiału izolacyjnego wypełniony jest badaną substancją. Napięcie wywoływane jest przez przyłożone do przeciwległych ścian elektrody, a następnie mierzone jest natężenie przepływającego prądu. Opór właściwy obliczany jest ze wzoru

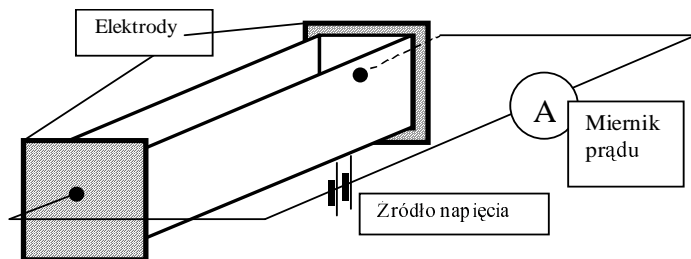
$$\rho = \frac{RA}{L}, \quad (4.7)$$

gdzie A - pole przekroju, L - długość próbki, U - napięcie, I - natężenie przepływającego prądu. Odwrotnością oporu jest przewodność elektryczna:

$$\sigma_e = \frac{1}{\rho} \quad (4.8)$$

W przyjętym układzie pomiarowym wielkość ta jest rozumiana jako opór sześcienu o jednostkowych wymiarach [85].

Pomiarowy obwód elektryczny zawiera generator zasilający (źródło napięcia) o regulowanej amplitudzie (0–20V) i częstotliwości (50Hz–100kHz). Elektrody doprowadzające umieszczone są na ściankach czołowych pojemnika w kształcie prostopadłościanu. W pojemniku tym umieszczona jest próbka badanego materiału. Natężenie przepływającego przez próbkę prądu elektrycznego mierzone jest za pomocą amperomierza cyfrowego, włączonego w obwód szeregowo i przekazywane do komputera dokonującego rejestracji mierzonej wielkości w równych (zadanych) odstępach czasu. Otrzymane zatem wartości, z wykorzystaniem zależności (4.7), przeliczane są na opór właściwy materiału oraz przewodność elektryczną właściwą zgodnie



Rysunek 4.1. Układ pomiarowy

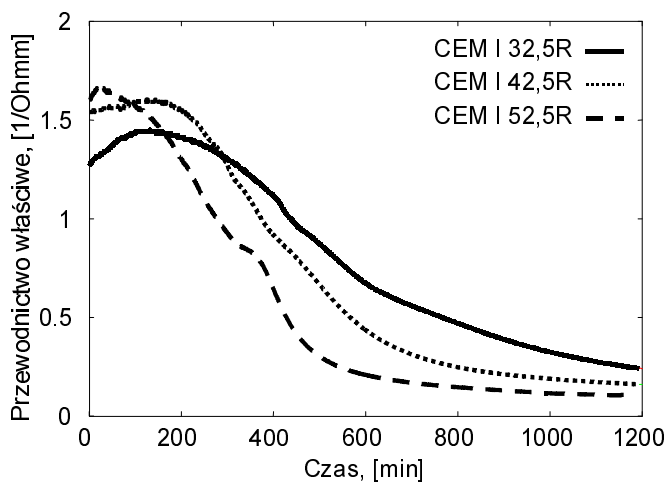
z wyrażeniem (4.8). Przy tym długość próbki wynosiła $L = 150\text{mm}$, szerokość i wysokość odpowiednio $a \times b = 38\text{mm} \times 30\text{mm}$.

Pojemnik, po umieszczeniu w nim próbki był szczelnie zamykany w celu uniknięcia odparowania wody zarobowej. Celem takiego zabiegu jest otrzymanie próbki materiału o możliwie najbardziej jednorodnych właściwościach. Kolejnym zabiegiem umożliwiającym porównanie wartości, otrzymanych z różnych pomiarów, było zapewnienie jednakowych warunków cieplnych. Zostało to osiągnięte przez umiejscowienie pojemnika z badanym materiałem w komorze do badań cieplnych, w której podtrzymywana była stała temperatura w czasie przeprowadzenia pomiaru.

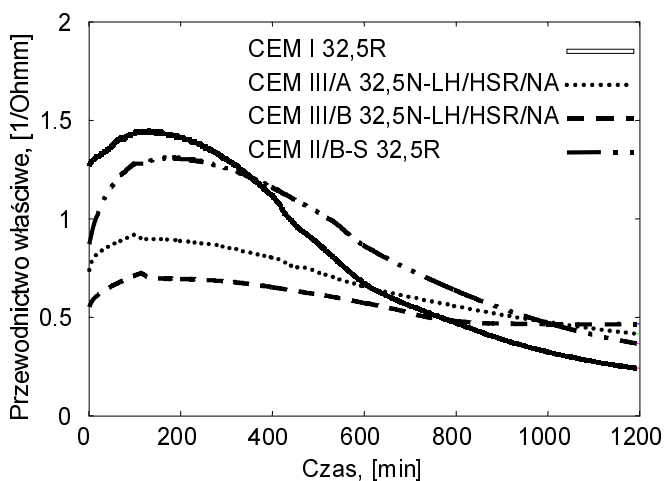
Wykonana, według proponowanego w poprzednim rozdziale schematu obliczeniowego, analiza procesów termomechanicznych, zachodzących w stosowanym układzie pomiarowym, wykazała znikomy wpływ działania pola elektromagnetycznego na zmiany temperatury, jej niejednorodność oraz stan naprężeń mechanicznych w próbce przy wybranych parametrach oddziaływania tego pola. Oddziaływania na próbki polem elektromagnetycznym okresowo zmiennym w czasie i wyeliminowanie wymiany jej masy z otoczeniem pozwoliło zapewnić jednokierunkowy przepływ prądu i utrzymanie w czasie pomiaru jednorodności struktury badanego materiału.

Próbki zaczynu cementowego otrzymano przez wymieszanie odważonych ilości cementu i wody w celu zapewnienia odpowiedniego w przeprowadzanym pomiarze wskaźnika wodno-cementowego. Pomiar zaczynał się zaraz po umieszczeniu otrzymanej mieszaniny w pojemniku i był przerywany po upływie około 100 godzin.

Pomiary przewodności elektrycznej przeprowadzone zostały dla zaczynów wykonanych z cementów portlandzkich CEM I oraz cementów z dodatkami żużla CEM II i CEM III. Zaczyny do pomiarów przygotowane zostały przy jednakowym współczynniku wodno-cementowym $W/C=0,35$. Dla każdego rodzaju cementu przeprowadzono pomiar dla serii co najmniej



Rysunek 4.2. Cementy portlandzkie



Rysunek 4.3. Cementy z dodatkami żużla

Tablica 4.1. Porównanie wyników pomiaru przewodności elektrycznej [1/Ohmm] zaczynów z różnych cementów

Cement	Przewodność początkowa	Przewodność maksymalna
CEM I 32,5R	1,23	1,35
CEM I 42,5R	1,29	1,47
CEM I 52,5R	1,55	1,63
CEM II/B-M (V-LL) 32,5R	0,86	1,21
CEM II/B-S 32,5 R	0,77	1,17
CEM II/ B-V 32,5 R	0,93	1,17
CEM II/ B-S 42,5 N	1,15	1,29
CEM III/A 32,5N-NA/HSR/LH	0,69	0,86
CEM III/A 42,5N-NA	0,81	0,95
CEM III/B 32,5N-NA/HSR/LH	0,61	0,74
Spoiwo żuźłowe	0,11	0,14

trzech próbek. Należy podkreślić dobrą powtarzalność uzyskanych wyników z odchyłkami nie przekraczającymi błędu przyrządów pomiarowych. Na rys. 4.2 przedstawiono wyniki zmian przewodności właściwej w czasie wiązania i twardnienia zaczynu z cementów portlandzkich CEM I w pierwszych 24 godzinach. Natomiast rys 4.3 ilustruje podobną zależność dla zaczynów cementowych wykonanych z cementów zawierających dodatek granulowanego żuźła wielkopieczowego (cement portlandzki żuźłowy CEM II/B-S 32,5R oraz cementy hutnicze CEM III/A,B 32,5N NA/HSR/LH).

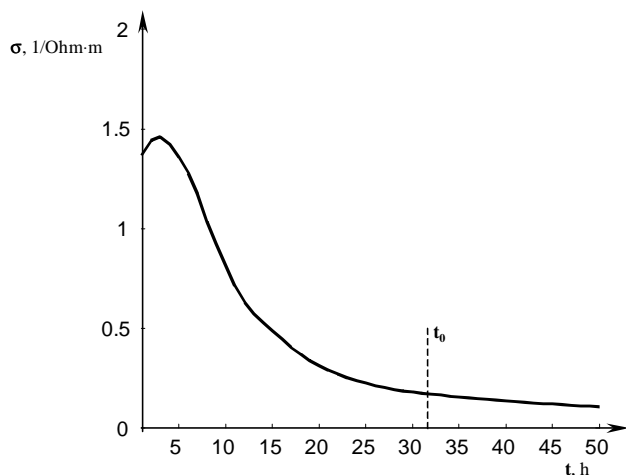
Zestawienie wyników pomiaru przewodności elektrycznej dla wszystkich badanych zaczynów cementowych, z różnymi rodzajami cementów, przedstawia tablica 4.1. W zestawieniu tym podano początkową przewodność elektryczną (od razu po uformowaniu) oraz osiągnięta w czasie pomiaru maksymalną wartość przewodności elektrycznej.

4.4. Ocena procesu twardnienia zaczynu cementowego

Do tworzenia modeli ujmujących mikrostrukturę materiału wykorzystywana jest teoria perkolacji [76]. Podstawową koncepcją tej teorii jest idea spójności. Struktury pewnego rodzaju są wbudowane w obszar istniejącego rdzenia. Teoria ta daje odpowiedź na pytanie: przy jakim udziale objętościowym pewien obszar zostanie wypełniony? Inna forma tego pytania brzmi: kiedy dla struktury wypełniającej pewien obszar w przypadkowy

sposób usuwane elementy powodują jej rozdzielenie? Próg perkolacyjny jest definiowany jako punkt zmiany spójności struktury.

W zastosowaniu do materiałów cementowych, podejście takie jest przydatne do ujęcia zmian właściwości materiału od wymieszania do tworzenia się finalnej struktury. Zaraz po wymieszaniu, składniki będące w fazie stałej w zaczynie cementowym, nie są połączone między sobą lub związki te są nietrwałe (tzw. połączenia kłaczkowate) i dlatego świeżo otrzymany materiał jest cieczą lepłą. Struktura fazy stałej jest budowana poprzez wzrost udziału nierozpuszczalnych produktów reakcji i w pewnej chwili osiągnana jest ciągłość, odpowiadająca utworzeniu się ciągłej struktury szkieletu materiału. Próg ten jest przyjmowany jako punkt stwardnienia materiału. Po stwardnieniu zaczynu cementowego następuje utrata ciągłości przestrzeni porowej, co ma wpływ na proces przenoszenia ładunku elektrycznego w materiale. Część przestrzeni porowej staje się zamknięta i zredukowane są drogi



Rysunek 4.4. Typowa zależność zmiany przewodności elektrycznej w czasie wiązania

przenoszenia dla takiego procesu. Kontynuacja utraty przestrzeni porowej doprowadza do stopniowej zamiany stosunkowo „szybkiego” transportu roztworu czy też jonów w względnie dużej przestrzeni porowej na „powolny” transport regulowany małymi porami żelowymi. W pracach Garboczego i Bentza [26, 27] dokonano cyfrowych symulacji wpływu porowatości na próg perkolacyjny dla zaczynów cementowych o różnych współczynnikach wodno-cementowych. Przy tym zakładano, że wypełnienie obszaru następuje wtedy, kiedy znikają połączone między sobą pory, tworzące ścieżki

w całej objętości. Okazało się, iż praktycznie dla wszystkich zaczynów o współczynniku wodno-cementowym poniżej 0,6 taki próg perkolacyjny istnieje. Przyjęto, na podstawie takich symulacji, że w przypadku współczynników wodno-cementowych powyżej 0,6-0,7 zawsze istnieje zwarty system porowy. Taki wynik jest w dobrej zgodności z danymi doświadczalnymi zarówno podanymi w literaturze [26], jak i otrzymanymi w pracy.

Typową zależność zmiany w czasie pomiaru przewodności elektrycznej zaczynu cementowego przedstawia wykres na rysunku 4.4. Od chwili uformowania próbki przewodność właściwa materiału rośnie, osiągając wartość maksymalną, po czym następuje jej stopniowe zmniejszenie, aż do osiągnięcia wielkości, charakterystycznej dla materiału stwardniałego. W materiale stwardniałym większość przestrzeni zajmuje nierozpuszczalny szkielet, który jest dobrym izolatorem. Zawartość cieczy porowej oraz ilość rozpuszczonych w niej składników znacznie obniża się, co jest przyczyną istotnego spadku przewodności elektrycznej zaczynu. Czas, oznaczony na rys. 4.4 jako t_0 , przy którym następuje obniżenie przewodności właściwej, jest przyjmowany jako czas utworzenia się spójnej struktury szkieletu materiału porowatego.

Uwagi końcowe

W pracy zaproponowano wariant opisu modelowego procesów termomechanicznych zachodzących w niemetalowych przewodnikach elektrycznych poddanych oddziaływaniu zewnętrznego, periodycznego w czasie pola elektromagnetycznego. Podstawowym celem takiego opisu było ujęcie sprzężonych procesów przenoszenia ładunku elektrycznego (przepływu prądu) i energii, oraz ich wpływu na procesy mechaniczne (odkształcenia, naprężenia). Cel ten został zrealizowany przez traktowanie pola elektromagnetycznego jako czynnika zewnętrznego powodującego powstanie w ciele (przewodniku elektrycznym) źródeł ciepła oraz sił ponderomotorycznych, które mają charakter działania objętościowego. Zbudowanie takiego modelu pozwoliło na zaproponowanie algorytmu obliczeniowego do wyznaczenia parametrów charakteryzujących wymienione procesy: natężenia pól elektrycznego oraz magnetycznego pola elektromagnetycznego, temperatury, odkształcenia i naprężenia mechanicznego.

Punktem wyjścia zaproponowanego opisu były równania fizyczne otrzymane z wykorzystaniem modelu fenomenologicznego porowatych ośrodków wieloskładnikowych [48, 59, 60, 77, 91]. Zostały przy tym sformułowane relacje elektrodynamiki, przewodności cieplnej oraz mechaniki, które przyjęto jako zależności wyjściowe dla poszukiwanych pól. Zakładano przy tym, że właściwości materiału cechują wielkości efektywne (otrzymane w wyniku uśrednienia przestrzennego). Po uzupełnieniu tych równań odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi otrzymano modelowe zagadnienie brzegowe.

Przy formułowaniu równań wyjściowych modelu uwzględniono zależność efektywnych właściwości ośrodka od temperatury oraz wzięto pod uwagę możliwą wymianę ciepła przez promieniowanie na powierzchni ciała. Przyjęto przy tym, że materiał nie ulega polaryzacji i namagnesowaniu. W takim podejściu zagadnienie wyjściowe sprowadzono do sprzężonego, nieliniowego układu równań elektrodynamiki i przewodnictwa cieplnego. Następnie wyznaczono stan mechaniczny ośrodka z równań termomechaniki, ze współczynnikami zależnymi od zmiennych przestrzennych.

W celu rozwiązywania otrzymanych nieliniowych zagadnień brzegowych zaproponowano metodę iteracyjną. W realizacji procesu iteracyjnego przedstawiono zależności współczynników materiałowych od temperatury jako sumę wartości średniej na rozpatrywanym interwale temperatur oraz odchylenia od tej wartości. Jako pierwsze przybliżenie wybierane jest tu rozwiązanie przy wielkościach średnich w przedziale rozważanych temperatur, a w następnych — odchylenia współczynników materiałowych obliczane po temperaturze wyliczonej z poprzedniego przybliżenia. Taka procedura prowadzi w każdej iteracji do kolejnego rozwiązywania niesprzężonych równań elektrodynamiki, przewodnictwa cieplnego oraz mechaniki.

Wraz z przyjęciem do rozważań zewnętrznego oddziaływania na ośrodek pola elektromagnetycznego o charakterze periodycznym w czasie, sformułowano równania wyjściowe względem zespolonych, wolno zmieniających się w czasie amplitud. Przy tym w równaniach elektrodynamiki za funkcje poszukiwane przyjmowano amplitudy nateżeń pól elektrycznego lub magnetycznego. Podobnie, jak w zagadnieniach dla przewodników o stałych współczynnikach materiałowych, pomijane są tu składowe periodyczne pól: termicznego i mechanicznego. Do rozwiązywania otrzymywanych w kolejnych przybliżeniach zagadnień brzegowych stosowano numeryczną metodę różnic skończonych, przy wykorzystaniu stabilnego, niejawnego schematu różnicowego.

Opracowany model obliczeniowy zastosowano do analizy termosprężystego stanu ciał cylindrycznych (cylinder jednorodny oraz układ współosiowych cylindrów, wykonanych z różnych materiałów). Analizowano przy tym z wykorzystaniem przyjętego modelu obliczeniowego zmiany poziomu wynikających naprężeń w elementach układu. Uwzględniono przy tym w schemacie obliczeniowym zmienność współczynników materiałowych od temperatury oraz wymianę ciepłą przez promieniowanie, zarówno z otoczeniem, jak i między sąsiadującymi powierzchniami cylindrów. Oszacowano przy tym dokładność przyjętej przybliżonej metody obliczeń.

Zaproponowany model opisu stanu termomechanicznego przewodników niemetalowych stanowi podstawę analizy wymienionych procesów przy doświadczalnym wyznaczaniu współczynnika przewodności elektrycznej materiału wieloskładnikowego. Przedstawione wyniki pomiaru przewodności elektrycznej zaczynów cementowych pozwoliły na powiązanie zmiany wartości przewodności elektrycznej w czasie wiązania i twardnienia materiału ze zmianami spójności struktury szkieletu fazy stałej. Zaproponowano na tej podstawie sposób oceny stanu zaawansowania procesu wiązania cementu.

Opracowany wariant teorii termomechaniki przewodników niemetalowych pozwala na uzyskanie rozwiązań nowych zagadnień elektromagneto-

termomechaniki, z uwzględnieniem zależności współczynników materiałowych od temperatury oraz osobliwości właściwości elektromagnetycznych przewodników niemetalowych i może być stosowany w szerokim zakresie częstotliwości oddziałujących na materiał zewnętrznego pola elektromagnetycznego.

Możliwe jest również przy tym wykorzystanie zaproponowanego modelu do opracowania racjonalnych (ze względu na nieprzekroczenie dopuszczalnych naprężeń) przebiegów obróbki cieplnej materiałów przewodzących wymienionego typu, z wykorzystaniem oddziaływania pola elektromagnetycznego.

Prezentowane obecnie w literaturze bardziej rozbudowane modele analizowanych zjawisk nie są często doprowadzone do postaci nadającej się do zbudowania efektywnych algorytmów obliczeniowych. Wynika to głównie z faktu, że parametry rozważanych procesów otrzymywane są przy wykorzystaniu złożonych układów równań fizyki matematycznej, zawierających równania różniczkowe cząstkowe różnych typów. Często dochodzi do tego brak danych eksperymentalnych o właściwościach materiałowych, szczególnie dla materiałów wieloskładnikowych. Zaproponowany w pracy model i wyniki badań wypełniają lukę w rozwiązywaniu tych problemów.

Przedstawiony model posiada również szereg ograniczeń co do możliwości jego zastosowania. Wspomnieć tu przede wszystkim należy o tym, że oparty jest on na bazie współczynników efektywnych. Postępowanie takie nie zawsze jest możliwe, szczególnie w materiałach o istotnych lokalnych niejednorodnościach, czy też przy dużych gradientach poszukiwanych pól, które mają miejsce przy oddziaływaniach niestacjonarnych czy przebiegach przejściowych. Również nie są uwzględnione w modelu możliwe przejścia fazowe, ze skokowymi zmianami właściwości materiału. Założeń modelowych dokonano z pominięciem szeregu innych efektów, które również ograniczają stosowalność teorii w przypadkach szczególnych.

Można przy tym wymienić niektóre kierunki rozszerzenia zakresu badań przeprowadzonych w pracy (nie wyczerpujące jednak przedstawionej problematyki):

- Zbudowanie, na podstawie zaproponowanego modelu, schematów obróbki cieplnej materiałów przewodzących oraz rozwinięcie teorii optymalizacji sprzężonych procesów elektromagnetycznych, temperaturowych i mechanicznych, przy zewnętrznych obciążeniach elektromagnetycznych; procedur optymalizacji takiej obróbki;
- Rozwinięcie teorii i metod rozwiązywania odpowiednich zagadnień brzegowych, opracowanie algorytmów i schematów obliczeniowych zorientowanych na rozwiązywanie nieklasycznych zagadnień termomechaniki

wieloskładnikowych ciał przewodzących, przy oddziaływaniach elektromagnetycznych szerszego zakresu częstotliwości oraz zagadnień niestacjonarnych (w tym oddziaływań impulsowych);

- Rozszerzenie zakresu doświadczalnych badań właściwości elektrycznych materiałów wieloskładnikowych, ze szczególnym uwzględnieniem zmienności ich struktury wewnętrznej i jej zmian w czasie.

Wydaje się jednak, że mimo wymienionych ograniczeń, propozycje przedstawione w niniejszej pracy stanowią pewne uzupełnienie wiedzy w dziedzinie modelowania stanu termomechanicznego przewodników niemetalowych przy oddziaływaniu na nie polem elektromagnetycznym.

Bibliografia

- [1] **Alblas J.B.:** *Electro-Magneto-Elasticity* Topics in Applied Continuum Mechanics / Ed. by J.L. Zeman and F. Ziegler. — Wien: Springer-Verlag, 1974. — P. 71 – 114.
- [2] **Alt H.W., Luckhaus S.:** *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Math.Z., 183 (1983), pp. 311 – 341.
- [3] **Archie, G.E.:** *The Electrical Resistivity Log as an Aid in Determining Some Reservoir Characteristics* Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, Vol. 146, 1942. p. 54 – 62.
- [4] **Atkins, E.R. and Smith, G.H.:** *The Significance of Particle Shape in Formation Resistivity Factor-Porosity Relationships* Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, Vol. 222, 1961. P. 285 – 291.
- [5] **Baranowski B.:** *Nierównowagowa termodynamika w chemii fizycznej* Warszawa: PWN, 1974.
- [6] **Bojczuk W.:** *Model obliczeniowy stanu termosprężystego przewodników elektrycznych w zewnętrznym polu elektromagnetycznym* Zeszyty naukowe WSI w Opolu Nr 198/1994. Budownictwo. Z. 37. S. 85 – 98.
- [7] **Bowen R.M.:** *Theory of mixtures // Continuum physics III* / Ed. by A.C. Eringen. — New York: Academic Press, 1976. — 127 p.
- [8] **Boychuk V.:** *Przepływy elektroosmotyczne w murach* Sbornik vedeckich prací V Konferencie "Aktualni problémy hornictví", VSB - T.U.Ostrava, 1997.
- [9] **Boychuk V.:** *Numeryczne rozwiązanie quasiliniowego zagadnienia początkowo-brzegowego dla równania typu parabolicznego* Zesz. Nauk. Politechniki Opolskiej, Ser.: Matematyka. Z.17, 2001, s. 113 – 118.
- [10] **Boychuk V.:** *Przepływ prądu elektrycznego przez zaczyny cementowe* Roczniki Inżynierii Budowlanej. Z. 4, 2004, s. 95 – 101.
- [11] **Boychuk V.:** *Wpływ przemian strukturalnych na własności elektryczne twardniejącego materiału cementowego* Materiały Polsko-Czeskiego Sympozjum Naukowo-Technicznego «Aktualne zagadnienia trwałości materiałów», Opole 31.03-1.04.2006, s. 133 – 136.
- [12] **Boychuk V., Bogdanowicz E.:** *Zagadnienie brzegowe dyfuzji w polu elektrycznym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej, Ser.: Matematyka, Fizyka, Chemia, z.16, nr kol. 259/2000, s. 94 – 101.

- [13] **Boychuk V., Giergiczny Z.** *Przewodność elektryczna świeżych zaczynów cementowych*, Mat. VII Sympozjum naukowo-technicznego: „Reologia w technologii betonu”, Gliwice, 2005, S. 107 – 112.
- [14] **Boychuk V., Kubik J.**: *Pomiar przewodności elektrycznej zaczynów cementowych*. IV Konferencja Naukowo-Techniczna: „Zagadnienia materiałowe w inżynierii lądowej MATBUD’2003”, 25-27 czerwca 2003, Kraków.
- [15] **Bojczuk W., Gaczkiewicz A., Sołodiak M.** *Model matematyczny termodyfuzji elektrolitów w ośrodku porowatym z udziałem pól mechanicznych* ZNPO, Ser.: Bud., z. 42, nr 239/98.
- [16] **Boychuk V., Solodiak M.**: *Thermal stresses in ferromagnetic conductor by acting of electromagnetic field*, 2nd International Conference on "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings", 16-17 Oktober 2003, Bratislava. P. 215 – 218.
- [17] **Chu L.J., Haus H.A., Penfield P.**: *The force density in polarizable and magnetizable fluids*, Proc. IEEE. — 1966. — Vol. 54, no 7. — P. 920 – 935.
- [18] **Coleman B.D.**: *Thermodynamics of materials with memory* // Arch. Rat. Mech. & Anal. — 1964. — Vol. 17, no 1. — P. 1 – 46.
- [19] **Coleman D., Gurtin M.E.**: *Thermodynamics with internal state variables* // J. Chem. Phys. — 1967. — Vol. 47, no 2. — P. 597 – 613.
- [20] **Elkey W., Sellevold E.J.**: *Electrical Resistivity of Concrete*, Norwegian Road Research Laboratory, Oslo, 1995 Publication No. 80.
- [21] **Eringen A.C., Maugin G.A.**: *Electrodynamics of continua*, Vol. 2. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 363 p.
- [22] **Fricke, H.**: *A Mathematical Treatment of the Electrical Conductivity and Capacity of Disperse Systems. The Electrical Conductivity of a Suspension of Homogeneous Spheroids*, Physics Review - Vol. 24, 1924. P. 678 – 681.
- [23] **Gaczkiewicz A., Kasperski Z.**: *Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących* — OW Politechnika Opolska, Studia i Monografie z. 110, 1999.
- [24] **Gachkewich A.R., Boichuk V.Ya.**: *Termomechanical behaviour of non-metallic electrical conductors during high-temperature treatment* Journal of Mathematical Sciences, 86 (1997), no. 2, Plenum Publishing Corporation. P. 2585 – 2589.
- [25] **Gachkewich A.R., Boichuk V.Ya.** *Initial-value Boundary Problems by Mathematical Modelling Thermomechanical Processes in Nonmetallic Electroconductive Bodies by Inductive Treatment* International Conference dedicated to J.P.Schauder Nonlinear Partial Differential Equations Łviv, 1999. P. 72.
- [26] **Garboczi E.J. and Bentz D.P.**: *The microstructure of cement-based materials: Computer simulation and percolation theory*, in Computational and Mathematical Models of Microstructural Evolution, edited by J.W. Bullard, L.-Q. Chen, R.K. Kalia, and A.M. Stoneham (Materials Research Society, Pittsburgh, 1998). P. 89 – 100.
- [27] **Garboczi E.J. and Bentz D.P.**: *Computer simulation of the diffusivity of cement based materials*, J. Mater. Sci. 27, (1992). P. 2083 – 2092.

- [28] **Giergiczny Z., Małolepszy J., Szwabowski J., Śliwiński J:** *Cementy z dodatkami mineralnymi w technologii betonów nowej generacji* Opole: Górażdże Cement, 2002. — 193 s.
- [29] **Gjorv O.E., Vennesland O., El-Busiady A.H.S:** *Electrical Resistivity of Concrete in the Oceans*, Proceedings – 9th Annual Offshore Technology Conference, Houston, Texas, May 2-5, 1977. P. 581 – 588.
- [30] **Grot R.A., Eringen A.C:** *Relativistic continuum mechanics. Part 1. Mechanics and thermodynamics; Part 2. Electromagnetic interactions with matter.* // Int. J. Eng. Sci. — 1966. — Vol. 4, no 6. — P. 611 – 638; 639 – 670.
- [31] **Hachkevych A., Boychuk V., Boychuk T:** *Thermomechanical Behaviour Of Electroconductive Layer Structures Under The Influence Of Electromagnetic Impulse*. III slovensko-polsko-czeske sympozium o mechanike s temou "Nelinearna mechanika", 3. Oktobra 2000. P. 217 – 220.
- [32] **Halamickova P., Detwiler R.J., Bentz D.P., Garboczi E.J:** *Water permeability and chloride ion diffusion in Portland cement mortars: relationship to sand content and critical pore diameter*. Cem. Concr. Res., 1995, 25. P. 790 – 802.
- [33] **Hammond, E. and Robson, T.D:** *Comparison of Electrical Properties of Various Cements and Concretes*, The Engineer, Vol. 199, No. 5156, pages. 78 to 80, January 21, 1955, and No. 5166, January 28, 1955. P. 114 – 115.
- [34] **Hansson I.L.H., Hansson C.M:** *Electrical resistivity measurement of Portland cement Based Materials*, Cement and Concrete Research, Vol. 13, No. 5, P. 675 – 683.
- [35] **Hughes B.P., Soleit A.K.O., Brierly R.W:** *New Technique for Determining the Electrical Resistivity of Concrete*, Magazine of Concrete Research, Vol. 37, No. 5, 1985. P. 133 – 243.
- [36] **Hunkeler, F:** *The Resistivity of Pore Water Solution – A Decisive Parameter of Rebar Corrosion and Repair Methods*, Construction and Building Materials, Vol. 10, No. 5, 1996. P. 381 – 389.
- [37] **Hutter K., Pao Y.H:** *A dynamical theory of magnetizable elastic solids with thermal and electrical conduction*. — J.Elast., 1974. — Vol. 4. P. 89 – 114.
- [38] **Hutter K., van de Ven A.A:** *Field-matter interaction in thermoelastic solids*. — Lecture Notes in Physics. — 88. — Berlin: Springer-Verlag, 1978. — 234 p.
- [39] **Hutter K:** *On thermodynamics and thermostatics of viscous thermoelastic solids in the electromagnetic fields. A Lagrangian formulation* — Arch. Rat. Mech. Anal, 1975. — Vol. 58. P. 339 – 368.
- [40] **Jackson P.D., Taylor-Smith D., and Stanford P.N:** *Resistivity-Porosity-Particle Shape Relationships for Marine Sands*, Geophysics, Vol. 43, 1978. P. 1250 – 1268.
- [41] **Jędrzejczyk-Kubik J., Bojczuk W:** *Zmiana własności dielektrycznych materiałów budowlanych w trakcie przemiany fazowej ZNPO*, Ser.: Bud. Z. 42, nr. 239/98.

- [42] **Kaliski S.**: *Equation of a combined electromagnetic, elastic and spin field and coupled drift-type amplification effects* — Proc. Vibr. Probl., 1963, 4, no 1. — P. 7 – 15.
- [43] **Kaliski S., Petykiewicz J.**: *Dynamical equations of motion coupled with the field of temperatures and resolving functions for elastic and inelastic anisotropic bodies in the magnetic field* — Proc. Vibr. Probl., 1960, 3, No 1.
- [44] **Keller, G.V.**: *Electrical properties of Rocks and Minerals*, Chapter 2 in Handbook of Physical Properties of Rocks, Vol. 1, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1982, P. 217 – 293.
- [45] **Kiernożycki W.**: *Betonowe konstrukcje masywne: Teoria, Wymiarowanie, Realizacja*. Kraków: Polski Cement, 2003. — 320 s.
- [46] **Koryta J., Dvorak J., Bohackova V.**: *Elektrochemia*. Warszawa: PWN, 1980.
- [47] **Kubik J.**: *Analogie i podobieństwo w liniowych ośrodkach odkształcalnych* — Gliwice: Wyd. Politechniki Śląskiej, 1975. — 98 s.
- [48] **Kubik J.**: *Thermodiffuzion flows in a solid with a dominant constituent* Mittailungen aus dem Institut fur Mechanik. Nr 44, Ruhr Universitat Bochum, 1985.
- [49] **Kubik J., Bojczuk W.**: *Przepływy jonowe w materiałach kapilarno-porowatych w zewnętrznym polu elektromagnetycznym* VI Konferencja naukowa „Fizyka budowy w praktyce”, Łódź, 1997.
- [50] **Landau L.D., Lifszic E.M.**: *Elektrodynamika ośrodków ciągłych* — PWN, Warszawa, 1960.
- [51] **Lebiedziejewski M.**: *Elektrody grafitowe*. — Katowice: Śląsk. — 1984.
- [52] **Lisowski M.**: *Pomiary rezystywności i przenikalności elektrycznej dielektryków stałych*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2004. — 239 s.
- [53] **Lorenzi H.G., Tiersten H.F.**: *On the interaction of the electromagnetic field with heat conducting deformable semiconductors* // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, no 4. — P. 938 – 957.
- [54] **Maruszewski B.**: *Dynamical magnetothermoelastic problem in circular cylinders: I Basic equations* // Int. J. Eng. Sci. — 1981. — Vol. 19. — P. 1233 – 1240.
- [55] **Maruszewski B.**: *Dynamical magnetothermoelastic problem in circular cylinders: II Thermal, magnetic and elastic fields* // Int. J. Eng. Sci. — 1981. — Vol. 19. — P. 1241 – 1253.
- [56] **Maruszewski B.**: *Termodynamiczne podstawy magnetotermodyfuzji i elektrotermodyfuzji w ośrodku ciągłym* Rozprawy. - Poznań: Pol. Poznanska, 1986. — 178 s.
- [57] **Maruszewski B.**: *Evolution equations of thermodiffusion in paramagnetics* // Int. J. Eng. Sci. — 1987. — Vol. 25. — P. 145 – 149.
- [58] **Maugin G.A.**: *Electromagnetic internal variables in electromagnetic continua*, Arch. Mech. — 1981. — 1981, Vol 33, No 1. — P. 927 – 936
- [59] **Maugin G.A. and Eringen A.C.**: *Deformable magnetizable saturated media. Part 1. Field equations*// J. Math. Phys. - 1972. - Vol. 13. - P. 143 – 155.

- [60] **Maugin G.A. and Eringen A.C.:** *Deformable magnetizable saturated media. Part 2. Constitutive theory*// J. Math. Phys. - 1972. - Vol. 13. - P. 1334 – 1347.
- [61] **Maxwell C.:** *Treatise on Elasticity and Magnetism*, Vol.1, Clarendon Press, Oxford, 1873.
- [62] **Monfore G.E.:** *The electrical resistivity of Concrete*, Journal of the RSA Research and Development Laboratories, Vol. 10, No. 2, P. 35 – 48.
- [63] **Moon F.C.:** *Problems in magneto-solids mechanics* Mechanics Today, 1978. P. 307 – 390.
- [64] **Moon F.C., Chattopadhyaya S.:** *Magnetically induced stress waves in a conduction solid — theory and experiment* Trans. ASME, J. Appl. Mech. Ser. E. — 1974, **41**, No 3. — P. 641 – 646.
- [65] **Müller I.:** *A new approach to thermodynamics of simple mixtures* // Z. Naturforsch. — A. — 1973. — Vol. 28, no 11. — P. 1801 – 1813.
- [66] **Newille A.M.:** *Właściwości betonu*. Kraków: Polski Cement, 2000.
- [67] **Nowacki W.:** *Efekty elektromagnetyczne w statycznych ciałach odkształcalnych* — Warszawa: PWN, 1983.
- [68] **Nowacki W.:** *Thermoelasticity*. — 2 ed. Warszawa: PWN – Pergamon Press, 1986. — 364 s.
- [69] **Nowacki W.:** *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości* — 2 ed. Warszawa: PWN, 1966.
- [70] **Pao Y.H.:** *Electromagnetic forces in deformable continua*// Mechanics Today / Ed. by S. Nemat-Nasser. — New York etc.: Pergamon press, 1978. — Vol. 1. — P. 209 – 305.
- [71] **Parkus H.:** *Magneto-thermoelasticity*, Udine–Wien–New York: Springer Verlag, 1972.
- [72] **Piątek Z.:** *Straty mocy Joule’a w przewodzie walcowym pochodzące od prądów wirowych indukowanych przez prąd płynący w przewodzie równoległym* Zesz. nauk. PSI Elec., 1981, No 75. — S. 151 – 157.
- [73] **Sellevoid E.J., Larsen C.K., Blankvoll A.A.:** *Moisture State of Concrete in a Coastal Bridge*, Preceedings Fourth CANMET/ACI International Conference on Concrete Durability, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 1997. — P. 825–833.
- [74] **Skeel R.D., Berzins M.:** *A method for the Spatial Discretization of parabolic Equations in One Space Variable*, SIAM Journal on Sci. And Stat. Computing. Vol. 11, 1990. - P. 1 – 32.
- [75] **Slawinski, A.:** *Conductibilite. d.un Electrolyte Content des Sphere Dielectriques*, Journal de Chimie Physique - Vol. 23 - (8)-(10), 1926, P. 710 – 727.
- [76] **Stauffer D.:** *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, London, 1985.
- [77] **Stefaniak J.:** *Wpływ pola elektromagnetycznego na termodyfuzję w ośrodku izotropowym*. Warszawa – Poznań: PWN, 1982.
- [78] **Sufczyński M.:** *Elektrodynamika*. Warszawa: PWN, 1980.
- [79] **Tamm N.E.:** *Foundations of the Theory of Elektriciry [in Russian]* — Moskwa: Nauka, 1976. — 616 s.

- [80] **Tiersten H.F.:** *Coupled magnetomechanical equations for magnetically saturated insulators*// J. Math. Phys.. — 1964. — Vol. 5. — P. 1298 – 1318.
- [81] **Torquato S.:** *Random heterogeneous media: Microstructure and improved bounds on effective properties*, Appl. Mech. Rev. 44, 1991. P. 37 – 76.
- [82] **Toupin R.A.:** *The elastic dielectrics*, J. Rational Mechanics and Analysis. — 1956. — Vol. 5. — P. 850 – 915.
- [83] **Toupin R.A.:** *A dynamical theory of elastic dielectrics*, Int.J.Eng.Sci. — 1963. — Vol. 1, No 1. — P. 101 – 126.
- [84] **Truesdell C., Toupin R.** *The classical field theories* // Handbuch der Physik/ Ed. by S Flugge. — Berlin etc., 1960. — Bd.III/1. — P. 226 – 793.
- [85] **Whiting, David A., and Nagi, Mohamad A.:** *Electrical Resistivity of Concrete-A Literature Review*, R&D Serial No. 2457, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, USA, 57 p.
- [86] **Whittington H.W., McCarter J., Forde M.C.:** *The Conduction of Electricity Through Concrete*, Magazine of Concrete Research, Vol. 33, No. 114, 1981. P. 48–60.
- [87] **Wilmański K.:** *Podstawy termodynamiki fenomenologicznej* Warszawa: PWN, 1974.
- [88] **Wilmański K.:** *Modele termodynamiczne ośrodków ciągłych* Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 1985.
- [89] **Wiśniewski S., Staniszewski B., Szymanik R.:** *Termodynamika procesów nierównowagowych* Warszawa: PWN, 1973.
- [90] **Witakowski P.:** *Termodynamiczna teoria dojrzewania: zastosowanie do konstrukcji masywnych z betonu* Politechnika Krakowska, z. nr 1, Kraków, 1998. — 204 s.
- [91] **Wyrwał J.:** *Termodynamiczne podstawy fizyki budowl* Opole, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2004.
- [92] **Young J.F.:** *A review of the pore structure of cement paste and concrete and its influence on permeability* In Permeability of concrete, ed. D.Whittig and A.Walitt, ACI SP-108, American Concrete Institute, Detroit, 1988.
- [93] **Zybura A.:** *Zabezpieczanie konstrukcji żelbetonowych metodami elektrochemicznymi*. Gliwice: Wyd. Politechniki Śląskiej, 2003. — 160 s.
- [94] **Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.:** *Магнитоупругость оболочек и пластин* — Москва: Наука, 1977. — 287 с.
- [95] **Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.:** *Спиновые волны* — М.: Наука, 1967. — 368 с.
- [96] **Беляев Н.М., Рядно А.А.:** *Методы теории теплопроводности* Ч.1. — М.: Высш. школа, 1982. — 327 с.
- [97] **Беляев Н.М., Рядно А.А.:** *Методы теории теплопроводности*. Ч.2. — М.: Высш. школа, 1982. — 304 с.
- [98] **Беляева И.Г., Бойчук В.Я., Гачкевич А.Р.:** *Термомеханическое поведение неметаллических электропроводных тел при высокотемпературной обработке* Мат.Методы и Физико-механические поля. 1996, № 39, С. 74 – 79.
- [99] **Березин И.С., Жидков Н.П.:** *Методы вычислений*: В 2-х т., т.1, М.: Наука, 1966. — 632 с.

- [100] **Березовский А.А.**: *Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела*. — Киев: Наук. думка, 1968. — 165 с.
- [101] **Богородский Н.П., Пасынков В.В., Тереев Б.М.**: *Электротехнические материалы*. — Л.: Энергия, 1977. — 352 с.
- [102] **Бойчук В.Я., Гачкевич А.Р., Пауков И.Ф., Фрейман Е.А.**: *Термические напряжения в неметаллических электропроводных телах при индукционном нагреве* //Механика неоднородных структур, Материалы 1 Всесоюзной конф. — Киев: Наук. думка, 1986. — С. 13 – 17.
- [103] **Бойчук В.Я., Гачкевич А.Р., Терлецкий Р.Ф.**: *Математическое моделирование термомеханического поведения системы коаксиальных цилиндров при теплообмене излучением* //Современные проблемы естествознания. Прикладные вопросы тепло- и массообмена. Тез. докл. VII Краснодарской краевой конференции. — Краснодар, 1986. — С. 94.
- [104] **Бойчук В.Я., Гачкевич А.Р., Терлецкий Р.Ф.**: *Термонапряженное состояние тел цилиндрической формы и пластин низкой электропроводности при внешних электромагнитных воздействиях* //III Всесоюзный симпозиум "Теоретические вопросы магнитоупругости Ереван, 17-21 сентября 1984 г.: Тез. докл. — Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. — С. 51 – 53.
- [105] **Боли Б., Уейнер Дж.**: *Теория температурных напряжений* — М.: Мир, 1964. — 517 с.
- [106] **Бурак Я.Й.**: *Уравнения электроупругости изотропного диэлектрика в электростатическом поле* — Физико-химическая механика материалов. — 1966. — т. 2, № 1. — С. 51 – 57.
- [107] **Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М.**: *Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах* — Київ: Наук. думка, 1978. — 232 с.
- [108] **Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Подстригач Я.С.**: *Исходные уравнения теории деформации неполяризованных электропроводных тел* //Избранные проблемы прикладной механики. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1974. — С. 167 – 178.
- [109] **Бурак Я.Й., Гачкевич А.Р.**: *О влиянии периодического во времени электромагнитного поля на температурные поля и напряжения в электропроводном слое* //Прикл. механика. — 1974. — 10, №7. — С. 42 – 48.
- [110] **Волков Е.А.**: *Численные методы*. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
- [111] **Гачкевич О.Р.**: *Математичні моделі термомеханіки здатних до намагнічення та поляризації електропровідних тіл при дії квазістателеного електромагнітного випромінювання* //Мат. методи и фіз.-мех. поля. — 1998, вип. 41, № 1 — С. 97 – 107.
- [112] **Гачкевич А.Р., Бойчук В.Я., Терлецкий Р.Ф.**: *Расчет температурного поля в многослойной цилиндрической системе при теплообмене излучением* //VI Всесоюзная конференция "Теплофизика технологических процессов 10-12 октября, Тез. докл., Ч.1 Теория и методы теплофизических расчетов и эксперимента. Теплофизика процессов абразивной обработки. — Ташкент: Изд-во ТашПИ, 1984. — С. 36.

- [113] Гачкевич А.Р., Бойчук В.Я.: *Термонапряженное состояние длинного цилиндра при нагреве тепловым излучением* // Прикл. механика. — 1987. — **23**, №4. — С. 18 – 23.
- [114] Гачкевич А.Р., Мусий Р.С.: *Температурные поля и термоупругое состояние электропроводных пластин при магнитном ударе* Математические методы и физико-механические поля. — 1978. — Вып. 7. — С. 115 – 118.
- [115] Гачкевич О., Мусий Р., Стасюк Г.: *Термопружний стан порожнистого металевого циліндра під час електромагнітної дії в режимі згасаної синусоїди* Фізико-хімічна механіка матеріалів. — 2003. № 5. — С. 67 – 72.
- [116] Годунов С.К., Рябенкий В.С.: *Разностные схемы (введение в теорию)*. М.: Наука, 1977. — 440 с.
- [117] Де Гроот С., Сатторп Л.: *Электродинамика* — Москва: Наука, 1982. — 560 с.
- [118] Де Гроот С., Мазур П.: *Неравновесная термодинамика* — Москва: Мир, 1964. — 456 с.
- [119] Зигель Р., Хауелл Дж.: *Теплообмен излучением* — М.: Мир, 1975. — 935 с.
- [120] Ильющин А.А.: *Механика сплошной среды* Москва: Издательство Московского Университета, 1978. — 287 с. — 392с.
- [121] Ильющин А.А.: *Пластичность. Основы математической теории* Москва: Издательство АН СССР, 1963. — 272 с.
- [122] Коваленко А.Д.: *Избранные труды*. — Киев: Наук. думка, 1976. — 764 с.
- [123] Коваленко А.Д.: *Термоупругость*. — Киев: Вища шк., 1976. — 216 с.
- [124] Коздоба Л.А.: *Решения нелинейных задач теплопроводности* — Киев: Наук. думка, 1976. — 136 с.
- [125] Колодий Б.И.: *Определение температурных полей и напряжений в полом цилиндра при индукционном нагреве* — Прикладная механика, 1969, т. 5, № 10. — С. 35 – 41.
- [126] Лебедев Н.Н.: *Температурные напряжения в теории упругости* — М.-Л.: ОНТИ, 1937. — 110 с.
- [127] Лионс Ж.-Л.: *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
- [128] Лыков А.В.: *Теория теплопроводности* — М.: Высш. шк., 1967. — 599 с.
- [129] Лыков А.В.: *Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности* //Изв. АН СССР. Эп. и трансп. — 1970, №5. — С. 109 – 118.
- [130] Марчук Г.И.: *Методы вычислительной математики* М.: Наука, 1981. — 416 с.
- [131] Марчук Г.И., Агошков В.И.: *Введение в проекционно-сеточные методы*. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
- [132] *Материалы для электротермических установок* /Под ред. Гутмана М.Б. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 296 с.

- [133] Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И.: *Основы и методы прикладной теории упругости. Учеб. пособие для вузов* — Киев: Вища школа, 1981. — 328 с.
- [134] Подстригач Я.С.: *Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя* — Инж.-физ. журн. — 1963. — 6, №10. — С. 129 — 136.
- [135] Підстригач Я.С., Бурак Я.Й.: *Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електромагнітних процесів.* //Вісн. АН УРСР. — 1970, №12. — С. 18 — 31.
- [136] Підстригач Я.С.: *Диференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла* //Доп. АН УРСР. — 1963, №3. — С. 336 — 340.
- [137] Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В.: *Термоупругость электропроводных тел* — Киев: Наук. думка, 1977. — 248 с.
- [138] Подстригач Я.С., Колодий Б.И.: *Температурные поля и напряжения при индукционном нагреве упругого слоя* //Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1970, вып. 10. — С. 208 — 214.
- [139] Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.: *Обобщенная термомеханика* — Киев: Наук. думка, 1976. — 312 с.
- [140] Родигин Н.М.: *Индукционный нагрев стальных изделий токами нормальной частоты.* — М.-Свердловск: Металлургиздат, 1950. — 248 с.
- [141] Самарский А.А.: *Теория разностных схем* — М.: Наука, 1977. — 656 с.
- [142] Самарский А.А., Гулин А.В.: *Устойчивость разностных схем* — М.: Наука, 1973. — 416 с.
- [143] Седов Л.И.: *Механика сплошной среды: в 2-х т. Т. 1* — М.: Наука, 1976. — 536 с.
- [144] Седов Л.И.: *Механика сплошной среды: в 2-х т. Т. 2* — М.: Наука, 1976. — 576 с.
- [145] Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П.: *Электродинамика* — Москва: Высшая школа, 1980. — 335 с.
- [146] Тихонов А.Н., Самарский А.А.: *Уравнения математической физики.* Москва: Наука, 1966.
- [147] Тозони О.В., Майергойз И.Д.: *Расчет трехмерных электромагнитных полей* — Киев: Техника, 1974. — 352 с.
- [148] Трауб Дж.: *Итерационные методы решения уравнений: Пер. с англ.* — М.: Мир, 1985. — 264 с.
- [149] Улитко А.Ф.: *Об определении коэффициентов электромеханической связи в задачах установившихся колебаний пьезокерамических тел* //Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1978, вып. 7. — С. 77 — 81.
- [150] Фиалков А.С.: *Технология и оборудование электроугольного производства.* — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1958. — 280 с.

PROCESY TERMOMECHANICZNE W PRZEWODNIKACH NIEMETALOWYCH PRZY ODDZIAŁYWANIU POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

W pracy zbudowano wariant modelu termomechaniki niemetalowych przewodników elektrycznych i zaproponowano metodologię badania sprzężonych procesów elektrofizycznych, cieplnych i mechanicznych w takich ciałach, spowodowanych wpływem zewnętrznego zmiennego w czasie, ustalonego lub kwaziustalonego pola elektromagnetycznego.

Do zbudowania własnego wariantu teorii termomechaniki przewodników niemetalowych w polu elektromagnetycznym wykorzystano znane modelowe podejścia do mechaniki mieszanin i mechaniki pól sprzężonych, w szczególności kontynualny model mieszaniny z dominującym składnikiem (szkieletem) w strukturze materiału. Dla sformułowania równań fizycznych wykorzystano wyniki modelowania fenomenologicznego. Zakłada się także w opisie badanych zjawisk, że właściwości materiału charakteryzowane są wartościami efektywnymi odpowiednich współczynników materiałowych.

Przy formułowaniu równań wyjściowych modelu uwzględniono zależności efektywnych wartości współczynników materiałowych od temperatury oraz wzięto pod uwagę możliwą wymianę ciepła przez promieniowanie. Przyjęto przy tym, że materiał nie ulega polaryzacji i namagnesowaniu. Proces odkształcania się uważany jest za kwazistatyczny.

Opracowany model obliczeniowy zastosowano do analizy termosprężystego stanu ciała cylindrycznego oraz układu współosiowych cylindrów, w okresowo zmiennym po czasie polu elektromagnetycznym. Realizowano przy tym algorytm obliczeniowy sformułowanych zagadnień oraz przeanalizowano wpływ zmienności właściwości materiału od temperatury oraz wymiany ciepłej promieniowaniem z otoczeniem na wynikające naprężenia mechaniczne w przewodniku. Przedstawiono również wyniki przeprowadzonych obliczeń dla układu dwóch współosiowych cylindrów rozdzielonych warstwą próżni.

Rozpatrywany model opisu termomechanicznego zachowania się dla przewodników niemetalowych z wykorzystaniem opracowanej metody rozwiązywania sformułowanych zagadnień brzegowych, pozwolił na ocenę wpływu oddziaływania pola elektromagnetycznego na stan termomechaniczny próbek przy pomiarach współczynnika przewodności elektrycznej. Przedstawiono wyniki pomiaru przewodności elektrycznej zaczynów cementowych i powiązanie zmiany w czasie wartości tej przewodności elektrycznej ze zmianami spójności struktury szkieletu fazy stałej. Zaproponowano na tej podstawie sposób oceny stanu zaawansowania procesu wiązania i twardnienia cementu.

TERMOMECHANICAL PROCESSES IN NON-METALLIC CONDUCTORS UNDER ACTION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

In this paper a variant of the model of thermomechanical behaviour description of the non-metallic conductors was built. The methodology for investigation of the conjugated electrophysical, heat transfer and mechanical processes caused by outer steady and quasi-steady electromagnetic field was proposed.

For the construction of the own variant of thermomechanical theory of the non-metallic conductors in electromagnetic field, known model approach for mechanics of mixtures and coupled fields was used; specifically continuum model of the mixture with dominant component (skeleton) in structure of the material was utilized. For the physical equation formulation the results of the phenomenological modelling were taken advantage of. In description of the investigated phenomena an assumption that material properties are characterised by effective coefficients was made.

When formulating the governing equation of the model, temperature dependency of effective material coefficients and possibility of the radiative heat exchange were taken into account. Polarization and magnetization processes were neglected. Deformation is considered to be quasi-static.

Elaborated calculation model for the thermomechanical analysis of the cylinder and co-axial cylinder system in time-periodical electromagnetic field was utilized. The calculation algorithm for the formulated problems was brought about, and the influence of the variability of the material properties with temperature changes as well as the radiation heat transfer on mechanical stresses in conductor were analysed. Also the numerical results of the system of two co-axial cylinders divided by vacuum layer were presented.

Considered thermomechanical model for non-metallic conductors with using of methods for solving the formulated boundary-valued problems was admitted to estimate the influence of electromagnetic field acting to the specimens by electrical conductivity coefficient measurement. The results of such measurements for cement pastes and the variations of the conductivity coefficient in time caused by skeleton structure material changes were presented. The procedure of the estimation of advance setting and hardening processes of cement paste was proposed.