

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
INSTYTUT BUDOWNICTWA

**Praca statyczna zabytkowych,  
zakrzywionych konstrukcji ceglanych  
poddanych zabiegom naprawy  
i wzmacniania**

Raport serii PRE nr 3/08

**Łukasz Bednarz**

Praca doktorska

Promotor:

**dr hab. inż. Jerzy Jasieńko, prof. PWr**

Słowa kluczowe:

wzmacnianie, konstrukcje ceglane, łuki, sklepienia, kopuły, CFRP, FRCM, obiekty zabytkowe, rehabilitacja, konserwacja, połączenia klejowe, MES.

Wrocław, 2008



Dziękuję wszystkim, którzy przyczynili się do powstania tej pracy:

profesorowi Jerzemu Jasieńko,

doktorowi Arturowi Górskiemu,

doktorowi Ludomirowi Jankowskiemu,

doktorowi Piotrowi Rappowi,

Joannie, Piotrowi,

firmom Deitermann, VisBud, S&P, Doka za przekazanie materiałów do badań.

Podziękowania kieruje także do moich bliskich, a w szczególności do mojej żony Kasi,

za wsparcie i za cierpliwość.

Dziękuję również, a może przede wszystkim, średniowiecznym budowniczym katedr – za inspirację.



	Wykaz ważniejszych oznaczeń stosowanych w pracy .....	8
1.	WSTĘP .....	11
2.	CEL I ZAKRES, TEZY PRACY .....	14
2.1.	Cel pracy .....	14
2.2.	Zakres pracy .....	14
2.3.	Tezy pracy .....	14
3.	MODELOWANIE I ANALIZA PRACY STATYCZNEJ ZAKRZYWIONYCH, HISTORYCZNYCH KONSTRUKCJI CEGLANYCH W ŚWIETLE LITERATURY .....	16
3.1.	Wprowadzenie.....	16
3.2.	Łuki, sklepienia i kopuły .....	18
3.2.1.	Łuki .....	19
3.2.2.	Sklepienia i kopuły .....	20
3.3.	Podstawy analizy pracy konstrukcji .....	26
3.3.1.	Analiza liniowa.....	26
3.3.2.	Analiza nieliniowa.....	26
3.3.3.	Analiza metodą nośności granicznej .....	27
3.4.	Konstrukcje łuków, sklepień i kopuł – analityczne modele obliczeniowe .....	27
3.4.1.	Wzory empiryczne w obliczeniach łuków .....	28
3.4.2.	Metoda łańcuchowa.....	29
3.4.3.	Metoda liniowa.....	30
3.4.4.	Metoda optymalizacji przekroju.....	31
3.4.5.	Metoda Eddy’ego .....	31
3.4.6.	Metoda Wolfe’a.....	31
3.4.7.	Metoda łuków trójprzegubowych.....	32
3.4.8.	Metody obliczania sklepień kolebkowych .....	36
3.4.9.	Metody obliczania sklepień krzyżowo – żebrowych.....	39
3.4.10.	Metody obliczania kopuł obrotowych .....	47
3.4.11.	Metody obliczania kopuł wielościennych .....	49
3.5.	Metody naprawy i wzmacniania zakrzywionych ceglanych konstrukcji historycznych – badania laboratoryjne, przykłady .....	52
3.5.1.	Ściagi.....	52
3.5.2.	Powłoki żelbetowe .....	58
3.5.3.	Błachy i pręty stalowe doklejane i wklejane .....	62
3.5.4.	Konstrukcje drewniane umożliwiające podwieszenie żeber i wysklepek sklepień ceglanych.....	68
3.5.5.	Maty, taśmy i siatki z materiałów FRP .....	70
3.5.5.1.	Ogólne informacje o materiałach kompozytowych FRP.....	70
3.5.5.2.	Materiały kompozytowe FRP we wzmacnianiu zakrzywionych konstrukcji ceglanych ....	78
3.5.6.	Iniekcje, impregnacje, przemurowania.....	87
3.5.6.1.	Iniekcje i impregnacje .....	87
3.5.6.2.	Przemurowanie spekanych fragmentów łuków i sklepień .....	89
3.6.	Studia i badania oparte na analizie numerycznej.....	92
3.6.1.	Modelowanie materiału .....	95
3.6.1.1.	Mikromodel.....	96
3.6.1.2.	Makromodel .....	97
3.6.1.3.	Homogenizacja.....	97
3.6.2.	Modelowanie numeryczne murowych konstrukcji zakrzywionych .....	101
3.7.	Badania elastooptyczne .....	108
3.7.1.	Podstawy elastooptyki.....	109

## Spis treści

3.7.2.	Metoda elastooptycznej warstwy powierzchniowej.....	114
4.	BADANIA DOŚWIADCZALNE WŁASNE.....	117
4.1.	Wprowadzenie.....	117
4.2.	Cel i zakres badań.....	117
4.3.	Badania materiałów użytych do konstrukcji łuków (modeli badawczych) oraz elementów wzmacniających .....	117
4.3.1.	Opis stanowisk badawczych i urządzeń pomiarowych .....	118
4.3.2.	Badania cegły .....	119
4.3.2.1.	Oznaczenie wytrzymałości na ściskanie .....	120
4.3.3.	Badania zaprawy wapiennej BaunitBayosan Reinkalkputz RK 39.....	121
4.3.3.1.	Oznaczenie wytrzymałości na zginanie.....	121
4.3.3.2.	Oznaczenie wytrzymałości na ściskanie .....	122
4.3.4.	Badania siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10.....	123
4.3.4.1.	Oznaczenie wytrzymałości na rozciąganie.....	123
4.3.4.1.1.	Badania pojedynczej siatki o długości 500 mm i szerokości 100 mm .....	124
4.3.4.1.2.	Badania podwójnej siatki o długości 500 mm i szerokości 100 mm .....	126
4.3.4.1.3.	Badania podwójnej siatki o długości 500 mm i szerokości 100 mm (druga warstwa siatki zorientowana pod kątem $\pm 45^\circ$ w stosunku do poprzedniej).....	127
4.3.4.1.4.	Badania pojedynczej wiązki z siatki o długości 500 mm i szerokości 4 mm .....	128
4.3.5.	Badania zaprawy mineralnej Ruredil X Mesh M25 .....	130
4.3.5.1.	Oznaczenie wytrzymałość na zginanie.....	130
4.3.5.2.	Oznaczenie wytrzymałości na ściskanie .....	131
4.3.5.3.	Oznaczenie wytrzymałości na odrywanie zaprawy od cegły .....	133
4.3.5.4.	Oznaczenie wytrzymałości elementu murowego na ścinanie .....	135
4.3.6.	Badania taśm CFRP.....	136
4.3.7.	Badania kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 .....	138
4.3.7.1.	Oznaczanie wytrzymałości kompozycji klejowej na zginanie .....	138
4.3.7.2.	Oznaczanie wytrzymałości kompozycji klejowej na ściskanie .....	138
4.3.7.3.	Oznaczanie wytrzymałości kompozycji klejowej na ścinanie .....	140
4.3.7.4.	Oznaczenie wytrzymałości na odrywanie kompozycji klejowej od cegły .....	140
4.3.8.	Badania stalowych prętów żebrowanych $\varnothing 8$ i prętów gwintowanych $\varnothing 8$ .....	141
4.3.9.	Badanie wytrzymałości połączenia klejowego "pręt stalowy – mur" .....	143
4.4.	Badania laboratoryjne na modelach w skali technicznej.....	144
4.4.1.	Opis modeli badawczych.....	144
4.4.2.	Opis stanowiska badawczego i urządzeń pomiarowych.....	147
4.4.3.	Wyniki badań .....	151
4.4.3.1.	Badania modelu niewzmocnionego – model A1 – łuk świadkowy.....	151
4.4.3.2.	Badania modelu łuku wzmocnionego za pomocą materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej – model A2 .....	156
4.4.3.3.	Badania modelu wzmocnionego za pomocą taśm węglowymi CFRP S&P Lammelle (100/1.4) oraz materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej łuku – model A3 ....	164
4.4.3.4.	Badania modelu wzmocnionego za pomocą materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej oraz po stronie podniebienia łuku – model A4.....	175
4.4.3.5.	Badania modelu wzmocnionego za pomocą prętów stalowych $\varnothing 8$ , osadzonych w bruzdach wykonanych po stronie grzbietowej łuku, wklejonych za pomocą kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 – model A5.....	182
4.4.3.6.	Badania modelu wzmocnionego za pomocą 2 taśm węglowych CFRP S&P Lamelle CFK 150/2000 (o przekroju 100/1.4) doklejonych po stronie grzbietowej – model A6.....	192
4.4.3.7.	Badania modelu wzmocnionego za pomocą dźwigara z drewna klejonego klasy GL24 po stronie grzbietowej łuku, połączonego z łukiem ceglany przy użyciu stalowych kotew wklejanych $\varnothing 8$ – model A7.....	202

## Spis treści

4.5.	Badania elastoptyczne .....	213
4.5.1.	Wprowadzenie.....	213
4.5.2.	Badania modeli w skali 1:12 .....	213
4.5.3.	Badania modelu w skali technicznej .....	216
4.5.4.	Wnioski .....	219
4.6.	Analiza wyników badań własnych. Wnioski szczegółowe. ....	220
5.	ANALIZA NUMERYCZNA .....	230
5.1.	Wprowadzenie.....	230
5.2.	Model materiału murowego .....	230
5.3.	Modele numeryczne niewzmocnionych konstrukcji ceglanych .....	231
5.4.	Wyniki obliczeń numerycznych konstrukcji niewzmocnionej – łuk A1 .....	232
5.5.	Modele numeryczne wzmacnionych konstrukcji łuków ceglanych.....	234
5.5.1.	Model numeryczny łuku A2.....	235
5.5.2.	Model numeryczny łuku A3.....	235
5.5.3.	Model numeryczny łuku A4.....	236
5.5.4.	Model numeryczny łuku A5.....	237
5.5.5.	Model numeryczny łuku A6.....	237
5.5.6.	Model numeryczny łuku A7.....	238
5.6.	Wyniki analiz numerycznych konstrukcji łuków ceglanych wzmacnionych.....	238
5.6.1.	Łuk A2.....	239
5.6.2.	Łuk A3.....	243
5.6.3.	Łuk A4.....	246
5.6.4.	Łuk A5.....	250
5.6.5.	Łuk A6.....	252
5.6.6.	Łuk A7.....	256
5.7.	Wnioski .....	262
6.	MODEL TEORETYCZNY .....	265
6.1.	Model oparty na analizie powstawania mechanizmów zniszczenia łuków.....	265
6.2.	Model analityczny .....	269
6.3.	Propozycja rozbudowy modelu analitycznego .....	273
6.4.	Wnioski .....	281
7.	UWAGI KOŃCOWE. WNIOSKI OGÓLNE .....	282
7.1.	Podsumowanie.....	282
7.2.	Wnioski ogólne.....	283
	LITERATURA.....	285

## Wykaz ważniejszych oznaczeń stosowanych w pracy

## Oznaczenia łacińskie:

$A$	– pole przekroju poprzecznego łuku, początkowy przekrój poprzeczny kształtki, powierzchnia ściskana,
$a$	– wysokość przekroju,
$AFRP$	– materiały z żywicy syntetycznej zbrojone włóknem aramidowym (Aramid Fiber Reinforced Polymers),
$A_{frp}$	– powierzchnia styku (wzmocnienie FRP),
$A_i$	– pole przekroju poprzecznego elementu w płaszczyźnie równoległej do spoin wspornych,
$A_m$	– współpracująca powierzchnia przekroju muru,
$A_s$	– pole powierzchni ścinanej spoiny,
$A_S$	– powierzchnia przekroju pręta, powierzchnia przekroju zbrojenia rozciąganego,
$A_t$	– pole powierzchni przekroju poprzecznego (np. taśmy FRP),
$b$	– szerokość cegły równa grubości wysklepki, szerokość przekroju,
$CFRP$	– materiały z żywicy syntetycznej zbrojone włóknem węglowym (Carbon Fiber Reinforced Polymers),
$c_n$	– prędkość fazowa fali w ośrodku ( $c_n = 1 / \sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}$ ),
$D$	– średnica próbki,
$d$	– użyteczna wysokość przekroju,
$d_p$	– średnica pręta,
$\vec{E}$	– sprzężenie funkcji zespolonej $E$ ,
$E$	– moduł sprężystości Younga,
$E_0$	– amplituda zespolona wektora $E$ ( $E_0 = m \exp [-i\varphi_0]$ ),
$E_b$	– moduł sprężystości Younga elementu murowego,
$E_b^i$	– średni moduł sprężystości Younga elementu murowego,
$E_{frp}$	– moduł sprężystości Younga dla wzmocnienia FRP,
$E_k$	– moduł sprężystości Younga materiału konstrukcji,
$E_m$	– moduł sprężystości Younga zaprawy,
$E_m^i$	– średni moduł sprężystości Younga zaprawy,
$E_s$	– moduł sprężystości Younga dla stali,
$E_{sr}^i$	– średni moduł sprężystości Younga muru,
$E_w$	– moduł sprężystości Younga warstwy powierzchniowej,
$F$	– siła,
$f_{sr}$	– średnia wytrzymałość,
$f$	– strzałka łuku.
$f_b$	– wytrzymałość elementu murowego na ściskanie,
$F_c$	– siła ściskająca,
$f_c$	– wytrzymałość na ściskanie,
$f_d$	– wytrzymałość obliczeniowa muru na ściskanie,
$F_h$	– siła odrywająca,
$f_h$	– wytrzymałość na odrywanie,
$f_k$	– wytrzymałość charakterystyczna muru na ściskanie,
$F_m$	– siła zginająca,
$f_m$	– wytrzymałość na zginanie,
$f_m$	– wytrzymałość zaprawy na ściskanie,
$f_{M,k}$	– siła ściskająca mur,



## Wykaz ważniejszych oznaczeń stosowanych w pracy

<i>FRCM</i>	– materiały z włókien osadzone w zaprawie mineralnej (Fiber Reinforced Cementitious Matrix),
<i>FRP</i>	– materiały z żywicy syntetycznej zbrojone włóknem (Fiber Reinforced Polymer),
$F_t$	– siła rozciągająca,
$f_t$	– wytrzymałość na rozciąganie,
$F_v$	– siła ścinająca,
$f_{voi}$	– wytrzymałość na ścinanie uzyskana z badania pojedynczego elementu próbnego,
$f_{yd}$	– obliczeniowa granica plastyczności stali (zbrojenia),
$f_e$	– odkształceniowa wartość rzędu izochromy,
$f_\sigma$	– naprężeniowa wartość rzędu izochromy,
<i>GFRP</i>	– materiały z żywicy syntetycznej zbrojone włóknem szklanym (Glass Fibre Reinforced Polymers),
$h$	– grubość przekroju,
$I_{max}$	– maksymalne natężenie światła obserwowane dla $\sin^2 2\alpha = \sin^2(\delta/2) = 1$ ,
$K_i$	– $i$ -ty współczynnik korekcyjny określający ilościowy wpływ danego czynnika na mierzoną różnicę odkształceń,
$l$	– odległość pomiędzy podporami, szerokość przekroju,
$L_0$	– długość odcinka pomiarowego,
$l_z$	– długość zakotwienia,
$m$	– rzeczywista amplituda wektora $E$ ,
<i>MES</i>	– metoda elementów skończonych (FEM – Finite Element Method),
$M_{Rd}$	– projektowany moment zginający działający w przekroju sklepienia,
$n$	– liczba próbek,
$N$	– rzędna izochromy,
$N_{Rd}$	– projektowana siła osiowa działająca w przekroju sklepienia,
$p$	– liczba wiązań pierwotnych pomiędzy poszczególnymi ceglami (sekcjami),
<i>PBO</i>	– <i>poliparafenilenbenzobisoxazol</i> – surowiec do produkcji włókien chemicznych,
$R_1$	– wytrzymałość kohezyjna kleju,
$R_2, R_2'$	– wytrzymałość adhezyjna kleju,
$R_3, R_3'$	– wytrzymałość materiału, odpowiednio: elementu wzmacniającego i wzmacnianego w strefie przyskleinowej,
$R_4, R_4'$	– wytrzymałość materiału, odpowiednio: wzmacnianego i wzmacniającego – poza strefą skleiny (wytrzymałość kohezyjna),
$s$	– odchylenie standardowe,
$S$	– rozpiętość łuku,
$s_r$	– błąd średni,
$t$	– czas, wysokość przekroju,
$t_w$	– grubość warstwy powierzchniowej,
$W$	– wskaźnik zginania przekroju,
$x$	– odległość od osi obojętnej,
$z$	– kierunek propagacji fali (współrzędna czoła fali), liczba wiązań zniszczonych pomiędzy poszczególnymi ceglami (sekcjami) w całym łuku,

**Oznaczenia greckie:**

$\alpha$	– kierunek wektora własnego fali szybszej w ośrodku dwójłomnym,
$\nabla^2$	– operator Laplace'a,
$\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k$	– odkształcenia główne na powierzchni konstrukcji,

## Wykaz ważniejszych oznaczeń stosowanych w pracy

$\varepsilon_1^w, \varepsilon_2^w$	– odkształcenia główne (na kierunkach głównych) w warstwie powierzchniowej,
$\tau_k(x)$	– naprężenia ścinające w spoinie klejowej,
$\sigma_s(x)$	– naprężenia normalne w pręcie stalowym,
$\alpha$	– parametr izokliny, kąt nachylenia jednego z kierunków głównych względem układu odniesienia (osi $z$ ),
$\alpha_c$	– cecha sprężystości muru,
$\beta$	– współ. moduł sprężystości elementu murowego do modułu sprężystości zaprawy,
$\gamma_M$	– częściowy współczynnik bezpieczeństwa dla muru,
$\Delta$	– przyrost wartości (np. $\Delta L_0$ – przyrost długości elementu mierzonego),
$\varepsilon$	– odkształcenie (np. w stali lub taśmie CFRP),
$\varepsilon(\varepsilon_0)$	– względna przenikalność elektryczna ośrodka (próżni),
$\varepsilon_{frp,u}$	– największe odkształcenia dla wzmocnienia FRP,
$\varepsilon_{M,u}$	– największe odkształcenia dla muru,
$\mu (\mu_0)$	– względna przenikalność magnetyczna ośrodka (próżni),
$\nu$	– współczynnik zmienności,
$\nu_w$	– współczynnik Poissona warstwy powierzchniowej,
$\xi$	– współ. wysokości elementu murowego do grubości zaprawy,
$\sigma$	– naprężenia normalne,
$\sigma_1, \sigma_2$	– główne naprężenia normalne,
$\sigma_c'$	– wytrzymałość muru na ściskanie.
$\sigma_{i-1}$	– naprężenie normalne w punkcie $i-1$ ,
$\sigma_i$	– naprężenie normalne w punkcie $i$ ,
$\sigma_{M,śr}$	– maksymalne naprężenie rozciągające muru,
$\sigma_v$	– naprężenia równikowe,
$\sigma_z$	– naprężenia równoleżnikowe,
$\tau$	– naprężenia styczne,
$\varphi_0$	– faza początkowa,
$\omega$	– częstość kołowa, znormalizowany ułamek pola wzmocnienia FRP.

## 1. Wstęp

**1. WSTĘP**

W ostatnich latach obserwuje się rosnące zainteresowanie nowymi technologiami i technikami przydatnymi w konserwacji zabytków. Utrzymanie w stanie przydatności użytkowej konstrukcji zabytkowych, a zwłaszcza łuków i sklepień, które uległy częściowej lub znacznej destrukcji to zadanie, przed którym coraz częściej stają osoby zajmujące się wzmacnianiem konstrukcji.

Skuteczne rozwiązywanie tego zadania wymaga wszechstronnej wiedzy o źródłach zjawisk powodujących obniżenie użytkowych cech konstrukcji, poznania dawnych technik budowlanych oraz znajomości nowoczesnych metod, które umożliwią zarówno przeciwdziałanie tym zjawiskom, jak i przywracanie obiektom ich pierwotnych własności w zakresie nośności i sztywności.

Stosowanie nowoczesnych metod naprawy i wzmacniania konstrukcji ceglanych czy też ich poszczególnych elementów (np. łuków, sklepień, kopuł) prowadzi do znacznych oszczędności, a niejednokrotnie pozwala na ocalenie obiektów ważnych kulturowo.

Wzmacnianie i naprawa ceglanych konstrukcji łuków i sklepień to zagadnienia trudne, wymagające najczęściej indywidualnego podejścia do każdego przypadku.

Analiza konstrukcji murowych (zwłaszcza zabytkowych łuków, sklepień i kopuł), nastęrcza wielu problemów w opisie i modelowaniu tego typu konstrukcji. Zazwyczaj trudność polega na niekompletnych informacjach o własnościach mechanicznych materiałów i na złożoności geometrycznej konstrukcji.

Występuje bardzo wiele czynników, które należy rozważyć w ocenie stanu technicznego ceglanej budowli zabytkowej oraz przy doborze właściwej metody ingerencji konserwatorskiej. Kluczem wydaje się być szczegółowe rozpoznanie przyczyn powstania zarysowań i spękań. O ile w przypadku murów ceglanych (z wyjątkiem murów warstwowych, [227]) mechanizm ich powstawania jest stosunkowo czytelny i dobrze opisany [171], [32], [31], [161], o tyle w przypadku łuków, sklepień i kopuł układ rys może powstawać w wyniku wielu przyczyn stowarzyszonych. Zwłaszcza w sklepieniach, jakkolwiek właśnie poprzez zarysowania sygnalizują one zagrożenie, to jednak propagacja zarysowań i spękań może następować bardzo szybko i prowadzić do awarii.

W celu właściwej oceny wpływu układu zarysowań i spękań sklepień na bezpieczeństwo konstrukcji należy bardzo dokładnie zbadać stan wszystkich pozostałych elementów konstrukcyjnych budowli i dokonać szczegółowych pomiarów występujących deformacji. Przyczyny zarysowania sklepień mogą być bardzo różne, m.in.:

- nierównomierne osiadanie, poślizgi i obroty podpór,
- zmiana stosunków gruntowo – wodnych,
- działanie sił poziomych, uwolnionych w konstrukcjach dachowych wskutek niewłaściwych prac konserwatorskich, np. przecięcie dolnych belek wiązarowych (tramów),
- wpływ czynników atmosferycznych,
- zmiany wilgotności,
- niewłaściwa geometria i przekroje,
- starzenie materiałów i zjawiska opóźnione (reologia), [117].

W myśl zapisów zawartych w „Karcie Weneckiej” [128], działanie na zabytku ma na celu zachowanie i ujawnienie historycznej, estetycznej wartości obiektu oraz polega na poszanowaniu dawnej substancji i elementów stanowiących autentyczne dokumenty przeszłości. Dopuszcza się jednak wzmacnianie obiektów zabytkowych przy zastosowaniu nowoczesnych technik konserwatorskich, budowlanych i inżynierskich, przy zachowaniu zasad doktryny konserwatorskiej w chwili, gdy techniki tradycyjne okazują się niewydolne, a nowoczesne techniki poparte są badaniami naukowymi oraz doświadczeniem [28], [220].

### 1. Wstęp

Każde planowanie konserwacji konstrukcji wymaga danych jakościowych opartych na bezpośrednich obserwacjach procesu niszczenia materiału i uszkodzeń konstrukcji, badaniach historycznych itp., jak i danych ilościowych opartych na konkretnych testach i modelach matematycznych, jakich używa się w nowoczesnej technice, [110].

Budowla zabytkowa ma swoją specyfikę, dlatego dobór metod konserwacji konstrukcyjnej musi ją uwzględnić oraz brać pod uwagę bezpieczeństwo konstrukcji, a tym samym jej użytkowników i pozostawać w zgodzie z doktrynami konserwatorskimi. Ważnym elementem jest też zrozumienie, że obiekt zabytkowy powinien przetrwać, a możliwość kompleksowej konserwacji nie zdarza się często. Stąd, przyjęte rozwiązania powinny uwzględniać działania zjawisk opóźnionych (reologia materiałów). Możliwe jest zatem np.: przewymiarowanie przekrojów konstrukcyjnych, które miało również miejsce w fazie wznoszenia obiektów, [117].

Należy podkreślić, że w praktyce na ogół wykorzystuje się jednocześnie kilka sposobów naprawy i wzmocnienia. Przy ich wyborze dużą rolę odgrywa ekonomiczna efektywność oraz techniczne możliwości wykonania. Nieprawidłowo wykonana naprawa konstrukcji może pogarszać stan techniczny obiektu, a nawet doprowadzić do awarii.

W pracy starano się połączyć założenia doktryny konserwatorskiej z nowoczesnymi technologiami stosowanymi w budownictwie. Praca składa się z 7 rozdziałów.

Rozdział 1 stanowi wstęp i wprowadzenie w problematykę pracy.

W rozdziale 2 podano cele i zakres, jaki obejmuje rozprawa oraz sformułowano tezy.

Rozdział 3 zawiera analizę literatury przedmiotu. Omówiono w nim, między innymi, metody obliczeniowe stosowane w analizie statycznej konstrukcji murowych. Opisano materiały stosowane do wzmocnień zakrzywionych konstrukcji murowych. Zwrócono uwagę na materiały nowoczesne, których udział i znaczenie w konserwacji i wzmacnianiu konstrukcji wzrasta. Zamieszczono również informacje dotyczące metod badawczych i badanych rodzajów wzmocnień.

W kluczowym dla rozprawy rozdziale 4 opisano doświadczalne badania własne, ich analizę i wyniki. W ramach programu badawczego zrealizowano między innymi:

- badania właściwości materiałów wykorzystanych do budowy modeli laboratoryjnych,
- badania materiałów stosowanych do wzmocnień,
- badania współpracy materiałów wzmacniających z podłożem ceglany,
- badania modeli wzmocnionych łuków ceglanych, wykonanych w skali technicznej,
- analizy elastoptyczne wybranych modeli.

W rozdziale 5 przedstawiono wyniki analiz numerycznych opartych na liniowym modelu pracy statycznej badanych łuków, opisanych w rozdziale 4.

W rozdziale 6 podano model teoretyczny powstawania przegubów w konstrukcjach łuków. Przedstawiono także propozycję teoretycznego modelu obliczeniowego, uwzględniając rodzaj i zakres stosowanego wzmocnienia. Uzyskane na bazie modelu teoretycznego wyniki, wskazujące na przydatność tego modelu dla praktyki budowlanej, porównano z wynikami badań własnych.

Rozdział 7 obejmuje wnioski i uwagi końcowe, w tym proponowane kierunki dalszych badań naukowych. Rozprawę kończy wykaz literatury.

Rozpatrywany problem jest w bardzo małym stopniu opisany w literaturze polskiej i obcej, szczególnie jeśli chodzi o metody wzmocnień przy zastosowaniu nowoczesnych materiałów – takich jak np. siatki z włókien węglowych, taśmy CFRP, ale także w przypadku metody prętów wklejanych oraz wytworzenia konstrukcji zespolonej „łuk z drewna klejonego warstwowo – sklepienie ceglane”.

Badania opisane w rozprawie dofinansowane były ze środków przyznawanych przez Komitet Badań Naukowych w latach 2005-2007 na realizację projektu badawczego nr 4 T07E 071 28, pod tytułem: „Praca statyczna zabytkowych, zakrzywionych konstrukcji ceglanych

*1. Wstęp*

poddanych zabiegom naprawy i wzmacniania”. Badania zostały zrealizowane w Laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej oraz Laboratorium Elastooptyki na Wydziale Mechanicznym Politechniki Wrocławskiej.

## 2. Cel i zakres, tezy pracy

### 2. CEL I ZAKRES, TEZY PRACY

#### 2.1. Cel pracy

Głównym celem rozprawy jest analiza pracy statycznej zabytkowych zakrzywionych konstrukcji ceglanych przed- i po wzmocnieniu oraz wykazanie możliwości wykorzystania różnych technologii do naprawy i wzmocnienia takich konstrukcji ze wskazaniem najbardziej przydatnych ze względów konstrukcyjnych i konserwatorskich.

Celami stowarzyszonymi są: opracowanie modelu analitycznego i numerycznego pracy konstrukcji oraz modelu opisującego zachowanie konstrukcji wzmocnionych w oparciu o analizę mechanizmów zniszczenia.

#### 2.2. Zakres pracy

Rozprawa zawiera:

- 1) Krytyczny przegląd literatury obejmujący:
  - pracę statyczną konstrukcji ceglanych, w szczególności zakrzywionych (łuki, sklepienia i kopuły),
  - analizę rezultatów wcześniejszych badań w zakresie naprawy i wzmocnienia tego typu konstrukcji,
  - przegląd stosowanych do wzmocnień materiałów,
  - analizę metod szacowania nośności tego typu konstrukcji ceglanych (np.: metodę Piepera, metodę Heymana),
  - analizę metod szacowania nośności tego typu konstrukcji ceglanych wykonaną na podstawie metod numerycznych,
  - opis metody elastoptycznej stosowanej w badaniach modeli konstrukcji ceglanych.
- 2) Badania materiałowe elementów wzmocniających.
- 3) Badanie nośności łuków ceglanych wykonanych w skali technicznej, wzmocnionych przy użyciu siatek z włókien węglowych i taśm CFRP, wklejanych prętów stalowych, dźwigarów z drewna klejonego łączonych z łukami ceglanymi za pomocą wklejanych łączników stalowych.
- 4) Elastoptyczne badania wybranych modeli.
- 5) Analizę numeryczną (MES) w zakresie pracy liniowej badanych modeli laboratoryjnych.
- 6) Opracowanie modelu analitycznego pracy statycznej po wzmocnieniu oraz modelu powstawania przegubów (mechanizmu zniszczenia).
- 7) Analizę wyników uzyskanych w badaniach doświadczalnych i teoretycznych.
- 8) Podsumowanie, wnioski o charakterze naukowym i praktycznym oraz kierunki dalszych badań.

#### 2.3. Tezy pracy

W oparciu o dotychczasowe doświadczenia, przeprowadzone studia własne oraz analizę wyników badań i studiów teoretycznych innych autorów dotyczących pracy statycznej zabytkowych sklepień i łuków ceglanych poddanych zabiegom naprawy i wzmocnienia sformułowano następujące tezy:

- 1) Łuki i sklepienia ceglane wzmocnione przy użyciu materiałów i technologii FRP, FRCM oraz technologii prętów wklejanych wykazują znaczący wzrost nośności i sztywności a mechanizm (model) zniszczenia przekrojów wzmocnionych ulega zmianie.

2. Cel i zakres, tezy pracy

- 2) Łukowe konstrukcje wzmacniające z drewna klejonego warstwowo, tworzące z pierwotnym sklepieniem ceglany konstrukcję zespoloną w wyniku połączenia poprzez stalowe kotwy wklejane, korzystnie wpływają na rozkład odkształceń i naprężeń we wzmacnianym sklepieniu.
- 3) Liniowe modele numeryczne są przydatne w analizie pracy statycznej łuków i sklepień ceglanych wzmocnionych przy użyciu technologii FRP, FRCM oraz technologii prętów wklejanych, do poziomu wyężenia konstrukcji odpowiadającego połowie wartości obciążenia niszczącego i mają charakter jedynie jakościowy.
- 4) Metody wzmacniania łuków i sklepień ceglanych przy użyciu FRP, FRCM oraz prętów wklejanych są akceptowalne z punktu widzenia doktryny konserwatorskiej, natomiast wprowadzenie łuków z drewna klejonego warstwowo każdorazowo wymaga przeprowadzenia szczegółowej analizy przypadku.

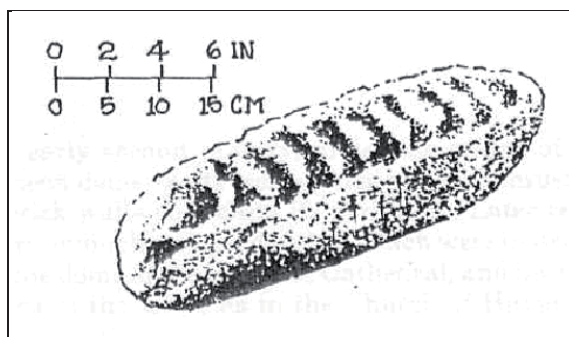
### 3. MODELOWANIE I ANALIZA PRACY STATYCZNEJ ZAKRZYWIONYCH, HISTORYCZNYCH KONSTRUKCJI CEGLANYCH W ŚWIETLE LITERATURY

#### 3.1. Wprowadzenie

Analiza konstrukcji murowych (zwłaszcza zabytkowych łuków, sklepień i kopuł) jest bardzo trudnym tematem z powodu wielu problemów w opisie i modelowaniu tego typu konstrukcji. Skomplikowane jest także podejście numeryczne (modelowanie materiału – zachowującego się w rzeczywistości w sposób nieliniowy). Trudność polega również na tym, iż informacje o własnościach mechanicznych materiałów są niekompletne oraz na złożoności geometrycznej konstrukcji.

W rozdziale przeprowadzono krytyczny przegląd różnych metod stosowanych w analizie zakrzywionych konstrukcji murowych, zajmując się modelowaniem konstrukcji, modelowaniem materiału oraz przeglądem metod opisu zachowania konstrukcji.

Cegła jest jednym z najstarszych materiałów budowlanych znanych człowiekowi, który nadal jest używany w budownictwie. Elementy ceglane połączone zaprawą murarską okazały się doskonałym materiałem, głównie dzięki swojej prostocie i trwałości wykonanych z nich konstrukcji. Ten najstarszy, sztuczny materiał budowlany został wymyślony prawie 10 tys. lat temu. Dowodzą tego badania archeologiczne przeprowadzone w miejscu starożytnego Jerycha, w Mykenach, Egipcie, Peru, Indiach oraz dolinie Eufratu i Tygrysu, gdzie odnaleziono pierwsze suszone na słońcu cegły (rys. 3.1) [74], [18]. Dopiero ok. 3000 lat p.n.e. zaczęto produkować w Mezopotamii cegłę wypalaną, a technologia ta, ze zmianami przetrwała do dziś. Szersze użycie cegły palonej zapoczątkowano w państwie rzymskim od I wieku n.e. Cegła rzymska była kwadratowa, stosunkowo płaska i miała znaczne rozmiary (największe: 58 x 58 x 4 cm). Kiedy w budownictwie rzymskim zaczęto szeroko używać zapraw spajających rumosz kamienny, cegłę stosowano bardzo często jako licówkę murów będącą jednocześnie ich deskowaniem. Po upadku Cesarstwa Zachodniego w Europie stosowanie cegły zanikło. Dopiero w XI wieku produkcja cegieł rozpowszechniła się: z początku w mauretańskiej Hiszpanii, później w południowej Francji i do XIII wieku objęła prawie całą Europę. Cegła stała się podstawowym materiałem budowlanym na obszarze od Niderlandów po kraje bałtyckie. Średniowieczna cywilizacja Zachodu doprowadziła w tym czasie do powstania ceglanych zamków i katedr, których architektura zadziwia do dziś. Pod koniec pierwszej połowy XIX wieku w USA i Wielkiej Brytanii zaczęto maszynową produkcję cegieł.



Rys. 3.1. Ręcznie formowana cegła suszona na słońcu (ok. 8000 lat p.n.e.), [18].

Pomimo upływu wieków, wojen i naturalnych katastrof, ślady ludzkiego rozwoju potwierdzają, że prostota cegły, wytrzymałość i trwałość doprowadziła do jej powszechnego użycia i dała jej naczelną rolę w historii budownictwa obok kamienia i drewna. Historia



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

człowieka jest historią jego architektury, a historia architektury jest historią konstrukcji murowych, [164].

Wszelkiego rodzaju otwory w ścianach oraz rzuty obiektów wymagają przekrycia od góry. Przekrycie to musi być na tyle wytrzymałe, aby mogło poza własnym ciężarem przenieść wszelkie obciążenie na nim spoczywające, przy zachowaniu niezmiennego kształtu lub deformacji w granicach dopuszczalnych. Ze względu na kształt rozróżniamy przekrycia: o kształcie prostym, czyli belki i płyty oraz o kształcie krzywym, czyli łuki i sklepienia. Oba te rodzaje znane były w starożytności, gdyż przekrycie belkami kamiennymi otworów stosowano w budowlach wznoszonych w Egipcie, Grecji i w innych krajach.

Tematyka rozprawy dotyczy ceglanych konstrukcji zakrzywionych, stąd uwagę skupiono na tychże elementach konstrukcyjnych pomijając elementy o kształcie prostym.

Do czasów Etrusków i Rzymian łuk występuje tylko jako element czysto konstrukcyjny, a nie jako czynnik plastyczny wzbogacający architekturę. Dopiero u Rzymian i spadkobierców ich kultury łuk staje się ważnym elementem architektury (powstają takie obiekty jak: bazylika Maksencjusza i Konstantyna w Rzymie (rys. 3.2), kościół Hagia Sophia w Konstantynopolu (rys. 3.3) czy kopuły katedry we Florencji (rys. 3.4), bazyliki św. Marka w Wenecji (rys. 3.5) i bazyliki św. Piotra w Rzymie (rys. 3.6)), przy czym jego półkolistą formą ulega zmianom i przekształceniom odpowiadającym potrzebom i aktualnym upodobaniom.



Rys. 3.2. Bazylika Maksencjusza i Konstantyna w Rzymie – widok obecny.

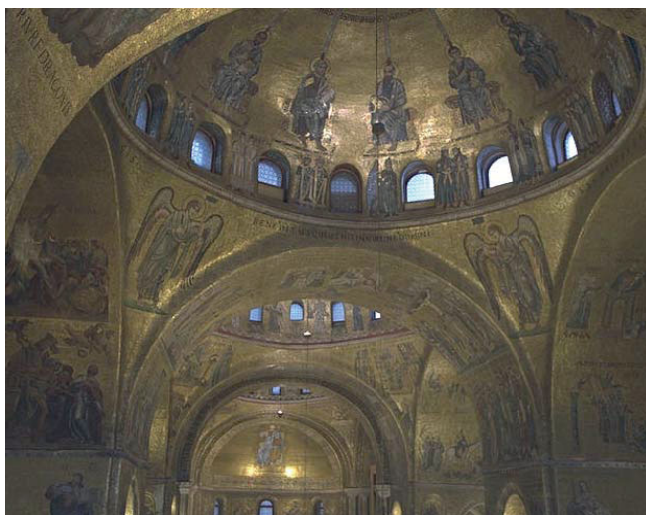


Rys. 3.3. Hagia Sofia (Istanbul) – widok wnętrza.



Rys. 3.4. Kopuła katedry we Florencji – freski na sklepieniu nad prezbiterium.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

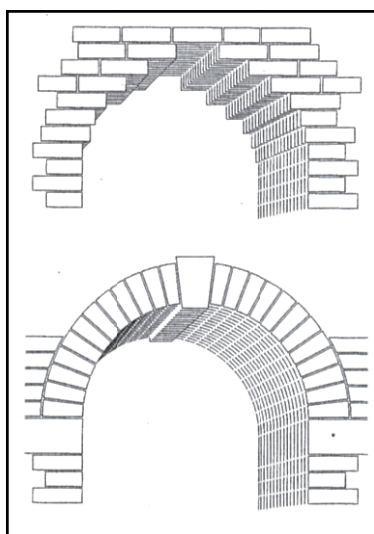


Rys. 3.5. Ozdobione mozaikami kopuły bazyliki św. Marka w Wenecji.



Rys. 3.6. Kupuła bazyliki św. Piotra w Watykanie – widok od wewnątrz.

Przez wieki łuk (rys. 3.7) stał się głównym sposobem pokonywania ograniczeń rozpiętości pojedynczych bloków. Tradycyjne konstrukcje ceglane bazowały na swej masywności i były tak wykonane, by unikać wywoływania sił rozciągających, zapewniając tym samym odpowiednią stateczność. Wczesne formy były tylko przybliżeniami późniejszego, dobrze dopasowanego, wyginającego się łukowato mechanizmu. Dlatego być może najważniejszą innowacją w rozwoju architektury był rozwój konstrukcji murowych, takich jak łuk, do kształtu sklepienia i kopuły.



Rys. 3.7. Łuk schodkowy (górny) i pełny (dolny), [174].

### 3.2. Łuki, sklepienia i kopuły

Mając na uwadze fakt, że wiedza na temat architektury łuków, sklepień i kopuł zebrana jest w wielu książkach, opracowaniach monograficznych, doktoratach i niezliczonej liczbie publikacji, w rozprawie zamieszczono tylko najistotniejsze – zdaniem autora – informacje na temat tych konstrukcji. Na podstawie [37], [169], [46], [94], [182], [174], [246], [41], [164] można przyjąć poniższą charakterystykę i podział łuków, a w dalszej kolejności sklepień i kopuł. Klasyfikacji tej dokonano wyłącznie dla wprowadzenia w tematykę przedmiotu.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

## 3.2.1. Łuki

Łukowe nakrycie sklepieniem otworu w murze nazywamy łukiem. Łęk jako sklepienie jest zespołem elementów murowych ułożonych w ten sposób, że zarówno ich ciężar własny, jak i obciążenia dodatkowe zostają przeniesione na otaczające mury zwane oporami sklepienia. Poszczególne elementy łuku są kłińcami, które pod ciężarem własnym i sił dodatkowych ciężą w dół, przy czym cisną na sąsiednie kłińce, rozpychają je i – jeśli opory są nieruchome – utrzymują się w równowadze. Sklepienie ma więc tę przewagę nad belką, że usytuowane w nim kamienie podlegają tylko ścisnaniu. Nie są natomiast narażone na zginanie, któremu podlegają belki. Dopóki nie wynaleziono sposobu nakrywania otworów belkami stalowymi, betonowymi, żelbetowymi, itp. sklepienie miało nad nimi przewagę, [164].

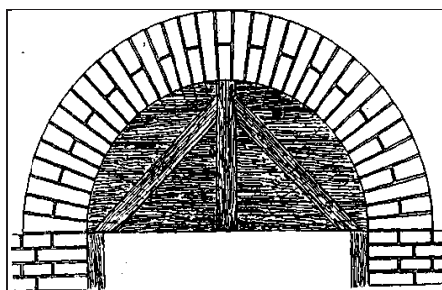
Łuk opisuje się następującymi parametrami:

- rozpiętość – odległość punktów nasadowych od siebie,
- opory, czyli dwa punkty nasadowe – miejsca oparcia łuku na murze, ich wysokość i wzajemne położenie,
- przebieg prostej łączącej oba punkty nasadowe,
- strzałka – największa odległość między prostą łączącą punkty nasadowe a najwyższym punktem łuku mierzona pionowo.

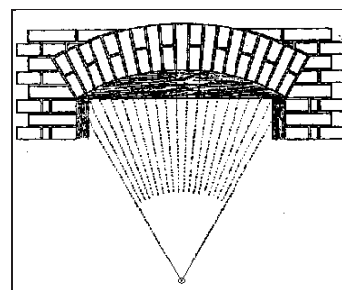
Ze względu na powyższe cechy, rozróżniamy:

**Łuki pełne** (rys. 3.8) przedstawiające kształt półkola, gdzie:

- punkty nasadowe leżą na jednej wysokości,
- strzałka jest połową rozpiętości łuku.



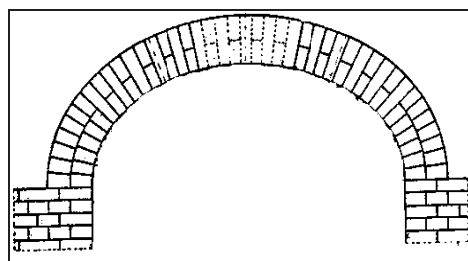
Rys. 3.8. Łuk pełny, [37].



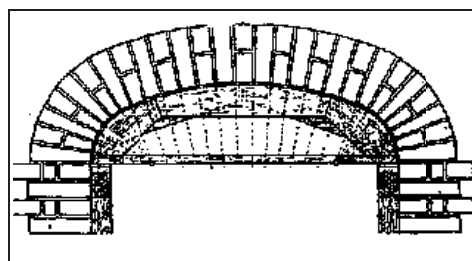
Rys. 3.9. Łuk obniżony, odcinkowy, [37].

**Łuki obniżone** – o strzałkach mniejszych niż połowa rozpiętości, dzielące się na:

- łuki odcinkowe, (rys. 3.9),
- łuki eliptyczne, (rys. 3.10),
- łuki koszowe, (rys. 3.11).



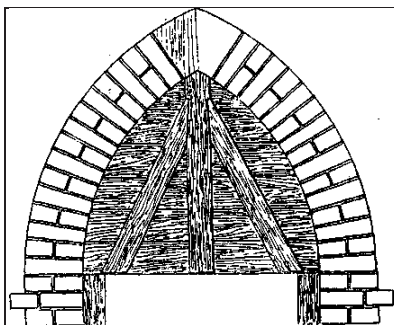
Rys. 3.10. Łuk obniżony, eliptyczny, [169].



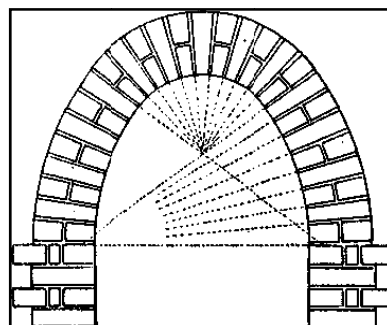
Rys. 3.11. Łuk obniżony, koszowy, [37].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

**Łuki podwyższone** - gotyckie (rys. 3.12), mauretańskie, owalne (rys. 3.13) o strzałkach większych niż połowa rozpiętości.

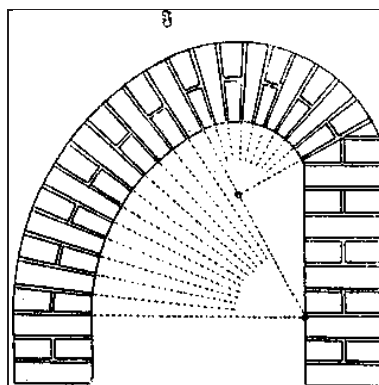


Rys. 3.12. Łuk podwyższony, gotycki, [37].



Rys. 3.13. Łuk podwyższony, owalny, [37].

**Łuki niesymetryczne** (łabędzia szyja) – których punkty nasadowe położone są na różnych wysokościach (rys. 3.14).



Rys. 3.14. Łuk podwyższony, owalny, [37].

### 3.2.2. Sklepienia i kopuły

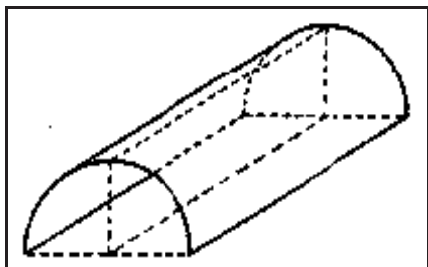
Sklepieniem nazywamy każde krzywolinijne nakrycie przestrzeni ograniczonej murami, łękami, belkami itp. wykonane z kamieni naturalnych lub sztucznych w ten sposób, że parcie, jakie występuje między poszczególnymi elementami składowymi sklepienia (klińcami), przenoszone jest na opory.

Każdą przestrzeń zamkniętą można, poza stropem płaskim, nakryć również sklepieniem, podobnie jak otwór w ścianie łukiem, gdyż ten nie jest niczym innym jak sklepieniem o niewielkiej szerokości przekroju. Różnica między sklepieniem i łukiem polega na tym, że przy sklepieniach mamy znacznie więcej swobody i możliwości pod względem kształtowania form geometrycznych i plastycznych niż przy łękach.

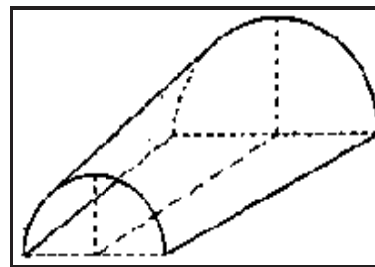
Rozróżniamy:

**Sklepienie kolebkowe** – sklepienia mające kształt połowy walca prostego. Cechą charakterystyczną sklepienia kolebkowego jest to, że opiera się ono na dwóch liniach nasadowych równoległych do osi i posiada linię szczytową. Sklepienie kolebkowe może być: proste (rys. 3.15), skośne, wzniesione, łukowo wzniesione, stożkowe (rys. 3.16), spiralne, spłaszczone, podniesione, odcinkowe.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.15. Sklepienie kolebkowe proste, [169].



Rys. 3.16. Sklepienie kolebkowe stożkowe, [169].

Często stosowanym elementem w sklepieniach kolebkowych jest luneta. Jest to element sklepienia w postaci poprzecznej kolebki przenikającej się z kolebką sklepienia głównego w celu umożliwienia wykonania okna lub drzwi w ścianie powyżej wezłowia sklepienia. Lunety mają najczęściej przekrój kolebkowy, czasem też kulisty, stożkowy lub elipsoidalny. W okresie renesansu sklepienia kolebkowe z lunetami były często stosowane dla urozmaicenia wnętrza i zmiany obciążenia przekazywanego na ściany z równomiernie rozłożonego na skupione (dawało to możliwość bardziej swobodnego kształtowania przestrzeni). Przykładem sklepienia kolebkowego z lunetami jest sklepienie Kaplicy Sykstyńskiej w Watykanie (rys. 3.17).



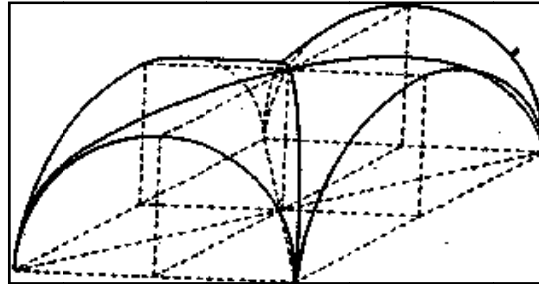
Rys. 3.17. Sklepienie kolebkowe z lunetami – Kaplica Sykstyńska – Watykan.



Rys. 3.18. Gotyckie sklepienie krzyżowo-żebrowe prezbiterium kościoła św. Doroty we Wrocławiu.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

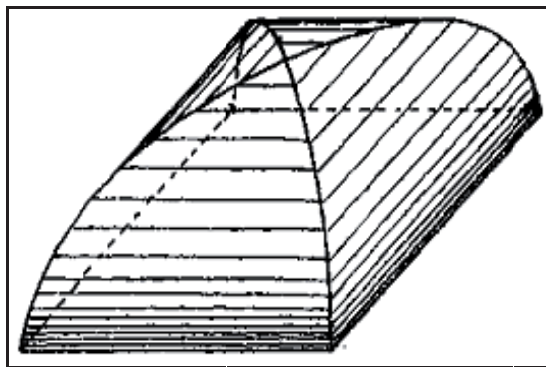
**Sklepienie krzyżowe** (rys. 3.19) – należy do najbardziej rozpowszechnionych, powstało z przenikania się pod kątem prostym dwóch sklepień kolebkowych. Charakterystyczne dla sklepienia krzyżowego jest to, że opiera się ono na czterech punktach nasadowych w narożach i że ma dwie krzyżujące się linie szczytowe. Wykonano je nad wszelkimi wielobokami, najczęściej jednak nad kwadratami i wielobokami foremnyymi, [164].



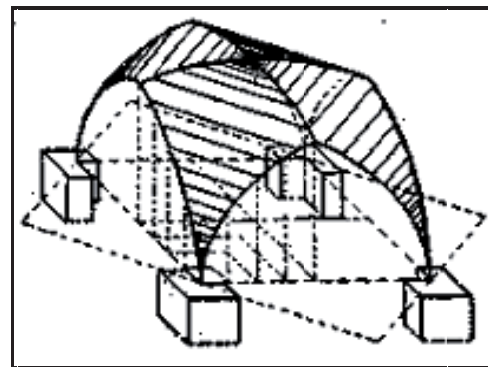
Rys. 3.19. Sklepienie krzyżowe, [167].

**Sklepienie krzyżowo-żebrowe** – sklepienie krzyżowe o wyraźnie zaznaczonych łękach przez wymurowanie żeber w miejscu przenikania kolebek. Na rys. 3.18 przedstawiono przykład sklepienia krzyżowo-żebrowego z prezbiterium kościoła św. Doroty we Wrocławiu.

**Sklepienie klasztorne** - zestawienie czterech kolebek daje sklepienie klasztorne, które może być zamknięte (rys. 3.20) lub otwarte (rys. 3.21), gdy najdłuższe linie podniebienia, stanowiące wysokość trójkątów sferycznych jakie tworzą kolebki, ustawione są w płaszczyźnie przechodzącej przez linie przekątne rzutu poziomego zasklepionego pomieszczenia.



Rys. 3.20. Sklepienie klasztorne zamknięte [37].



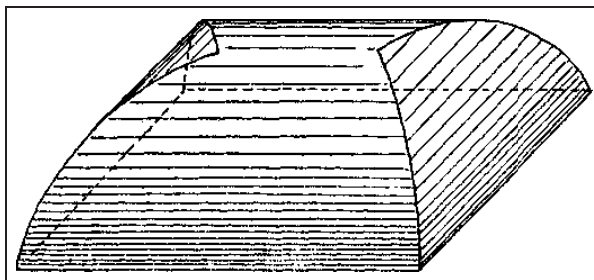
Rys. 3.21. Sklepienie klasztorne otwarte [169].

Wspólną cechą tych sklepień jest to, że mają tylko punkt szczytowy, a nie linię szczytową.

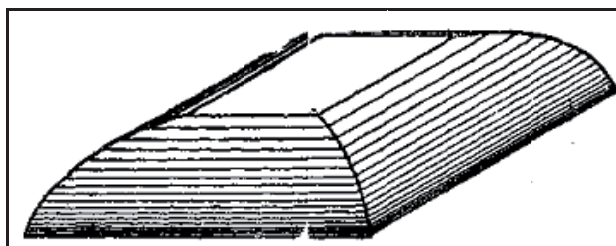
**Sklepienie nieckowe** - jest niejako wydłużonym w jednym kierunku sklepieniem klasztornym. Powstaje poprzez zamknięcie od czoła kolebkami sklepienia kolebkowego na planie prostokątnym (rys. 3.22), [246].

**Sklepienie zwierciadlane** (rys. 3.23) – to sklepienie, które powstaje przez ścięcie i odrzucenie górnej części sklepienia nieckowego i zastąpienie go stropem płaskim. Charakterystyczne dla tego typu sklepienia jest to, że – podobnie jak klasztorne i nieckowe – jest ono oparte na nieprzerwanej linii nasadowej na całym obwodzie i że posiada „płaszczyznę szczytową”, a nie punkt ani linię szczytową, [246].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

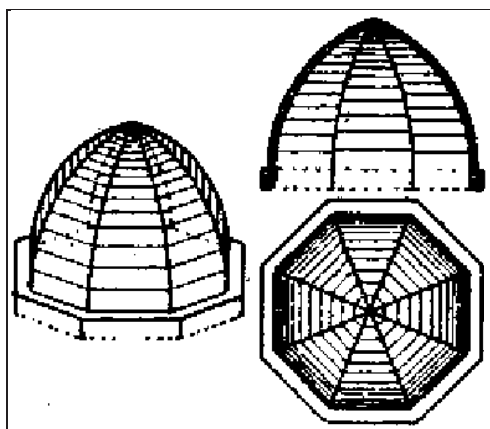


Rys. 3.22. Sklepienie nieckowe [37].

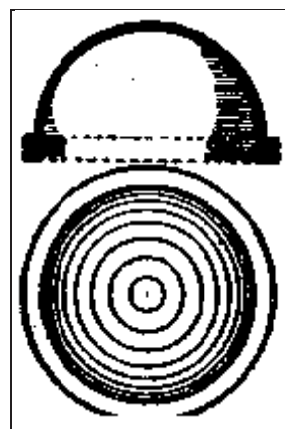


Rys. 3.23. Sklepienie zwierciadlane [37].

**Sklepienie kopulaste (baniaste) oraz kopuła (bania)** - sklepienie klasztorne oparte na wieloboku nazywamy kopulastym (baniastym – rys. 3.24), a na kole - kopułą (banią – rys. 3.25). Cechy charakterystyczne kopuły i sklepienia kopulastego są takie same jak sklepienia klasztorne, [246].

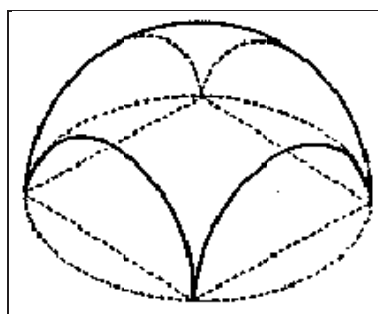


Rys. 3.24. Sklepienie kopulaste [169].



Rys. 3.25. Kopuła [169].

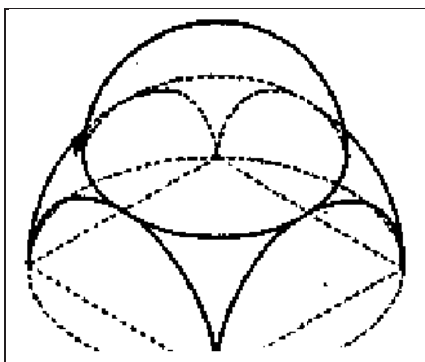
**Sklepienie żagłowe (kopuła czeska, rys. 3.26)** – jest to sklepienie powstałe przez odrzucenie części pełnej kopuły, znajdującej się poza granicami wieloboku wpisanego w koło. Podobnie jak otwarte sklepienie klasztorne lub krzyżowe oparte jest na punktach nasadowych, co przy kopulastym podniebieniu ma wygląd wydętego żagła, skąd pochodzi jego nazwa.



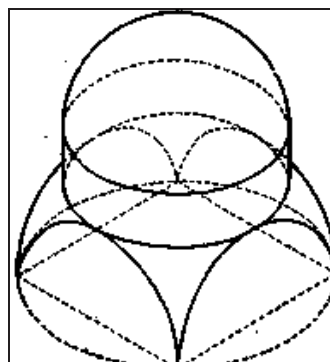
Rys. 3.26. Sklepienie żagłowe – kopuła czeska [164].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Jeżeli na miejscu czaszy sklepienia żagłowego ustawimy pełną kopułę, to powstaje kopuła wisząca (bizantyjska) (rys. 3.27), kopuła na wysklepkach lub pandantywach. Jeżeli między wysklepki a kopułę wstawimy walec (bęben), to powstaje kopuła renesansowa (na bębnie, na tamburze – rys. 3.28).

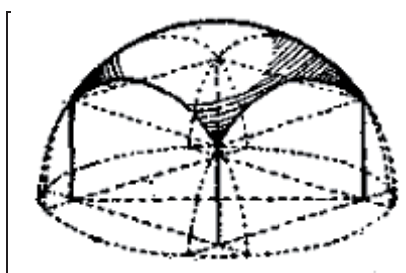


Rys. 3.27. Kupuła wisząca – bizantyjska, [164].



Rys. 3.28. Kupuła renesansowa, [164].

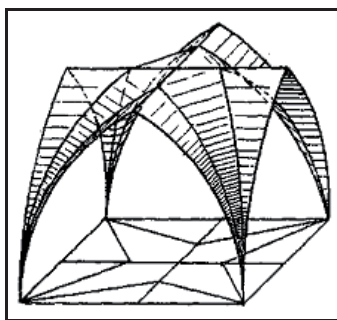
**Sklepienie żagłaste** (pruskie, kapa czeska – rys. 3.29) – sklepienie żagłowe wykonane jako kopuła o promieniu większym niż przekątna wieloboku zamykającego przestrzeń do nakrycia, obniżona i mająca odcinkowe łuki przyczelne.



Rys. 3.29. Sklepienie żagłaste, [169].

**Sklepienie pierścieniowe** – należy do tej samej kategorii co sklepienie żagłaste. Używane szczególnie do nakrycia przestrzeni prostokątnych. Różnica między sklepieniem żaglastym a pierścieniowym polega na tym, że podniebienie pierwszego jest powierzchnią obrotową, natomiast drugiego jest powierzchnią powstałą przez ruch odcinka po drugim odcinku koła, przy czym oba te odcinki koła mogą mieć strzałki równe lub różne.

**Sklepienie gwiaździste** (rys. 3.30 i rys. 3.31) - jest sklepieniem pochodnym od krzyżowego. Powstaje, gdy kozubki sklepienia krzyżowego podzieli się między żebrami przekątnymi i przyczelnymi innymi żebrami pośrednimi w ten sposób, że w planie powstaje figura gwiaździsta, mniej lub bardziej skomplikowana.



Rys. 3.30. Sklepienie gwiaździste, [164].



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

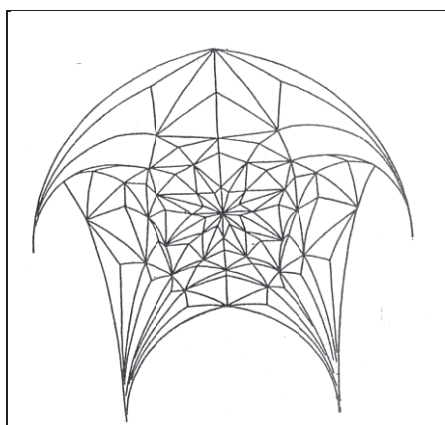


Rys. 3.31. Sklepienie gwiazdiste nawy głównej w pofranciszkańskim kościele św. Jakuba Starszego i św. Mikołaja w Chełmnie.



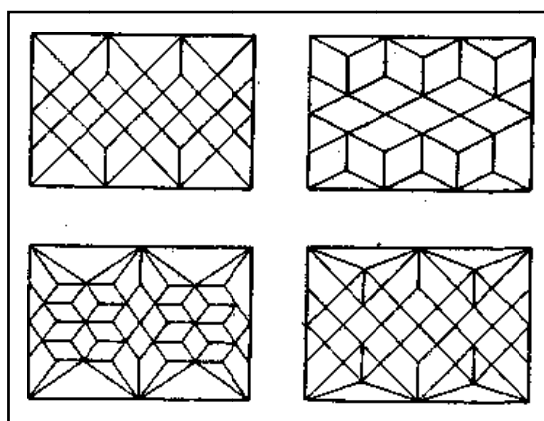
Rys. 3.32. Sklepienie kryształowe w kościele św. Jerzego w Kętrzynie.

**Sklepienie kryształowe** (rys. 3.32 i rys. 3.33) – powstaje, przez wmurowanie cegły na dwóch krążynach pod kątem  $45^\circ$  i kierunek ten utrzyma się bez zmiany, aż do przecięcia się nachylonych do siebie obu płaszczyzn ceglanych. Jest to sklepienie bardzo łatwe do wykonania, jednocześnie bogate i efektowne, generujące jednak znaczące co do wartości reakcje.

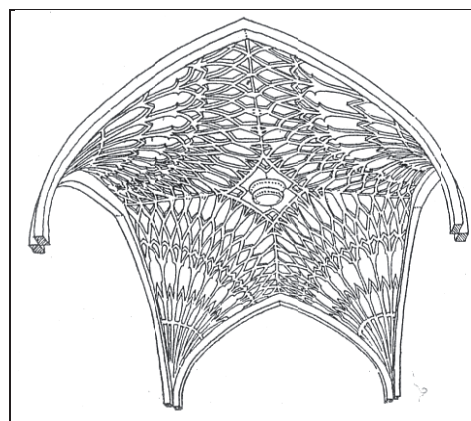


Rys. 3.33. Sklepienie kryształowe, [41].

**Sklepienie siatkowe** (rys. 3.34) – podobieństwo między sklepieniem siatkowym a sklepieniami opisanymi poprzednio polega na tym, że podstawą jego jest szkielet z żeber stanowiących w rzucie siatkę, na której opierają się części kolebek.



Rys. 3.34. Sklepienia siatkowe (rzuty), [164].



Rys. 3.35. Sklepienie wachlarzowe, [41].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

**Sklepienie wachlarzowe (lejkowe** – rys. 3.35) – jego powierzchnię wyznacza łuk obracający się wokół osi pionowej. Zasadniczo sklepienie takie stosuje się z widocznymi żebrami, które podobnie jak przy sklepieniach gwiaździstych i siatkowych stanowią szkielet dźwigający wypełnienie. Jeżeli do przesklepienia przestrzeni kwadratowej zastosuje się łuk, którego rozpiętość jest równa połowie boku kwadratu, to sklepienie nakryje tylko część przestrzeni, stanowiącą w planie cztery ćwiartki koła w narożnikach; pozostanie natomiast środek wolny od nakrycia (podobnie jak przy sklepieniu zwierciadlanym) sklepieniem płaskim ujętym w pierścień wykonany z kamienia lub cegły.

**Sklepienie stalaktytowe** – powstaje, gdy w pomieszczeniu wieloprzęsłowym nakrytym sklepieniem wachlarzowym zamiast podpierać lejki kolumnami, podwiesi się je do specjalnej konstrukcji nośnej umieszczonej nad nim.

### 3.3. Podstawy analizy pracy konstrukcji

W analizie konstrukcji murowych dominują analizy statyczne, które można podzielić na trzy główne grupy: analizę liniową, analizę nieliniową oraz analizę przeprowadzoną w oparciu o nośność graniczną. Należy również nadmienić [149], że różne metody prowadzenia analizy prowadzą do otrzymania różnych współczynników bezpieczeństwa i często różniących się wyników. W istniejącym piśmiennictwie nie ma wiarygodnych, kompletnych opracowań, w których zestawiono by wyniki analizy statycznej określonych typów sklepień pracujących pod takim samym obciążeniem zewnętrznym.

#### 3.3.1. Analiza liniowa

Analiza liniowa jest analizą, w której materiał podporządkowany jest założeniom prawa Hooke'a.

Analiza liniowa wspomaga rozumienie zachowania konstrukcji w odniesieniu do nośności, kiedy materiał nadal wykazuje zachowanie sprężyste. Z drugiej strony, analiza ta nie jest przydatna do opisu mechanizmu zniszczenia. Model liniowy jest przydatny przy identyfikacji globalnej tendencji zachowania konstrukcji i wyznaczaniu przekrojów, w których konstrukcja poddana jest naprężeniom zdolnym do naruszenia jej ciągłości.

#### 3.3.2. Analiza nieliniowa

Większość problemów w analizie konstrukcji wiąże się z efektami nieliniowymi. W analizie nieliniowej można poddać opisowi kompletną pracę konstrukcji: od momentu uplastycznienia, przez pęknięcie, do całkowitego zniszczenia. Wyróżnia się następujące rodzaje nieliniowego zachowania: *mechaniczny* (łączony z nieliniowością materiału), *geometryczny* (połączony z faktem, że zmiana punktu przyłożenia obciążenia zmienia schemat zniszczenia) i *kontaktu* (połączonego z wzajemnym oddziaływaniem na siebie dwóch sąsiednich elementów). Możliwe jest przeprowadzenie analizy nieliniowej z modelami zniszczenia przydatnymi do szacowania utraty sztywności i stateczności na poziomie globalnym i lokalnym. Ten typ analizy wymaga podania informacji w obszarze cech sprężystych i plastycznych materiałów składowych. Dostępne jest zatem uzyskanie rozkładów odkształceń i naprężeń w konstrukcji powiązanych z poziomami wyężenia co pozwala na opisanie analityczne mechanizmu zniszczenia konstrukcji.

Literatura dotycząca zastosowania tego typu analizy w konstrukcjach murowych, w tym w sklepieniach i łukach jest stosunkowo bogata [142], [50] i inne. Wielu autorów skupia się na zastosowaniu analizy nieliniowej w metodach numerycznych [138], [215].

3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

### 3.3.3. Analiza metodą nośności granicznej

Ten typ analizy jest ukierunkowany na szacowanie obciążenia granicznego. Teoretyczne podstawy, które rządzą tym rodzajem analizy są pojęciowo proste, ale wskutek złożoności zagadnienia analiza ta nie jest przydatna do interpretacji przyczyn, zasięgu zarysowań i pęknięć, odkształceń jak również innych uszkodzeń nie bezpośrednio odnoszących się przyczyn ewentualnej awarii. Ponadto użycie tej metody jest dość trudne w złożonych wieloelementowych konstrukcjach.

Powstały dwie teorie opisujące analizę nośności granicznej, teoria statyczna oraz teoria kinematyczna opisane, niestety niekompletnie, między innymi w [91], [70].

Teoria statyczna, mówiąca o tym, że czynnik prowadzący do plastycznego zniszczenia jest najważniejszym z wszystkich czynników należących do statycznie dopuszczalnego zbioru. Siły wewnętrzne są w równowadze z siłami zewnętrznymi i w żadnym punkcie nie narusza się warunków równowagi plastycznej.

Teoria kinematyczna, mówiąca o tym, że czynnik prowadzący do plastycznego zniszczenia jest co do wagi najmniej istotnym z wszystkich czynników powiązanych z możliwymi mechanizmami zniszczenia. Dla kinematycznie dopuszczalnego zbioru rozwiązań, dystrybucja szybkości przyrostu plastycznych deformacji odnosi się tu do rozkładu przegubów plastycznych.

Teorie te przyczyniły się do powstania dwóch metod obliczania „współczynnika zniszczenia”.

Metoda statyczna – zakłada przyjmowanie rozkładu statycznie dopuszczalnych naprężeń i poszukiwania ich aż do momentu, w którym, odpowiedni „współczynnik nośności” osiągnie wartość maksymalną.

Metoda kinematyczna – polega na wytworzeniu mechanizmu zniszczenia zależnego od parametrów geometrycznych, a następnie na zmniejszaniu tych współczynników, aż do otrzymania poszukiwanego mechanizmu zapoczątkowującego zniszczenie.

Model konstytutywny materiału w konstrukcjach murowych jest typu kruchego ze znaczną przewagą wytrzymałości na ściskanie nad wytrzymałością na rozciąganie. Wytrzymałość na rozciąganie jest nie tylko mała, ale również trudna do określenia z powodu znacznego rozproszenia wyników badań doświadczalnych. Analiza konstrukcji murowych z zastosowaniem metody „nośności granicznej” bada istotne aspekty zachowania się konstrukcji w momencie awarii, jak również próbuje połączyć nowoczesne techniki analizy numerycznej z prawami wykorzystywanymi w tradycyjnych teoriach.

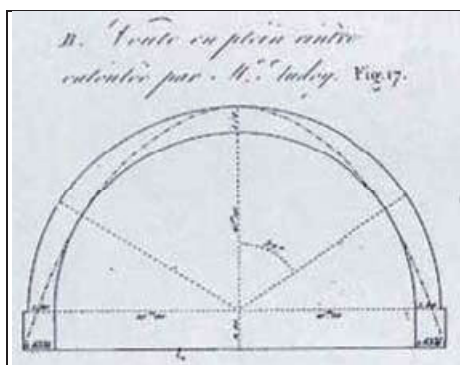
Przydatność metody „nośności granicznej” w analizie konstrukcji murowych przedstawił Heyman [104], [102], [103], który potwierdzając założenia przedstawione po raz pierwszy w [56], wysunął kilka przyjmowanych w analizie założeń dotyczących zachowania się muru, a jego wkład w tę dziedzinę nauki jest nieoceniony.

W ostatnich latach pojawiło się wiele opracowań dotyczących wykorzystania tego rodzaju analizy w opisie zachowania murów, łuków i sklepień, [53], [55], [4], [2], [3], [201], [178], [65], [238].

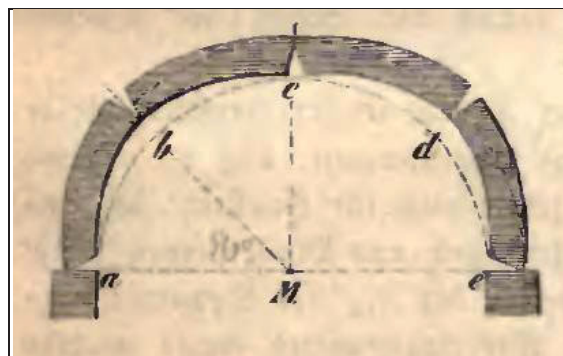
### 3.4. Konstrukcje łuków, sklepień i kopuł – analityczne modele obliczeniowe

Analiza matematyczna zakrzywionych konstrukcji ceglanych zajmowała przez długi czas ważne miejsce w rozważaniach matematyków i teoretyków konstrukcji. Powstało też wiele wytycznych bazujących w dużej mierze na praktyce inżynierskiej, jak na przykład modele pracy ([167] rys. 3.36) lub zniszczenia łuku (rys. 3.37) proponowane w [166]. Dopiero połączenie wiedzy praktycznej z rozważaniami teoretycznymi doprowadziło do lepszego zrozumienia problemu pracy statycznej łuków, sklepień i kopuł.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.36. Model pracy łuku, [167].



Rys. 3.37. Model zniszczenia łuku (widoczne przeguby), [166].

Analizując dotychczasowy stan wiedzy o szacowaniu nośności łuków, sklepień i kopuł zauważa się, że jednym z podstawowych problemów pojawiających się na etapie oceny nośności jest: przyjęcie schematu statycznego zakrzywionej konstrukcji ceglanej i zastosowanie odpowiedniej metody obliczania sił wewnętrznych w elementach konstrukcyjnych.

Aby konstruktywnie prowadzić rozważania nad statyką zakrzywionych konstrukcji murowych, celowe wydaje się ich usystematyzowanie. Systematyka ta powinna być jednak inna od systematyki dominującej w ujęciach historycznych tematu przedstawionej w rozdz. 3.2. Uzasadniony jest tu podział konstrukcji na grupy, ze względu na schemat statyczny ich pracy. Znajomość schematu statycznego pozwala na obliczenie sił wewnętrznych panujących w elementach łuków, sklepień i kopuł oraz na przeprowadzenie analizy ich pracy ze względu na bezpieczeństwo konstrukcji oraz – w razie zaistnienia przyczyn mogących skutkować awarią – na przyjęcie właściwej metody wzmacniania.

Należy jednak pamiętać, że obliczenia statyczne opierają się na różnych założeniach upraszczających, mniej lub bardziej odbiegających od rzeczywistości. Obliczenia te można wykonywać tylko z pewną ograniczoną dokładnością. Niepewność obliczeń statycznych wyraźnie wychodzi na jaw przy uwzględnianiu obciążenia. Ciężar własny konstrukcji (szczególnie jeśli chodzi o obiekty zabytkowe), wpływ obciążenia śniegiem i wiatrem są w znacznym stopniu nieznane i zależą od licznych czynników, których nie można ocenić z wystarczającą dokładnością. Również doświadczenia modelowe nie mogą usunąć całkowicie tej niepewności, [61]. Obliczenia statyczne łuków, sklepień i kopuł uszkodzonych powinny ponadto uwzględniać analityczną odpowiedź na pytanie jak uszkodzenia różnego typu (np. odspojenie wysklepki od żebra, zmiana geometrii konstrukcji) wpływają na redystrybucję sił wewnętrznych w zakrzywionych konstrukcjach ceglanych oraz na bezpieczeństwo pracy konstrukcji. Modelowanie analityczne i numeryczne musi być zatem oparte na dokładnej inwentaryzacji aktualnej geometrii konstrukcji i jego destrukcji. Jest to już dzisiaj możliwe w oparciu o skanowanie laserowe wysokiej gęstości (3D HDS).

Pomimo, że nie wszystkie rozważania matematyczne nadają się do łatwego zastosowania w praktyce, można wymienić kilka, które umożliwiają wykonanie rzetelnej analizy zachowania zakrzywionych konstrukcji murowanych. Należy również zaznaczyć, że kolejne rozwiązania nie odnoszą się tylko i wyłącznie do jednego, opisanego typu konstrukcji (np. do łuków), a wręcz przeciwnie – wiele z rozwiązań dopracowano i rozwinięto na pozostałe typy zakrzywionych konstrukcji ceglanych.

### 3.4.1. Wzory empiryczne w obliczeniach łuków

Pierwszym krokiem w projektowaniu zakrzywionych konstrukcji murowych, a co za tym idzie i w analizie tych konstrukcji, jest wybór (opis) geometrii łuku (rozpiętość,

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

wysokość, grubość, kształt). Między innymi w pracach [63], [199] można spotkać empiryczne wzory (podane poniżej) na wyznaczenie grubości łuków opracowane (na podstawie doświadczeń własnych i prostych testów) przez inżynierów ery wiktoriańskiej.

$$\text{– Rankine} \quad h = \sqrt{36650 \cdot S} \quad (3.1)$$

$$\text{– Troutwine} \quad h = 82 + 182 \sqrt{\frac{S}{2} + f} \quad (3.2)$$

$$\text{– Depuit – łuki półokrągłe} \quad h = \sqrt{40000 \cdot S} \quad (3.3)$$

$$\text{– Depuit – wycinek łuku} \quad h = \sqrt{20000 \cdot S} \quad (3.4)$$

$$\text{– Sejourne – łuki półokrągłe} \quad h = 150 \cdot (1 + \sqrt{S}) \quad (3.5)$$

$$\text{– Hurst} \quad h = 220 \sqrt{f} \quad (3.6)$$

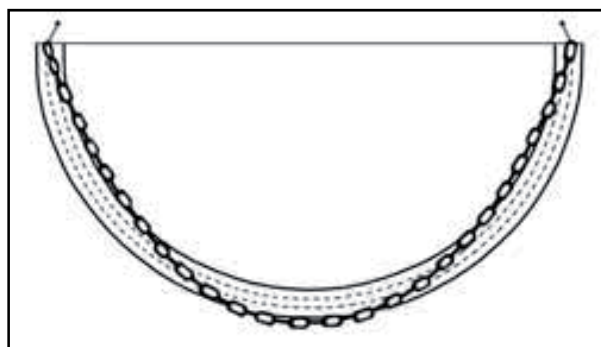
gdzie:

- $h$  – grubość przekroju,
- $S$  – rozpiętość łuku,
- $f$  – strzałka łuku.

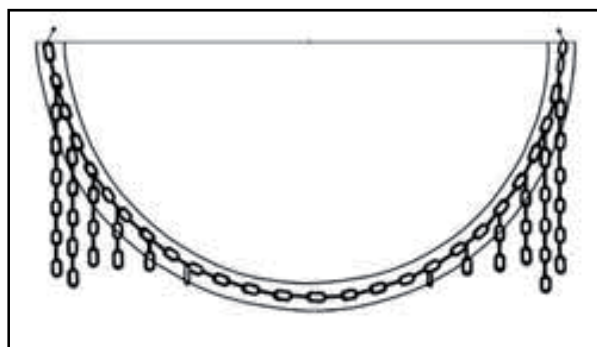
### 3.4.2. Metoda łańcuchowa

Metoda ta została przedstawiona przez angielskiego inżyniera Roberta Hooke'a już w XVII wieku, [107]. Autor zauważył korelację pomiędzy rozkładem naprężeń w powieszonym łańcuchu a przebiegiem linii ciśnień w łukach ceglanych.

Metoda, która jest bardzo prosta, zakłada, że łuk/sklepienie jest w stanie uwolnionym. Oczywiście posiada jakiś kształt, grubość lub rozpiętość, ale jest badany bez żadnego obciążenia w stanie pierwotnym (rys. 3.38 i rys. 3.39).



Rys. 3.38. Swobodnie powieszony łańcuch.



Rys.3.39. Po dodaniu kolejnych ogniwo linia łańcucha pokrywa się z osią obojętną w łuku.

Jedną z wielu osób korzystających ze zmodyfikowanej i ulepszonej metody łańcuchowej, który wykorzystywał paraboliczne łuki i regułę równowagi krzywej łańcuchowej, tworząc model przestrzenny budynku (rys. 3.40 i 3.41) i badając w nim siły grawitacji był kataloński architekt Antonio Gaudí, twórca między innymi bazyliki La Sagrada Familia (rys. 3.42) czy Casa Milà (rys. 3.43) w Barcelonie.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.40. Studium stabilności – model przestrzenny.



Rys. 3.41. Studium stabilności – model przestrzenny.



Rys. 3.42. Bazylika La Sagrada Familia oraz jedna z naw bocznych.

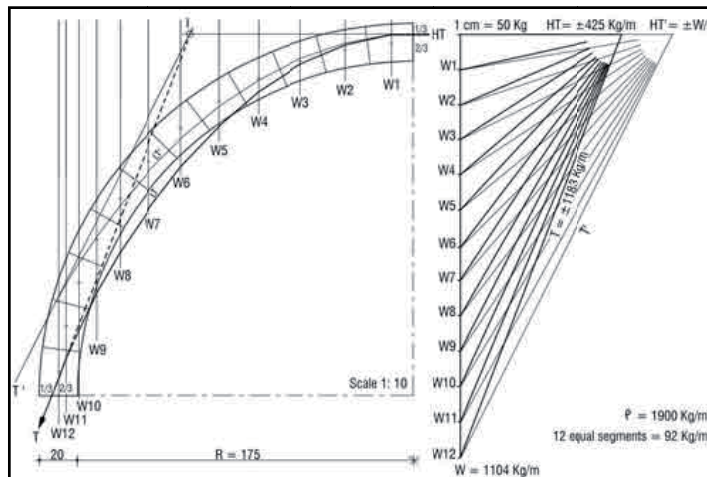


Rys. 3.43. Łuki paraboliczne w Casa Milà.

## 3.4.3. Metoda liniowa

Metodę liniową opisał XIX wieczny francuski inżynier Méry, [167]. Przekształcił on klasyczną liniową metodę, by móc obliczyć siły działające w łukach, (rys. 3.44).

Zgodnie z tą metodą pół łuku rysuje się w dużej skali i dzieli na małe segmenty, które są równej długości. Oblicza się ich ciężary i wyznacza dla każdego elementu środek ciężkości. Ocenia się intensywność rozporu poziomego, wyznacza poziomą i pionową składową parcia. W dalszym kroku graficznie wyznacza się położenie linii ciśnień.



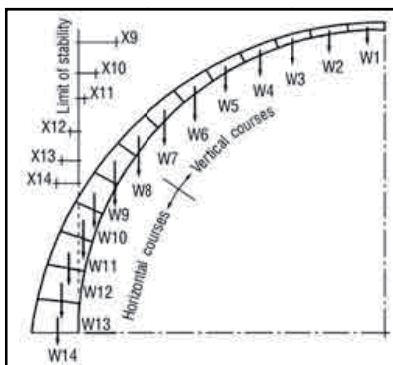
Rys. 3.44. Graficzne przedstawienie metody liniowej, [167].

3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

### 3.4.4. Metoda optymalizacji przekroju

Metoda optymalizacji przekroju powstała na bazie dwóch poprzednich metod i została specjalnie przekształcona dla projektujących i budujących łuki oraz sklepienia bez krążyn i szalunków. Polega na stosowaniu coraz mniejszych (cieńszych) elementów łuku w wyższych jego partiach, w miarę jego powstawania (rys. 3.45 i 3.46).

Metoda wiąże się w sposób oczywisty z kształtem obwiedni sił wewnętrznych w sklepieniu.



Rys. 3.45. Model optymalizacji przekroju łuku.



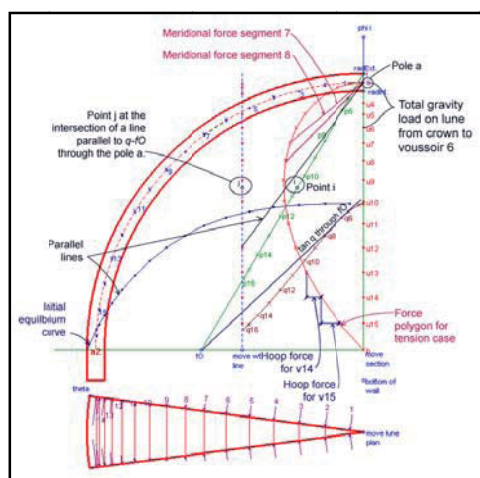
Rys. 3.46. Sklepienie z wykorzystaniem optymalizacji przekroju.

### 3.4.5. Metoda Eddy'ego

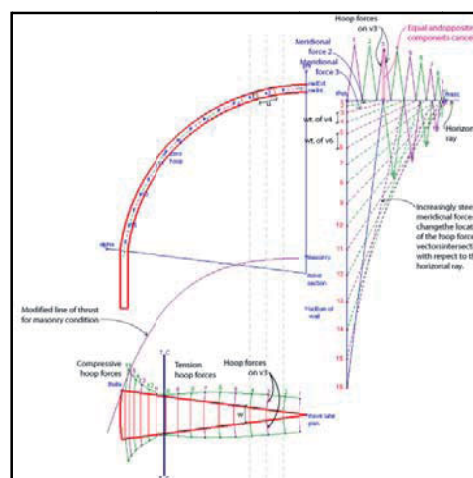
Metoda Eddy'ego jest jedną z wielu powstałych metod graficznych, [72]. Odnosi się do analizy półkolistych ceglanych kopuł, (rys. 3.47). Zakłada, że siły powstające w ściskanych pierścieniach kopuły nie przyczyniają się do jej konstrukcyjnej stabilności. Metoda w sposób bardzo konserwatywny określa parametry, takie jak współczynnik minimalnej grubości kopuły do jej promienia. Sprowadza to budowę kopuły do grupy łuków obracających się względem wspólnej osi.

### 3.4.6. Metoda Wolfe'a

Metoda Wolfe'a jest metodą graficzną, bazującą na wnioskach zawartych w pracach [72], [209], opartą o teorię błonową. Zakłada, że wewnętrzne siły działają wzdłuż teoretycznej przepony o zerowej grubości w środkowym promieniu przekroju kopuły. Podobnie jak w analitycznym podejściu w teorii błonowej, ta graficzna metoda dostarcza tylko aproksymacji funkcji wewnętrznych sił w kopułach, (rys. 3.48).



Rys. 3.47. Schemat wyznaczania geometrii kopuły metodą Eddy'ego.



Rys. 3.48. Schemat wyznaczania geometrii kopuły metoda Wolfe'a.

### 3.4.7. Metoda łuków trójprzegubowych

Analityczne rozwiązywanie łuków trójprzegubowych zostało przedstawione na podstawie łuku o podporach umiejscowionych na różnych wysokościach. Umiejętność rozwiązania tego rodzaju łuku jest jednoznaczna z umiejętnością rozwiązania łuku o podporach umieszczonych na jednym poziomie. Analizę przeprowadzono opierając się między innymi na [132], [71], [214].

**Reakcje podporowe** - w łuku występują reakcje ukośne styczne do osi łuku zawierające składowe pionowe  $V_A'$  i  $V_B'$  na składowe leżące na prostej, łączącej punkty  $A$  i  $B$  (rys. 3.49).

- Wyznaczenie składowej pionowej  $V_A'$ :

$$\sum M_B = 0 \quad (3.7)$$

$$V_A' \cdot l - P_1' \cdot b_1 - P_2' \cdot b_2 - \dots - P_n \cdot b_n = 0 \quad (3.8)$$

$$V_A' = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + \dots + P_n \cdot b_n}{l} \quad (3.9)$$

$$V_A' = \frac{\sum_{i=1}^{k=n} P_i \cdot b_i}{l} \quad (3.10)$$

$$V_A' = \frac{M_B}{l} \quad (3.11)$$

Składową pionową w łuku oblicza się jak belkę swobodnie podpartą, obciążoną analogicznie jak łuk, (rys. 3.49).

- Podobnie można otrzymać drugą składową pionową  $V_B'$ :

$$\sum M_A = 0 \quad (3.12)$$

$$V_B' \cdot l - P_1' \cdot a_1 - P_2' \cdot a_2 - \dots - P_n \cdot a_n = 0 \quad (3.13)$$

$$V_B' = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + \dots + P_n \cdot a_n}{l} \quad (3.14)$$

$$V_B' = \frac{\sum_{i=1}^{k=n} P_i \cdot a_i}{l} \quad (3.15)$$

$$V_B' = \frac{M_A}{l} \quad (3.16)$$

- Reakcję  $H_A'$  wyznacza się korzystając z warunku, że suma momentów zginających (z lewej lub z prawej strony) w przegubie jest równa zero:

$$\sum M_C^l = 0 \quad (3.17)$$

$$V_A' \cdot l_A - P_1(L_A - a_1) - P_2(L_A - a_2) - \dots - H_A' \cdot f' = 0 \quad (3.18)$$

$$H_A' = \frac{V_A' \cdot l_A - P_1(L_A - a_1) - P_2(L_A - a_2) - \dots}{f'} \quad (3.19)$$

Licznik powyższego równania przedstawia moment zginający w przekroju  $C$  odpowiedniej belki prostej, swobodnie podpartej, zatem:

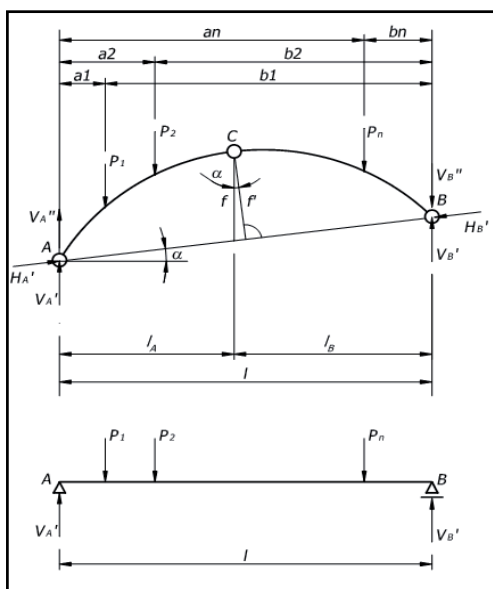


## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

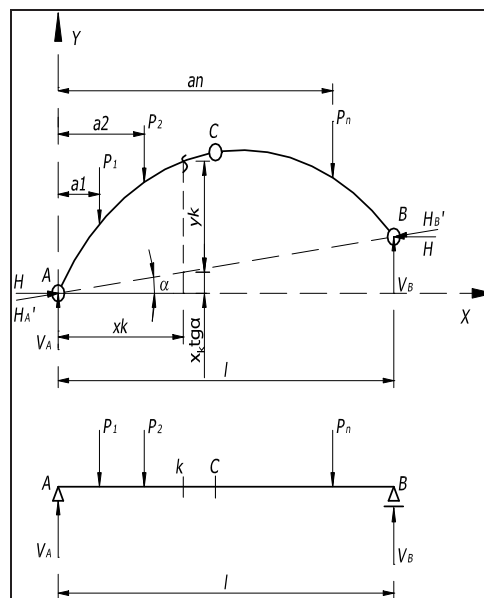
$$H_A' = \frac{M_C^o}{f'} \quad \text{gdzie } f' = f \cdot \cos \alpha \quad (3.20)$$

skąd:

$$H_A' = \frac{M_C^o}{f \cdot \cos \alpha} \quad (3.21)$$



Rys. 3.49. Schemat statyczny łuku trójprzegubowego. Metoda analityczna. Obliczenie reakcji podporowych, [132].



Rys. 3.50. Schemat statyczny łuku trójprzegubowego. Metoda analityczna. Obliczenie sił wewnętrznych w łuku, [132].

Przy obciążeniach wyłącznie pionowych, gdy  $\sum X = 0$ , otrzymuje się:

$$H_A' = H_B' \quad (3.22)$$

Rozkładając składową na kierunki x i y, wartość poziomej reakcji podporowej łuku czyli tzw. Rozpór opisuje wyrażenie:

$$H_A = H_A' \cdot \cos \alpha \quad (3.23)$$

Podstawiając do (3.23) wyrażenie (3.21) otrzymuje się:

$$H_A = \frac{M_C^o}{f} \quad (3.24)$$

Można zapisać:

$$H_A = H_B = H \quad (3.25)$$

stąd:

$$H = \frac{M_C^o}{f} \quad (3.26)$$

Ponieważ reakcje  $H_A'$  i  $H_B'$  dają również składowe reakcje pionowe  $V_A''$  i  $V_B''$ :

$$V_A'' = H_A' \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oraz} \quad V_B'' = H_B' \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.27)$$

zatem należy je dodać do składowych reakcji pionowych  $V_A'$  i  $V_B'$ . Stąd:

3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$V_A = V_A' + V_A'' \quad \text{oraz} \quad V_B = V_B' - V_B'', \quad (3.28)$$

$$V_A = \frac{M_B}{l} + H_A \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oraz} \quad V_B = \frac{M_A}{l} - H_B \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.29)$$

$$V_A = \frac{M_B}{l} + \frac{M_C^o}{f} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oraz} \quad V_B = \frac{M_A}{l} - \frac{M_C^o}{f} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.30)$$

Kiedy podpory łuku znajdują się na jednym poziomie:

$$\alpha = 0,$$

zatem:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,$$

stąd:

$$V_A = \frac{M_B}{l} \quad \text{oraz} \quad V_B = \frac{M_A}{l}. \quad (3.31)$$

**Momenty zginające** - po wyznaczeniu reakcji podporowych można przystąpić do obliczania momentów zginających w dowolnym przekroju  $k$ . Oblicza się je jako sumę momentów wszystkich sił działających z lewej lub z prawej strony danego przekroju, (rys. 3.50):

$$M_k = V_A \cdot x_k - P_1(x_k - a_1) - P_2(x_k - a_2) - H(y_k + x_k \operatorname{tg} \alpha) \quad (3.32)$$

Podstawiając wyliczone wcześniej reakcje  $V_A$  i  $H$ , otrzymuje się:

$$M_k = (V_A' + H \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot x_k - P_1(x_k - a_1) - P_2(x_k - a_2) - H(y_k + x_k \cdot \operatorname{tg} \alpha) \quad (3.33)$$

$$M_k = [V_A' \cdot x_k - P_1(x_k - a_1) - P_2(x_k - a_2)] - H \cdot y_k \quad (3.34)$$

$$M_k = [V_A' \cdot x_k - P_1(x_k - a_1) - P_2(x_k - a_2)] - H \cdot y_k \quad (3.35)$$

Identyczne wzory otrzymują się dla łuku o podporach na jednym poziomie.

**Siły poprzeczne** – oblicza się jako sumy rzutów wszystkich sił działających z jednej strony danego przekroju na kierunek prostopadły do osi łuku w tym przekroju.

Znakowanie siły poprzecznej, (rys. 3.50):

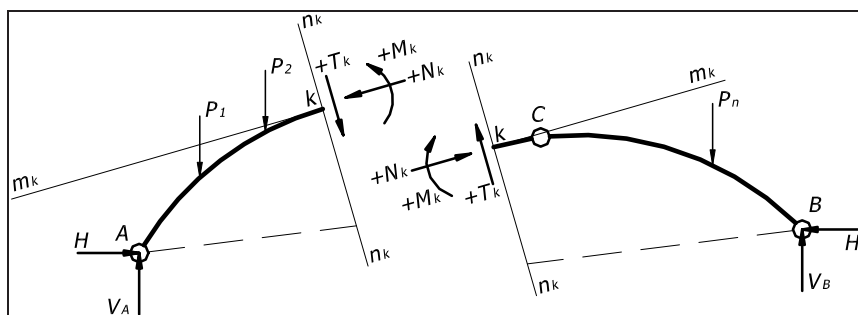
- za dodatnią uważa się siłę poprzeczną, która usiłuje obrócić dany fragment rozpatrywanego przekroju zgodnie ze wskazówkami zegara, tj. w prawą stronę, a tym samym rozciąga włókna w dolnej części przekroju,
- za ujemną uważa się siłę poprzeczną, która usiłuje obrócić dany fragment rozpatrywanego przekroju w lewą stronę.

Dla określenia siły poprzecznej  $T_k$  w dowolnym przekroju  $k$  łuku prowadzimy styczną  $m_k$  do osi łuku w punkcie  $k$  i normalną  $n_k$  leżącą w płaszczyźnie poprzecznego przekroju łuku (rys. 3.51). Rzutując wszystkie siły działające po lewej stronie przekroju na normalną  $n_k$  otrzymamy:

$$T_k^l = V_A \cdot \cos \varphi_k - P_1 \cdot \cos \varphi_k - P_2 \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k \quad (3.36)$$

$$T_k^l = (V_A - P_1 - P_2) \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k \quad (3.37)$$

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.51. Znakowanie sił przekrojowych (poprzecznej i podłużnej) w łuku, [132].

Dla odpowiadającej belki swobodnie podpartej,  $\varphi_k = 0$ , stąd siły poprzeczne w belkach prostych osiągają większe wartości aniżeli w łukach.

**Siły podłużne (osiowe)** – oblicza się jako sumy rzutów wszystkich sił działających z jednej strony danego przekroju na kierunek stycznej do osi łuku w tym przekroju.

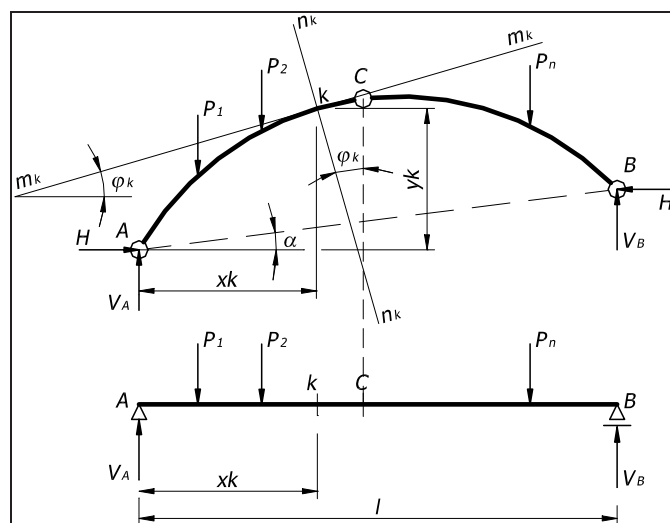
Znakowanie siły poprzecznej (rys. 3.52):

- za dodatnią uważa się siłę podłużną ściskającą,
- za ujemną uważa się siłę podłużną rozciągającą.

Rzutuując wszystkie siły działające po lewej stronie przekroju na kierunek stycznej  $m_k$  otrzymuje się :

$$N_k^l = V_A \cdot \sin \varphi_k - P_1 \cdot \sin \varphi_k - P_2 \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k \quad (3.38)$$

$$N_k^l = (V_A - P_1 - P_2) \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k \quad (3.39)$$

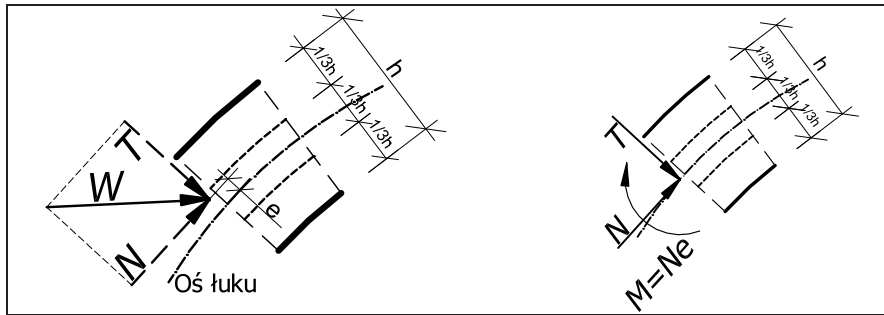


Rys. 3.52. Schemat statyczny łuku trójprzegubowego. Obliczanie sił poprzecznych i podłużnych. Metoda analityczna, [132].

**Linia ciśnień** – oddziaływanie jednej części łuku na drugą można zastąpić siłą wypadkową  $W$  wszystkich sił działających z jednej strony przekroju. Siłę wypadkową  $W$  można dalej rozłożyć na jej składowe: siłę osiową  $N$  oraz tnącą  $T$ , (rys. 3.53). Przeniesienie składowej  $N$  działającej na mimośrodku  $e$  do osi łuku rekompensuje moment  $M = N \cdot e$ . Jeżeli dokona się podziału łuk przekrojami poprzecznymi na szereg odcinków i w każdym odcinku określi się mimośrodek  $e$  dla siły ściskającej  $N$  to wyniesie on:

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$e = \frac{M}{N} \quad (3.40)$$



Rys. 3.53. Położenie siły wypadkowej w wycinku łuku, [132].

Jeżeli odkładając jego wartości dodatnie nad osią, a ujemne pod osią łuku i połączy się końce, to łącząca je linia przedstawia przebieg wypadkowych sił  $W$  działających na kolejne przekroje łuku. Linia ta nosi nazwę linii ciśnień. Obrazuje ona przebieg sił ściskających. W przypadku obciążenia  $q$  równomiernie rozłożonego (ciągłego), linia ta jest krzywą ciągłą. Gdy obciążenie stanowią siły skupione  $P$  – jest linią łamaną. Jej załamania mają miejsce na liniach działania tych sił. Na podporach, linia ciśnień przechodzi przez przeguby podporowe i ma kierunek reakcji podporowych ( $R_A$  i  $R_B$ ).

W łuku trójprzegubowym linia ciśnień przechodzi przez wszystkie trzy przeguby, a gdy obciążenie jest symetryczne – w zworniku (kluczu) przebiega poziomo.

Linia ciśnień obrazuje pracę łuku. Im bliżej osi łuku przechodzi linia ciśnień, tym mniejsze są momenty zginające i bardziej równomierny rozkład naprężeń.

**Naprężenia normalne** – na podstawie momentów zginających i sił podłużnych (siły poprzeczne mają na tyle mały wpływ, że są pomijane) oblicza się naprężenia we włóknach skrajnych w dowolnym przekroju łuku ze wzoru:

$$\sigma = \mp \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (3.41)$$

Dla przekroju prostokątnego o wysokości  $h$  wzór ten przyjmuje postać:

$$\sigma = \mp \frac{N}{A} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot e}{h} \right) \quad (3.42)$$

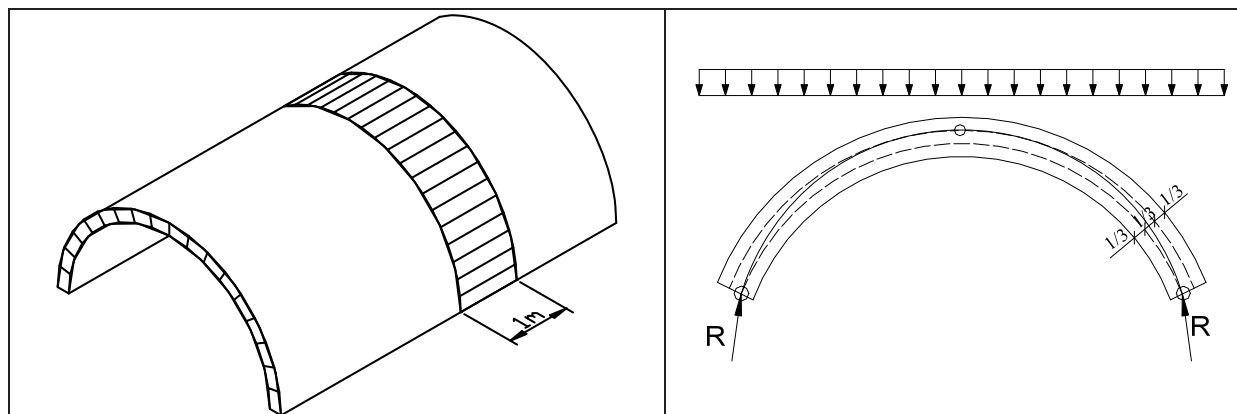
Analizując powyższe wyrażenie, łatwo zauważyć, że dla  $e < \frac{1}{6} h$ , tj. gdy wypadkowa nie wychodzi ze środkowej  $\frac{1}{3}$  części przekroju czyli z tzw. rdzenia przekroju, w łuku występują tylko naprężenia ściskające. Przy  $e = \frac{1}{6} h$  mamy naprężenia dodatnie (jednakowego znaku), przy  $e > \frac{1}{6} h$  wykres naprężeń zmienia znak. Im linia ciśnień jest bliżej łuku, tym równomierniejszy, a tym samym korzystniejszy jest rozkład naprężeń normalnych. W przekrojach poprzecznych, w których linia ciśnień pokrywa się z osią łuku ( $e = 0$ ), naprężenie jest stałe,  $\sigma = \frac{P}{A} = \text{const}$ .

### 3.4.8. Metody obliczania sklepień kolebkowych

W pracy [132] zaproponowano traktowanie sklepienia kolebkowe jako szereg przylegających do siebie łuków bezprzegubowych o szerokości 1 metra, (rys. 3.54) Dalszym uproszczeniem proponowanym w cytowanej pracy jest obliczanie konstrukcji jako symetrycznie obciążonych łuków trójprzegubowych z przegubami w zworniku i u wezłowi,

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

(rys. 3.55). Przy obciążeniu niesymetrycznym przyjęcie schematu statycznego pokazano na rys. 3.56, [161].

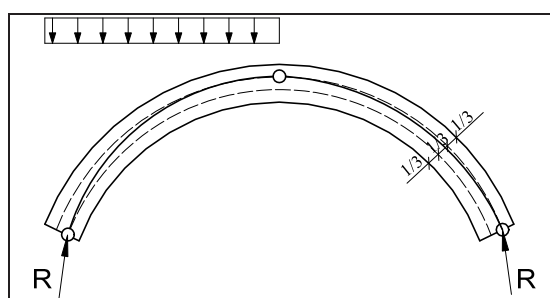


Rys. 3.54. Sklepienie kolebkowe jako przylegające do siebie pasma łuków o szerokości 1 m, [161].

Rys. 3.55. Schemat sklepienia kolebkowego równomiernie obciążonego, [161].

Analizę statyczną takich łuków przeprowadza się np. graficznie, wyznaczając linię ciśnień, która nie powinna wyjść z obszaru rdzenia przekroju. Największą siłą obciążającą łuk jest reakcja  $R$ . Jeżeli jest ona przyłożona w punkcie rdzennym przekroju, to największe naprężenie ściskające wyznacza się ze wzoru, [161].

$$\sigma_{\max} = \frac{2R}{A} \quad (3.43)$$

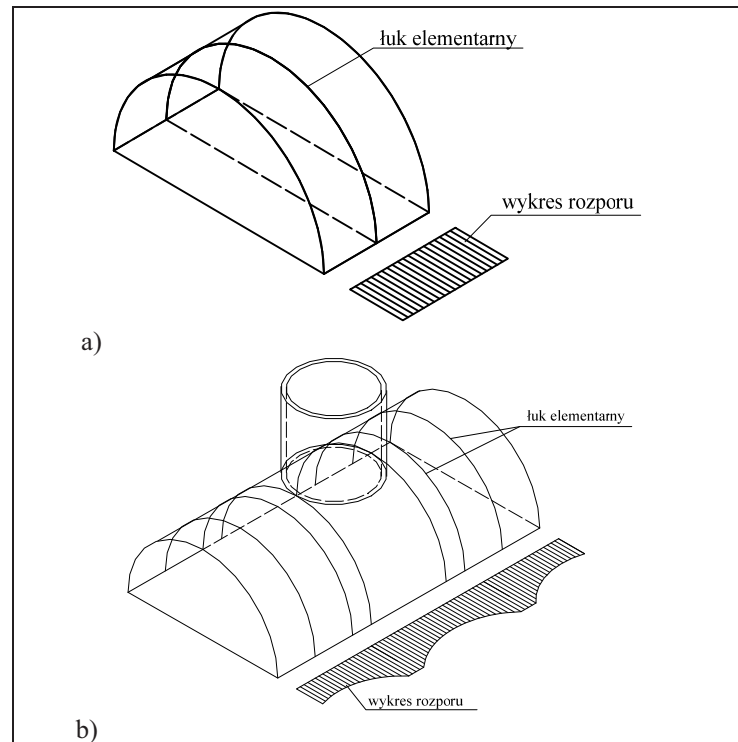


Rys. 3.56. Schemat sklepienia kolebkowego obciążonego niesymetrycznie, [161].

Również w rozważaniach nad nośnością graniczną sklepień prowadzonych w pracy [111] zaproponowano, jak w [132], aby traktować tego typu sklepienia jako szereg pasm łukowych o jednostkowej szerokości. Stwierdzono tu równocześnie, że należy je obliczać jako łuki bezprzegubowe. Konieczność traktowania pasm łukowych jako zamocowanych w węzłach wynika wg. autora [111] z faktu, że mimośrodkowo zaczepione reakcje podporowe dają momenty utwierdzenia. Proponuje on również zastosowanie schematu pasm łukowych w przypadku sklepień kolebkowych z żebrami, o ile nie zachodzi niebezpieczeństwo lokalnego zniszczenia pól międzyłukowych. Układy takie można obliczać jako pasma łukowe o przekroju teowym pod warunkiem, że sklepienie ma znaczną długość wzdłuż tworzącej lub gdy jego podparcie zabezpiecza go przed przemieszczeniem w tym kierunku. Przy niezmiennym obciążeniu rozłożonym wzdłuż sklepienia, nośność i odkształcalność każdego łuku są takie same. Na rys. 3.57a pokazano wykres sił rozporowych.

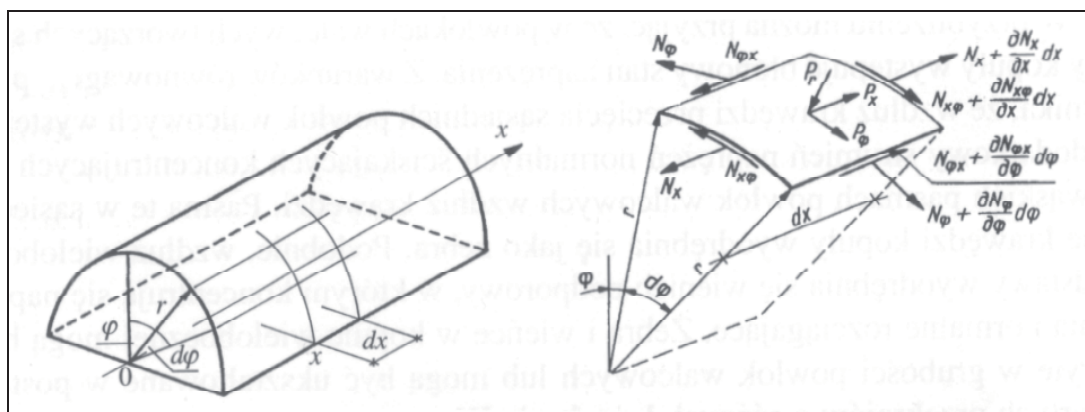
Jeżeli sklepienie obciążone jest w sposób skokowo zmienny lub gdy występują pogrubienia poprzeczne tworzące żebra lub łuki poprzeczne, to każde pasmo sklepienia traktowane jest jako odrębnie odkształcalny blok (rys. 3.57b), [161].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.57. Sklepienie kolebkowe: a) zwykłe, b) obciążone w zworniku obciążeniem skupionym, [161].

Jeszcze inny sposób podejścia do obliczania sklepień kolebkowych zawarto w [61], [163]. Propozycja ta bazuje na rozwiązaniu takich konstrukcji jako cienkich powłok walcowych o rzucie prostokątnym, (rys. 3.58). Założono, że powłoka zakończona jest dwiema belkami brzegowymi i dwoma łukami brzegowymi, którymi mogą być przepony lub ściany poprzeczne. Płaszczyzny te są prostopadłe do płaszczyzny, w której leżą osie dźwigarów brzegowych. Konstrukcje pracują tu w stanie błonowym, wielkość sił przekrojowych zależy tylko od obciążających powłokę sił pionowych, nie ma na nie natomiast wpływu sposób podparcia.



Rys. 3.58. Model sklepienia kolebkowego w stanie błonowym wraz z siłami przekrojowymi.

Dla sił stycznych zachodzi oczywista równość  $N_{\varphi x} = N_{x\varphi}$ . Siły przekrojowe  $N_{\varphi}$ ,  $N_x$  i  $N_{\varphi x}$  są funkcjami dwóch zmiennych  $x$ ,  $\varphi$ .

Równania równowagi wycinka powłoki walcowej mają postać:

$$N_{\varphi} + p_r r = 0 \quad (3.44)$$

3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$\frac{\delta N_{x\varphi}}{\delta x} + \frac{1}{r} \frac{\delta N_{\varphi}}{\delta \varphi} + p_{\varphi} = 0 \quad (3.45)$$

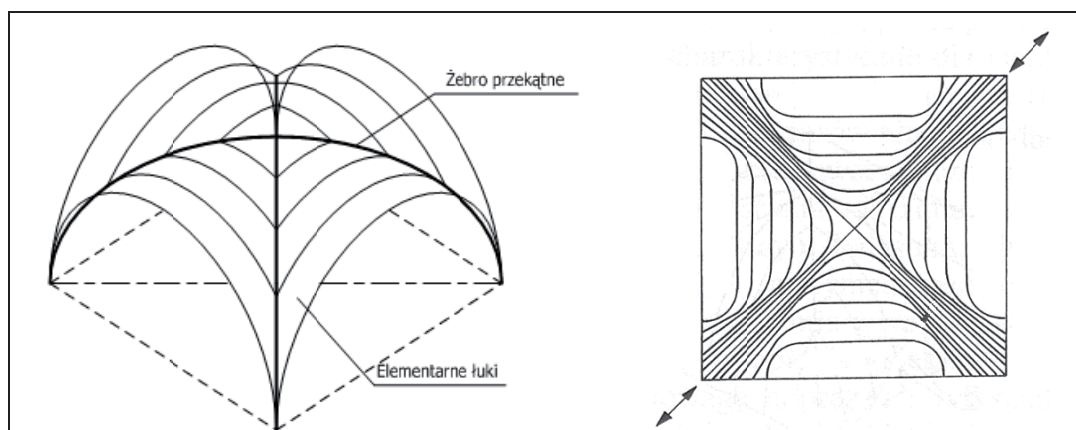
$$\frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{1}{r} \frac{\delta N_{x\varphi}}{\delta \varphi} + p_x = 0 \quad (3.46)$$

### 3.4.9. Metody obliczania sklepień krzyżowo – żebrowych

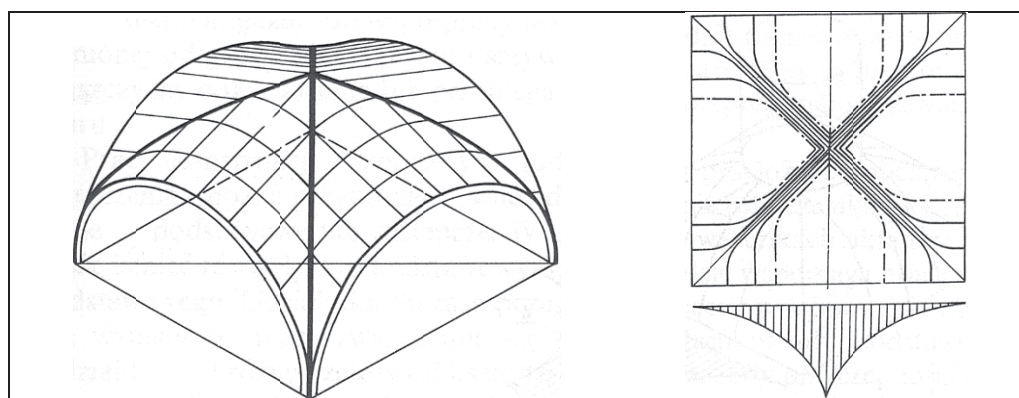
Obliczenia sklepień krzyżowo – żebrowych opierają się na założeniu, że całość obciążenia jest przenoszona przez żebro wraz ze współpracującą na pewnej szerokości wysklepką.

Modelem pracy sklepienia krzyżowego normalnego jest układ elementarnych łuków tworzących „siodełka” o różnych rozpiętościach i powierzchniach, rosnących od szczytu sklepienia w kierunku podpór. Obciążenia pionowe i siły rozporu przekazujące się na cztery żebra przekątne, zwiększają się również w kierunku podpór. Są niewielkie w zworniku, maksymalne u węzłowania. Strefa szczytowa jest zbyt słaba, aby przenosić duże obciążenia. Masywne podpory u węzłowania przejmują obciążenia i duże siły rozporu od żebier przekątnych (rys. 3.59) [161].

Modelem pracy sklepienia krzyżowego podwyższonego jest również system przenikających się „siodełek”, lecz wzmocnionych prostopadłymi elementarnymi półłukami. Ich rozporry skierowane do środka sklepienia, ściskają żebra przekątne. Półłuki przyczyniają się do bardziej równomiernego rozłożenia wewnętrznych sił w sklepieniu, przekazując część obciążenia pionowego i rozporu z żebier przekątnych na obrzeże sklepienia (na mury lub łuki podporowe). Udział półłuków w pracy sklepienia jest tym większy, im większa jest strzałka wzniesienia sklepienia ( $f > L_0$  – rys. 3.60).



Rys. 3.59. Model sklepienia krzyżowego podzielonego na elementarne łuki oraz model stanu naprężeń układu podstawowego, [161].

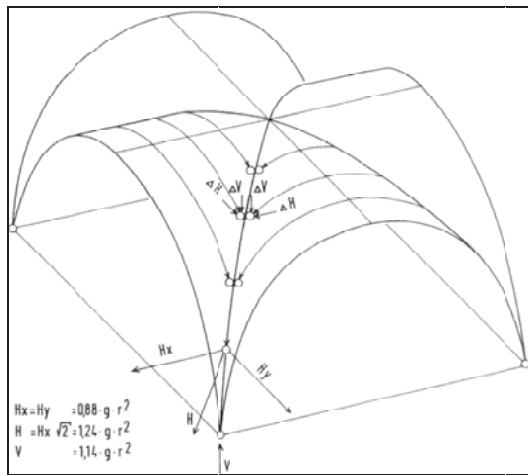


Rys. 3.60. Model sklepienia krzyżowego podwyższonego oraz model stanu naprężeń układu podstawowego i zastępczego, [161].

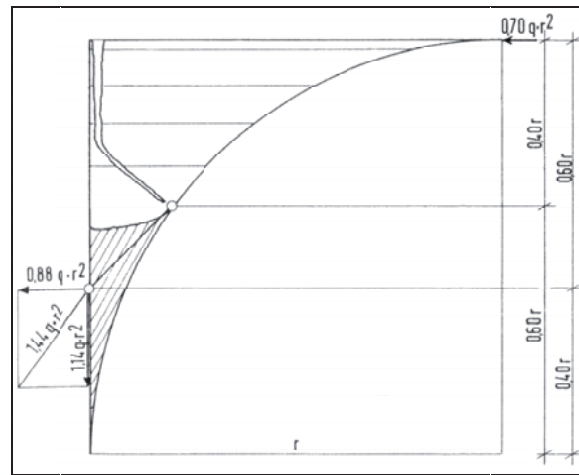
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

W rozważaniach prowadzonych przez Piepera w pracy [184] ograniczono się do przedstawienia modelu pracy sklepienia opartego na planie kwadratu. Zaproponowano prosty sposób obliczania reakcji podporowych oraz bardziej złożoną analizę, mającą na celu potwierdzenie prawidłowości przyjętego uproszczonego sposobu obliczania reakcji. W wyniku tej analizy, poza potwierdzeniem prawidłowości obliczania reakcji, uzyskuje się przebieg linii ciśnień w żebrze sklepienia. Idea zaproponowanego sposobu obliczeń bazuje na wydzieleniu z wysklepki łuków trójprzegubowych, z których reakcjami obciąża się żebro, (rys. 3.61). Wysklepki traktowane są jedynie jako elementy przekazujące na żebra obciążenia zebrane z całej powierzchni sklepienia. Traktowanie żebrowo jako jedynych elementów nośnych, bez uwzględnienia współpracy wysklepek, uzasadniony jest licznymi przykładami zniszczeń wysklepek, które nie pociągnęły za sobą destrukcji całego sklepienia, (rys. 3.62).

Pewne modyfikacje tej metody można znaleźć w [130], [116], gdzie zaproponowano rozwinięcie metody Piepera. Zaproponowano stosowanie sposobu obliczeń również do sklepień wykonanych na planie prostokąta. W rozważaniach podjęto również problem prowadzenia obliczeń statycznych sklepień, w których zaszły procesy destrukcyjne typu: odspojenie wysklepki od żebra oraz deformacja żebra. Jest to szczególnie istotne w przypadku oceny stanu technicznego sklepień i podejmowaniu decyzji o ich ewentualnym zabezpieczeniu.

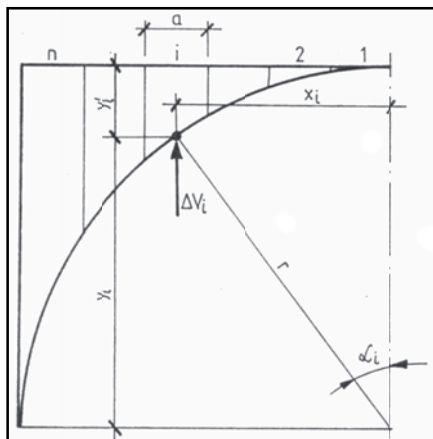


Rys. 3.61. Schemat statyczny sklepienia wg. metody Piepera [184].

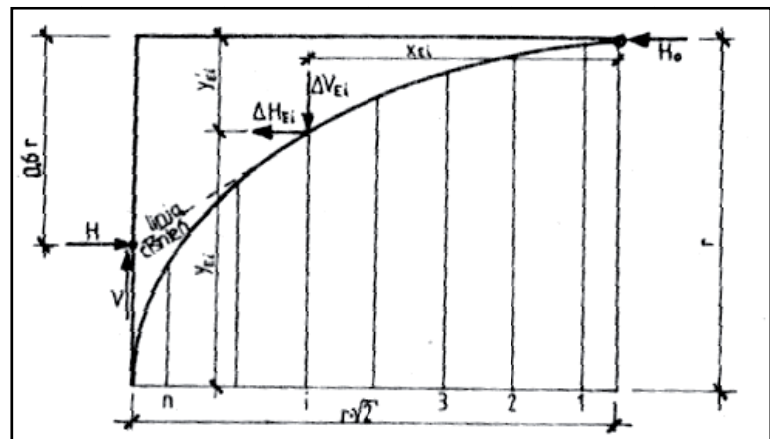


Rys. 3.62. Schemat zarysowania sklepienia wg. Piepera [184].

Tok obliczeń sklepienia krzyżowo-żebrowego bazujący na rys. 3.63 – 3.64, przedstawiono za [130], [116], poniżej.



Rys. 3.63. Podział wysklepki na pasma łukowe, [130].



Rys. 3.64. Układ sił obciążających i geometria żebra sklepienia, [116].



3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

– Reakcje pionowe pasm łuku (rys. 3.63) oblicza się wg. wzoru (3.47):

$$\Delta V_i = \frac{2\pi r}{4} \cdot a \cdot q \cdot \frac{\alpha_i}{90}, \quad (3.47)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$

Wprowadzając siły zastępcze  $\Delta \Delta V_i$  (3.48) za pomocą (3.49) można otrzymać reakcje poziome pasm:

$$\begin{cases} \Delta \Delta V_i = \Delta V_i \\ \Delta \Delta V_i = \Delta V_i - \Delta V_{i-1} \end{cases}, \quad (3.48)$$

dla  $i = 2, 3, \dots, n$

$$\begin{cases} \Delta H_i = 0 \\ \Delta H_i = \frac{\Delta V_i \cdot x_i - \sum_{k=1}^i \Delta \Delta V_k \cdot z_k}{r - r \cos \alpha_i} \end{cases}, \quad (3.49)$$

dla  $i = 2, 3, \dots, n$

– Siły obciążające żebro oblicza się ze wzorów:

$$\Delta V_{E_i} = 2\Delta V_i, \quad (3.50)$$

$$\Delta H_{E_i} = \sqrt{2}\Delta H_i, \quad (3.51)$$

– Reakcje podporowe sklepienia:

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_{E_i}, \quad (3.52)$$

$$H = \frac{-\sum_{i=1}^n \Delta V_{E_i} \cdot x_{E_i} + \sum_{i=1}^n \Delta H_{E_i} \cdot y_{E_i} + r \cdot \sqrt{2} \cdot V}{0,6 \cdot r}, \quad (3.53)$$

– Siłę  $H_o$  w zworniku oblicza się ze wzorów:

$$H_o = H - \sum_{i=1}^n \Delta H_{E_i}, \quad (3.54)$$

a siły w poszczególnych przekrojach żebra wynoszą:

$$\begin{cases} H_{E_i} = H_o \\ H_{E_i} = H_o + \sum_{k=1}^{i-1} \Delta H_{E_i} \end{cases}, \quad (3.55)$$

dla  $i = 2, 3, \dots, /n+1/$

$$\begin{cases} V_{E_i} = 0 \\ V_{E_i} = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta V_{E_i} \end{cases}, \quad (3.56)$$

dla  $i = 2, 3, \dots, /n+1/$

3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

- Wartości mimośrodków  $e_i$  na których działają siły (przebieg linii ciśnień) opisane są wyrażeniami:

$$\begin{cases} \Delta y'_i = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{n} \cdot \frac{V_{E_i}}{H_{E_i}} \\ \Delta y'_{n+i} = 0,5 \cdot \frac{r \cdot \sqrt{2}}{n} \cdot \frac{V_{E_{n+1}}}{H_{E_{n+1}}} \end{cases} \quad (3.57)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$

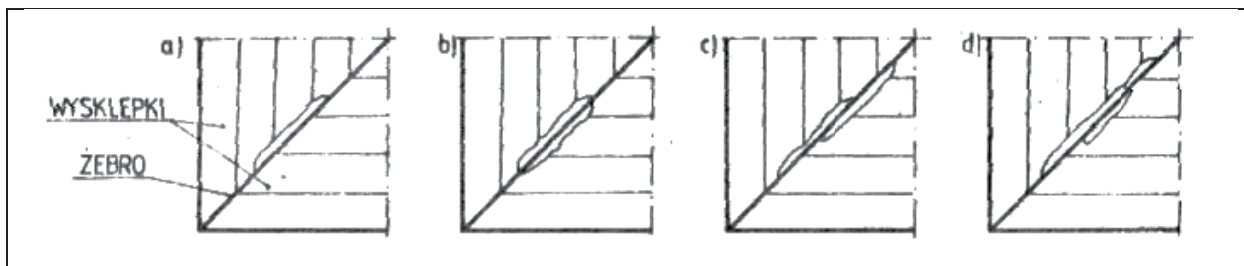
$$y_{w_i} = \sum_{k=1}^i \Delta y'_{E_k} \quad (3.58)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, /n+1/$

$$\begin{cases} e_i = y_{w_i} - y'_{E_i} \\ e_{n+1} = y_{w_{n+1}} - r^2 \end{cases} \quad (3.59)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$

Na rys 3.65 pokazano schemat odspojenia się wysklepki od żebra sklepienia. Aby uwzględnić powstałe w skutek procesów destrukcyjnych zjawiska do prezentowanego toku obliczeń należy wprowadzić elementy dodatkowe.



Rys. 3.65. Odspojenie wysklepki od żebra, a) jednostronne, b) dwustronnie symetryczne, c), d) dwustronnie niesymetryczne, [116].

Na długości odspojenia wprowadza się myślowo łuk zastępczy, o krzywiznie równej krzywiznie żebra na długości odspojenia. Obciążenie łuku stanowią reakcje z pasm łukowych, które w wyniku odspojenia nie opierają się bezpośrednio na żebrze. Po obliczeniu reakcji tego łuku obciążamy nimi żebrze. Łuk ten, w zasadzie, powinien być przyjmowany jako dwuprzegubowy (przegubowe oparcie łuku na żebrze), jednak obliczenie reakcji takiego łuku wymaga określenia jego sztywności. Ponieważ teoretyczne ustalenie jaka szerokość pasa wysklepki pracuje jako łuk zastępczy jest niemożliwe i trudno w tym względzie o jakiegokolwiek zalecenia praktyczne, zmusza to do przyjęcia łuku zastępczego, statycznie wyznaczalnego z trzecim przegubem usytuowanym w środku jego rozpiętości.

Gdy wysklepka, na długości odspojenia od żebra, posiada zmienną grubość lub jest spękana, należy w tym właśnie miejscu (przekroju) założyć trzeci przegub powodujący statyczną wyznaczalność łuku. Na długości odspojenia, dla przypadku pokazanego na rys. 3.65a, żebrze obciążone jest siłami  $\frac{1}{2} \Delta V_{E_i}$  oraz  $\frac{1}{2} \Delta H_{E_i}$  tymi samymi siłami (z sąsiedniej wysklepki) obciążony jest łuk zastępczy. Dla przypadku jak na rys. 3.65b, na długości odspojenia, żebrze nie jest obciążone, a łuk zastępczy przejmuje siły  $\Delta V_{E_i}$  oraz  $\Delta H_{E_i}$ . Pozostałe przypadki tj. rys. 3.65c i rys. 3.65d są kombinacjami wyżej przedstawionych. Po takiej

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

modyfikacji sił obciążających żebro sklepienia, dalsze obliczenia sklepienia należy prowadzić (bez zmian) wg. wzorów 3.47 – 3.59.

W przypadku zaistnienia innego zjawiska – deformacji żebra – proponuje się przyjmować następujący tok rozumowania. W związku z tym, że zmiana geometrii wysklepek i żebra, związana z deformacją żebra, jest niewielka, celowym wydaje się obliczenia statyczne takiego sklepienia przeprowadzać bez jej uwzględnienia. Dopiero po obliczeniu wartości mimośrodków  $e_i$  (3.59), na których działają siły  $V_{Ei}$  oraz  $H_{Ei}$  w  $i$ -tym przekroju, a przed wymiarowaniem żebra, należy do wartości tych mimośrodków dodać wartości mimośrodków wynikających z deformacji żebra  $e_i^d$ . Wartość mimośrodków  $e_i^d$  należy zmierzyć na obiekcie.

Dla deformacji żebra połączonej z odspojeniem wysklepki należy przedstawione metody postępowania stosować łącznie, [116].

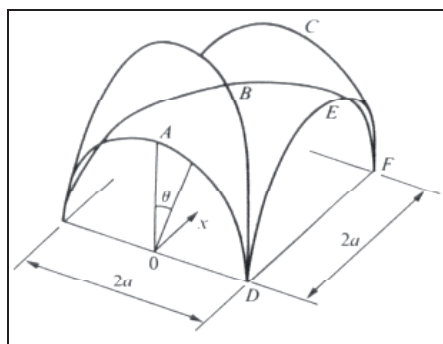
Jedną z najbardziej przydatnych analitycznych metod analizy ceglanych konstrukcji łukowych i sklepień jest metoda zaproponowana przez Heymana [106], [100].

Autor zakłada, że kopuły i sklepienia są membranami (błonami – rys. 3.66), które można opisać matematycznie za pomocą krzywych tworzących łuki z ich powierzchni, co w dużym stopniu ułatwia analizę statyczną zakrzywionych konstrukcji. Teoria opiera się na założeniu, że konstrukcje takie pracują pierwotnie w stanie bezmomentowym, (rys. 3.67).

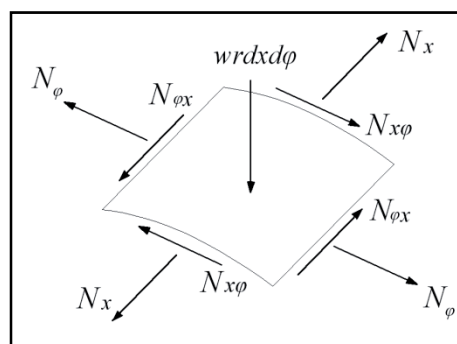
Geometria sklepienia wpływa w decydujący sposób na rozkład sił wewnętrznych. Podstawowe znaczenie ma warunek, aby sklepienie (powłoka) w możliwie małym stopniu narażone było na wpływ czynników powodujących jej zginanie. Stąd, niekorzystne są wszelkie punkty osobliwe powierzchni środkowej powłoki. Ważne jest, aby kąt nachylenia i krzywizna były, w miarę możliwości, ciągłe. Również wysokość przekroju nie powinna się zmieniać skokowo. Jeśli warunki te nie są spełnione, to – zwykle w sąsiedztwie punktów osobliwych – powstają niepożądane siły zginające.

Założenia obliczeniowe w obliczaniu zakrzywionych konstrukcji ceglanych wprowadzają wiele niedokładności. Wprawdzie teoria błonowa wyjaśnia rozkład sił wewnętrznych, ale obliczone na jej podstawie wartości można uważać za pewne co najwyżej w punktach odległych od brzegu powłoki. Zachowanie się brzegów powłoki i wielkość działających tu sił zginających można zwykle ocenić jedynie na podstawie półempirycznych wzorów przybliżonych.

Źródłem znacznych błędów może być fakt, iż w obliczeniach nie uwzględnia się zwykle ani wpływu niedokładności wykonania, ani wahań temperatury, skurczu czy też pełzania materiałów, z których wykonano konstrukcję. Wszystkie te czynniki mogą mieć znaczący wpływ na rozkład sił wewnętrznych.



Rys. 3.66. Model sklepienia żebrowego, [100].



Rys. 3.67. Rozkład sił w powłoce, [117].

Rozpatrywane w modelu obliczeniowym są najczęściej stosowane sklepienia krzyżowo-żebrowe rozpięte na rzucie kwadratu o boku  $2r$  złożone z powłok walcowych kołowych o promieniu  $r$ . Model rozważanych sklepień pokazany jest na rys. 3.66. Położenie

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

punktu na powierzchni walcowej sklepienia określone jest przez współrzędne  $x$  oraz  $\varphi$ . Zakłada się, że na sklepienie działa obciążenie pionowe w równomiernie rozłożone na jego powierzchni. Stąd na elementarny wycinek sklepienia o bokach  $dx$ ,  $r d\varphi$  działa wypadkowe obciążenie pionowe  $w r dx d\varphi$  (rys. 3.67), [117].

Rozwiązanie sklepienia krzyżowo – żebrowego polega na wyznaczeniu sił przekrojowych  $N_\varphi$ ,  $N_x$  i  $N_{x\varphi}$  w powłokach walcowych oraz siły  $F$  w żebrach sklepienia. Na podstawie [100], [117], [124] starano się przybliżyć tok obliczeń.

Równania równowagi sił przekrojowych w powłokach walcowych mają postać (3.44) – (3.46), a rozwiązania ogólne tych równań określone są wzorami (3.60) – (3.62):

$$N_\varphi(\varphi) = -p_r r \quad (3.60)$$

$$N_{x\varphi}(x, \varphi) = -\left(p_\varphi + \frac{1}{r} \frac{dN_\varphi}{d\varphi}\right) \cdot x + f_1(\varphi) \quad (3.61)$$

$$N_x(x, \varphi) = \frac{x^2}{2r} \frac{d}{d\varphi} \left(p_\varphi + \frac{1}{r} \frac{dN_\varphi}{d\varphi}\right) - \frac{x}{r} \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} + f_2(\varphi) \quad (3.62)$$

Obciążenia normalne  $p_r$  oraz styczne  $p_\varphi$  do powłoki walcowej określone są wzorami:

$$p_r(\varphi) = w \sin \varphi, \quad p_\varphi(\varphi) = w \cos \varphi \quad (3.63)$$

Po wstawieniu wzorów (3.63) do (3.60 – 3.62) otrzymuje się:

$$N_\varphi(\varphi) = -wr \cos \varphi, \quad (3.64)$$

$$N_{x\varphi}(x, \varphi) = -2wx \sin \varphi + f_1(\varphi), \quad (3.65)$$

$$N_x(x, \varphi) = \frac{wx^2}{r} \cos \varphi - \frac{x}{r} \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} + f_2(\varphi). \quad (3.66)$$

Zadanie wyznaczenia sił przekrojowych w powłokach walcowych sprowadza się więc do określenia funkcji  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\varphi)$  występujących we wzorach (3.65) i (3.66) stosownie do warunków brzegowych w sklepieniu krzyżowo-żebrowym.

W celu wyznaczenia funkcji  $f_1$  zakłada się, że rozpatrywane sklepienie stanowi segment występujący w ciągu identycznych sklepień usytuowanych wzdłuż osi  $x$ , zgodnie z rys. 3.66. Wtedy płaszczyzna  $0AD$  jest płaszczyzną symetrii. Wobec braku obciążeń skupionych działających na sklepienie, siły styczne na łuku  $AD$  muszą być równe zero. Zachodzi zatem równość  $N_{x\varphi}(0, \varphi) = 0$ . Stąd i ze wzoru (3.65) wynika, że  $f_1(\varphi) = 0$ . Wobec tej równości, ze wzoru (3.66) wynika, że funkcja  $f_2$  zdefiniowana jest wzorem:

$$N_x(0, \varphi) = f_2(\varphi). \quad (3.67)$$

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Dla określenia funkcji  $f_2$  niezbędna jest znajomość siły  $F(\varphi)$  działającej w żebrach sklepienia.

Siłę  $F(\varphi)$  w żebrach wyznacza się rozpatrując równowagę górnej części sklepienia odciętej płaszczyzną poziomą. Wypadkową wszystkich sił pionowych działających na górną odciętą część sklepienia oznacza się przez  $R$ . Ponadto, przyjmuje się założenia, że w segmencie sklepienia pokazanym na rys. 3.66 stan naprężeń jest symetryczny. Rzuty na kierunek pionowy sił działających na górną odciętą część sklepienia są równe:

$$R = 8wr^2 \int_0^{\varphi} (1 - \sin\theta) d\theta = 8wr^2 (\varphi + \cos\varphi - 1), \quad (3.68)$$

$$N_Y = 8r N_{\varphi} (1 - \sin\varphi) \sin\varphi = -8wr^2 (1 - \sin\varphi) \sin\varphi \cos\varphi, \quad (3.69)$$

$$F_Y = 4F(\varphi) \sin\psi, \quad (3.70)$$

gdzie:

$$\sqrt{2} \tan\psi = \tan\varphi \quad (3.71)$$

Suma rzutów na kierunek pionowy sił działających na odciętą górną część sklepienia jest równa zero, zatem:

$$R + N_Y - F_Y = 0 \quad (3.72)$$

Z równania (3.72) po wstawieniu wyrażeń (3.68) – (3.70) i uwzględnieniu (3.71) wyznacza się siłę  $F$  w żebrach sklepienia

$$F(\varphi) = wr^2 \zeta(\varphi), \quad (3.73)$$

gdzie:

$$\zeta(\varphi) = 2\sqrt{2 + \tan^2\varphi} \cdot (\sin^2\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \cos\varphi + \varphi + \cos\varphi - 1) \cot\varphi. \quad (3.74)$$

Rozkład sił przekrojowych  $N_x(0, \varphi)$  na krawędzi powłoki walcowej można wyznaczyć rozpatrując równowagę naroża sklepienia, zgodnie z rys. 3.70.

Rzutując siły działające na naroże sklepienia na poziomy kierunek przekątny wyznaczony przez żebro otrzymuje się warunek równowagi:

$$F(\varphi) \cos\psi + \sqrt{2} \int_0^{r(1-\sin\varphi)} (N_{x\varphi}(u, \varphi) - N_{\varphi}(\varphi)) du + \sqrt{2} r \int_{\varphi}^{\pi/2} N_x(0, \theta) d\theta = 0 \quad (3.75)$$

Pierwszą całkę w równaniu (3.75) można obliczyć po podstawieniu wzorów (3.64) i (3.65). Po wykonaniu obliczeń równanie (3.75) przyjmuje postać:

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$F(\varphi) \cos \psi + \sqrt{2} wr^2 (1 - \sin \varphi)^2 + \sqrt{2} r \int_{\varphi}^{\pi/2} N_x(0, \theta) d\theta = 0. \quad (3.76)$$

Różniczkując to równanie względem  $\varphi$  otrzymuje się:

$$N_x(0, \varphi) = \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{F(\varphi) \cos \psi}{r\sqrt{2}} + wr(1 - \sin \varphi)^2 \right], \quad (3.77)$$

gdzie funkcja  $F(\varphi)$  jest określona wzorem (3.73). Po wykonaniu obliczeń:

$$N_x(0, \varphi) = f_2(\varphi) = -wr \cdot \eta(\varphi), \quad (3.78)$$

gdzie:

$$\eta(\varphi) = 2 \left[ \frac{(1 + 3 \sin^2 \varphi)(1 - \sin \varphi) \cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\varphi + \cos \varphi - 1}{\sin^2 \varphi} \right] \quad (3.79)$$

Tak więc, do określenia sił powstających w sklepieniu posłużono się następującymi zależnościami:

$$N_\varphi(\varphi) = -wr \cos \varphi \quad (3.80)$$

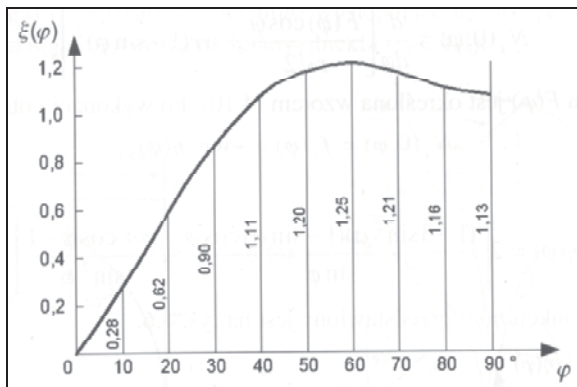
$$N_{x\varphi}(x, \varphi) = -2wx \sin \varphi \quad (3.81)$$

$$N_x(x, \varphi) = \frac{wx^2}{r} \cos \varphi - wr \cdot \eta(\varphi) \quad (3.82)$$

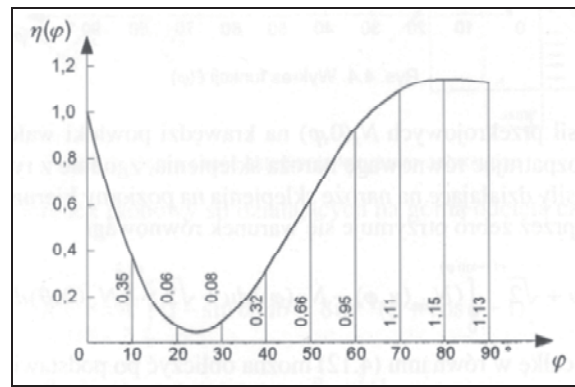
$$F(\varphi) = wr^2 \zeta(\varphi) \quad (3.83)$$

gdzie:  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$

Wartości funkcji  $\xi(\varphi)$ , (rys. 3.68), oraz  $\eta(\varphi)$ , (rys. 3.69), można przyjąć za [117]. Podane wykresy funkcji  $\xi(\varphi)$  oraz  $\eta(\varphi)$  zostały sporządzone dla obliczeń statyczno – wytrzymałościowych uszkodzonego sklepienia kościoła Przemienienia Pańskiego w Poznaniu, przedstawionych w [117], [124]. Sklepienie to rozpięte jest na rzucie prostokąta o szerokości 9,0 m i długości 21,7 m. Zbudowane jest z trzech równych segmentów sklepień krzyżowych złożonych z półkolistych kolebek walcowych. Sklepienie wykonane jest z cegły pełnej na zaprawie wapiennej. Grubość powłok sklepienia wynosi ok. 14 cm.

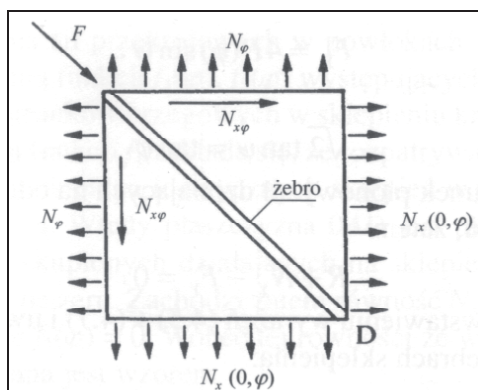


Rys. 3.68. Wykres funkcji  $\xi(\varphi)$ , [117].

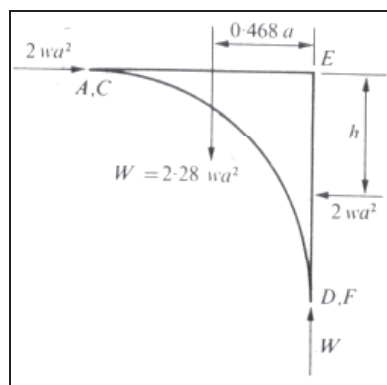


Rys. 3.69. Wykres funkcji  $\eta(\varphi)$ , [117].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.70. Naroże sklepienia, [117].



Rys. 2.71. Optymalny rozkład sił w sklepieniu, [100].

Korzystając z warunków równowagi momentów ( $2wr^2h=2,28wr^2 \cdot 0,468r$ ) dla połowy sklepienia można stwierdzić, że wypadkowa sił rozporowych jest zlokalizowana na poziomie  $h=0,534r$  od góry sklepienia (rys. 3.71). Na tym poziomie, jeśli zachodzi taka potrzeba, powinny być usytuowane ściągi przejmujące rozpór, zabezpieczające sklepienie przed poziomymi przemieszczeniami [117].

Metodę bezmomentową (błonową) w obliczeniach statycznych wykorzystano w analizie stanu statycznego sklepienia kościoła Przemienienia Pańskiego w Poznaniu, [124]. Sklepienie znajdowało się w złym stanie i groziło zawaleniem. Obserwowane uszkodzenia wskazywały na obniżenie się środkowego pasma sklepienia powstałe prawdopodobnie na skutek poziomego przesunięcia podpór, starzenia materiału lub przeciążenia oraz znacznego odkształcenia żebra na granicy obniżonego pasma. W prawidłowo ukształtowanym sklepieniu występują wyłącznie naprężenia ścisające. W przypadku analizowanego sklepienia, w środkowej części pojawiły się naprężenia rozciągające, co prowadziło do zarysowania przekroju, a ostatecznie mogło doprowadzić do jego awarii.

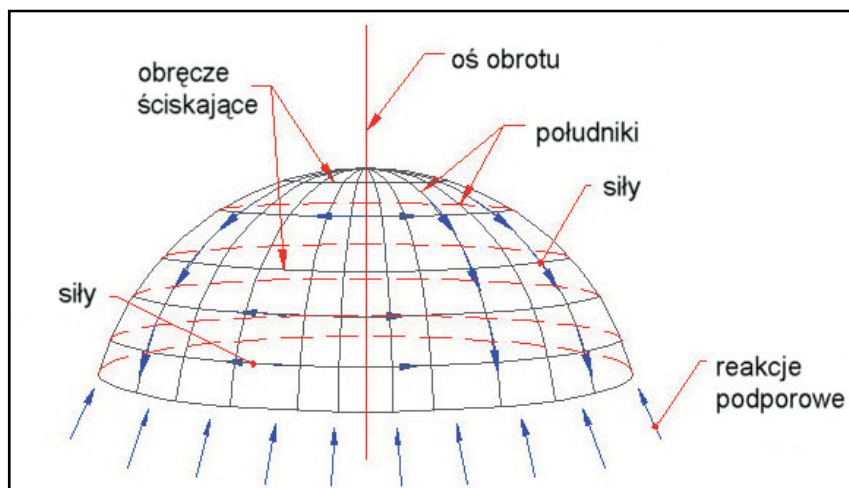
### 3.4.10. Metody obliczania kopuł obrotowych

Kształt kopuły tworzy krzywa obrócona wokół centralnej osi. Powierzchnia ta ma tworzyć pewnego rodzaju strop. Krzywa tworząca może przyjąć nieograniczoną liczbę geometrii. Pod względem konstrukcyjnym, kopuła musi spełniać trzy podstawowe kryteria: wytrzymałość, sztywność i stabilność. Musi być też zdolna do przejścia obciążeń zewnętrznych z uwzględnieniem ciężaru własnego, bez nadmiernego ugięcia i bez przemieszczania, [99].

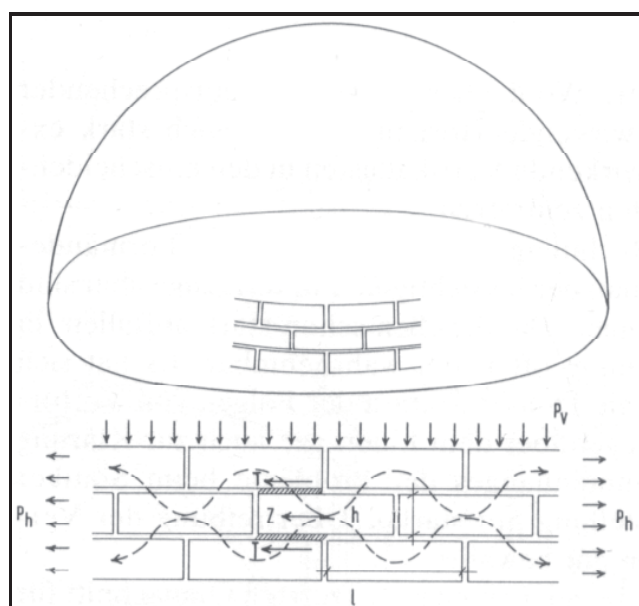
Podobnie jak w łukach, przyłożone do kopuły obciążenia przenoszą się południkowo w dół do podstawy i oddziałują na strefę podparcia. Linia ciśnień lub trajektoria, na której działają siły jest idealnym kształtem łuku, który utrzymuje te obciążenia [103]. W przeciwieństwie do łuku, kopuła poza płaszczyznę południkową może oprzeć się również, na działających w kierunku równoległym sztywnych pierścieniach – obręczach ścisających (rys. 3.72), [139], [25].

Kopuły są przekryciami, których obliczenia statyczne są do tej pory najlepiej opracowane [20], [105], [131], [184] i inni. Autorzy ograniczają się niestety tylko do obliczeń statycznych, pozwalających określić wielkość sił statycznych w danym przekroju. Wyłącznie w [184] można odnaleźć objaśnienie, w jaki sposób siły te przenoszone są przez cegły i zaprawę, z których wykonane są kopuły, najczęściej mające charakter zabytkowy i dużą wartość historyczną (rys. 3.73).

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.72. Rozkład sił w kopule, [139].



Rys. 3.73. Rozkład sił w murze kopuły, [184].

Na rys. 3.73 pokazano następujące siły i naprężenia:

$p_h$ ,  $p_v$  – siły równoleżnikowa i równikowa z rozwiązania statycznego kopuły,

**siły poziome**

$$Z = p_h 2h \quad (3.84)$$

$$T = \frac{Z}{2} \quad (3.85)$$

**naprężenia**

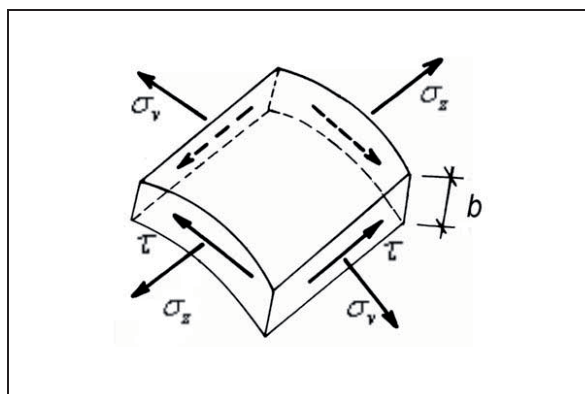
$$\sigma_v = \frac{p_v}{b} \quad (3.86)$$

$$\sigma_z = \frac{Z}{bh} \quad (3.87)$$



3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$\tau = \frac{T}{b \frac{1}{2} L} \quad (3.88)$$



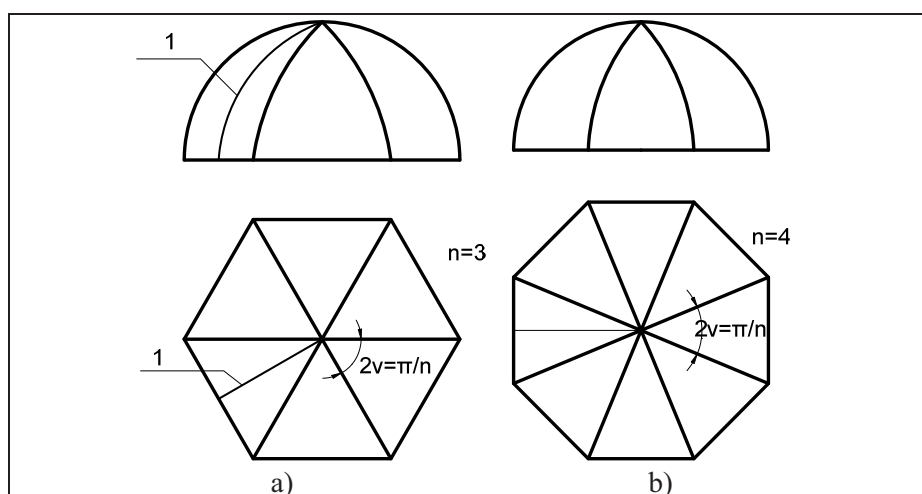
Rys. 3.74. Naprężenia w powłoce kopuły.

### 3.4.11. Metody obliczania kopuł wielościennych

Konstrukcje złożone ze składkowych powłok, które wzajemnie przystają do siebie w narożach nazywamy kopułami wielościennymi. Najczęściej są to układy cyklicznie symetryczne, których przekroje poziome są wielokątami foremnymi o parzystej liczbie boków. Układ taki tworzy się z „ $n$ ” powłok translacyjnych mających tylko jedną krzywiznę – południkową. Kształt południków może być kolisty, cykloidalny, paraboliczny, etc., [89].

Twórcą teorii kopuł wielobocznych był Dischinger, [68]. W [78], [89], [117], [131] podano analityczne zasady wyznaczania sił wewnętrznych w powłokach według teorii błonowej.

Na rys. 3.75 pokazano dwa przykłady kopuł wielościennych utworzonych przez trzy oraz przez cztery powłoki translacyjne.



Rys. 3.75. Kopuły wielościenne utworzone przez: a) trzy powłoki translacyjne, b) cztery powłoki translacyjne. 1 – południk jednej ze składkowych powłok, [89].

U podstawy takiej kopuły tworzy się wieloboczny wieniec o kształcie i wymiarach odpowiadających poziomemu rzutowi układu, [131].

Obliczanie kopuły wielościennej o południkach kolistych polega na wyznaczeniu następujących wartości sił przekrojowych:

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Dla obciążenia ciężarem własnym:

Siły południkowe:

$$N_{\varphi} = -gr \cos \varphi \quad (3.89)$$

Siły styczne:

$$N_{\varphi\alpha} = -2g \sin \varphi \quad (3.90)$$

Siły poziome równoleżnikowe:

$$N_x = \frac{gr}{\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi} \left[ 1 - \cos \varphi \left[ 1 + \sin^4 \varphi \sin^2 \vartheta (1 - \xi^2) + 3 \sin^4 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta \right] \right] - gr \operatorname{tg}^2 \vartheta \sin \varphi \sin 2\varphi \quad (3.91)$$

gdzie:

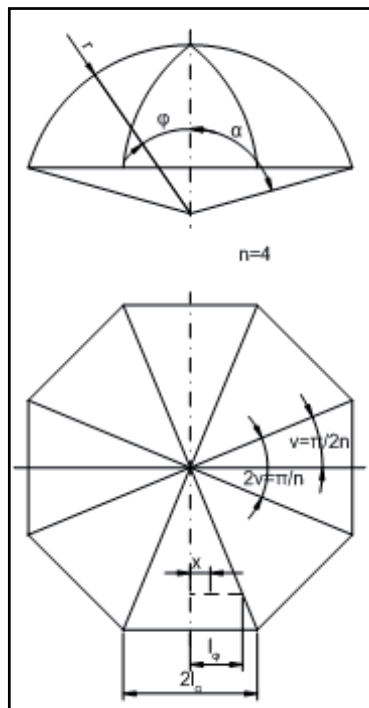
$$\xi = \frac{x}{l_{\varphi}} \quad (3.92)$$

Siły poziome równoleżnikowe dla linii środkowej składowych powłok ( $x=0$ ):

$$N_{x(x=0)} = \frac{gr}{\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi} \left[ 1 - \cos \varphi \left[ 1 + 4 \sin^4 \varphi \sin^2 \vartheta \right] \right] - gr \operatorname{tg}^2 \vartheta \sin \varphi \sin 2\varphi \quad (3.93)$$

Siły podłużne w elementach narożnych:

$$S_{\varphi} = 2gr^2 \operatorname{tg} \vartheta \left[ (1 + \sin^2 \varphi) \cos \varphi - 1 \right] \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{\cos^2 \vartheta}} \quad (3.94)$$



Rys. 3.76. Oznaczenia do obliczeń sił wewnętrznych [89].

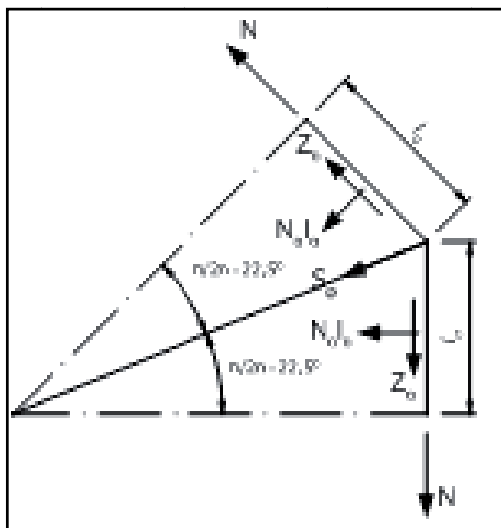
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Na wieniec podporowy działają siły wewnętrzne pochodzące od sklepienia. Wywołują one w wieńcu siłę podłużną rozciągającą, którą oblicza się według wzoru:

$$N = -\frac{S_{\alpha} \cos \psi_{\alpha}}{2 \sin \frac{\pi}{2n}} - N_{\alpha} \frac{l_{\alpha} \cos \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}} - \left( \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} \right)_{\varphi=\alpha} \frac{l_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2}{2} \quad (3.95)$$

gdzie, kąt  $\psi$  wyznacza się z zależności:

$$\operatorname{tg} \psi = \cos \frac{\pi}{2n} \operatorname{tg} \varphi \quad (3.96)$$



Rys. 3.77. Rozkład sił do obliczenia siły rozciągającej w wieńcu podporowym, [89].

W wieńcu podporowym występują także momenty zginające w wyniku oddziaływania na niego powłoki, przede wszystkim, od sił południkowych. Zatem momenty zginające w środku rozpiętości prostego odcinka wieńca obliczać należy wg. wzoru:

$$M_{prz} = N_{\alpha} \cos \alpha \frac{l_{\alpha}^2}{6} \quad (3.97)$$

Natomiast na podporach:

$$M_{podp} = -N_{\alpha} \cos \alpha \frac{l_{\alpha}^2}{3} \quad (3.98)$$

Teoria kopuł wielobocznych, jak twierdzą autorzy [117], jest trudna w praktycznym stosowaniu z uwagi na skomplikowaną budowę wzorów oraz ograniczenia jej do kopuł rozpiętych na wielobokach foremnych. Ponadto uproszczenie polegające na stosowaniu teorii błonowej dla powłok walcowych oraz pominięcie zginania i ścinania żeber mogą, w pewnych przypadkach, mniej dokładnie opisywać prace kopuły historycznej, eksploatowanej wiele lat. Rozwiązanie kopuł odbiegających kształtem od figur foremnych oraz obciążonych w sposób niesymetryczny znacznie się komplikuje i – w przypadku zastosowania rozwinięć w szeregi Fouriera – sprowadza się do rozwiązania układu  $3n$  sprzężonych równań różniczkowych. W takich przypadkach do określenia przemieszczeń i naprężeń w kopule, jak również do analizy nośności granicznej kopuły z uwzględnieniem ortotropii muru korzystniejsze jest zastosowanie metody elementów skończonych, (MES).

### 3.5. Metody naprawy i wzmacniania zakrzywionych ceglanych konstrukcji historycznych – badania laboratoryjne, przykłady

Historyczne obiekty murowane z cegły pod wpływem działania różnego rodzaju czynników (dodatkowe obciążenia, destrukcja konstrukcji, osiadanie podłoża, zmiana eksploatacji, zmiana stosunków wodno–gruntowych, zjawiska opóźnione) często przestają spełniać role nadane im pierwotnie. Bywa, że dawne rozwiązania i założenia tracą aktualność, a konstrukcje przyjmują nowe schematy statyczne. Aby zapobiec niszczeniu obiektów zabytkowych, należy stosować środki zapobiegawcze poprawiające statykę i wzmacniające budowlę.

Uszkodzone i spękane łuki, sklepienia i kopuły kościołów, pałaców, budynków bramnych, mostów i budynków mieszkalnych można ratować na wiele sposobów opisanych np. w [184], [13], [30], [155], [204], [32], [161], [117], [118], [123], [124], i inni. Poniżej zestawiono metody wzmacniania zakrzywionych konstrukcji ceglanych. Do najczęściej spotykanych i stosowanych należą:

- ściagi,
- powłoki żelbetowe,
- blachy i pręty stalowe doklejane i wklejane,
- konstrukcje drewniane umożliwiające podwieszenie żeber i powłok sklepień ceglanych,
- maty, taśmy i siatki z materiałów FRP,
- inne (iniekcje, impregnacje, przemurowanie).

Praca statyczna konstrukcji zabytkowych po wzmocnieniu jest uzależniona od wielopłaszczyznowego procesu zjawisk występujących w konstrukcji wzmocnionej. Z tego względu, w odróżnieniu od konstrukcji nowowznoszonych, analiza pracy statycznej związana jest ze sprawdzeniem jakby trzech stanów granicznych:

- stanu granicznego nośności konstrukcji po wzmocnieniu,
- stanu granicznego użytkowania konstrukcji po wzmocnieniu,
- stanu granicznego nośności połączenia elementu wzmacnianego z wzmacnianym.

#### 3.5.1. Ściagi

W zakrzywionych konstrukcjach ceglanych ważnym sposobem wzmocnienia jest zastosowanie dodatkowych elementów usztywniających układ murów. Wpływają one na:

- zmniejszenie przemieszczeń murów,
- ograniczenie rozwoju zarysowania w powłokach i żebrach,
- mogą przyczynić się do przenoszenia dodatkowych sił rozciągających pojawiających się przy uszkodzeniu.

Jedną z powszechnie stosowanych metod równoważenia niekorzystnych układów sił występujących w istniejących budowlach, pochodzących przede wszystkim od rozporu sklepień i łuków oraz otwartych układów więźb dachowych, jest wprowadzanie ściągów żelaznych i stalowych zwanych powszechnie ankrami.

Poprawne działanie ściągu stalowego w konstrukcjach zabytkowych uzależnione jest od wprowadzenia i utrzymania odpowiedniej siły w ściągu. Stabilizacja i wzmocnienie konstrukcji wymaga wstępnego ich naprężenia. Napięcie prętów stalowych możliwe jest do siły odpowiadającej możliwościom wytrzymałościowym muru na ściskanie oraz uzależniona jest od przyjętego przekroju ściągu. Wprowadzenie odpowiedniej siły naprężającej powinno wywołać w murze taki stan naprężeń wewnętrznych, który skutecznie przeciwstawi się wpływowi działania sił zewnętrznych i zwiększy ogólną sztywność konstrukcji, [154], [117].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Niewłaściwe przekazanie siły ze ściągu na mur może powodować powstawanie nowych rys. Wpływ na prawidłową pracę stalowych ściągu mają: sposób zakotwienia, odkształcenia termiczne ściągu i muru oraz pełzanie muru i relaksacja stali, [170], [117].

Ściagi typu tradycyjnego wyróżniają się zastosowaniem jako zakotwienia ściągu elementu oporowego, np. blachy, rozety, płaskownika lub pręta. Element ten jest zazwyczaj na elewacji widoczny, czasem bywa ukryty pod warstwą maskującą w postaci tynku, przemuruowań lub elementu dekoracji fasady. Na rys. 3.78 przedstawiono różne przykłady takich elementów.

Przed przystąpieniem do wzmocnienia zakrzywionych konstrukcji murowych metodami wykorzystującymi ściągi stalowe należy wykonać szereg badań i obliczeń, których celem jest wyznaczenie rzeczywistych charakterystyk wzmocnionej konstrukcji murowej. Należy określić:

- wytrzymałość muru na ściskanie,
- strukturę muru i stopień jego niejednorodności,
- moduł sprężystości,
- oszacować zjawiska opóźnione.



Rys. 3.78. Różnego rodzaju elementy oporowe zakotwień ściągu stalowych, [117].

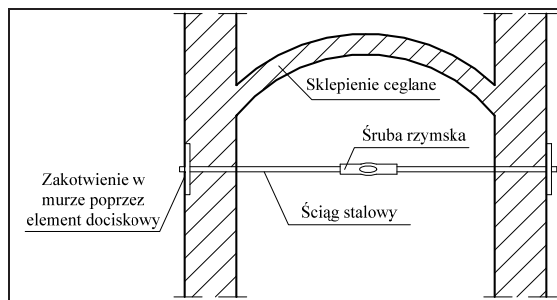
Analizując obliczeniowo wzmocnienie konstrukcji murowej ściągami należy rozwiązać następujące zagadnienia:

- szacowanie parametrów mechanicznych muru,
- przyjęcie określonego rodzaju stali oraz technologii kotwienia i wstępnego naprężania,
- określenie wielkości siły naprężającej z uwzględnieniem strat doraźnych i reologicznych,
- zapewnienie właściwego przeniesienia sił od naprężenia ściągu na mur poprzez odpowiednio ukształtowane i powiązane z konstrukcją murową elementy.

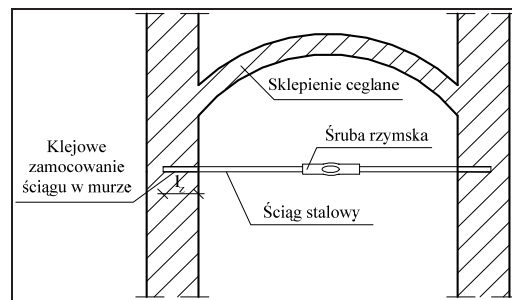
Bezpieczne przenoszenie siły ze ściągu na konstrukcję murową związane jest przede wszystkim z prawidłowym rozmieszczeniem ściągu i odpowiednim przygotowaniem muru. Zasadą przy stężeniu istniejących konstrukcji murowych jest przekazanie sił od ściągu na możliwie dużą powierzchnię muru. Związane jest to z niską punktową wytrzymałością muru ceglano na ściskanie. Istotne jest to zwłaszcza w obiektach zabytkowych, w których mury charakteryzują się często niewielką wytrzymałością i znaczną niejednorodnością.

Klasycznym sposobem zamocowania ściągu stalowego jest zakotwienie go poprzez element dociskowy w murze, (rys. 3.79). Ostatnie lata przyniosły również inne rozwiązanie, kotwienie stalowych ściągu poprzez ich wklejanie (rys. 3.80), [117], [123], [158], [155]. Jest to sposób o tyle interesujący, że pozwala ominąć ograniczenia związane z ingerencją w bogato dekorowaną fasadę obiektu zabytkowego, umożliwia swobodny dostęp do różnych miejsc obiektu od jego wnętrza oraz skrócenie czasu montażu i obniżenie kosztów.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.79. Zakotwienie ściągu stalowego poprzez zastosowanie elementu dociskowego.



Rys. 3.80. Ściąg stalowy wklejony w mur.

Na podstawie badań przeprowadzonych w Instytucie Budownictwa Politechniki Wrocławskiej oraz prób wdrożeniowych na wybranych obiektach zabytkowych (klasztor Cystersów w Lubiążu) można stwierdzić, że wklejane ściągi stalowe są przydatne do wzmacniania i usztywniania murów konstrukcyjnych obiektów zabytkowych z bogato dekorowanymi fasadami.

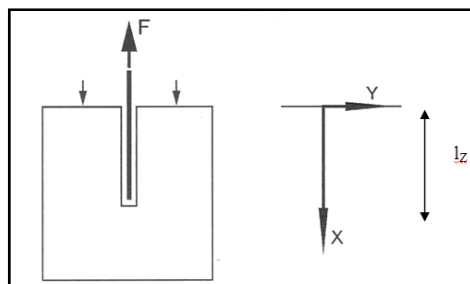
W pracach [158], [123] przedstawiono badania doświadczalne połączenia klejowego „mur ceglany – pręt stalowy”, badania uzupełniające kompozycji klejowych oraz porównanie wyników badań doświadczalnych połączeń klejowych „pręt stalowy – mur ceglany” z wybranymi teoriami pracy tych połączeń.

Celem badań było określenie możliwości przenoszenia sił przez pręty stalowe wklejone w mur ceglany oraz rozpoznanie pracy połączenia klejowego tego typu. Starano się ustalić wpływ rodzaju kompozycji klejowej na nośność połączenia.

Użyte kompozycje klejowe:

- kompozycja epoksydowa Epidian 5 – kompozycja E – skład: żywica epoksydowa Epidian 5, utwardzacz Z-1, cement portlandzki 350,
- Ombran EH 20 – kompozycja O,
- HIT C50 – kompozycja H,
- Cerinol-VM 1 – kompozycja D.

Stworzono stanowisko pomiarowe do wrywania prętów stalowych z muru. Do uzyskania wymaganego poziomu siły wrywającej użyto siłownika hydraulicznego. Kontrolę wielkości siły wyciągającej dokonywano za pomocą siłomierza elektronicznego. Proces obciążeń oraz odczyt wyników kierowany był bezpośrednio przez komputerowy wielopunktowy system pomiarowy sprzężony z siłomierzami, tensometrami elektrooporowymi oraz czujnikami przemieszczeń. Wydłużenie pręta rejestrowane było przez tensometry naklejone na jego długości, odkształcenie połączenia „mur – klej – pręt stalowy” oraz siłę wyciągającą mierzyły czujniki indukcyjne. Szczegółowo analizowano odkształcenia w połączeniu, a na ich podstawie obliczono naprężenia normalne w pręcie stalowym oraz naprężenia styczne w spoinie klejowej. Na modelach realizowano próbę rozciągania, różnicując długość zakotwienia (wklejenia)  $l_z$  w celu uzyskania różnych obrazów zniszczenia połączeń.

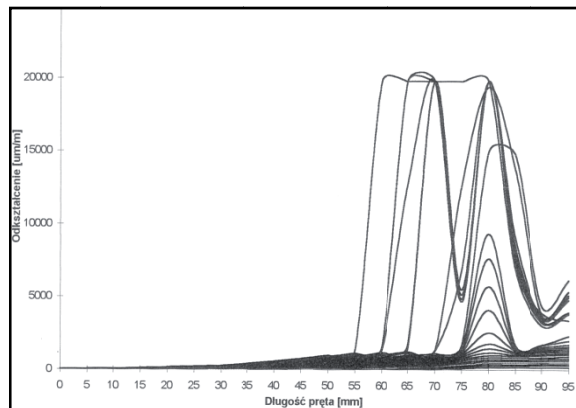


Rys. 3.81. Schemat badania. Os „x” pokrywa się z osią kotwionego pręta, [123].

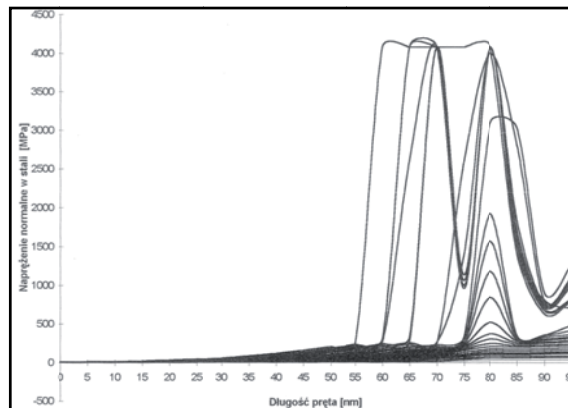
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Wykresy z otrzymanych wyników (rys. 3.82 – 3.90) można podzielić na trzy grupy: wykresy odkształcenia pręta stalowego na długości, naprężeń normalnych w stali i naprężeń stycznych w połączeniu klejowym.

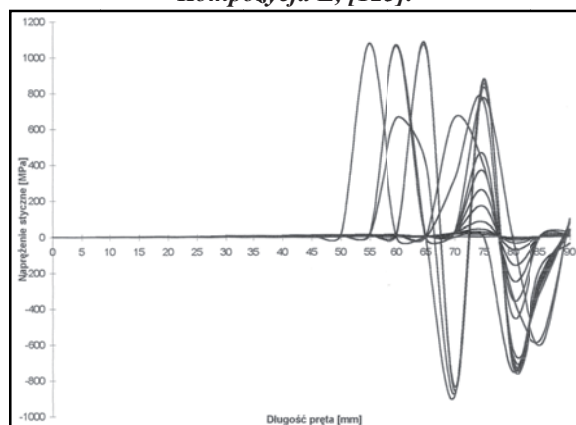
Otrzymane wyniki wskazują na dwa różne modele zniszczenia układów „pręt stalowy – klej – mur”. Pierwszy to uplastycznienie (zerwanie) pręta stalowego, a drugi – to wyrwanie pręta stalowego z muru.



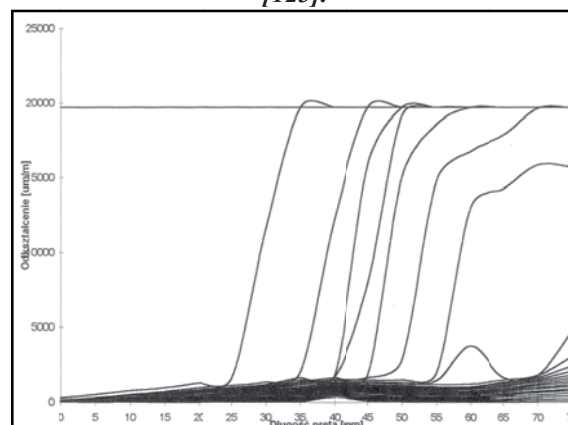
**Rys. 3.82. Rozkład odkształceń w stali na długości pręta stalowego. Wszystkie poziomy obciążień. Kompozycja E, [123].**



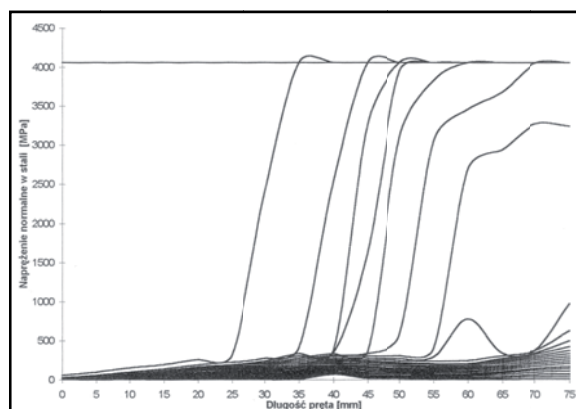
**Rys. 3.83. Rozkład naprężeń normalnych  $\sigma(x)$  w stali. Wszystkie poziomy obciążień. Kompozycja E, [123].**



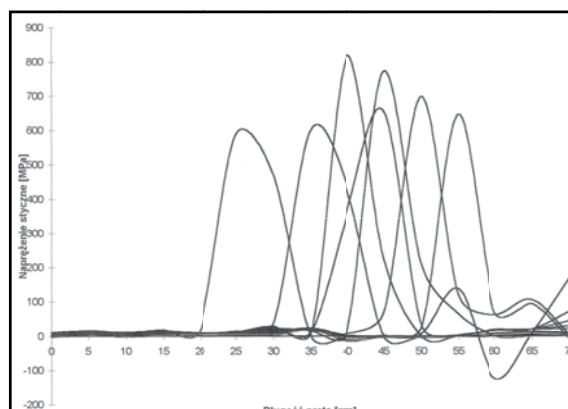
**Rys. 3.84. Rozkład naprężeń stycznych  $\tau_k(x)$  w spoinie klejowej. Wszystkie poziomy obciążień. Kompozycja E, [123].**



**Rys. 3.85. Rozkład odkształceń w stali na długości pręta stalowego. Wszystkie poziomy obciążień. Kompozycja D, [123].**

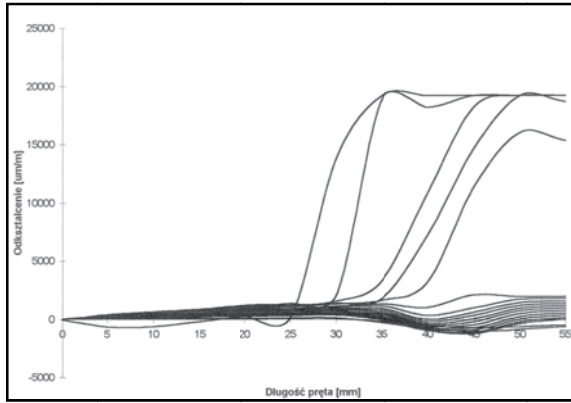


**Rys. 3.86. Rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_s(x)$  w stali. Wszystkie poziomy obciążień. Kompozycja D, [123].**

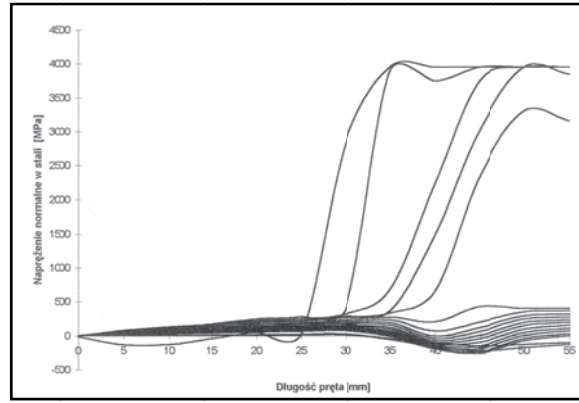


**Rys. 3.87. Rozkład naprężeń stycznych  $\tau_k(x)$  w spoinie klejowej. Wszystkie poziomy obciążień. Kompozycja D, [123].**

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.88. Rozkład odkształceń w stali na długości pręta stalowego. Wszystkie poziomy obciążenia. Kompozycja H, [123].



Rys. 3.89. Rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_s(x)$  w stali. Wszystkie poziomy obciążenia. Kompozycja H, [123].

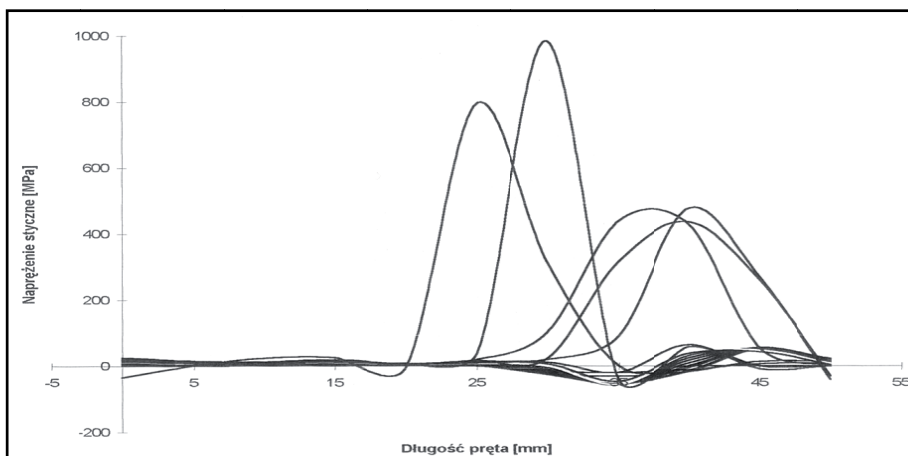
W wyniku analizy badań doświadczalnych i uwzględnieniu warunków brzegowych zaproponowano następujące zależności określające rozkład naprężeń ścinających  $\tau_k(x)$  w spoinie klejowej oraz naprężeń normalnych  $\sigma_s(x)$  w pręcie stalowym:

$$\tau_k(x) = x \frac{d_p^2 E_s R_t \pi}{l_z E_m A_m} \cdot e^{-2^2 \frac{d_p E_s A_s R_t \pi}{l_z E_m A_m F}} \quad (3.99)$$

$$\sigma_s(x) = \frac{F}{A_s} \cdot e^{-2^2 \frac{d_p E_s A_s R_t \pi}{l_z E_m A_m F}} \quad (3.100)$$

gdzie:

- $A_m$  – współpracująca powierzchnia przekroju,
- $A_s$  – powierzchnia przekroju pręta,
- $E_m$  – moduł Younga dla muru,
- $E_s$  – moduł Younga dla stali,
- $F$  – siła wyrywająca pręt,
- $R_t$  – średnia wytrzymałość na ścinanie najsłabszego ogniwa połączenia,
- $d_p$  – średnica pręta,
- $l_z$  – długość zakotwienia pręta w murze.



Rys. 3.90. Rozkład naprężeń stycznych  $\tau_k(x)$  w spoinie klejowej. Wszystkie poziomy obciążenia. Kompozycja H, [123].



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.91. Zniszczenie połączenia – kompozycją H – HIT C50, [123].



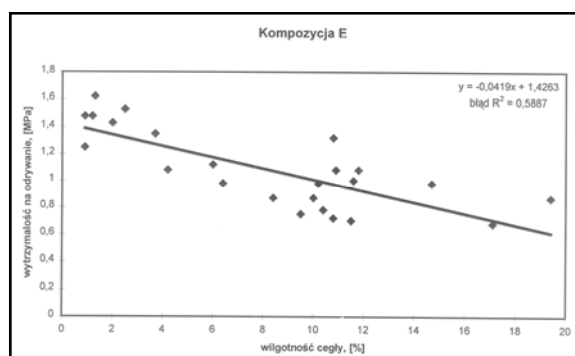
Rys. 3.92. Zniszczenie połączenia, kompozycją E – Epidian 5, [123].

Przedstawione powyżej wzory na rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_s$  w pręcie stalowym oraz naprężeń ścinających  $\tau_k$  w spoinie potwierdzają przyjęty podział na dwa modele zniszczenia. Pozwalają też na szacunkowe określenie dwóch modeli zniszczenia modelu w stosunku do wartości siły wyrywającej. Możliwe do osiągnięcia modele zniszczenia to:

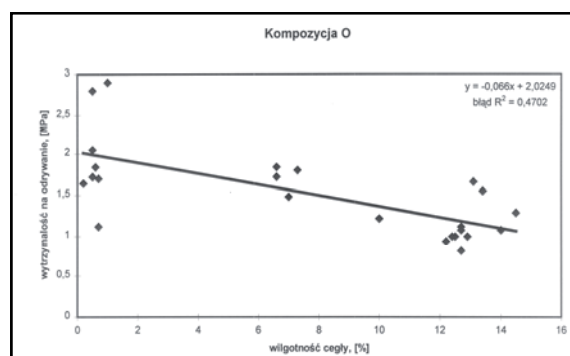
- wykorzystanie nośności pręta (zerwanie),
- wykorzystanie nośności spoiny klejowej lub nośności na ścinanie muru.

Badania i przyjęte formuły analityczne wskazują na model zniszczenia połączenia przez zerwanie pręta jako model właściwy i możliwy do uzyskania w rzeczywistości przy prawidłowym dobraniu zakotwienia klejowego „ $l_z$ ”.

W ramach programu badawczego przeprowadzono dodatkowe badania na kompozycjach klejowych opartych na żywicach epoksydowych (kompozycji E, kompozycji O i kompozycji H). Celem tych badań było określenie wpływu zawilgocenia na nośność połączenia „stal-cegła”, na podstawie wytrzymałości na odrywanie przy różnych stanach wilgotności cegły.

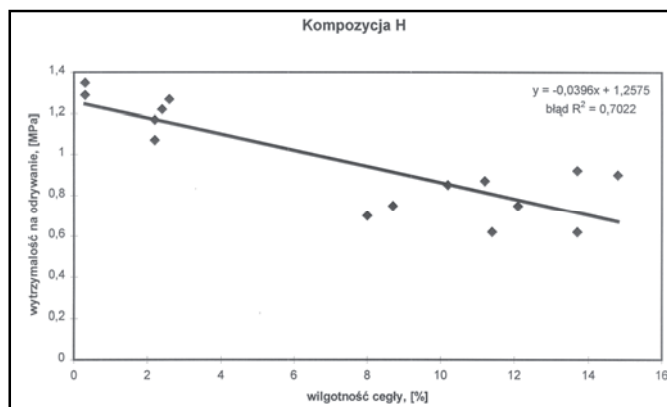


Rys. 3.93. Wytrzymałość na odrywanie połączeń „stal – cegła” wykonanych w stanie powietrzna-suchym w zależności od wilgotności cegły. Kompozycja E, [123].



Rys. 3.94. Wytrzymałość na odrywanie połączeń „stal – cegła” wykonanych w stanie powietrzna-suchym w zależności od wilgotności cegły. Kompozycja O, [123].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.95. Wytrzymałość na odrywanie połączeń „stal – cegła” wykonanych w stanie powietrzna-suchym w zależności od wilgotności cegły. Kompozycja H, [123].

Na wykresach (Rys. 3.93 – 3.95) pokazano, że wpływ zawilgocenia próbek na nośność połączenia klejowego „stal-cegła” jest znaczący. Efekt ten jest widoczny we wszystkich badanych próbkach. Spadek wytrzymałości na odrywanie w funkcji wilgotności cegły ma w przybliżeniu charakter liniowy. Przy wilgotności cegły 15 % wytrzymałość połączenia zmniejsza się do ok. 60 % wytrzymałości połączenia dla cegły w stanie suchym.

Prezentowane badania potwierdzają spadek wytrzymałości połączenia wykonanego na bazie żywic epoksydowych wraz ze wzrostem zawilgocenia łączonych materiałów. Fakt ten determinuje niemożność stosowania tych żywic w warunkach murów o podwyższonej wilgotności. Kompozycje klejowe z wypełniaczami cementowymi (np. kompozycja D) w mniejszym stopniu są podatne na tego typu czynniki.

Uzyskane wyniki w pełni potwierdziły możliwość zastosowania klejowych kompozycji epoksydowych do wklejania ściągów stalowych. Zaproponowana technologia stalowych prętów wklejanych może być przydatna w usztywnianiu murów konstrukcyjnych obiektów zabytkowych z bogato dekorowanymi fasadami. Z powodzeniem może być wykorzystana również do zespalania spękanych części np. nadproży łukowych (w połączeniu z iniekcją spękań), czy realizację połączeń pomiędzy wzmacnianą powłoką sklepienia (żebrem) a nową konstrukcją wzmacniającą.

Innym ciekawym rodzajem stosowanych ściągów są ściągi z materiałów kompozytowych. Przykłady badań i realizacji tego typu wzmocnień przedstawiono w [234].

### 3.5.2. Powłoki żelbetowe

W przypadku konstrukcji sklepień ceglanych o dużej rozpiętości, posiadających znaczącą wartość historyczną, korzystna może się okazać metoda polegająca na wykonaniu nad osłabionym sklepieniem ceglany o znacznych deformacjach nowego sklepienia żelbetowego odciażającego [226], kotwionego w ścianach obwodowych.

Ze względu na występujące często w konstrukcjach zabytkowych polichromie, wzmocnienie sklepienia następuje przez jego podwieszenie i zespolenie z powłoką żelbetową, opartą na ścianach obiektu najczęściej za pośrednictwem wieńca obwodowego.

Ta technologia wzmacniania, jakkolwiek dyskusyjna z punktu widzenia konserwatorskiego, jest właściwie w chwili obecnej tak naprawdę jedną z niewielu skutecznych, dla sklepień o znacznych rozpiętościach będących w stanie przedawaryjnym. Do dyspozycji pozostają jeszcze technologie związane z podwieszaniem sklepień pierwotnych do projektowanych nowych konstrukcji nośnych z drewna klejonego lub przestrzennych konstrukcji stalowych.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Przy znacznych imperfekcjach wysklepek i żeber powstaje tu jednak problem właściwego zakotwienia wieszaków w trudnych do rozpoznania przekrojach zdeformowanych sklepień. Podwieszenia mają ponadto charakter punktowy, a w wyniku zjawisk opóźnionych w przekrojach wokół podwieszeń można się spodziewać znacznych koncentracji naprężeń ścinających [117]. Stąd, korzystniejsze jest wprowadzenie poza kotwami wklejanymi powierzchniowej warstwy szczepnej.

Zbrojenie powłoki należy wykonać stosując uźebrowanie zgodnie z zasadami projektowania konstrukcji powłokowych żelbetowych, z uwzględnieniem występujących sił przekrojowych.

Najszybszym sposobem wykonania powłoki żelbetowej nad sklepieniem jest zastosowanie betonu natryskowego (torkretu).

Pojęcie torkretu jest aktualnie definiowane jako „zaprawa lub beton dynamicznie umieszczany w miejscu wbudowania”. Istnieją dwie różne metody torkretowania:

- metoda mokra (torkret mokry),
- metoda sucha (torkret suchy).

Najogólniej ujmując zasadnicza różnica między obiema metodami sprowadza się do miejsca podania wody do suchych składników mieszanki betonowej (lub zaprawy).

**Metoda mokra** - jest procesem sprowadzającym się do tradycyjnego wykonania mieszanki (zaprawy) betonowej (ewentualnie z dodatkami), a następnie hydraulicznego jej przetransportowania do dyszy wylotowej, skąd pneumatycznie w sposób ciągły jest wyrzucana (natryskiwana).

**Metoda sucha** - to technologia, w której sucha mieszanka cementu i kruszywa (ewentualnie sproszkowanych dodatków) jest podawana do specjalnego urządzenia, tzw. torkretnicy, skąd strumieniem sprężonego powietrza jest przesyłana przewodem elastycznym do dyszy natryskowej (wylotowej). Do dyszy doprowadza się wodę oraz ewentualnie domieszki ciekłe w postaci rozpylonej w celu nawilżenia mieszanki, która jest wyrzucana (natryskiwana).

Wybór metody torkretowania nie jest jednoznaczny, a tym bardziej uznanie, która z metod ma przewagę nad drugą. Praktyka wykazała, że wybór metody nie może być przypadkowy. Wynika on z możliwości technologicznych i warunków prowadzenia robót (np. metoda sucha jest wskazana z uwagi na polichromie oraz zjawiska dyfuzyjne). Niezależnie od tego każda z metod ma indywidualne, właściwe tylko sobie cechy charakterystyczne [219], [42], [118].

Aby zapewnić odpowiednią współpracę konstrukcji istniejącej ze wzmocnieniem należy opracować odpowiedni system połączeń. Ciekawym rozwiązaniem jest zespolenie historycznego sklepienia ceglanoego z powłoką żelbetową za pośrednictwem stalowych łączników (strzemion, wieszaków) wklejonych w spoiny pionowe między cegłami sklepienia przy użyciu kleju epoksydowego, [124].

Dla lepszego zespolenia powłoki wzmocniającej z istniejącym sklepieniem należy starannie oczyścić grzbietową powierzchnię sklepienia z zaprawy, luźnych fragmentów zasyпки, usunąć zaprawę ze spoin na głębokość nie większą niż 10 mm i zastosować tzw. warstwę szczepną.

Aby poprawnie zastosować taką formę wzmocnienia należy wykonać niezbędne obliczenia statycznie – wytrzymałościowe konstrukcji oraz opracować technologię dopasowaną do indywidualnego przypadku.

Powłoki żelbetowe zbrojone są zazwyczaj siatkami. Jeśli powłoka pracuje w stanie błonowym, to zbrojenie należy umieścić w osi ciężkości jej przekroju. Zbrojenie należy układać w miarę możliwości zgodnie z kierunkiem naprężeń głównych. Odpowiednie zbrojenie dodatkowe należy ułożyć dla przejścia sił zginających na krawędziach, [61].

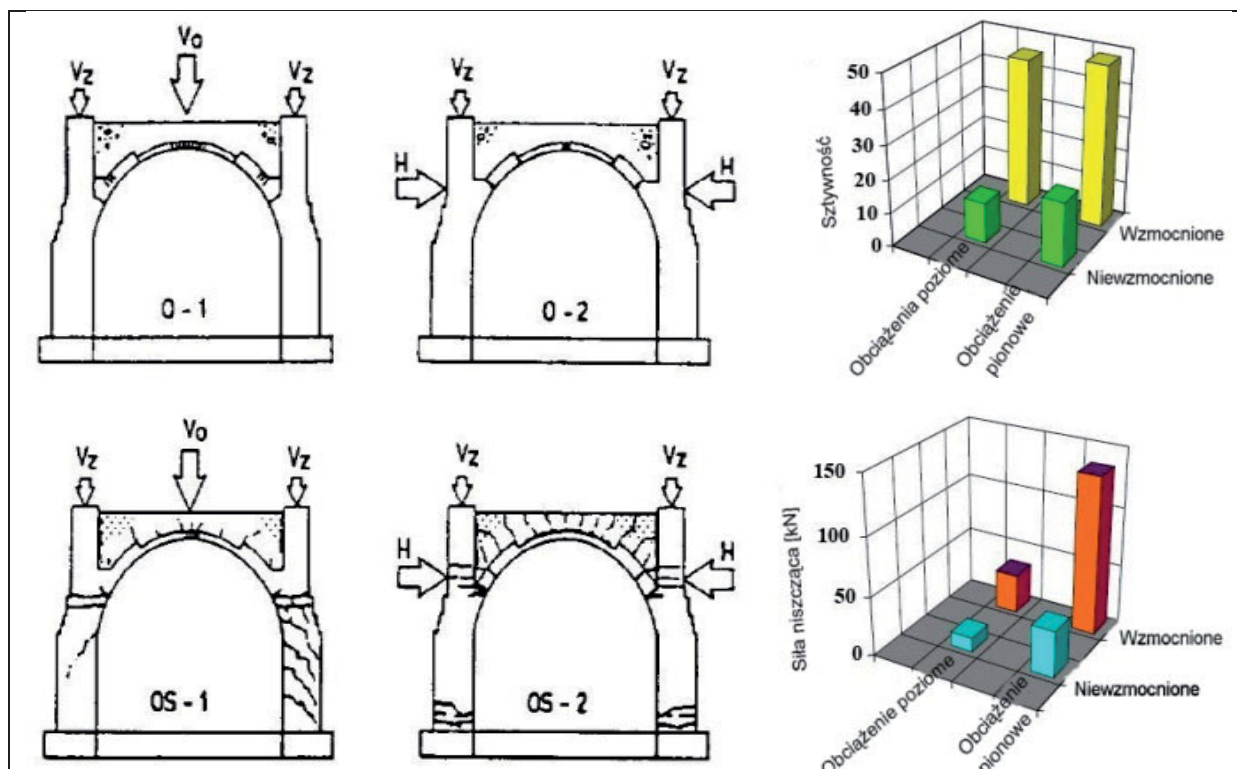
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Działania mające na celu podwieszenie konstrukcji sklepienia do nowej konstrukcji żelbetowej podejmowano w Polsce już w latach 50, [135]. Na rys. 3.96 widoczne są pręty zakotwione w murze dla utworzenia żelbetowej konstrukcji wzmacniającej odbudowywane sklepienie absydy romańskiego kościoła pw. św. Mikołaja i Wniebowzięcia NMP w Gieczu.



Rys. 3.96. Sklepienie absydy romańskiego kościoła pw. św. Mikołaja i Wniebowzięcia NMP w Gieczu w trakcie rekonstrukcji. Widoczne pręty w murze dla zakotwienia żelbetowej konstrukcji wzmacniającej, [135].

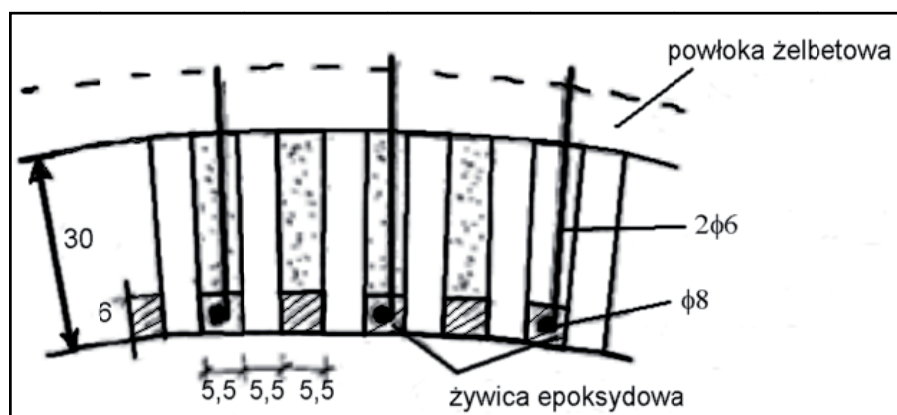
W [248] przedstawiono, rozwinięte później jeszcze w [247], wyniki badań nad zabytkowymi sklepieniami wzmocnionymi metodą natryskowych powłok żelbetowych. Jak można zauważyć na zestawionych na rys. 3.97 wynikach pracy sklepień niewzmocnionych i wzmocnionych, zastosowana metoda okazała się bardzo skuteczna.



Rys. 3.97. Schemat zniszczenia sklepień obciążanych pionowym i poziomym obciążeniem wzmocnianych i pierwotnych, [247].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

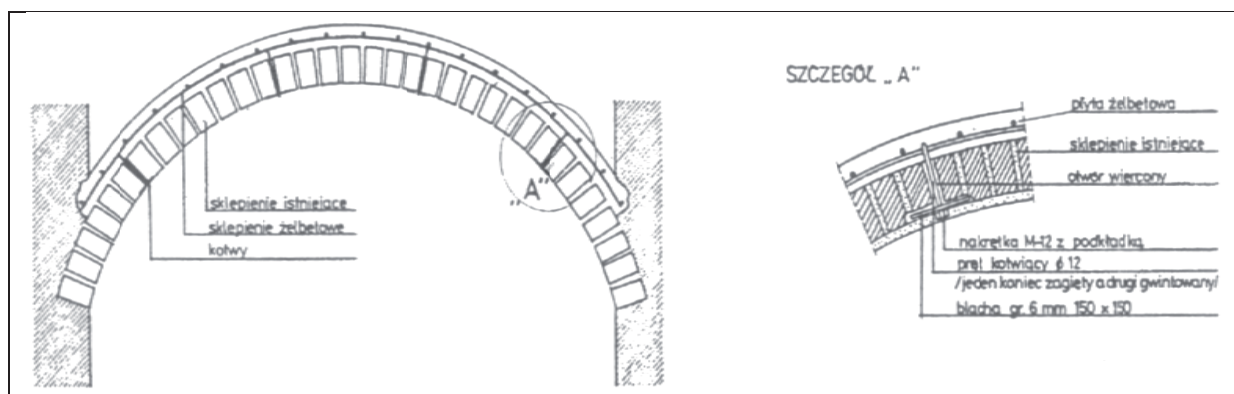
Również w [47] zaproponowano metodę podwieszania na stalowych wieszakach pierwotnych, uszkodzonych sklepień ceglanych do nowych powłok żelbetowych. stalowe wieszaki zakotwiono w pierwotnej powłoce ceglanej za pomocą żywicy epoksydowej, rys. 3.98.



Rys. 3.98. Sposób połączenia istniejącej konstrukcji ceglanej z wzmocniającą powłoką żelbetową, [47].

W tym przypadku autorzy proponują pozostawić pomiędzy oboma konstrukcjami kilkucentymetrową przestrzeń, co może pozytywnie wpłynąć na wymianę powietrza pomiędzy powłokami (szczególnie ważne w przypadku, gdy sklepienie pierwotne posiada polichromie) oraz może wpłynąć na poprawę izolacyjności cieplnej.

Techniki wykonywania wzmocniających powłok żelbetowych opisano między innymi w [168], [222], [244].



Rys. 3.99. Wzmocnienie sklepienia półkolistego betonową powłoką od góry, [244].

W [124], [118], [117] przedstawiono projekt naprawy uszkodzonego sklepienia w kościele Przemienienia Pańskiego w Poznaniu. Sklepienie znajdowało się w stanie krytycznym, który można określić jako pierwszy etap katastrofy budowlanej. Z uwagi na obecność polichromii, bezpieczeństwo konstrukcji i użytkowników oraz bezpośrednie zagrożenie katastrofą budowlaną uznano, że wzmocnienie sklepienia musi zostać wykonane metodą niepozostawiającą żadnych wątpliwości co do statyki sklepienia (nośności, sztywności) po wzmocnieniu. Zdecydowano o zastosowaniu odciążającej powłoki żelbetowej od strony grzbietowej wykonanej metodą torkretu, (rys. 3.100 i 3.101).

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.100. Zbrojenie powłoki żelbetowej, widoczne stalowe kotwy zespajające, [117].



Rys. 3.101. Nakładanie torkretu na zbrojenie w strefie wieńca podporowego, [117].

Problem, który można obserwować w realizacjach tego typu, to problem rozwiązania sposobu łączenia dwóch materiałów za pomocą łączników np.: stalowych, [241], [87], [80]. Cytowane pozycje dotyczą w większości zespolenia elementów żelbetowych z drewnianymi lub stalowymi. Omawiana w nich technologia zespolenia konstrukcji wzmacnianej z wzmacniającą jest jednak przydatna również przy wzmacnianiu łuków i sklepień.

Jak zauważają autorzy, niezależnie od rodzaju połączenia, w miejscu styku dwóch materiałów nie można uzyskać pełnego zespolenia. Złącze jest podatne i ma to wpływ na rozkład naprężeń i ugięcia elementu zespolonego. Dokładny opis sprężysto – plastycznego modelu połączenia przedstawiono w [80].

### 3.5.3. Blachy i pręty stalowe doklejane i wklejane

Technika klejenia umożliwia wzmacnianie zakrzywionych konstrukcji ceglanych poprzez doklejenie za pomocą klejów na bazie żywic syntetycznych zewnętrznego zbrojenia w postaci blach i prętów stalowych. Od wielu lat z powodzeniem stosuje się tego rodzaju wzmocnienia w konstrukcjach żelbetowych i drewnianych, [184].

Zbrojenie blachami lub prętami stalowymi jest sposobem wzmacniania mającym na celu zwiększenie nośności i sztywności zakrzywionej konstrukcji ceglanej, przy niewielkim wzroście wysokości po wzmocnieniu.

Ważne jest odpowiednie przygotowanie powierzchni stali przed klejeniem, najlepiej przez piaskowanie. Daje ono największe rozwinięcie powierzchni właściwej, stąd zabieg ten jest zalecany w przygotowaniu elementów stalowych do klejenia. Dobłą współpracę i trwałość połączenia konstrukcji murowej i zbrojenia zapewniają kleje epoksydowe. Odpowiednie dobranie materiału na spoiny klejowe jest tu kluczowe, gdyż zadaniem spoiny klejowej jest zapewnienie współpracy między łączonymi elementami. Płaskowniki stalowe współpracują z zakrzywionymi powłokami ceglanyymi jedynie dzięki siłom adhezji kompozycji klejowej. Siły te umożliwiają „umonolitycznienie” połączenia obydwu materiałów oraz przeniesienie – przez zastosowane zewnętrzne elementy wzmacniające – dodatkowego obciążenia i sił rozwarstwiających.

Przy wykonywaniu wzmocnień należy zapewnić możliwie rozbudowaną powierzchnię klejenia, a elementy wzmacniające należy kotwić w strefie spiętrzenia imperfekcji i naprężeń stycznych, zwłaszcza na końcach. Siła rozwarstwiająca, powstająca w wyniku występowania naprężeń stycznych pomiędzy konstrukcją murową a elementem doklejonym może prowadzić do niezachowania trzeciego, umownego stanu granicznego nośności połączenia elementu wzmacnianego z elementem wzmacnianym.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Badania potwierdzają, że prawidłowo zaprojektowane i wykonane wzmocnienie wklejanymi elementami stalowymi przyczynia się do znacznego zmniejszenia ugięć badanych konstrukcji i spadku ich odkształceń. Zaletą tej metody jest to, że nieznacznie zwiększając ciężar zakrzywionego elementu murowego można wyraźnie zwiększyć jego nośność oraz ograniczyć deformacje.

Mimo bardzo rzadkiego obecnie stosowania klejenia jako metody scalania elementów stalowych i murowych należy pamiętać, że metoda ta ma wiele zalet w porównaniu z metodami konwencjonalnymi. Podstawowe cechy połączeń klejowych i płynących stąd zalet to:

- struktura łączonych elementów nie ulega zmianie,
- nie wprowadza się do konstrukcji dodatkowych naprężeń,
- nie osłabia się konstrukcji przez nawiercanie dodatkowych otworów,
- przez klejenie można łączyć ze sobą różne materiały.

Wadą doklejanego zbrojenia stalowego jest podatność na korozję oraz duży współczynnik rozszerzalności termicznej. Szczególnie ważny to problem, gdy wzmocniane elementy wystawione są na działanie promieniowania UV.

Pomimo rozwoju materiałów epoksydowych, do niedawna klejenie było metodą stosunkowo rzadko stosowaną w łączeniu elementów stalowych i murowych. Bez wątplenia przyczyną jest to, że połączenia mechaniczne charakteryzują się właściwą nośnością, bezpieczeństwem i są mniej podatne na działanie zjawisk opóźnionych (pełzanie) a przede wszystkim są w pełni rozpoznane. Stosowanie połączeń klejowych we wzmocnianiu konstrukcji w ogóle, w tym zabytkowych w ostatnim okresie staje się coraz bardziej doceniane. Duży wpływ ma tu również rozwój materiałów kompozytowych wzmocnionych włóknami, które mogą być łączone prawie tylko poprzez klejenie i są coraz powszechniej stosowane w praktyce.

Możliwości stosowania żywic syntetycznych do wzmocniania konstrukcji budowlanych pojawiły się wraz z rozwojem inżynierii materiałowej i chemii. Uzyskanie w latach 60 żywic syntetycznych o wysokich cechach wytrzymałościowych spowodowało próby ich zastosowania we wzmocnianiu konstrukcji. Chodzi tu, przede wszystkim, o żywice epoksydowe. Od tego momentu zainteresowanie żywicami syntetycznymi jako znaczącym materiałem o charakterze konstrukcyjnym, stale wzrasta.

Trzeba jednak wyraźnie podkreślić, że stosowanie żywic epoksydowych należy ograniczyć do wytwarzania spoin konstrukcyjnych pomiędzy elementem wzmocnianym a wzmocniającym oraz do iniekcji wgłębnych, eliminując je z konserwacji cegły czy kamienia ze względu na cechy fizyko-chemiczne i przebarwienia zachodzące w czasie.

Z szeroko prowadzonych badań wynika, że dla wielu żywic epoksydowych pozornie bezbarwnych, słabo widoczne zażółcenie może wystąpić już po upływie od 6 do 12 miesięcy od momentu utwardzenia, natomiast trudne do zaakceptowania – po upływie 2–3 lat, [48].

Zagadnienie połączeń (spoin klejowych) zespalających element wzmocniany z elementem wzmocniającym jest o tyle ważne, że kompleksowe rozwiązanie go mogłoby, prowadzić do wyeliminowania bądź znacznego ograniczenia przy wzmocnieniu konstrukcji różnych łączników mechanicznych, a wprowadzenie w ich miejsce, wyłącznie lub prawie wyłącznie, połączeń klejowych.

Zespolenie klejowe polega na adhezji spoiwa do łączonych elementów. Jego wytrzymałość zależy będzie zarówno od wielkości sił adhezji stwardniałego kleju do powierzchni elementów łączonych, jak i od sił kohezji materiału kleju i materiału elementów łączonych.

Wprowadzenie połączeń klejowych do wzmocniania konstrukcji wymusza przeprowadzenie konkretnych badań mających na celu oszacowanie wielkości adhezji stosowanych kompozycji żywicznych do materiału wzmocnianego i wzmocniającego. Celem

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

tych badań jest ustalenie wytrzymałości określonych połączeń klejowych i kwalifikacji sposobu niszczenia konstrukcji wzmocnionych, w których łącznikiem byłyby spoiny klejowe. O wytrzymałości połączenia klejowego decyduje najsłabsze ogniwo w szeregu: element wzmacniany – spoina klejowa – element wzmacniający, [121]. Opisany szereg przy wzmocnieniu konstrukcji przybiera następującą postać:

$$R_4 - R_3 - R_2 - R_1 - R_2' - R_3' - R_4' \quad (3.101)$$

Miarodajną cechą oceny nośności połączenia klejowego jest ta spośród wartości granicznych wytrzymałości  $R_i$ , która decyduje o zniszczeniu połączenia przy zadanym sposobie obciążenia i odpowiadającym mu naprężeniu. Wpływ na wielkość wartości granicznych  $R_i$  (zwłaszcza  $R_2$ ,  $R_2'$ ,  $R_1$ ) posiada bardzo wiele czynników: stan powierzchni łączonych elementów, sposób przygotowania ich powierzchni do klejenia, wymiary geometryczne łączonych elementów, ich parametry techniczno-wytrzymałościowe, rodzaj kleju i grubość spoiny, wilgotność powierzchni łączonych, parametry otoczenia oraz rodzaj i sposób przyłożenia obciążeń. Są to czynniki mające również zasadniczy wpływ na trwałość połączeń.

Połączenie klejowe ciał stałych polega z reguły na zastosowaniu okresowo ciekłej warstwy pośredniej - kleju. Na skutek stwardnienia kleju, połączenie adhezyjne „ciało stałe – ciecz” przechodzi w stan „ciało stałe – ciało stałe” (konstrukcja wzmacniana – spoina klejowa – materiał lub materiały wzmacniające np. kompozytowe). Rodzaj sił zespalających nie ulega jednak zmianie. Najważniejszą rolę przy kształtowaniu zespolenia klejowego pełnią siły powierzchniowe typu fizycznego.

Przenoszenie sił w stwardniałym połączeniu rozdzielone jest na dwie warstwy adhezyjne i kohezję obu łączonych elementów (materiałów) oraz warstwy klejowej. Praca adhezji jest z reguły większa niż praca kohezji słabszego z partnerów. Wg. [26] zależności pomiędzy pracą adhezji –  $W_{12}$  i kohezji –  $W_{11}$  i  $W_{22}$  wyglądają następująco:

$$\text{jeżeli } W_{11} > W_{22}, \quad \text{to} \quad W_{11} > W_{12} > W_{22} \quad (3.102)$$

Wynika z niej, że zniszczenie połączenia następuje albo w słabszym z łączonych elementów, albo w kleju (spoinie), a nie na powierzchniach granicznych łączonych elementów. Zniszczenia adhezyjnego należy spodziewać się wszędzie tam, gdzie nastąpiło zanieczyszczenie lub zatłuszczenie podłoża powodujące jego niepełne zwilżenie przez klej. Projektując wzmocnienie, którego łącznikiem będzie spoina klejowa należy uwzględnić takie aspekty jak: wpływ wilgoci, temperatury, wytrzymałości klejonych elementów, geometrii łączonych elementów, wpływ rodzajów obciążenia, wpływ grubości warstwy klejowej, wpływ przygotowania powierzchni łączonych elementów oraz wpływ rodzaju kleju. Rozważania nad powyższymi zagadnieniami zawarto w [120].

W [5] autorzy przeprowadzili badania różnych typów połączeń tych samych elementów, tak dobierając długości, na których następowało łączenie, a także układ śrub i ich średnice, aby wszystkie połączenia miały taką samą nośność. Okazało się, że najmniejszą długość połączenia dawała metoda klejenia. Dzięki tej metodzie uzyskuje się połączenia najmniejsze gabarytowo, a zatem i najlżejsze (tym bardziej, że ciężar kleju w stosunku do ciężaru śrub lub innych łączników jest znikomy). Rezultaty podane w [5] dostarczają cennej informacji o dużej efektywności metody klejenia. Ma ona również swoje wady. Kleje stosowane do połączeń muszą mieć wysoką wytrzymałość, doskonałą przyczepność do powierzchni łączonych, gwarantującą wysoką wytrzymałość połączenia na granicy elementów, jak również być odpowiednio wyprofilowane. Połączenia klejone narażone są na występowanie w nich licznych defektów, takich jak wewnętrzne pory i nieciągłości kleju,



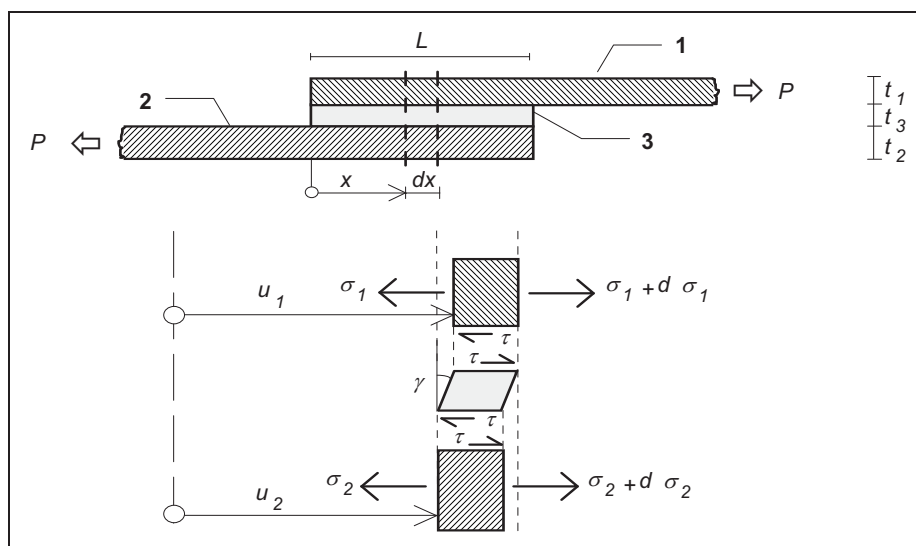
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

lokalne braki kleju lub jego przyczepności na granicach łączonych elementów etc. Innym źródłem potencjalnych wad połączenia jest niewłaściwy sposób przygotowania kleju.

Analiza pracy połączeń klejowych jest skomplikowanym zagadnieniem teoretycznym, należącym do tzw. zagadnień kontaktowych i daleko wykracza poza zakres niniejszej rozprawy. Należy nadmienić, że teoretyczne modele rozkładu naprężeń znacznie różnią się między sobą przyjętą zależnością „naprężenia – odkształcenia” w warstwie klejowej. Występują modele: liniowo – sprężyste [202], nieliniowo – sprężyste, sprężysto – plastyczne [95], liniowo – lepkosprężyste.

Przedstawiony przykładowo model analityczny takiego połączenia, tzw. model Volkersena zaczerpnięty z prac [109], [85], zakłada liniowo – sprężystą pracę połączonych materiałów.

Dwie warstwy oznaczone jako "1" i "2" połączone są warstwą kleju oznaczoną jako "3". Do powierzchni przekrojów warstw przyłożona jest siła rozciągająca  $P$ , powodująca ścinanie warstwy kleju. Zakłada się, że warstwa kleju ulega odkształceniom jedynie w wyniku ścinania (odkształcenie kątowe), a warstwy łączone - jedynie w wyniku rozciągania (odkształcenia liniowe). Połączenie (na tzw. zakładkę), siły wewnętrzne działające na poszczególne części połączenia w elemencie o długości  $dx$  oraz siły zewnętrzne pokazano na rys. 3.102. Szerokość warstw wynosi  $W$ , a ich grubości  $t_1$ ,  $t_2$  i  $t_3$ .



Rys. 3.102. Model mechaniczny Volkersena, zakładkowego połączenia klejonego [85].

Warunki równowagi sił dla elementów  $dx$  warstw, odpowiednio 1 i 2, mają postać:

$$d\sigma_1 W t_1 - \tau W dx = 0 \quad (3.103)$$

$$d\sigma_2 W t_2 + \tau W dx = 0 \quad (3.104)$$

W wyniku podzielenia pierwszego równania przez moduł sprężystości podłużnej  $E_1$  warstwy 1, a drugiego przez moduł sprężystości podłużnej  $E_2$  warstwy 2 i po elementarnych przekształceniach, równania (3.103) i (3.104) można zapisać w postaci następującej:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) = \tau \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \quad (3.105)$$

Korzystając z definicji odkształceń liniowych w odniesieniu do warstw 1 i 2 oraz odkształcenia kąтового dla warstwy kleju "3" - równania fizyczne dla warstw, odpowiednio 1, 2, 3, przyjmują postać:

3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (3.106)$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (3.107)$$

$$\frac{u_1 - u_2}{t_3} = \frac{\tau}{G_3} \quad (3.108)$$

gdzie  $G_3$  oznacza moduł ścinania warstwy kleju, zaś  $u_1$  i  $u_2$  przemieszczenia przekroju warstw 1 i 2 określonego biejącą współrzędną  $x$ . Po zróżniczkowaniu (3.106) i wykorzystaniu (3.107) i (3.108) otrzymano:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{G_3}{t_3} \left( \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \quad (3.109)$$

Po zróżniczkowaniu (3.105) i wstawieniu (3.109) uzyskano równanie różniczkowe jednorodne, II rzędu o stałych współczynnikach w postaci:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) - \lambda^2 \left( \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) = 0 \quad (3.110)$$

gdzie

$$\lambda^2 = \frac{G_3}{t_3} \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \quad (3.111)$$

Całka ogólna (3.110) ma postać:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x \quad (3.112)$$

Warunki brzegowe dla równania (3.110) są następujące:

$$\sigma_1(0) = 0 \quad \sigma_1(L) = \frac{P}{W t_1} \quad (3.113)$$

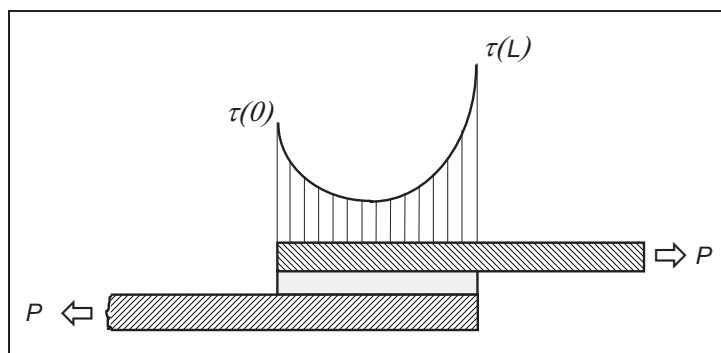
$$\sigma_2(0) = \frac{P}{W t_2} \quad \sigma_2(L) = 0 \quad (3.114)$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych i wyznaczeniu stałych  $A$  i  $B$ , z (3.105) wyznacza się funkcję określającą rozkład naprężenia stycznego wzdłuż odcinka  $L$  kontaktu warstw. Wyraża się ona równaniem:

$$\tau(x) = \sqrt{\frac{t_1 t_2 E_1 E_2}{t_1 E_1 + t_2 E_2} \frac{G_3}{t_3} \frac{P}{W}} \left[ -\frac{1}{t_2 E_2} \sinh \lambda x + \left( \frac{1}{t_1 E_1} + \frac{\cosh \lambda L}{t_2 E_2} \right) \frac{\cosh \lambda x}{\sinh \lambda L} \right] \quad (3.115)$$

Schematyczny rozkład naprężenia stycznego pokazano na rys. 3.103.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.103. Rozkład naprężenia stycznego wzdłuż granicy kontaktu sklejenych warstw, [85].

Maksymalne naprężenia występują na końcach odcinka kontaktowego, przy czym to, na którym z nich zależy od relacji między iloczynami  $E_1 t_1$  i  $E_2 t_2$ . W przypadku gdy  $E_1 t_1 < E_2 t_2$  to naprężenia spełniają relację  $\tau(0) < \tau(L)$ , w przeciwnym wypadku - odwrotnie. Rozkład jest symetryczny, jeżeli  $t_1 = t_2 = t$  oraz  $E_1 = E_2 = E$ . Korzystając z (3.115) i (3.111) oraz dokonując przekształceń trygonometrycznych, maksymalne naprężenie można wyrazić następująco:

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{G_3}{2 E t t_3}} \frac{P}{W} \coth \sqrt{\frac{G_3 L^2}{2 E t t_3}} \quad (3.116)$$

Z zależności tej można wyznaczyć np. długość zakładki  $L$  konieczną do przeniesienia obciążenia  $P$  (pod warunkiem, że znane są pozostałe parametry, w tym dopuszczalne naprężenie ścinające dla kleju) lub dopuszczalne obciążenie połączenia o długości  $L$ .

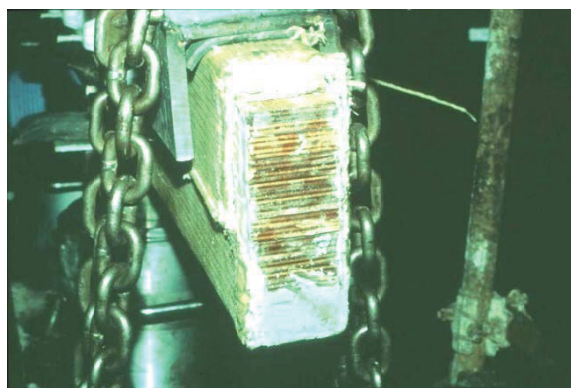
Istnieją modele bardziej złożone, uwzględniające w łączonych warstwach nie tylko odkształcenia liniowe, ale także postaciowe, jak również uwzględniające naprężenia normalne do kierunku działającego obciążenia. Dają one rezultaty jakościowo nie odbiegające od wyników uzyskanych z modelu Volkersena, tzn. wszystkie te modele wskazują, że maksymalne naprężenia występują na końcach połączenia klejowego i szybko zmniejszają się wraz z oddalaniem się od nich. Tak więc droga do wykonywania połączeń mocnych, ale jednocześnie niezbyt długich musi prowadzić poprzez redukcję naprężeń stycznych w strefach końcowych połączeń. Uzyskuje się to poprzez odpowiednie kształtowanie geometrii tych stref. Badania wykazały, że szczególnie godne polecenia jest wykonywanie skosów na końcach warstwy kleju i elementów wzmocniających. Znaczący wkład w analizę pracy połączeń klejowych przydatnych we wzmocnianiu konstrukcji wniosły także modele: Althofa [8], Bressona [36], Jasiński [122], Golanda-Reissnera [88], Hart-Smitha [95], Braiga [33].

Wykonywanie wzmocnień przy użyciu kompozycji epoksydowych wymaga zachowania reżimu technologicznego oraz ochrony połączeń przed wpływem temperatury (powyżej  $+60^\circ\text{C}$  następuje spadek wytrzymałości żywic epoksydowych), [119]. Prac wzmocniających z zastosowaniem połączeń klejowych nie należy prowadzić poniżej  $+5^\circ\text{C}$  i wilgotnościach wyższych niż 70 %. Ze względu na sieciowanie żywic epoksydowych przy stosowaniu utwardzacza (aminowego) Z-1, wilgotność elementów sklejanых nie powinna być wyższa niż 3 – 5%. W przypadku gdy wilgotność ta jest wyższa 5 – 10% i występują trudności z jej obniżeniem, możliwe jest zastosowanie w kompozycji utwardzacza Akwanil. Za optymalną grubość skleiny w połączeniach stosowanych przy wzmocnianiu konstrukcji należy uznać  $t_s = 1-2 \text{ mm}$ , [121]. Należy również pamiętać, że reakcja utwardzania mieszanin na bazie żywic epoksydowych ma charakter egzotermiczny, stąd przygotowanie ilości kleju musi uwzględniać tzw. „czas życia”, który wynosi ok. 40 min.

### 3.5.4. Konstrukcje drewniane umożliwiające podwieszenie żeber i wysklepek sklepień ceglanych

Kolejnym z przedstawianych sposobów naprawy i wzmacniania ceglanych konstrukcji zakrzywionych jest wzmocnienie przez zastosowanie nowej konstrukcji nośnej, np.: w postaci klejonych dźwigarów drewnianych, mogących przenosić znaczne obciążenia. Połączenie takiego rozwiązania ze wzmocnieniem taśmami, matami lub siatkami FRP daje większe korzyści niż powłoka żelbetowa. Wzmacniająca konstrukcja jest wielokrotnie lżejsza, korzystniej dostosowuje się do panujących nad sklepieniami warunków, niweluje wpływy zagadnień fizyki budowli na pracę w opisany sposób konstrukcji po wzmocnieniu. Na rys. 3.106 – 3.111 przedstawiono wzmocnione sklepienia w bazylice Św. Franciszka w Asyżu, [60].

Po serii prób laboratoryjnych (rys. 3.104 i 3.105) zdecydowano się tu na wzmocnienie sklepień przy użyciu drewna klejonego i materiałów kompozytowych, tworząc cały szereg żeber na grzbietach sklepień, odwzorowujący typowy układ gotycki. Żebra, które tu zastosowano to dźwigary drewniane wykonane ze sklejonej warstwowo sklejki wzmocnionej materiałami AFRP na miejscu wbudowania tak, że było możliwe odwzorowanie zdeformowanego kształtu sklepienia. Szerokość żeber pozostawała stała, a ich wysokość zmieniała się w zależności od wielkości odkształcenia sklepienia.



Rys. 3.104. Żebro z drewna klejonego wzmocnione matą aramidową AFRP, badania laboratoryjne, [60].



Rys. 3.105. Zniszczenie modelu żeber drewnianych wzmocnionych AFRP, [60].

Konstrukcję pierwotnego sklepienia zakotwiono łącznikami stalowymi i kompozytowymi do nowej konstrukcji wzmacniającej.

W takich przypadkach wzmocnień połączenie pomiędzy wzmacnianym sklepieniem a dźwigarami wzmacniającymi wykonywane jest przy użyciu prętów stalowych wklejanych w sklepienie ceglane, natomiast pręty te (gwintowane w części wystającej) łączy się z kątowym okuciem stalowym, ocynkowanym (np.: systemu BMF – SIMPSON), które jest mocowane przy użyciu łączników trzpieniowych do dźwigara klejonego. Połączenia tego typu, w zależności od fazy wyężenia konstrukcji po wzmocnieniu opisywane są w modelu analitycznym konstrukcji zespolonej poprzez zależność „obciążenie – przemieszczenie” jako „sprężysto – plastyczne” lub jako „sztywno – plastyczne”.

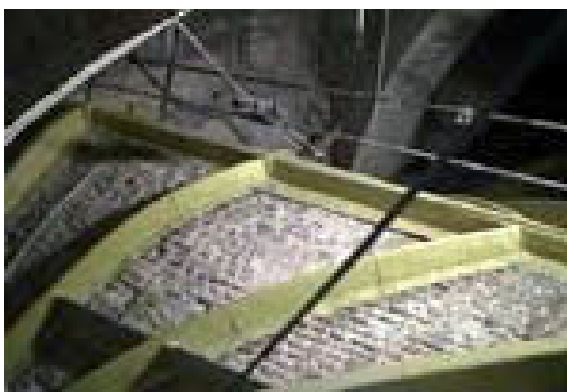
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.106. Żebra w trakcie klejenia, [60].



Rys. 3.107. Widoczne różnicowanie wysokości żeber, [60].



Rys. 3.108. Układ nowych żeber odwzorowujący układ żeber w sklepieniu gotyckim, [60].



Rys. 3.109. Połączenie wzmocnionego sklepienia z konstrukcją dachu za pomocą sprężystego tłumika drgań – ze względu na położenie bazyliki w rejonie sejsmicznym, [60].



Rys. 3.110. Żebro oklejone matami aramidowymi, [60].



Rys. 3.111. Szczegół połączenia powłoki sklepienia z żebrem wzmocniającym, [60].

Wykonanie tego typu wzmocnień jest związane ze szczególnie dokładnym wyznaczeniem krzywizny żeber ceglanych (po stronie grzbietowej). Jest to konieczne do wykonania dźwigarów klejonych. Inną możliwością, jest wykonywanie dźwigarów klejonych z tarcicy struganej w miejscu ich wbudowania. Ten sposób, jakkolwiek stosowany w mniej

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

odpowiedzialnych przypadkach, jest jednak obarczony mniejszą pewnością co do jakości a tym samym bezpieczeństwa konstrukcji. W obydwu wariantach możliwe jest zbrojenie dźwigarów klejonych przy użyciu materiałów FRP w celu zwiększenia ich nośności i ograniczenia gabarytów.

Podstawowym problemem pojawiającym się w tego typu rozwiązaniach jest zapewnienie rozbudowanej powierzchni klejenia i rozwiązanie problemów związanych z naprężeniami stycznymi pojawiającymi się na styku uszkodzonej zakrzywionej konstrukcji murowej z pasmami doklejanych dźwigarów drewnianych oraz ewentualnych wklejanych łączników stalowych. W tym rozwiązaniu również siła rozwarstwiająca, powstająca przez wzrost naprężeń stycznych pomiędzy konstrukcją murową a elementem doklejonym, może prowadzić do niezachowania trzeciego, umownego stanu granicznego nośności połączenia elementu wzmacnianego z elementem wzmacnianym.

Możliwe wydaje się w tej filozofii wzmacniania zastosowanie lekkich, kratowych, przestrzennych konstrukcji stalowych, [133], [134].

### 3.5.5. Maty, taśmy i siatki z materiałów FRP

Specyfika konstrukcji murowych sprawia, że zakrzywione konstrukcje ceglane reprezentujące kulturowe dziedzictwo spotykane są w bardzo wielu budynkach historycznych, a ich konserwacja jest bardzo aktualnym tematem. Niestety, szeroko pojęte budownictwo jest dość konserwatywne jeśli chodzi o wykorzystywanie nowoczesnych, zaawansowanych technologicznie materiałów.

#### 3.5.5.1. Ogólne informacje o materiałach kompozytowych FRP

Obok tradycyjnych technik naprawy, użycie materiałów kompozytowych FRP (*Fiber Reinforced Polymer*) oraz FRCM (*Fiber Reinforced Cementitious Matrix*) jest coraz częściej rozważane na całym świecie. Badania dowiodły, że doskonale nadają się one od naprawy istniejących konstrukcji, także murowych i zapewnienia im właściwego poziomu bezpieczeństwa, zwłaszcza gdy na konstrukcje oddziałują asymetryczne obciążenia, [212].

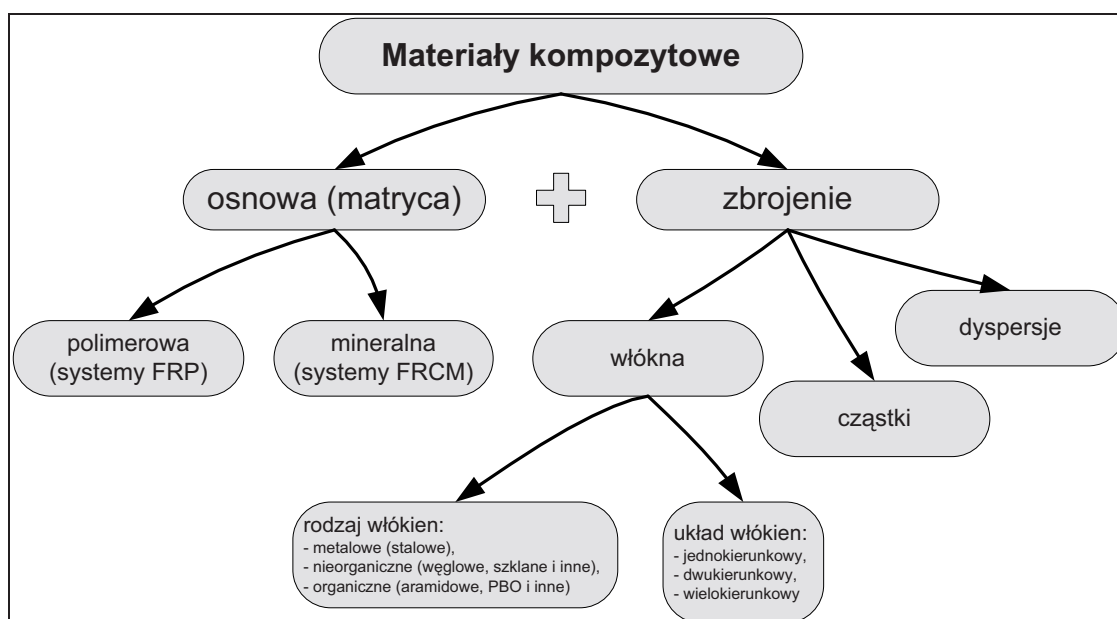
Pojęcie materiał kompozytowy (łac. *compositus* = złożony) oznacza materiał, który jest zbudowany z co najmniej dwóch różnych składników, przy czym ich połączenie zachodzi na poziomie makroskopowym.

Większość materiałów kompozytowych jest zbudowana z dwóch faz - fazy ciągłej, zwanej osnową (matrycą) oraz fazy drugiej, tzw. fazy rozproszonej, zwanej także zbrojeniem (rys. 3.112). Wypadkowe własności kompozytu są zależne od własności faz składowych, ich ilości w ogólnej objętości kompozytu, sposobu rozmieszczenia fazy rozproszonej w osnowie, a także cech geometrycznych fazy rozproszonej.

W zależności od rodzaju fazy rozproszonej, materiały kompozytowe można podzielić na kompozyty zbrojone cząstkami, zbrojone dyspersyjnie oraz zbrojone włóknami. Najpopularniejszym kompozytem zbrojonym cząstkami jest beton. Kompozyty zbrojone dyspersyjnie różnią się od kompozytów zbrojonych cząstkami tym, że wzmocnienie zachodzi na poziomie mikroskopowym (atomowym lub molekularnym), [84].

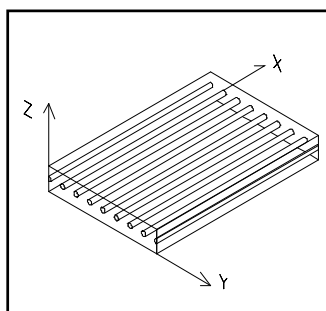
Kompozyty zbrojone włóknami (rys. 3.113 – 3.115), czyli te, które mają największe zastosowanie we wzmacnianiu konstrukcji (także murowych), to kompozyty, w których w charakterze fazy wzmacniającej wykorzystywane są różnego rodzaju włókna. Stanowią one element nośny, natomiast osnowa służy jako spoiwo łączące włókna. Osnowa zapewnia rozdział obciążenia zewnętrznego pomiędzy włókna, a także chroni je przed czynnikami zewnętrznymi. W niewielkim stopniu uczestniczy w przenoszeniu obciążeń zewnętrznych.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

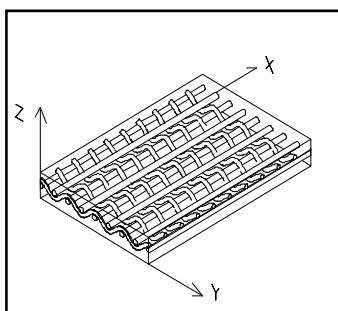


Rys. 3.112. Materiały kompozytowe.

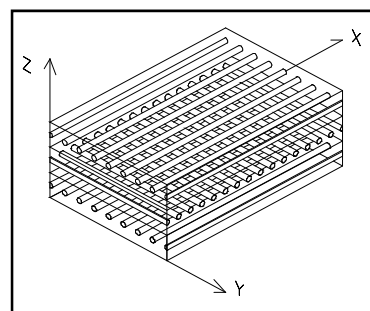
Kompozyty włókniste są najbardziej efektywnymi spośród materiałów kompozytowych w tym sensie, że wykazują najlepsze własności mechaniczne i wytrzymałościowe przy najmniejszym ciężarze właściwym. W kompozytach włóknistych jako osnowy stosuje się metale i żywice polimerowe, [175].



Rys. 3.113. Kompozyt z włóknami ułożonymi w jednym kierunku.

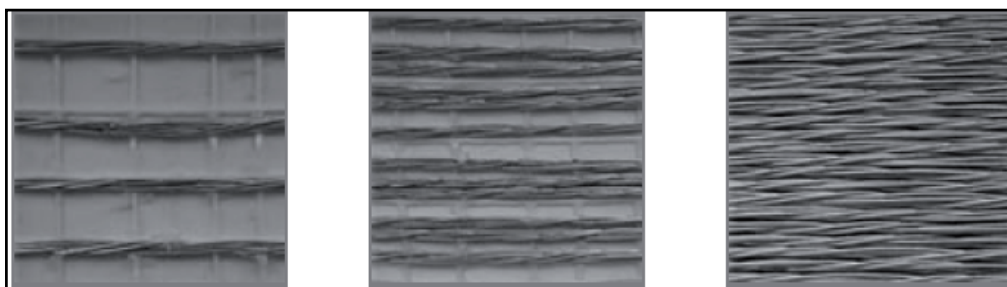


Rys. 3.114. Kompozyt z włóknami w dwóch kierunkach.



Rys. 3.115. Kompozyt wielowłóknowy.

Podstawowe znaczenie praktyczne mają kompozyty włókniste FRP o osnowach polimerowych (żywice termoplastyczne i termoutwardzalne) oraz w osnowach mineralnych FRCM, zbrojonych włóknami głównie węglowymi, grafitowymi, szklanymi, borowymi i aramidowymi, zdarzają się również zbrojone stalą, (rys. 3.116). Decydują o tym ich bardzo dobre parametry techniczne, ale również stosunkowo proste metody wytwarzania i względnie niska cena.



Rys. 3.116. Różnego rodzaju stalowe zbrojenie materiałów kompozytowych, [29].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Makroskopowe zachowanie się kompozytu zależy w wyraźny sposób od jego budowy mikroskopowej, a w szczególności od orientacji włókien, ich rozmieszczenia w przekroju kompozytu i jednorodności własności włókna. Budowa mikroskopowa zależy z kolei bezpośrednio od procesu technologicznego. Jednak najściślejsze nawet zachowanie tych rygorów nie jest w stanie wyeliminować takich niepożądanych efektów, jak nadmierne zagęszczenie włókien w pewnych rejonach i ich brak w innych, czy zmiany przekroju włókna. Makroskopowo mierzalnym skutkiem tych – w zasadzie nieuniknionych – defektów jest duży rozrzut wartości tak modułów sprężystości, jak i charakterystyk wytrzymałościowych uzyskanych dla tego samego kompozytu. Każdy inżynier – konstruktor musi zatem przy projektowaniu elementów kompozytowych podchodzić z dużą rezerwą do podanych w specyfikacjach charakterystyk materiałowych, [84].

Należy pamiętać, aby szczegółowo przeanalizować sposób aplikacji i rodzaj zastosowanych kompozytów. Niewłaściwe użycie, nieuwzględnienie praw statyki i fizyki budowli, może wiązać się ze zniszczeniem obiektu o znacznych walorach architektonicznych i kulturowych.

Podstawowy powód stosowania włókien wynika z ich dużej sztywności i wytrzymałości, wielokrotnie większych od wartości odpowiednich charakterystyk dla materiału włókna, ale wyznaczonych na podstawie badań materiału w postaci masowej. Dla przykładu - wytrzymałość na rozciąganie stali konstrukcyjnych jest rzędu 0,2-0,7 GPa, tymczasem wytrzymałość cienkich włókien stalowych wynosi ok. 4 GPa. Ta wyraźna różnica na korzyść włókien wynika stąd, że struktura krystaliczna włókna jest znacznie doskonalsza, a także – statystyczna liczba defektów sieci krystalicznej we włóknie o znikomo małej objętości jest znacznie mniejsza niż w dużej objętości tego samego materiału.

Istotnym wskaźnikiem efektywności włókna są tzw. wytrzymałość właściwa i moduł właściwy (wyrażające się w jednostkach długości), tzn. odpowiednio stosunki wytrzymałości na rozciąganie i modułu sprężystości do ciężaru właściwego materiału włókna. Im wartości tych wskaźników są większe, tym włókno jest bardziej efektywne.

Najczęściej stosowanymi w kompozytach włóknami są włókna szklane, grafitowe (węglowe) i organiczne, a w mniejszym zakresie ceramiczne i boronowe. Porównanie parametrów poszczególnych rodzajów włókien zawarto w tab. 3.1.

Tab. 3.1. Własności wybranych włókien, [84]

PARAMETR	RODZAJ WŁÓKNA				
	szklane E	szklane S	grafitowe	Kevlar 49	boron
Średnica [μm]	16	16	7 - 8	12	100 - 200
Ciężar właściwy ρ [kN/m <sup>3</sup> ]	25.0 - 25.5	24.5	13.8 - 18.6	14.1	25.5
Wytrzymałość na rozciąganie S [GPa]	1.7 - 3.5	2.5 - 4.8	1.7 - 2.8	2.3 - 3.6	3.5
Wytrzymałość właściwa S/ρ [km]	68 - 136	103 - 197	123 - 163	161 - 257	135
Moduł Younga E [GPa]	72	86	230 - 250	120 - 125	400 - 410
Moduł właściwy E/ρ [km × 10 <sup>3</sup> ]	2.8	3.5	12.4 - 18.1	8.5	16.0

Włókna szklane są najstarszymi, najtańszymi i najczęściej stosowanymi włóknami używanymi do zbrojenia kompozytów. Istnieją dwa podstawowe typy włókien szklanych: E i S. Pierwszy z nich ma gorsze własności mechaniczne (sprężyste, wytrzymałościowe, zmęczeniowe, udarowościowe, termiczne, reologiczne), ale znacznie niższą cenę niż typ S, stworzony z przeznaczeniem dla zastosowań militarnych. W chwili obecnej nadal znacznie częściej stosuje się włókna typu E.

Włókna grafitowe pojawiły się w latach 50. Większością parametrów przewyższając włókna szklane, są jednak od nich znacznie droższe. Można wyróżnić trzy grupy tych włókien, a mianowicie włókna wysokowytrzymałe, wysokomodułowe i



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

ultrawysokomodułowe. Najczęściej stosowane włókna grafitowe znane są pod nazwami handlowymi Toray T300 i AS.

*Włókna węglowe* są również włóknami grafitowymi, ale o mniej uporządkowanej strukturze. Obok obszarów o strukturze właściwej dla krystalicznego grafitu, występują obszary o zaburzonej sieci krystalicznej, a nawet obszary całkowicie jej pozbawione. Produkowane przemysłowo włókna węglowe znane są w handlu pod nazwami firmowymi: Modmor, Grafil, Hyfil, Torayca. Głównymi producentami włókien węglowych są: Japonia, USA, Anglia, Francja, Niemcy, [23].

*Włókna organiczne* – takie jak bawełna, juta i sizal – wykorzystywane są do zbrojenia kompozytów od dawna. Zakres ich stosowania był jednak bardzo ograniczony ze względu na bardzo niskie parametry mechaniczne. Dopiero pojawienie się włókien aramidowych czy PBO spowodowało ich szerokie wykorzystywanie w produkcji lotniczej, samochodowej, a przede wszystkim w produkcji sprzętu sportowego (narty, łodzie wyczynowe, sprzęt golfowy, liny). Nazwy handlowe tych włókien to Nomex, Kevlar, Kevlar 29 i Kevlar 49. Włókna aramidowe są generalnie rzecz biorąc najlepsze pod względem własności mechanicznych, ale jednocześnie najdroższe. Z tego powodu są one często używane łącznie z włóknami grafitowymi lub szklanymi typu *E*, tak, aby uzyskać kompromis między parametrami mechanicznymi i rozsądną ceną, [84].

Rozwój włókien kompozytowych zaczął się od zastosowań w technice militarnej i lotnictwie w pierwszej połowie XX wieku [108] z powodu ich niezmiernie niskiej wagi w stosunku do wytrzymałości, odporności na korozję i łatwości stosowania. Z jednoczesną kombinacją tych cech mamy do czynienia w zasadzie tylko w przypadku kompozytów, stąd gwałtownie materiały te stały się interesujące dla budownictwa. Doświadczenia laboratoryjne pokazały, że w wielu sytuacjach mogą zostać użyte do wzmacniania elementów konstrukcyjnych uszkodzonych obiektów np. znajdujących się na terenach sejsmicznych. Przydatność materiałów FRP potwierdza rys. 3.117 pokazujący zależność odkształcenia od naprężenia dla włókien szklanych (GFRP), włókien węglowych (CFRP) i stali.

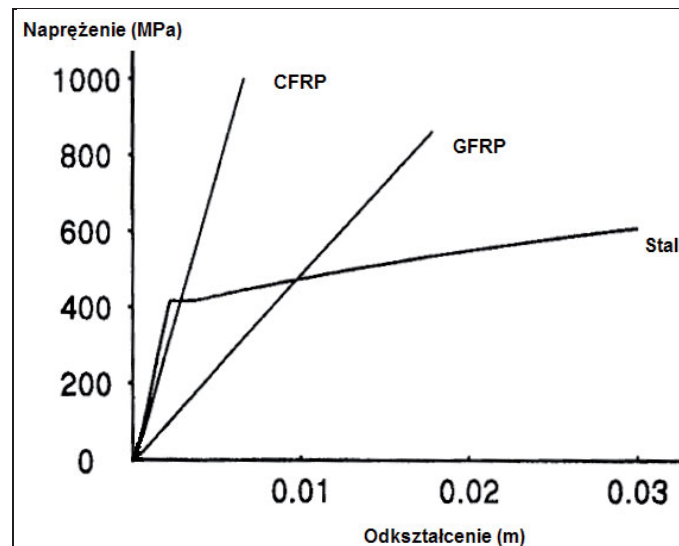
Materiały kompozytowe typu FRP od wielu lat stosowane są z sukcesami do wzmacniania konstrukcji żelbetowych [165], [208], [45], [11], [232] (także w Polsce [216], [217], [218]) oraz drewnianych. Pierwsze badania z zastosowaniem taśm węglowych do wzmacniania elementów drewnianych przeprowadzono na świecie w latach dziewięćdziesiątych [228], [19], [24], [27], [58], [90]. Również w Polsce zostały podjęte podobne próby [122], [39], [40], [143], [197].

Materiały typu FRCM dopiero pojawiły się w publikacjach dotyczących wzmacniania elementów żelbetowych [38], [14], [156], [67], jak również murowych [157], [15].

Przydatność i możliwość zaadaptowania kompozytów FRP dla wzmacniania konstrukcji murowych w początkach swojego rozwoju została zbadana i przedstawiona w opracowaniach [96], [210]. Jedną z pierwszych była praca [59]. Autorzy przedstawili wyniki doświadczeń prowadzonych na ścianie murowej wzmocnionej przez naklejone pionowo lub pod kątem materiały FRP. Inne badania opisano, między innymi, w pracach [229], [150], [172], [93].

Doświadczenia te rozwinięto i jako jedne z pierwszych badań nad użyciem kompozytów do wzmacniania ścian murowych opisano w [211], [212]. Skuteczność tej techniki została zademonstrowana na modelach testowych w naturalnej skali, w podstawowych stanach naprężeń, uzyskanych pod statycznym, cyklicznym obciążeniem. Zbadano również wpływ zastosowania wzmocnienia z jednej albo obu stron muru. Dowiedziono, że ściany wzmocnione z jednej strony wykazywały tylko nieznacznie większe deformacje od ścian wzmocnionych po obu stronach.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.117. Zależność odkształcenia od naprężenia dla różnych włókien FRP i stali, [73].

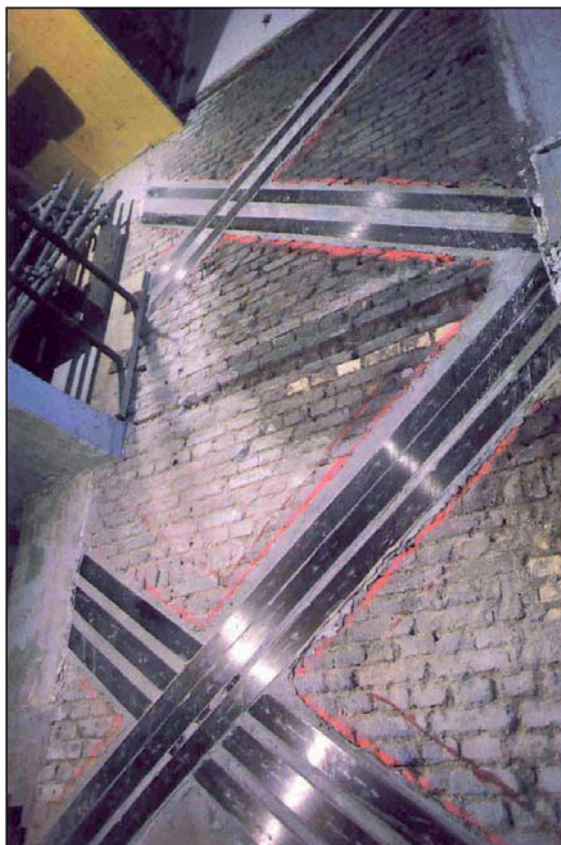
Kolejne doświadczenia poświęcone badaniu zachowania murów wzmocnionych kompozytami FRP zostały przedstawione w [208], [73]. Cykliczne testy na modelach ścian murowych w dużej skali, wzmocnionych przez użycie materiałów kompozytowych CFRP o jednokierunkowo ułożonych włóknach węglowych, zostały opisane w [140]. Wzmocniony za pomocą materiałów FRP budynek murowany, w skali naturalnej, poddany symulowanemu działaniu sejsmicznemu został zbadany i opisany w [213]. Zademonstrowano tu skuteczność wzmocnienia w przenoszeniu sił wewnętrznych w konstrukcji, zmniejszaniu deformacji, wpływu ścinania i poprawie pracy konstrukcji. W [231] opisano skuteczność użycia materiałów FRP do wytworzenia sprężonego ściągu obwodowego dla wzmacniania historycznych obiektów murowanych. W [232] zasugerowano prosty model projektowania zgodny z EC6 dla wszystkich przypadków naprężeń. Skuteczność tego modelu została potwierdzona w [160], [235] w badaniach konstrukcji wzmocnionych pracujących pod statycznym, cyklicznie-statycznym, pseudo-dynamicznym i dynamicznym obciążeniem.

Aby potwierdzić wcześniejsze przewidywania skupiono się nad tym, by ulepszyć zachowanie konstrukcji w podstawowych stanach naprężeń. W [239] przedstawiono wyniki obszernego doświadczalnego programu badania ścian murowych w dużej skali, wzmocnionych pasami taśm z włókien kompozytowych. Wzmocnione ściany oparły się obciążeniu od pięciu do dwudziestu czterech razy większemu od ciężaru ściany i odchyliły się tylko o ok. 5% od pionu. Skuteczność tego rodzaju wzmocnień (FRP) w podstawowych stanach naprężeń została także opisana w [6], [92], [93]. We wszystkich przypadkach wzmocnienie przy użyciu materiałów kompozytowych FRP dowiodło swojej skuteczności.

Obecnie najczęściej stosuje się: taśmy jako główny element wzmacniający, kompozytowe kształtki przeznaczone do wzmacniania stref ścinania oraz maty włókniste, którymi można wzmacniać kolumny, słupy, konstrukcje murowane, wykonywać wzmocnienia powierzchniowe. Można ich także użyć we wszystkich tych sytuacjach, gdzie zastosowanie taśm jest niemożliwe lub znacznie utrudnione.

W literaturze przedmiotu można znaleźć o wiele więcej informacji dotyczących wzmacniania ścian ceglanych materiałami FRP poza tu podanymi. Pod względem podstawowej koncepcji metoda ta odpowiada znanej i stosowanej także w Polsce metodzie wzmacniania polegającej na przyklejaniu stalowych płaskowników do elementów konstrukcji. Zastosowanie materiałów kompozytowych ma jednak wiele przewag. Odpowiednie porównanie obu tych metod przedstawiono w tab. 3.2.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



*Rys. 3.118. Jedna z pierwszych prób wzmocnienia ściany ceglanej taśmami FRP – Zurich 1995 r., [212].*

Wydaje się, że jedyną poważną wadą systemu wzmocnienia konstrukcji budowlanych materiałami kompozytowymi jest słaba odporność ogniowa połączenia – kleju, w którym już przy temperaturze  $60^{\circ}\text{C}$  rozpoczyna się proces mienienia i wzrasta odkształcalność liniowa i postaciowa. Jest to dość poważny problem wszystkich połączeń klejowych, który z pewnością rozwiązywany będzie jeszcze w przyszłości. Z tego powodu połączenia klejowe powinny być chronione przed ewentualnym działaniem ognia.

W trakcie wykonywania takiego rodzaju wzmocnień należy pamiętać, że – jak dowodzą badania – dość częstym przypadkiem niewykorzystania w pełni właściwości taśm FRP jest ich odspojenie od wzmocnianej konstrukcji. Z tego właśnie powodu zaleca się stosowanie wklejanych w konstrukcję kotew (rys. 3.119), np. aramidowych (rys. 3.120).



*Rys. 3.119. Kotwa z włókien aramidowych.*



*Rys. 3.120. Taśmy CFRP kotwione za pomocą wklejanych kotew z włókien aramidowych.*

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Tab. 3.2. Porównanie cech ogólnych w metodzie wzmacniania przez doklejanie stalowych płaskowników i materiałów kompozytowych, [216]

Klejenie stalowych kształtowników	Klejenie materiałów kompozytowych
<p><b>ZALETY</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• stosunkowo niski koszt materiału,</li> <li>• liczne zastosowania,</li> <li>• wystarczająca wytrzymałość, także zmęczeniowa,</li> </ul> <p><b>WADY</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• podatność na korozję,</li> <li>• stosunkowo duży ciężar płaskowników,</li> <li>• duże trudności w manewrowaniu dłuższymi, ciężkimi elementami w ograniczonej przestrzeni,</li> <li>• duży koszt robocizny,</li> <li>• duże koszty konserwacji,</li> <li>• potrzeba budowy rusztowań i pomostów roboczych,</li> <li>• ograniczone wymiary (problem połączeń),</li> <li>• połączenie ze wzmacnianym elementem zwykle klejowo-mechaniczne (tj. klej + różnego rodzaju zakotwienia mechaniczne),</li> </ul>	<p><b>ZALETY</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• niepodatność na korozję,</li> <li>• ponad dziesięciokrotnie większa wytrzymałość na rozciąganie,</li> <li>• lekkość i łatwość manewrowania,</li> <li>• niski koszt robocizny,</li> <li>• krótki czas realizacji,</li> <li>• możliwość uniknięcia budowy rusztowań (np. użycie tylko podnośników samochodowych z koszem),</li> <li>• brak ograniczeń wymiarowych,</li> <li>• ekstremalnie wysoka wytrzymałość zmęczeniowa,</li> <li>• nie wymaga konserwacji,</li> <li>• połączenia taśmy ze wzmacnianym elementem tylko za pomocą warstwy kleju,</li> </ul> <p><b>WADY</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• stosunkowo wysoki koszt materiału,</li> <li>• brak pełnej powszechności stosowania,</li> <li>• słaba odporność ogniowa ze względu na połączenie (klej),</li> </ul>

Przydatności materiałów kompozytowych do wzmacniania konstrukcji zobrazowano zestawieniem podanym w tab. 3.3, na podstawie [155].

Tab. 3.3. Zestawienie wybranych cech muru ceglano i materiałów stosowanych w naprawach i wzmocnieniach, [155]

	Wytrzymałości na ściskanie $f_{ck}$ i na rozciąganie $f_{tk}$ [MPa]		Wydłużenie przy rozzerwaniu	Moduły sprężystości		Pełzanie	Temperatura
	$f_{ck}$	$f_{tk}$		%	$E$ [GPa]		
Materiał							
Mur z ceg. pełnej	0,5 – 5	0,2 – 0,4		0,2 – 6,5	0,2	1,3–2,2	$5 \cdot 10^{-5}$
Maty	węglowe	0	>3800	1,8	>230		0
	szklane	0	>3400	4,5	>75	0,07	0
Taśmy węglowe	–	>2500		>160			
Stal St3SX	195 – 245		23	205	0,3	0	$12 \cdot 10^{-6}$
Pręty spiralne	–	1200	100	135		0	$12 \cdot 10^{-6}$
Siatki stalowe AIII (34GS)	–	460	18	205		0	$12 \cdot 10^{-6}$

Nowością są materiały FRCM (*Fiber Reinforced Cementitious Matrix*) składające się z siatki z włókien np.: węglowych (rys. 3.121) lub PBO (*poliparafenilenbenzobisoxazol*) (rys. 3.122), która stanowi wzmocnienie (matrycę) oraz z zaprawy mineralnej, która łączy siatkę z podłożem, np.; ceglanym.

Obecnie materiały FRP (włókna węglowe, Kevlar, szklane, itd.) w przypadku wzmacniania elementów konstrukcyjnych łączone są ze wzmacnianym podłożem przy

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

pomocy żywic (żywica epoksydowa lub poliestrowa). W systemach FRCM (np.; RUREDIL X MESH C10/M25, [127]), w odróżnieniu od FRP, stosuje się nieorganiczną zaprawę składającą się z hydraulicznego spoiwa oraz dodatków, które są chemicznie, fizycznie i mechanicznie kompatybilne z podłożem, a szczególnie z murem ceglany.

Zastosowanie w systemach FRCM zaprawy mineralnej jako matrycy łączącej wzmocnienie z włóknem z elementem konstrukcyjnym posiada następujące przewagi nad systemami FRP wykorzystującymi żywice epoksydowe lub poliestrowe:

- wytrzymałość na działanie wysokiej temperatury identyczna jak wytrzymałość podłoża ceglanoego,
- możliwość nałożenia na wilgotne podłoże – systemy FRP mogą być zwykle nakładane, gdy podłoże jest suche, ponieważ żywice (poliestrowe i epoksydowe) nie wiążą w obecności wody; wymogu tego nie stawia się w systemach FRCM,
- łatwe nakładanie nawet na nierównych i nieregularnych podłożach – warstwa mineralnej zaprawy wyrównuje nierówności podłoża; nie ma więc potrzeby wstępnego wygładzania podłoża, tak jak to ma miejsce w przypadku aplikacji systemów FRP,
- łatwe wykonanie – materiał jest mieszany z wodą, a otrzymaną zaprawę nakłada się jak zwykłą zaprawę, po czym osadza się (zatapia) w niej siatkę,
- ubrabialność – nie ma większych różnic w stosowaniu systemu w zakresie temperatur od  $+5^{\circ}\text{C}$  do  $+40^{\circ}\text{C}$ ; w systemach FRP, z uwagi na stosowanie żywic syntetycznych, zakres temperatury jest ograniczony,
- jest to bezpieczniejszy system w odróżnieniu od systemów FRP z zastosowaniem żywic; nakładając zaprawę wystarczy przestrzegać zwykłych instrukcji dotyczących stosowania zapraw mineralnych,
- narzędzia użyte przy nakładaniu można umyć wodą – systemy FRP wymagają użycia specjalnych rozpuszczalników, a w wielu przypadkach narzędzia nie mogą być użyte ponownie.

Zgodnie z [127], wzmocnienie systemami FRCM (np.: RUREDIL X MESH C10/M25) umożliwia wzrost nośności konstrukcji murowej przez rozłożenie naprężeń rozciągających na większą powierzchnię. Dodatkowo, część obciążenia jest przejmowana przez wzmocnienie dzięki efektowi skutecznego połączenia wzmocnienia wykonanego z mineralnej zaprawy z wtopioną jedną lub dwiema warstwami siatki z włókna węglowego z powierzchnią wzmocnianej konstrukcji murowej.



Rys. 3.121. Siatka z włókien węglowych.



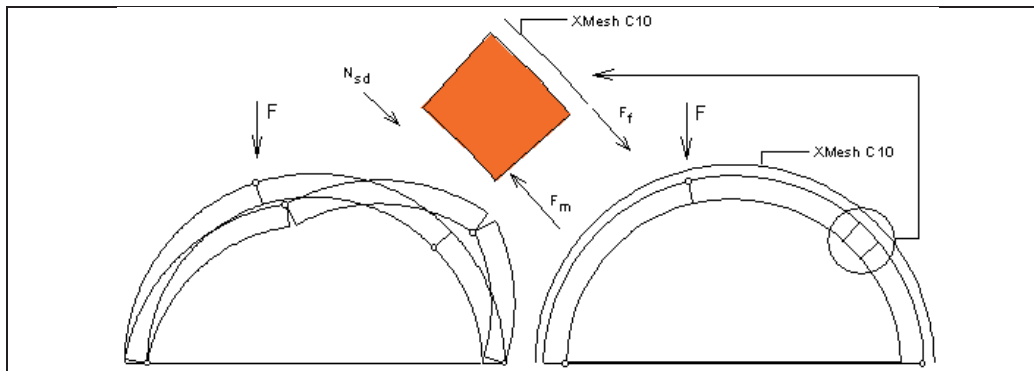
Rys. 3.122. Siatka z włókien PBO.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Zalety wzmocnień materiałami kompozytowymi FRP i FRCM uwidaczniają się zwłaszcza w konserwacji zabytków. Głównie chodzi o stosunek wagi i wymiarów do wytrzymałości. Ponadto materiały te można bardzo łatwo „ukryć” tak, że zachowany jest pierwotny wygląd obiektu.

Pomocnym w projektowaniu wzmocnień konstrukcji murowych przy użyciu materiałów FRCM (w tym przypadku X-Mesh C10/M25) jest program *Xmesh Designer 1.8* firmy Ruredil.

Na rys. 3.123 pokazano przykładowe zastosowanie tego oprogramowania do wyznaczania ilości wzmocnienia FRCM po stronie grzbietowej łuku ceglanego.



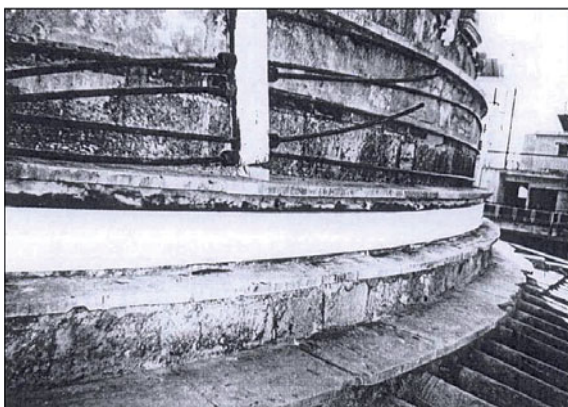
Rys. 3.123. Wzmocnienie po stronie grzbietowej łuku – przykład z programu *Xmesh Designer 1.8*

Program jest nadal doskonalony i w przyszłości może w pełni zaspokoić oczekiwania i potrzeby użytkowników jako narzędzie informatyczne do sprawnego projektowania wzmocnień przy użyciu materiałów FRCM.

### 3.5.5.2. Materiały kompozytowe FRP we wzmacnianiu zakrzywionych konstrukcji ceglanych

W ostatnich kilku latach wystąpił wyraźny wzrost zainteresowania użyciem materiałów kompozytowych FRP do wzmacniania zakrzywionych konstrukcji murowych.

Jedną z pierwszych realizacji było wzmocnienie kopuły w Grecji (rys. 3.124, zastosowanie taśm kompozytowych ułożonych równoleżnikowo, dla powstrzymania deformacji narastających wskutek rozciągania), oraz sklepienia we Włoszech, jak na rys. 3.125.



Rys. 3.124. Jedno z pierwszych zastosowań kompozytów we wzmacnianiu kopuł – Grecja.



Rys. 3.125. Wzmocnienie sklepienia matami z włókien węglowych CFRP.

Kompozytów z włókien aramidowych użyto do wzmocnienia i przywrócenia nośności sklepień w bazylice Św. Franciszka w Asyżu (rys. 3.126 i 3.127) [60], po tym jak zostały

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

zniszczone w wyniku trzęsienia ziemi i wymagały natychmiastowej interwencji z uwagi na stan pozostałych zachowanych sklepień.

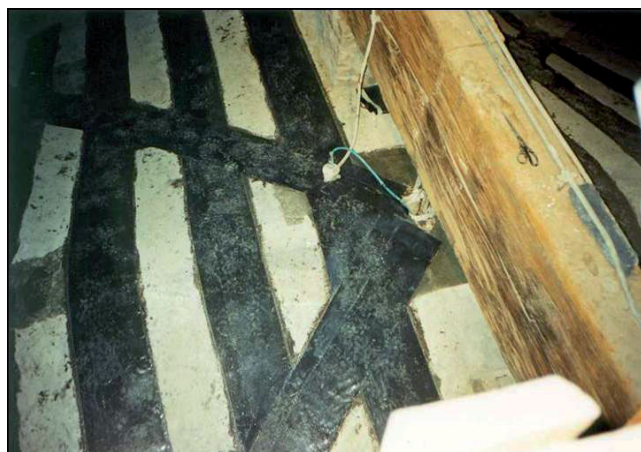


*Rys. 3.126. Wzmocnianie sklepień ceglanych w bazylice św. Franciszka w Asyżu przy pomocy mat z włókien węglowych, [60].*



*Rys. 3.127. Wzmocnianie żeber sklepień ceglanych w bazylice św. Franciszka w Asyżu przy pomocy włókien aramidowych, [60].*

W kolejnych latach coraz częściej zaczęto stosować kompozyty do wzmocnienia łuków, sklepień i kopuł. Powstały realizacje głównie we Włoszech (rys. 3.128 i 3.129), ale również i w Polsce – Kościół św. Piotra i Pawła w Krakowie – wzmocnienie sklepienia kolebkowego; wzmocnienie kopuły Katedry w Lublinie; wzmocnienie łuków i sklepień Muzeum Archeologicznego w Krakowie, rys. 3.130 i 3.131.



*Rys. 3.128. Wzmocnienie matami CFRP – Włochy 1999 r.*



*Rys. 3.129. Wzmocnienie sklepienia taśmami CFRP – Włochy 2001 r.*



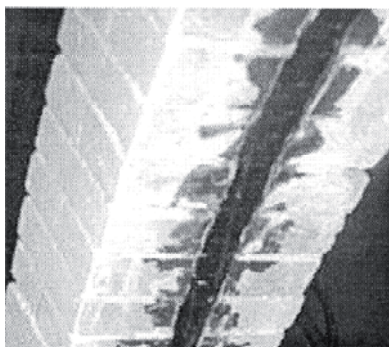
*Rys. 3.130. Wzmocnienie sklepienia w Krakowie.*



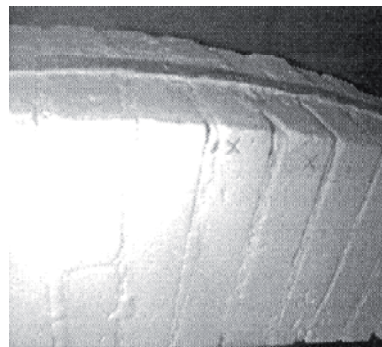
*Rys. 3.131. Wzmocnienie sklepienia w Krakowie.*

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Badania nad statyką zakrzywionych konstrukcji wzmocnionych przedstawiono w [54]. Testowano obciążane statycznie łuki ceglane wzmocnione taśmami FRP. W [17] zaproponowano zastosowanie taśm CFRP we wzmacnianiu 3 łuków ceglanych (łuk n1 – niewzmocniony, n2 - wzmocniony taśmą CFRP po stronie podniebienia – rys. 3.132, n3 – wzmocniony taśmą CFRP po stronie grzbietowej – rys. 3.133). Badania, pomiar sił i przemieszczeń prowadzono aż do wystąpienia widocznych przegubów (Rys. 3.134). Modele badawcze wykonano w skali 1:2 (rozpiętość łuków – 150 cm, wysokość łuków – 43,25 cm, wysokość i szerokość przekroju – 10 cm). Do wzmacnienia zastosowano taśmę CFRP o szerokości 1,25 cm.



Rys. 3.132. Łuk n2 wzmocniony taśmą CFRP po stronie podniebienia, [17].



Rys. 3.133. Łuk n3 wzmocniony taśmą CFRP po stronie grzbietowej, [17].



Rys. 3.134. Łuk n3 w fazie zniszczenia, [17].

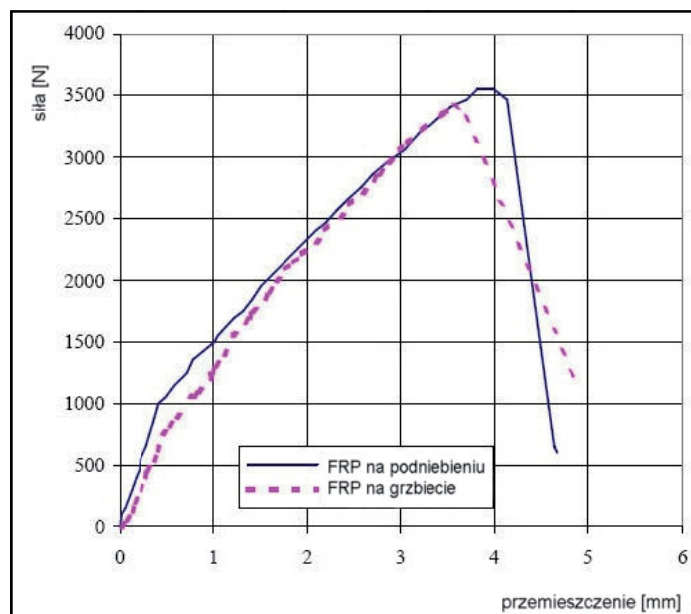
Prezentowane w [17] wyniki badań dość jednoznacznie wskazują na przydatność zastosowania tego rodzaju wzmacnień przy naprawie zakrzywionych elementów murowych. Zauważyć należy również sygnalizowaną przez autorów różnicę w jakości wzmacnienia, zależnie od umieszczenia taśmy CFRP (rys. 3.135).

W [76] starano się również udowodnić przydatność wzmacnienia z materiałów FRP we wzmacnianiu łuków ceglanych. Autorzy słusznie twierdzą, że praca statyczna sklepienia jest uzależniona od wagi konstrukcji i obciążenia zadanego w punkcie przyłożenia  $P$ . Wysokość przekroju sklepienia, na jakim dokonywano doświadczeń wynosiła 130 mm, a rozpiętości – 2000 mm. Zastosowane wzmacnienie to trzy taśmy FRP doklejone wzdłużnie po



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

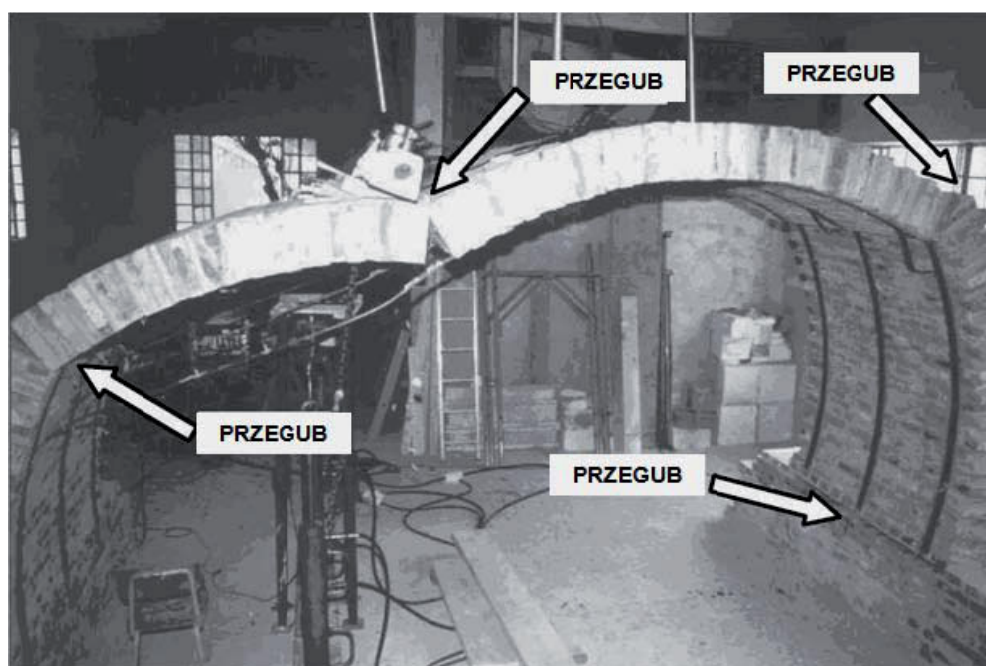
wewnętrznej stronie sklepienia. Odstęp między taśmami – 64 cm. Przekrój każdej taśmy: 50 x 1,2 mm.



Rys. 3.135. Zależność siły i przemieszczeń we wzmocnionych łukach n2 i n3, [17].

Nośność sklepienia badano podczas próby, w której pojedynczą siłę przykładano w punkcie  $P$  zwiększając stopniowo jej wartość tak by wpływ jej stał się coraz bardziej znaczący w porównaniu z całkowitym ciężarem sklepienia.

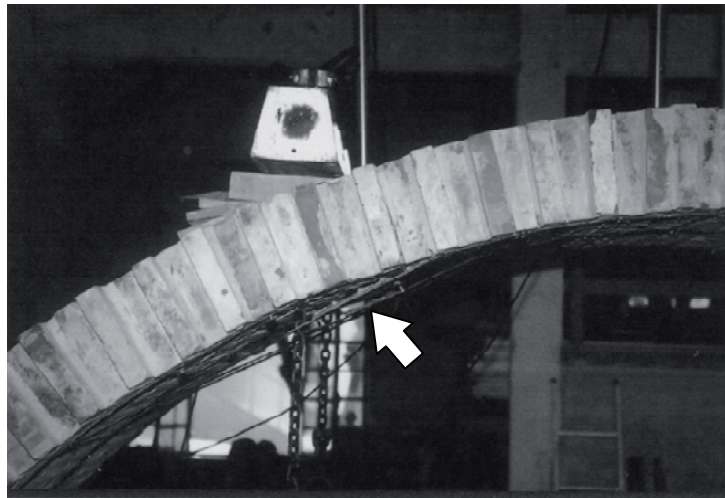
Przy wzroście siły zaobserwowano powstawanie czterech stref spękania, które odpowiadałyby powstaniu czterech przegubów (jak w klasycznym łuku z wykształconymi czterema przegubami tworzącymi mechanizm – rys. 3.136). Dzięki wzmocnieniu uniknięto fazy, w której łuk stałby się gwałtownie niestabilny, a powstały mechanizm doprowadziłby do nagłego zniszczenia.



Rys. 3.136. Model zniszczenia sklepienia kolebkowego wzmocnionego taśmami FRP, [76].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Porównując wyniki analiz numerycznych z badaniami doświadczalnymi wykazano skuteczność stosowania materiałów FRP do wzmacniania sklepień ceglanych. Autorzy przewidują stosowanie wyników swoich badań w analizie dużych, zabytkowych konstrukcji sklepionych.



Rys. 3.137. Odspojenie taśmy FRP, [76].

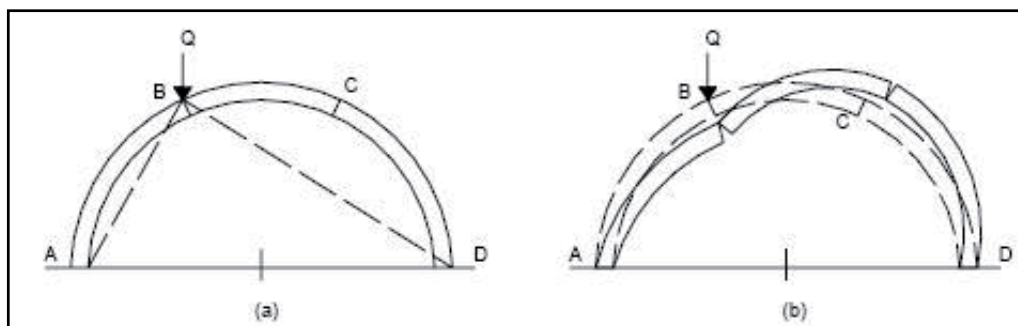
Podobne badania nad zachowaniem sklepień ceglanych wzmacnionych przy użyciu FRP przedstawiono w [236]. Wpływ różnego rodzaju włókien (węglowe, szklane) zbrojących oraz umiejscowienie materiałów FRP (po stronie wewnętrznej i zewnętrznej sklepienia) zbadano doświadczalnie. Uzyskane wyniki pozwoliły określić mechanizm zniszczenia wzmacnionych sklepień i zdefiniować modele analityczne.

Pomimo coraz częstszego używania materiałów FRP do wzmacniania konstrukcji murowych, brak jest dostępnych modeli stosowanych w projektowaniu i potrzebne są dalsze wiarygodne programy badawcze. Aby wyjaśnić zachowanie sklepień ceglanych wzmacnionych FRP, podjęto badania na Uniwersytecie w Padwie.

Badano sześć modeli pod stałym obciążeniem. Obciążenie pionowe realizowano w najbardziej niekorzystnym położeniu dla łuku by mogło ono zostać rozważone w symulowaniu obciążeń sejsmicznych.

Celami badania było:

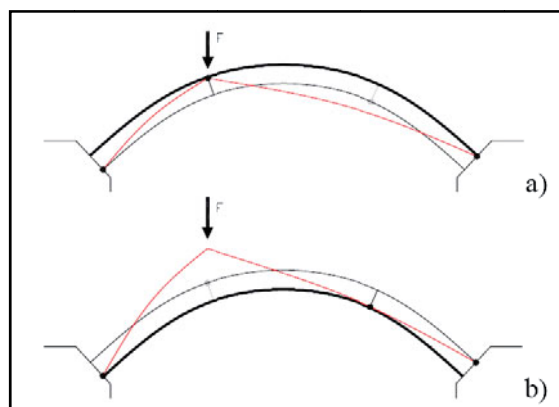
- porównanie zachowania różnych rodzajów kompozytów (taśmy węglowe – CFRP i maty szklane – GFRP) umieszczanych po różnych stronach sklepienia,
- opracowanie modelu analitycznego przydatnego do szacowania siły niszczącej, zgodnie z obserwowanymi mechanizmami zniszczenia.



Rys. 3.138. Zachowanie się łuku pod niekorzystnym obciążeniem w punkcie B przed (a) i po (b) osiągnięciu obciążenia krytycznego wg. [101].

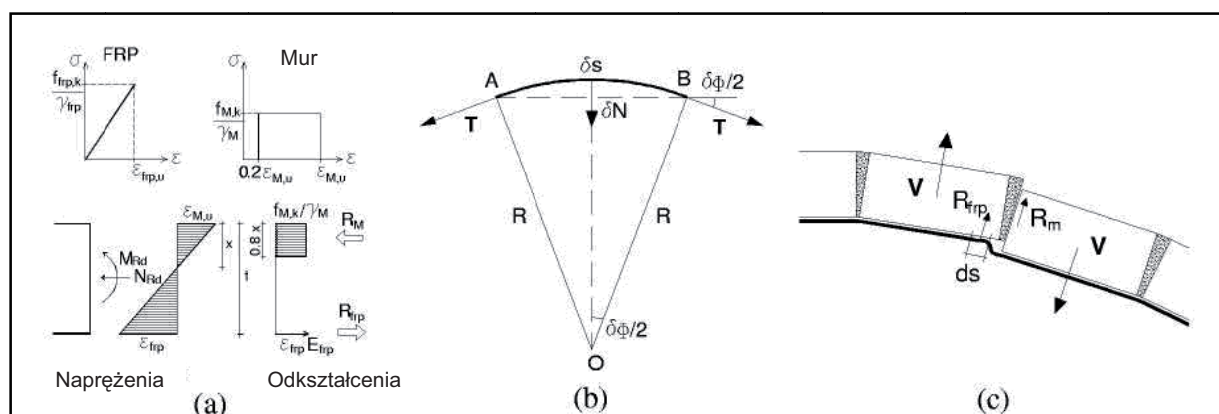
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Zastosowanie wzmocnienia w postaci taśm CFRP doklejonych od strony podniebienia oraz od strony grzbietowej znacznie zmienia kształt linii ciśnień w łuku ceglany, rys. 3.139.



Rys. 3.139. Zachowanie się łuku (zmiana położenia linii ciśnień) pod niekorzystnym obciążeniem po wzmocnieniu od strony grzbietowej (a) i od strony podniebienia (b).

Proponowany model analityczny został zweryfikowany doświadczalnie oraz porównany z podobnymi, choć nielicznymi i mało dopracowanymi propozycjami dostępnymi w literaturze.



Rys. 3.140. Analityczny model układu "FRP – mur ceglany" proponowany dla obserwowanych mechanizmów zniszczenia wzmocnionych sklepień: (a) miążdżenie muru, (b) niezależność włókien FRP, (c) deformacja, poślizg muru wzdłuż spoin, [237].

Jeśli chodzi o zniszczenie muru to nośność wzmocnionych przekrojów (które są poddane ścisnaniu i zginaniu), zależy od działającej na mur siły ściskającej i od wytrzymałości taśmy (rys. 3.140). Przyjmując liniowo – sprężyste zachowanie materiału wzmacniającego i prostokątny wykres naprężeń dla muru, podobnie jak w [233], [232], zaproponowano:

$$\frac{M_{Rd}}{lt^2 f_{M,k}} = \frac{1}{2} \omega \left( \frac{1-x}{t} \right) + \frac{0.4x}{\gamma_M t} \left( 1 - 0.8 \frac{x}{t} \right) \quad (3.117)$$

$$\frac{x}{t} = \frac{\gamma_M}{1.6} \left[ \frac{N_{Rd}}{ltf_{M,k}} - \omega + \sqrt{\left( \omega - \frac{N_{Rd}}{ltf_{M,k}} \right)^2 + \frac{3.2}{\gamma_M} \omega} \right] \quad (3.118)$$

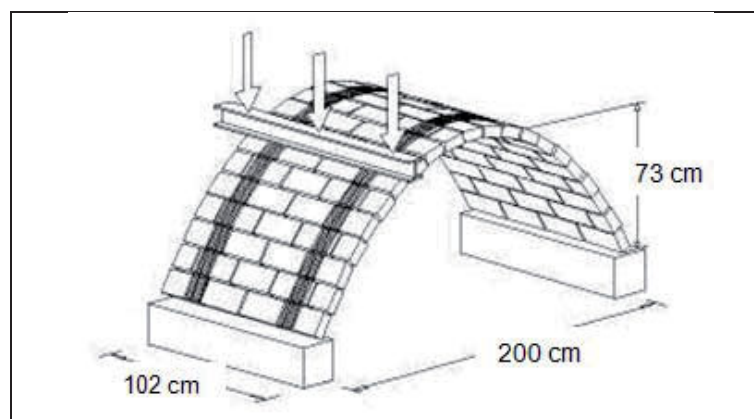
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$\omega = \frac{\varepsilon_{M,u} E_{frp} A_{frp}}{f_{M,k} l t} \quad (3.119)$$

gdzie:

- $M_{Rd}, N_{Rd}$  – projektowany moment zginający i projektowana siła osiowe działające w przekroju sklepienia ( $\gamma_M = 2,5$  jest częściowym współczynnikiem bezpieczeństwa dla muru),
- $x$  – odległość od osi obojętnej,
- $t, l$  – wysokość i szerokość przekroju,
- $\omega$  – znormalizowany ułamek pola wzmocnienia FRP,
- $A_{frp}$  – powierzchnia styku wzmocnienia FRP,
- $E_{frp}$  – moduł Young'a dla wzmocnienia FRP,
- $\varepsilon_{frp,u}, \varepsilon_{M,u}$  – największe naprężenia dla wzmocnienia FRP i muru,
- $f_{M,k}$  – siła ściskająca mur.

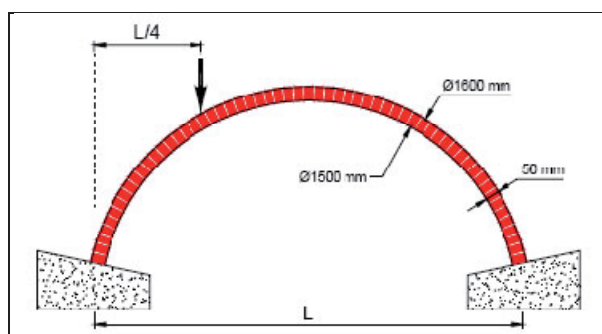
Badania laboratoryjne (rys. 3.141) przyniosły obiecujące wyniki w odniesieniu do proponowanego modelu analitycznego .



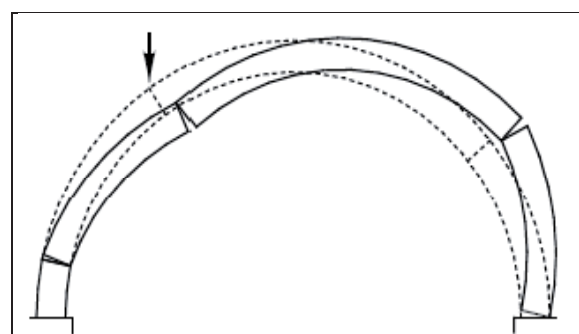
Rys. 3.141. Wymiary modelu i schemat obciążenia, [237].

W [57] przedstawiono także analizę statyczną sklepień ceglanych wzmocnionych materiałami FRP wykonaną w oparciu o MES, weryfikowaną za pomocą modeli doświadczalnych.

W [176] przedstawiono badania wykonane na 8 modelach łuków ceglanych o wymiarach i schemacie obciążenia jak na rys. 3.142. Wzmocnienie materiałami GFRP wykonano w różnych konfiguracjach (wzmocnienie po stronie podniebienia łuku, wzmocnienie po stronie grzbietowej, wzmocnienie ciągłe, wzmocnienie fragmentaryczne). Wykazano zależność pomiędzy różnymi rodzajami wzmocnień, a schematami zniszczenia łuku - odbiegającymi od klasycznego czteroprzegubowego mechanizmu zniszczenia (rys. 3.143) prezentowanego przez Heymana, [101].



Rys. 3.142. Model badawczy łuku w badaniach, [176].



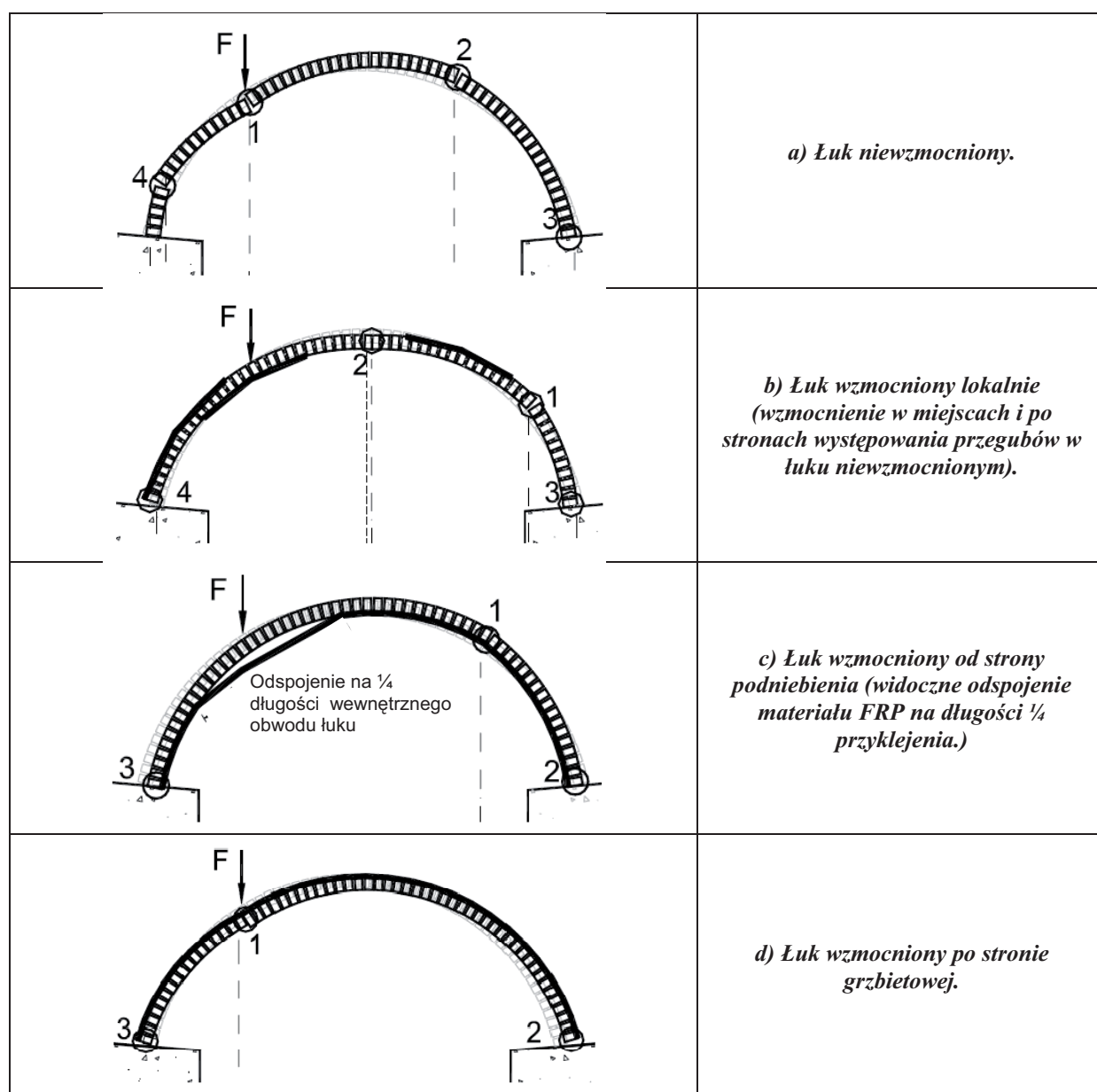
Rys. 3.143. Klasyczny czteroprzegubowy model zniszczenia łuku wg. Heymana, [101].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Modele zniszczenia wraz z powstałymi przegubami (rys. 3.144) oraz wyniki przeprowadzonych badań przedstawione w tab. 3.4 świadczą o przydatności stosowania tego typu wzmocnień w ceglanych konstrukcjach łukowych.

Tab. 3.4. Wyniki pomiarów siły niszczącej w łukach wzmocnionych GFRP, [176].

Rodzaj wzmocnienia	Siła niszcząca [kN]	Średnia siła niszcząca [kN]	Wzrost siły niszczącej [%]
łuk bez wzmocnienia	1,44 1,84	1,64	- -
łuk wzmocniony lokalnie	2,72 3,06	2,89	+89 +66
łuk wzmocniony ciągle po stronie grzbietowej	4,62 4,24	4,43	+170
łuk wzmocniony ciągle po stronie podniebienia	2,35 3,78	3,78	+130



Rys. 3.144. Modele zniszczenia wraz z powstałymi przegubami w łukach wzmocnionych GFRP, [176].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Poważnym problemem (opisanym już wcześniej) jest zapewnienie zakotwienia materiałów FRP używanych do wzmacniania zakrzywionych konstrukcji ceglanych od strony podniebienia. Jeśli brak jest takiego zakotwienia, następuje odspojenie materiału wzmacniającego od konstrukcji, co prowadzi do niewykorzystania jego przekroju, rys. 3.144c.

Próby modelowania analitycznego łuków i sklepień ceglanych podjęto także w [79], [77], [52].

Ciekawą i przydatną, jeśli chodzi o projektowanie wzmocnień przy użyciu materiałów kompozytowych wydaje się być włoska instrukcja CNR, [51].

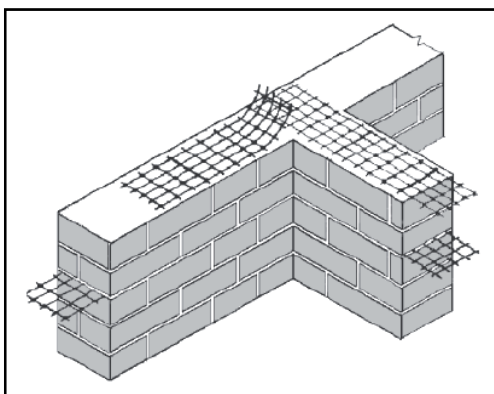
Jedne z pierwszych prób zastosowania siatek z materiałów kompozytowych przedstawiono w [221], [230], [86] i odwoływały się one do wzmacniania konstrukcji poddanych obciążeniom sejsmicznym.

Jak można zauważyć na rys. 3.145, sprowadzały się one do umieszczania siatek kompozytowych pomiędzy poszczególnymi warstwami muru lub – jak na rys. 3.146 – do wzmacniania całej konstrukcji czy narażonej na zarysowania jej części.

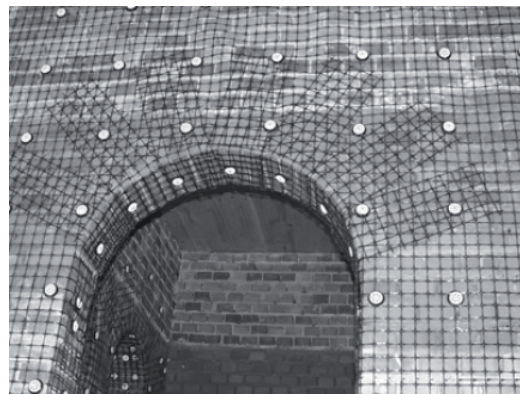
Idea zastosowania siatek z materiałów kompozytowych nie jest nowa i nawiązuje do stosowanych od dawna siatek stalowych, czy mat z włókien szklanych.

Nowe materiały FRCM badano do tej pory prawie wyłącznie przy wzmacnianiu belek żelbetowych (rys. 3.147) i murów ceglanych (rys. 3.148).

Pomimo kilku realizacji (sklepienia dawnej przetwórni tuńczyka na Sycylii – rys. 3.149 i 3.149 czy sklepień katedry w Noto – rys. 3.151 i 3.151), brak jest w literaturze wyników badań wzmocnionych łuków, sklepień czy kopuł ceglanych przy użyciu siatek węglowych.



Rys. 3.145. Siatki GFRP stosowane pomiędzy warstwami muru, [173].



Rys. 3.146. Nadproże łukowe wzmocnione siatkami GFRP, [173].



Rys. 3.147. Belka żelbetowa wzmocniona FRCM.



Rys. 3.148. Fragment muru ceglanego wzmocnionego FRCM.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



*Rys. 3.149. Wzmacnianie sklepien w dawnej przetwórni tuńczyka na Sycylii.*



*Rys. 3.150. Wzmacnianie sklepien w dawnej przetwórni tuńczyka na Sycylii.*



*Rys. 3.151. Widok ogólny odtwarzanych sklepien katedry Noto.*



*Rys. 3.152. Wzmocnienie FRCM w katedrze w Noto- Sycylia.*

### 3.5.6. Iniekcje, impregnacje, przemurowania

Regeneracja i wzmacnianie uszkodzonych elementów konstrukcyjnych zabytku jest częścią ogólnego programu konserwatorskiego prac technicznych wiążących się ściśle z zagadnieniami wchodzącymi w zakres stabilizacji i konsolidacji konstrukcji. Prace te stanowią najczęściej jedno z ważniejszych i najbardziej istotnych przedsięwzięć w dziedzinie utrwalania zabytku. Wzmacnianie i regeneracja mają na celu przywrócenie układom konstrukcyjnym zdolności do spełniania określonych funkcji użytkowych, podniesienie ich cech statycznych – wytrzymałościowych i uodpornienie na procesy niszczące, [21]. Drobne uszkodzenia w łukach i sklepieniach murowanych naprawia się w podobny sposób jak uszkodzenia ścian stosując iniekcje, impregnacje, przemurowania. Należy również zauważyć, że działania, z reguły, powinny występować jako działania towarzyszące właściwym zabiegom wzmacniania konstrukcji.

#### 3.5.6.1. Iniekcje i impregnacje

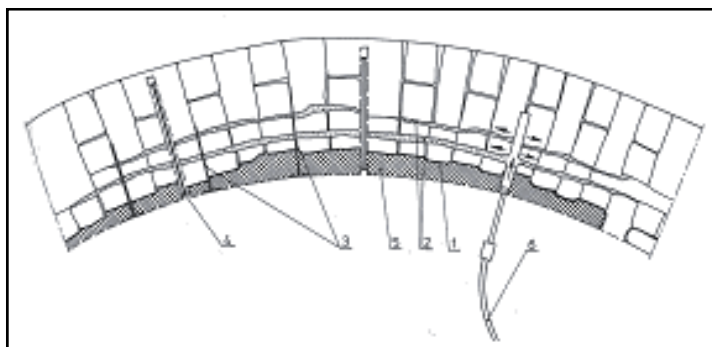
Metoda iniekcji zwiększa wytrzymałość materiałów składowych, nośność, uszczelnia i zamyka dostęp szkodliwych czynników, zwłaszcza wilgoci i agresywnych gazów do wnętrza murów. Regeneracja układów sklepien murowanych za pomocą iniekcji stanowi zabieg bardzo delikatny i wymaga przeprowadzenia szeregu czynności wstępnych, z których dobór składników iniektu i jego konsystencji jest najistotniejszy.

Na rys. 3.153 pokazany został schemat przykładowo wzmocnionego łuku przy pomocy wklejonych prętów i iniekcji.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

We współczesnej praktyce możliwe jest zastosowanie trzech metod wzmacniania zakrzywionych konstrukcji murowych przy użyciu iniekcji:

- iniekcji grawitacyjnej, polegającej na tym, że iniekt wprowadza się do rys i spękań grawitacyjnie ze zbiornika położonego wyżej niż miejsce wzmacnianie,
- ciśnieniowej, przy której iniekt jest włączany w mur za pomocą specjalnego agregatu,
- próżniowej, wprowadzającej iniekt w konstrukcję murową przy wykorzystaniu podciśnienia wytworzonego przez agregat próżniowy.



Rys. 3.153. Schemat wzmacnienia łuku przy pomocy wklejanych prętów i iniekcji: 1 – odtworzona zewnętrzna warstwa sklepienia, 2 – spękania wiązania, 3 – pręty stalowe, 4 – pręt zakotwienia, 5 – warstwa tynku, 6 – paker iniekcyjny, [161].

Iniekt wprowadzony w konstrukcję murową ma zapewnić uszczelnienie i scalenie rozseparowanych części muru ceglanych. Choć na ogół iniekcje powinny być stosowane jako uzupełnienie głównego wzmacnienia i uciążlenie, to w wyjątkowych przypadkach są stosowane jako samodzielne wzmacnienie przenoszące głównie naprężenia styczne i rozciągające w rysie lub spękaniu. Iniekcje nie eliminują przyczyn uszkodzenia konstrukcji i powinny być stosowane wtedy, gdy proces destrukcji został ustabilizowany.

W zależności od typu konstrukcji, jej wieku oraz stopnia uszkodzenia stosuje się różnego rodzaju mieszanki iniekcyjne. Muszą one mieć dostateczny „czas życia”, odpowiednią lepkość, niski skurcz, wiązać w określonym zakresie temperatur, zapewnić odpowiednią przyczepność do łączonych elementów murowych oraz mieć odpowiednią wytrzymałość.

Istotne wyniki badań w zakresie iniekcji strukturalnych, impregnacji oraz konserwacji powierzchni konstrukcji ceglanych zawarto w [154], [60]. Na rys. 3.154 przedstawiono prace nad wzmacnieniem sklepienia bazyliki św. Franciszka w Asyżu.

Na rys. 3.151 można zobaczyć schemat wypełniania szczelin po zaprawie nową zaprawą polimerową.

Aby zachować cegły i zaprawy w łukach i sklepieniach, należy poddawać je zabiegom profilaktycznym (impregnacji), a w przypadku ich niszczenia wykonywać zabiegi konserwatorskie. Zalicza się do nich przede wszystkim wzmacnienia strukturalne cegieł i zapraw oraz uzupełnianie ubytków w ceglach i zaprawach. Aby stosowane zabiegi uchroniły obiekt przed zniszczeniem, a nie przyśpieszały go, do wzmacniania i uzupełniania ubytków powinny być stosowane preparaty o właściwościach hydrofilnych i zbliżonych parametrach fizycznych (właściwości kapilarne, nasiąkliwość, współczynnik rozszerzalności cieplnej) oraz mechanicznych do cegieł. W przypadku zapraw do spoinowania zdolności kapilarnego przemieszczania się wody powinny być większe, a wytrzymałość mechaniczna niższa. Chodzi o to, aby zaprawy, podciągając łatwiej wodę i kumulując sole rozpuszczalne w wodzie, stanowiły środowisko, w którym zachodzić będą procesy niszczenia i tym samym chronić będą cegły przed rozkładem. Stosowanie preparatów hydrofobowych do wzmacniania oraz zapraw do uzupełniania ubytków jest dopuszczalne wówczas, gdy cały mur lub jego



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

wydzielony element jest poddawany zabiegom konserwatorskim. Nie można natomiast ich stosować w przypadku pojedynczych cegieł lub niewielkich fragmentów muru.



Rys. 3.154. Iniekcja strukturalna sklepienia bazyliki św. Franciszka w Asyżu, [60].

Do impregnacji i strukturalnego wzmocnienia cegieł i zapraw stosuje się związki krzemooorganiczne (pochodne czteroetoksylsilanu), dające po reakcji hydrolizy i polikondensacji efekt hydrofilny oraz hydrozole kwasu ortokrzemowego, [153]. Stosuje się czasem również polimery organiczne mające właściwości hydrofobowe np. żywice epoksydowe. Nie zaleca się stosowania substancji nieorganicznych, ponieważ mają małą zdolność wzmocnienia cegieł (np. wodorotlenek wapnia i baru) bądź stosowanie ich jest związane z wprowadzeniem do obiektu soli rozpuszczalnych w wodzie (np. szkło wodne).

Technologia zapraw do spoinowania murów i uzupełniania ubytków w ceglach wymaga stosowania spoiwa mineralnego, tj. wapno i cement portlandzki, [69].

### 3.5.6.2. Przemurowanie spękanych fragmentów łuków i sklepień

Jest to metoda, która może być zastosowana zarówno do murów, jak i sklepień ceglanych, [226]. Idea tej metody polega na ponownym zespoleniu przez przemurowanie zarysowanej lub spękanej konstrukcji i zapewnieniu jej w ten sposób pierwotnych warunków pracy.

Metoda ta jest bardziej naprawą uszkodzonej konstrukcji niż wzmocnieniem. Ważnym elementem przed wykonaniem naprawy tego typu jest wyeliminowanie przyczyny powodujących zarysowania czy spękania. Zasady wykonywania przemurowania opisano w wielu publikacjach [226], [113]:

- przed przystąpieniem do prac remontowych należy wykonać konstrukcję zabezpieczającą, aby w każdym momencie remontu zachowana była statyka układu,
- oczyszczenie powierzchni sklepień z tynków wzdłuż rys, na odcinku co najmniej 3 do 5 cegieł powyżej i poniżej rysy,
- na szerokości co najmniej 70 do 80 cm, z każdej strony należy rozebrać uszkodzoną część sklepienia,
- należy także usunąć 2 do 3 warstw cegieł powyżej i poniżej wierzchołka rysy,
- dokładnie oczyścić powstałe powierzchnie,
- przemurować z zachowaniem wiązania co najmniej na  $\frac{1}{2}$  cegły,

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

- po związaniu zaprawy można rozebrać konstrukcję zabezpieczającą.

Przy tej metodzie istnieją jednak znaczne rozbieżności w poglądach na to, jaki materiał wiążący zastosować. Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono jednoznacznie, że stosowanie zapraw cementowych przy wykonywaniu przemurowań jest, z wielu względów na (różnice w odkształcalności zapraw cementowych i zapraw na bazie wapna stosowanych we wznoszeniu budynków historycznych, starzenia, etc.), niewłaściwe i może prowadzić do uszkodzeń. Rodzaj zapraw stosowanych do celów konserwatorskich jest osobnym problemem wymagającym dokładnej analizy. Badania nad zaprawami i wnioski z nich podano w [183]. Zbadano zaprawy na bazie ciasta wapiennego, wapna hydratyzowanego i wapna palonego. Określono ich podstawowe właściwości fizyko – mechaniczne, jak: wytrzymałość, nasiąkliwość, mrozoodporność i przepuszczalność. Wyniki badań doprowadziły do wysunięcia następujących wniosków:

- należy dokładnie dobierać zaprawy do warunków, w których pracuje konstrukcja,
- zaprawy z ciasta wapiennego nie powinny być zastępowane zaprawami z wapna palonego lub hydratyzowanego.

Przedstawione powyżej metody wzmocnienia i naprawy zakrzywionych konstrukcji ceglanych z reguły występują łącznie. Często dopiero połączenie ich daje oczekiwane efekty. Należy pamiętać, że każda z metod wymaga szczegółowej analizy zastosowania do danego rodzaju konstrukcji, zarówno ze względu na rozwiązanie materiałowe, jak ze względu na dostępną przestrzeń nad konstrukcją wzmocnianą. Zasadniczą sprawą jest dobór metody ściśle uwzględniający zakładane parametry pracy statycznej konstrukcji po wzmocnieniu oraz defekty konstrukcji przed wzmocnieniem.

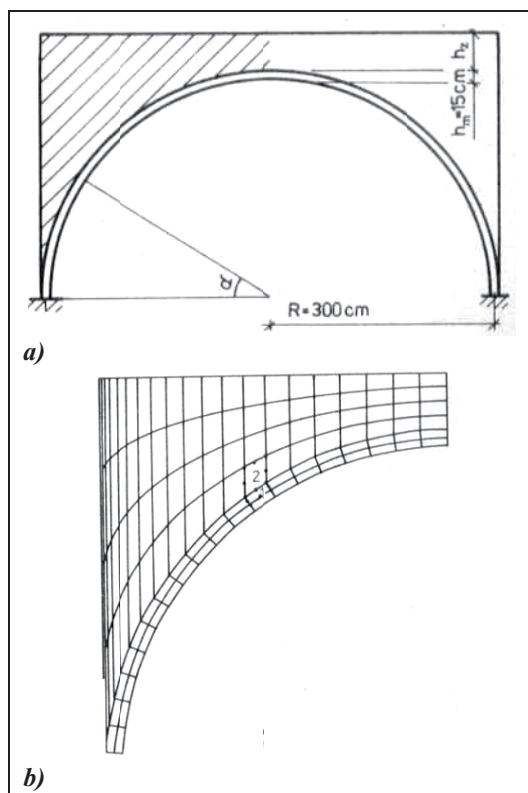
Program rewaloryzacji zabytkowych budowli stwarza niejednokrotnie konieczność wykonania obliczeń statycznych poszczególnych elementów konstrukcyjnych. W przypadku sklepień walcowych, obliczenia te sprowadzają się zazwyczaj do rozpatrzenia płaskiego łuku zamocowanego lub przegubowo podpartego na podporach. Inne elementy sklepienia, przede wszystkim zasypka, traktowane są zwykle jako obciążenie. Problem uwzględnienia w obliczeniach zasypki w sklepieniach jest zagadnieniem złożonym, [114].

W [242] podano informacje o przeprowadzonych obliczeniach statycznych uwzględniających współpracę ceglanej części sklepienia z zasypką oraz porównano uzyskane wyniki z obliczeniami nie uwzględniającymi współpracy obydwu materiałów.

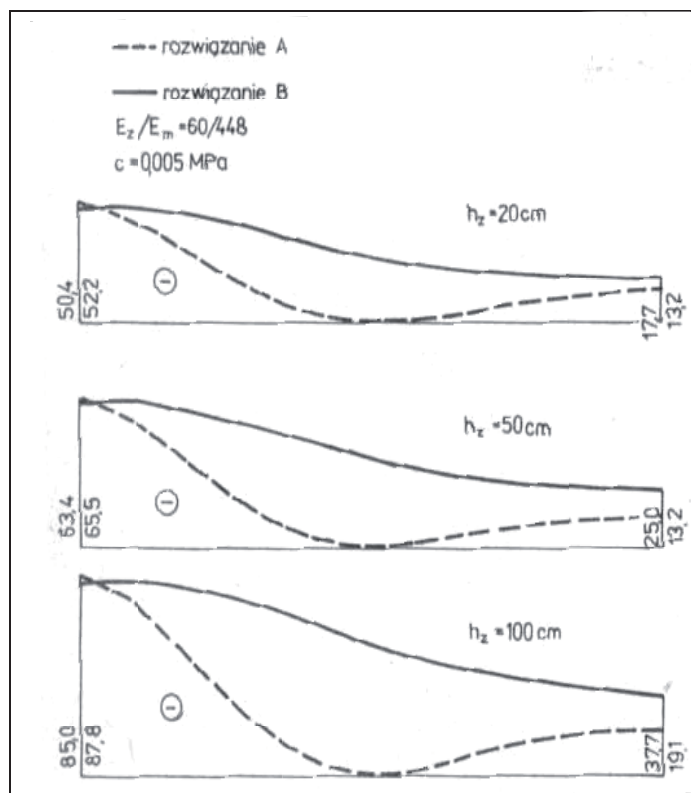
Jako przedmiot analizy przyjęto sklepienie walcowe o przekroju kołowym i rozpiętości 6 m równej średnicy koła (rys. 3.155). Grubość sklepienia wynosiła 15 cm. Obliczenia sklepień z uwzględnieniem współpracy z zasypką przeprowadzono metodą elementów skończonych, a w obliczeniach ograniczono się do rozpatrzenia tylko obciążenia ciężarem własnym muru ceglano i zasypki gruzowej.

W wynikach obliczeń porównawczych uwzględniających współpracę sklepienia z zasypką i bez uwzględnienia współpracy obu materiałów zaobserwowano, że rozkład sił podłużnych  $N(x)$  (rys. 3.156) wykazuje pewne prawdopodobieństwa. Taki rozkład siły  $N(x)$  wynika ze współpracy zasypki na skutek występowania sił tarcia na styku obydwu materiałów. Wpływ ten jest większy przy większych grubościach zasypki. Obserwując wykresy momentów zginających  $M(x)$  (rys. 3.157) stwierdzono, że w obu przypadkach zasadniczo się różnią, a zwiększenie grubości zasypki ma mały wpływ na charakter wykresu momentów  $M(x)$ , a także na bezwzględne wartości tych momentów. Reakcje poziome  $R(x)$  w węzłach sklepień, w przypadku z uwzględnieniem współpracy zasypki, nie jest równa sile podłużnej  $N(x)$  w zworniku sklepienia, lecz jest od niej znacznie mniejsza, ponieważ pewna część tej siły przenosi się na zasypkę.

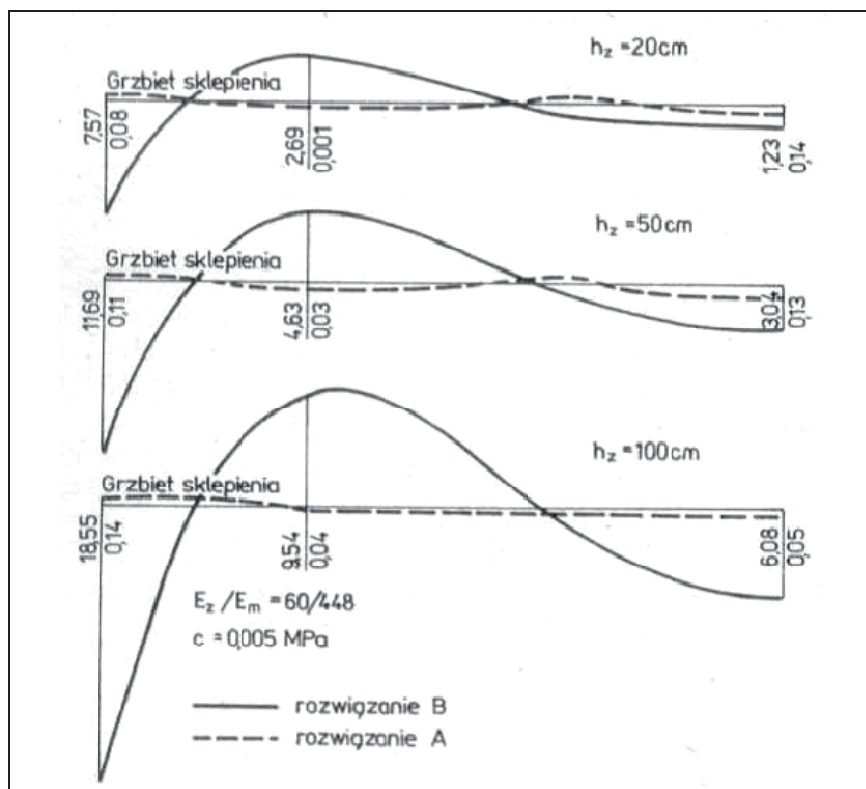
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.155. Model obliczeniowy a) schemat statyczny rozpatrywanego sklepienia, b) siatka elementów skończonych, [242].



Rys. 3.156. Rozkład siły podłużnej  $N(x)$  (kN) na osi sklepienia przy różnych wysokościach zasypki w zworniku, [242].



Rys. 3.157. Rozkład momentów zginających  $M(x)$  (kNm) na osi sklepienia przy różnych wysokościach zasypki w zworniku, [242].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono również, że wpływ współczynnika kohezji zasympki  $c$  występuje w przekroju zwornikowym i w 1/4 rozpiętości sklepienia. W miejscu tym, przy dużej wartości współczynnika kohezji naprężenia maleją, szczególnie w przypadku większej grubości zasympki, nawet do 1/3 w stosunku do przypadku braku kohezji. Wartość współczynnika kohezji  $c$  decyduje o przejściu materiału zasympki do plastycznej fazy pracy, a przy dużym współczynniku  $c$  obszary plastycznej pracy zasympki zupełnie znikają.

Za autorką pracy [242] można przytoczyć następujące wnioski:

- redukcja sił wewnętrznych w sklepieniu, a przede wszystkim redukcja momentów zginających, jest bardzo silna (praktycznie momenty zginające znikają) i prawie niezależna od sztywności zasympki w zakresie jej pracy sprężystej oraz od wartości współczynnika kohezji  $c$ ,
- o efekcie działania zasympki decyduje jej kąt tarcia wewnętrzznego  $\varphi$ .

Należy również pamiętać, że po wykonaniu niezbędnych interwencji w zakresie wzmocnień i napraw należy prowadzić stały monitoring zmian w głównych elementach konstrukcyjnych obiektu, tak jak zaproponowano w pracach [162]. Może to pomóc w dokładnej analizie efektywności zaproponowanego wzmocnienia, a także ostrzec przed ewentualnymi niekorzystnymi zmianami.

### 3.6. Studia i badania oparte na analizie numerycznej

W przeciwieństwie do powszechności zastosowania konstrukcji murowych, analiza ich pracy i obliczenia są bardzo złożonymi zagadnieniami. Spowodowane to jest dwumateriałową (mur jest różnorodnym materiałem otrzymanym przez regularne rozłożenie cegieł połączonych cienką warstwą zaprawy), kompozytową budową materiału i wynikającą z niej anizotropią i nieliniową charakterystyką zachowania. W praktyce inżynierskiej stosuje się na co dzień bardzo uproszczone metody obliczeniowe, a większość z nich opiera się na prowadzonych od wielu lat w różnych ośrodkach badaniach eksperymentalnych na rzeczywistych lub uproszczonych modelach konstrukcji murowych. Jednak w sytuacji, gdy zachodzi konieczność dokładnej analizy zachowania się zarówno samego materiału, jak i wykonanej z niego konstrukcji, podejście takie okazuje się niewystarczająco dokładne. Szczęólnego znaczenia nabiera to w przypadku analizy obiektów historycznych, zabytkowych. W przypadku konieczności renowacji, a często wzmocnienia takich obiektów, które z reguły charakteryzują się skomplikowanym układem statycznym, dużym ciężarem własnym, i – co bardzo ważne – praktycznie bezcenną wartością, nieodzowne staje się zastosowanie bardziej skomplikowanych metod obliczeniowych. W takich sytuacjach przydatna jest metoda elementów skończonych (MES).

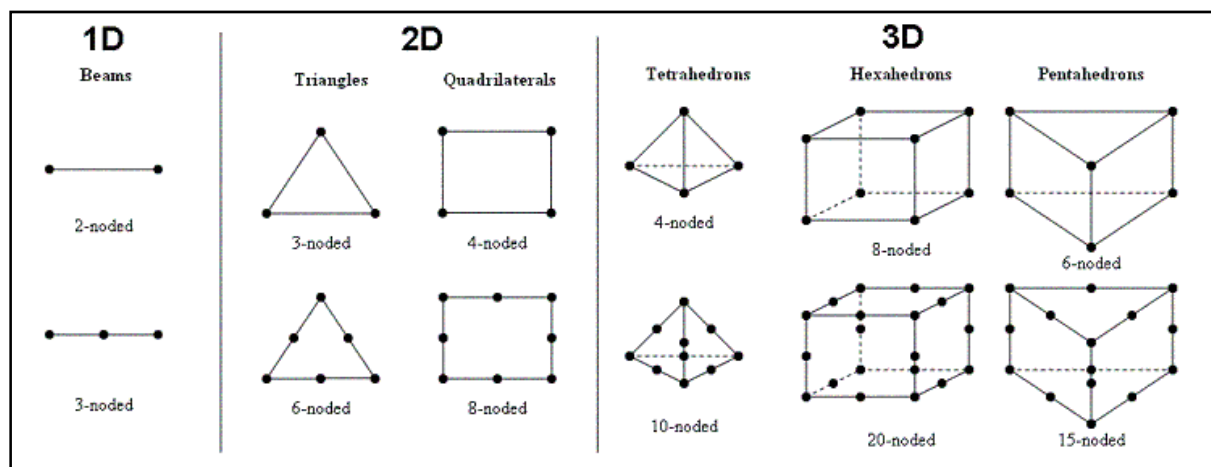
Metoda elementów skończonych (MES) jest jedną z wielu metod przybliżonych, które mogą być stosowane w rozwiązywaniu zagadnień brzegowo – początkowych. Sama MES nie powstała niezależnie od innych istniejących metod, a raczej jest kolejną modyfikacją.

Sukcesem tej metody jest to, że jest ukształtowaną, uniwersalną metodą badawczą stosowaną na szeroką skalę od lat w szerokim zakresie tematycznym, w odniesieniu do zagadnień liniowych i nieliniowych. Dzięki dogodnym algorytmom MES stała się podstawą wielu światowych systemów obliczeniowych.

Należy podkreślić, że MES jest metodą konsekwentnego poszukiwania przybliżonych rozwiązań problemów brzegowych. Cechą zasadniczą metod przybliżonych jest zastępowanie układu o nieskończonej liczbie stopni swobody – układem o liczbie skończonej. Opiera się na przyjęciu aproksymacji pola przemieszczeń lub pola naprężeń czy też na połączeniu tych przybliżeń w każdym elemencie, [152]. Element skończony jest prostą figurą geometryczną

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

(płaską lub przestrzenną – rys. 3.158), dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane węzłami oraz pewne funkcje interpolacyjne służące do opisu rozkładu analizowanej wielkości w jego wnętrzu i na jego bokach.



Rys. 3.158. Różne rodzaje elementów skończonych.

Funkcje te nazywa się funkcjami węzłowymi bądź funkcjami kształtu. Węzły znajdują się w wierzchołkach elementu skończonego, ale mogą być również umieszczone na jego bokach i w jego wnętrzu. Jeżeli węzły znajdują się tylko w wierzchołkach, to element skończony jest nazywany elementem liniowym (ponieważ funkcje interpolacyjne są wtedy liniowe). W pozostałych przypadkach mamy do czynienia z elementami wyższych rzędów. Rząd elementu jest zawsze równy rzędowi funkcji interpolacyjnych (funkcji kształtu). Liczba funkcji kształtu w pojedynczym elemencie skończonym jest równa liczbie jego węzłów. Funkcje kształtu są zawsze tak zbudowane, aby w węzłach, których dotyczą ich wartości wynosiły jeden, a pozostałych węzłach przyjmowały wartość zero.

Przy modelu układu rzeczywistego bardzo ważnym etapem jest przejście od modelu fizycznego do dyskretnego tak, aby model dyskretny dostatecznie dokładnie odzwierciedlał zjawiska zachodzące w modelu fizycznym [206].

Przejście od modelu fizycznego do modelu numerycznego odbywa się przez budowę modeli matematycznych opisujących poszczególne problemy zagadnień brzegowo-początkowych [129], [207].

Koncepcja MES zakłada, że każdą wielkość (np. odkształcenie, przemieszczenie, naprężenie) opisaną za pomocą funkcji ciągłej w danym obszarze aproksymuje się modelem dyskretnym. Model ten złożony jest ze zbioru funkcji ciągłych w skończonej liczbie podobszarów (zwanymi elementami) na jakie podzielono rozpatrywany obszar. Poszczególne funkcje ciągłe z podobszarów definiujemy przez wartości funkcji ciągłej w skończonej liczbie punktów z wnętrza rozważanego obszaru, zwanych węzłami. Budowa układu równań różniczkowych dla stopni swobody w węzłach przebiega po elementach. Niezbędnym warunkiem otrzymania żądanej dokładności jest przyjęcie funkcji kształtu dostatecznie dokładnie odwzorowujących rzeczywiste wielkości fizyczne w elemencie. Przy spełnieniu tego warunku i coraz gęstszym podziale obszaru na elementy, otrzymane wartości wyników mogą zbliżać się do rozwiązania dokładnego [205], [196].

O ile trudno o bardziej dokładne określenie parametrów materiałowych niż dane uzyskane w trakcie badań eksperymentalnych na rzeczywistych modelach konstrukcji lub ich fragmentach, to jednak ze względu na koszt i problematyczność, a czasami wręcz niemożność ich przeprowadzenia, jedyną alternatywą pozostaje sięgnięcie po narzędzia analizy elementów skończonych. Względna łatwość obliczeń numerycznych, w porównaniu do kosztownych i skomplikowanych badań doświadczalnych na rzeczywistych obiektach powoduje, że MES

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

jest od lat wykorzystywana jako powszechnie stosowane narzędzie wspomagające inżynierskie obliczenia konstrukcji murowych, pozwalające uwzględnić również ich anizotropowe i nieliniowe charakterystyki.

Rozwój metody elementów skończonych przebiegał i nadal przebiega równoległe z rozwojem techniki komputerowej, której rozwój w MES umożliwił korzystanie z równań konstytutywnych muru, a nie ograniczenie się tylko do spełniania warunków równowagi (pomijając charakterystyki materiałów tworzących konstrukcję) proponowanych w modelach statycznych występujących w tradycyjnych metodach analizy łuków, sklepień i kopuł [214].

Pierwsze prace stosujące metodę elementów skończonych zostały opublikowane w latach czterdziestych ubiegłego wieku. Początkowo obliczenia przeprowadzane za pomocą metody elementów skończonych dotyczyły obiektów o bardzo prostych geometriach (najczęściej modelowanych jako jednowymiarowe) i stałych własnościach materiałowych oraz zjawisk opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi. Od lat siedemdziesiątych metodę elementów skończonych zaczęto stopniowo stosować do rozwiązywania problemów nieliniowych, ale dalej dla obiektów o stosunkowo prostych geometriach, modelowanych jako 1D lub 2D. Gwałtowny rozwój techniki komputerowej w latach osiemdziesiątych, związany z coraz większą mocą obliczeniową komputerów oraz możliwością operowania i przechowywania bardzo dużych zbiorów informacji, umożliwił zastosowanie metody elementów skończonych do obliczeń problemów nieliniowych dla obiektów o dowolnie złożonych geometriach, szczególnie 3D. Bardzo duży wkład w powstanie, rozwój i popularyzację MES wniósł swoją pracą [245] profesor Zienkiewicz.

Rozwiązanie problemu za pomocą metody elementów skończonych można podzielić na następujące etapy:

- 1) Analizowany obszar dzieli się myślowo na pewną skończoną liczbę geometrycznie prostych elementów, tzw. elementów skończonych.
- 2) Zakłada się, że te połączone są ze sobą w skończonej liczbie punktów znajdujących się na obwodach. Najczęściej są to punkty narożne, które noszą nazwę węzłów. Poszukiwane wartości wielkości fizycznych stanowią podstawowy układ niewiadomych.
- 3) Obiera się pewne funkcje jednoznacznie określające rozkład analizowanej wielkości fizycznej wewnątrz elementów skończonych, w zależności od wartości tych wielkości fizycznych w węzłach. Funkcje te noszą nazwę funkcji węzłowych lub funkcji kształtu.
- 4) Równania różniczkowe opisujące badane zjawisko przekształca się, poprzez zastosowanie tzw. funkcji wagowych, do równań metody elementów skończonych. Są to równania algebraiczne.
- 5) Na podstawie równań metody elementów skończonych przeprowadza się asemblację układu równań, tzn. oblicza się wartości współczynników stojących przy niewiadomych oraz odpowiadające im wartości prawych stron. Jeżeli rozwiązywane zadanie jest niestacjonarne, to w obliczaniu wartości prawych stron wykorzystuje się dodatkowo warunki początkowe. Liczba równań w układzie jest równa liczbie węzłów przemnożonych przez liczbę stopni swobody węzłów, tzn. liczbę niewiadomych występujących w pojedynczym węźle.
- 6) Do tak utworzonego układu równań wprowadza się warunki brzegowe. Wprowadzenie tych warunków następuje poprzez wykonanie odpowiednich modyfikacji macierzy współczynników układu równań oraz wektora prawych stron.
- 7) Rozwiązuje się układ równań, otrzymując wartości poszukiwanych wielkości fizycznych w węzłach.
- 8) W zależności od typu rozwiązywanego problemu lub potrzeb, oblicza się dodatkowe wielkości.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

- 9) Jeżeli zadanie jest niestacjonarne, to czynności opisane w pkt. 5, 6, 7 i 8 powtarza się aż do momentu spełnienia warunku zakończenia obliczeń. Może to być np. określona wartość wielkości fizycznej w którymś z węzłów, czas przebiegu zjawiska lub jakiś inny parametr.

Analiza numeryczna nie dotyczy tylko samych konstrukcji murowych, ale również konstrukcji (poddanych zabiegom wzmocnienia) wraz z elementami wzmocniającymi. Przykłady ukazujące zastosowanie MES w prostych konstrukcjach murowych można spotkać w [75], [82].

Metody komputerowe stwarzają duże możliwości analizy statycznej sklepień o dowolnych kształtach, dają możliwości uwzględniania wszystkich parametrów wpływających na ich zachowanie się pod dowolnym obciążeniem. Analizy komputerowe złożonych konstrukcji murowych przeprowadzono między innymi dla Barbakanu w Krakowie, Krzywej Wieży w Pizie, sklepień Bazyliki św. Marka w Wenecji, jednego z czterech najstarszych akweduktów w Segowii i wielu innych obiektów zabytkowych, [115].

### 3.6.1. Modelowanie materiału

Wszystkie analizy numeryczne obiektów zabytkowych dotyczące analizy statycznej obarczone są podstawowym błędem polegającym na trudności czy wręcz niemożliwości opisanego wytrzymałości i odkształcalności materiałów istniejących konstrukcji murowych, co pozwoliłoby przyjąć poprawny model obliczeniowy, [115].

Głównym problemem, z jakim należy się zmierzyć przy takim podejściu jest przyjęcie jak najbardziej dokładnego i efektywnego modelu materiału.

Mówiąc o konstrukcjach murowych mamy na myśli konstrukcje wykonane z elementów naturalnych (kamieni) lub elementów sztucznych, zazwyczaj glinianych (cegła) łączonych ze sobą za pomocą zaprawy (rzadziej bez niej) ułatwiającej przekazywanie naprężeń na kolejne elementy.

Trudność w modelowaniu konstrukcji murowych zależy od następujących czynników:

- mur jest materiałem dyskretnym (cegła i zaprawa), w którym wymiar pojedynczego elementu jest mały w porównaniu z wymiarami całej konstrukcji;
- geometria, pochodzenie i ustawienie cegieł mogą różnić się od siebie w sposób znaczny;
- cegły są sztywniejsze niż zaprawa murarska;
- grubość zaprawy murarskiej jest ograniczona w porównaniu z wymiarami cegły;
- sztywność spoin pionowych jest znacznie mniejsza niż spoin poziomych.

Bardziej szczegółowo fizyko – chemiczne i mechaniczne parametry biorące udział w oddziaływaniu między elementami murowymi i połączeniami z zaprawy murarskiej można przedstawić jako zbiór dających się powiązać własności takich jak:

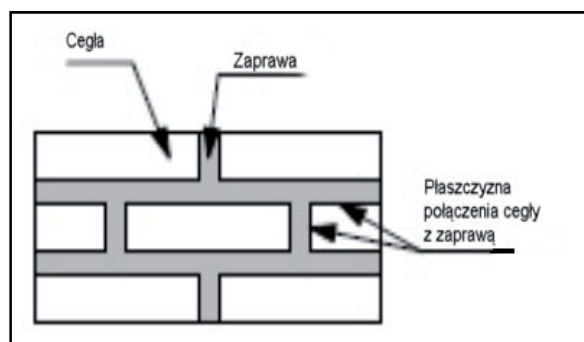
- dla elementów murowych - wytrzymałość na ściskanie i wytrzymałość na rozciąganie w stanie jednoosiowego i wieloosiowego naprężenia; moduł sprężystości; współczynnik Poissona: skurcz i pełzanie; wodoszczelność; porowatość; waga; kształt
- dla zaprawy murarskiej - wytrzymałość na ściskanie w stanie wieloosiowego naprężenia; moduł sprężystości; współczynnik Poissona; skurcz i pełzanie; wytrzymałość na odrywanie; plastyczność; pojemność przetrzymywania wody.

Należy więc traktować materiał murowy jako materiał zhomogenizowany (jednorodny) i izotropowy (mający te same własności fizyczne we wszystkich kierunkach), [154], [145].

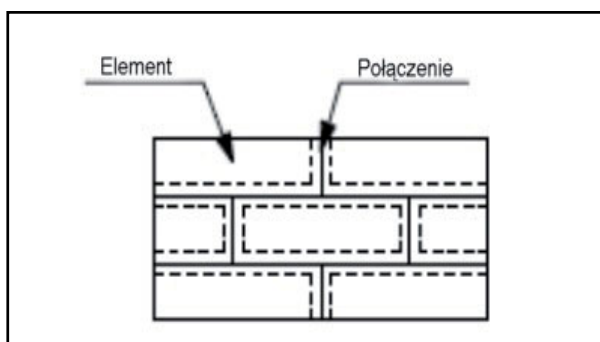
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

W zależności od wymaganego poziomu dokładności można wskazać, cytując za [147], zasadniczo dwie koncepcje modelowania numerycznego muru przydatne do wykorzystania w metodzie elementów skończonych (MES):

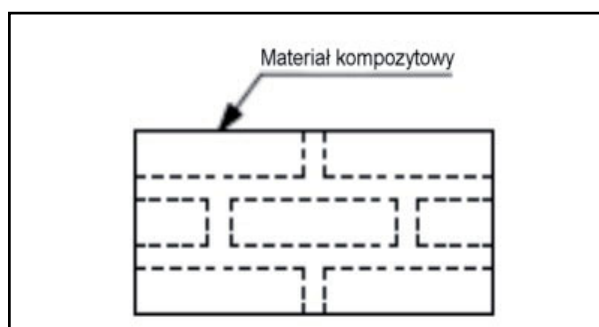
- dokładny model mikroelementowy (rys. 3.159),
- uproszczony model mikroelementowy (rys. 3.160), skupiający się nad tym, by otrzymać opis dyskretyzacji konstrukcji za pomocą mikrostrukturalnego podejścia do modelowania [9], [44], [141], [151] zwanego „mikromodelowaniem” lub „modelem dwumateriałowym” (metoda szerzej omówiona w rozdz. 3.6.1.1),
- model makroelementowy (rys. 3.161), czyli druga metoda określana jako „makromodelowanie” lub „model ekwiwalentnego materiału” [43], [147], omówiona w rozdz. 3.6.1.2.



Rys. 3.159. Dokładny model mikroelementowy.



Rys. 3.160. Uproszczony model mikroelementowy.



Rys. 3.161. Model makroelementowy.

W literaturze [66], [224] można również znaleźć inne podejścia do modelowania, np.: MES z elementami nieciągłymi (FEMDE) lub metoda elementów dyskretnych (DEM).

W dalszej części podjęto się zadania przybliżenia dwóch typów modeli materiału, mikro- i makromodelu, bez rozróżniania poszczególnych ich rodzajów.

### 3.6.1.1. Mikromodel

Jeżeli spojrzymy na mur przez pryzmat Metody Elementów Skończonych (MES), łatwo można zauważyć, że układ drobnowymiarowych elementów, z reguły prostopadłościennych – cegieł, jest czymś w rodzaju naturalnej dyskretyzacji. Metoda modelowania muru określana mianem „mikromodelowania” lub zwana inaczej „modelem dwumateriałowym” zakłada taki podział na elementy skończone, który będzie w prosty sposób odpowiadał tej istniejącej dyskretyzacji (rys. 3.159 i 3.160). Bardzo ważne jest w takim przypadku także właściwe zamodelowanie interfejsu pomiędzy elementami reprezentującymi zaprawę i elementami tworzącymi jednostki murowe. Metoda ta stosowana jest w przypadku różnego rodzaju szczegółowych analiz zachowania się muru. Pozwala ona



### 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

na obserwację i modelowanie specyficznych dla tego materiału zachowań, z uwzględnieniem jego anizotropii i różnych mechanizmów zniszczenia. Jednak prócz wielu zalet ma ona też swoje wady. Jednym z podstawowych problemów jest właściwe określenie parametrów opisujących wspomniany przed chwilą kontakt pomiędzy jednostkami murowymi a zaprawą. Zagadnienia kontaktowe są z zasady trudne i skomplikowane obliczeniowo i bardzo rozbudowują zadanie. Podobnie sama metoda podziału na elementy skończone powoduje szybki wzrost liczby tych elementów wraz ze stopniem złożoności modelowanego obiektu. Często także napotykamy na dużo bardziej prozaiczny problem już na etapie samego podziału na elementy skończone, kiedy to możemy nie być w stanie odtworzyć rzeczywistego układu cegieł w konstrukcji.

W praktyce taki sposób modelowania stosujemy w celu obserwacji zachowania się tylko fragmentów konstrukcji, takich jak nadproża, filarki, fragmenty sklepień czy ścian, których nośność decyduje o bezpieczeństwie całej konstrukcji, [154], [214], [240].

#### 3.6.1.2. Makromodel

Dla dużych modeli numerycznych, jak np.: cały budynek czy jego znaczna część, w przypadku których z wymienionych wyżej powodów nie można stosować tak drobnej i dokładnej dyskretyzacji jaka jest wymagana dla mikromodelowania, stosuje się analizę na poziomie bardziej ogólnym, określaną jako „makromodelowanie” lub „model ekwiwalentnego materiału”. Podejście to wymaga przyjęcia ujednoczonego, zhomogenizowanego ośrodka zastępczego, będącego uproszczeniem rzeczywistego układu kompozytowego (rys. 3.161). Jego parametry muszą jednak odpowiadać w jak najlepszym stopniu parametrom rzeczywistego materiału, co jest podstawą skuteczności stosowania MES. Z tego też powodu niebagatelną rolę w tym przypadku odgrywają przyjęte techniki homogenizacji i modele konstytutywne, pozwalające tak opisać zastępczy materiał, aby uwzględniał on w skuteczny sposób anizotropię i nieliniową charakterystykę muru. Takie podejście jest więc swojego rodzaju kompromisem pomiędzy dokładnością a efektywnością obliczeń. Metoda ta jednak posiada także wyraźne ograniczenia wynikające z uśredniania w procesie homogenizacji wartości naprężeń i odkształceń w obszarze relatywnie dużego elementu skończonego, co ogranicza jej zastosowanie do przypadków o raczej jednorodnym stanie naprężeń, w których nie występują gwałtowne zmiany na odcinkach mniejszych od wymiaru dyskretyzacji. Ze względu na to, że dla takiego modelu zdecydowanie łatwiej uzyskać satysfakcjonującą siatkę elementów skończonych o dowolnym kształcie i rozsądnej – z punktu widzenia wielkości zadania – liczbie, nadaje się on do modelowania całych konstrukcji i jest niezwykle atrakcyjny z punktu widzenia praktyki inżynierskiej, [154], [145].

#### 3.6.1.3. Homogenizacja

Określając parametry mechaniczne muru oraz omawiając różne kryteria wytrzymałościowe, traktowano mur jako materiał izotropowy, co jest dużym, aczkolwiek czasami przydatnym lub koniecznym uproszczeniem. W pewnych sytuacjach celowe może być określenie tylko anizotropii sprężystości albo – gdy decydujące są kryteria wytrzymałości – jedynie anizotropii konturu powierzchni granicznej. Nie wolno zapominać, że dla pełnego opisu muru należy także uwzględnić jego nieliniową charakterystykę zachowania. Analiza ośrodka murowego z uwzględnieniem jego anizotropii w pełnym jej zakresie jest na tyle skomplikowanym i trudnym zagadnieniem, że w literaturze nie występują modele uwzględniające wszystkie aspekty tego zagadnienia. Podejmowane są nieliczne próby numerycznego modelowania muru łączącego anizotropię sprężystości z anizotropią zachowania niesprężystego. Często jednak praktyczne implementacje określonych na

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

podstawie takich modeli sformułowań wymagają modyfikacji tak samych procedur elementowych, jak i globalnych algorytmów sterowań w systemach metody elementów skończonych. Na co dzień próbuje się osiągnąć kompromis pomiędzy efektywnością, prostotą i łatwością praktycznej implementacji a dokładnością, maksymalnie precyzyjnym opisem związków konstytutywnych stosowanych modeli homogenizacji, [240].

Zaproponowany w pracy [145] zhomogenizowany model konstytutywny dla ośrodka murowego, oparty jest na zaproponowanym wcześniej w publikacji [177] zhomogenizowanym, anizotropowym modelu sprężysto – plastycznym. W celu uwzględniania anizotropii posłużono się fikcyjnymi, izotropowymi przestrzeniami naprężeń i odkształceń. Następnie odwzorowano właściwości materiału z tych fikcyjnych, izotropowych przestrzeni do docelowych przestrzeni anizotropowych.

Podstawowe założenia to:

- wysokość i szerokość podstawowego elementu (jednostki murowej) jest duża w porównaniu do jego grubości, co pozwala założyć płaski stan naprężeń dla obciążenia w ich płaszczyźnie,
- układ jednostek murowych i spoin może być traktowany jako ortotropowy.

Model ten bazuje na założeniach zgodności odkształceń i warunkach równowagi „modelowej komórki” ośrodka murowego dla różnych przypadków obciążenia (np. ściskania i rozciągania w kierunku  $X$  – rys. 3.162 i rys. 3.163). Związek konstytutywny sformułowany jest na bazie równań równowagi i zgodności odkształceń. Równania te określa się dla każdego przypadku deformacji modelowej komórki i następnie, korzystając z równań konstytutywnych każdego ze składowych modelowej komórki muru, otrzymujemy wyrażenia pozwalające opisać zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami już jako zhomogenizowane parametry mechaniczne. Poniższe wzory odpowiadają tylko omawianemu przypadkowi.

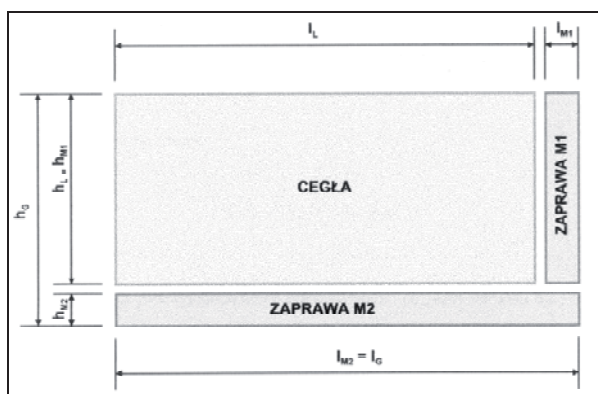
Równania równowagi:

$$\sigma_x h_G = \sigma_{xL} h_L + \sigma_{xM_2} h_{M_2} = \sigma_{xM_1} h_{M_1} + \sigma_{xM_2} h_{M_2} \quad (3.120)$$

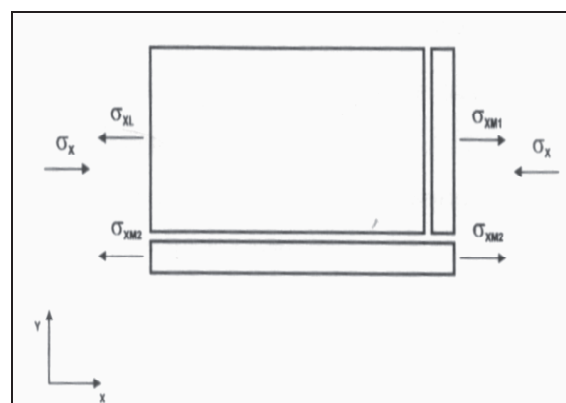
$$h_{M_2} = h_L \Rightarrow \sigma_{xL} \equiv \sigma_{xM_1} \quad (3.121)$$

$$\sigma_x = \sigma_{xL} \frac{h_L}{h_G} + \sigma_{xM_1} \frac{h_{M_1}}{h_G} \quad (3.122)$$

$$\sigma_x = \sigma_{xM_1} \frac{h_{M_1}}{h_G} + \sigma_{xM_2} \frac{h_{M_2}}{h_G} \quad (3.123)$$



Rys. 3.162. Modelowa komórka ośrodka murowego [145], [240].



Rys. 3.163. Modelowa komórka murowa w przypadku ściskania w kierunku  $X$  [240].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Warunki zgodności odkształceń:

$$\varepsilon_{xG} l_G = \varepsilon_{xM_2} l_{M_2} \quad (3.124)$$

$$\varepsilon_{xG} l_G = \varepsilon_{xL} l_L + \varepsilon_{xM_1} l_{M_1} \quad (3.125)$$

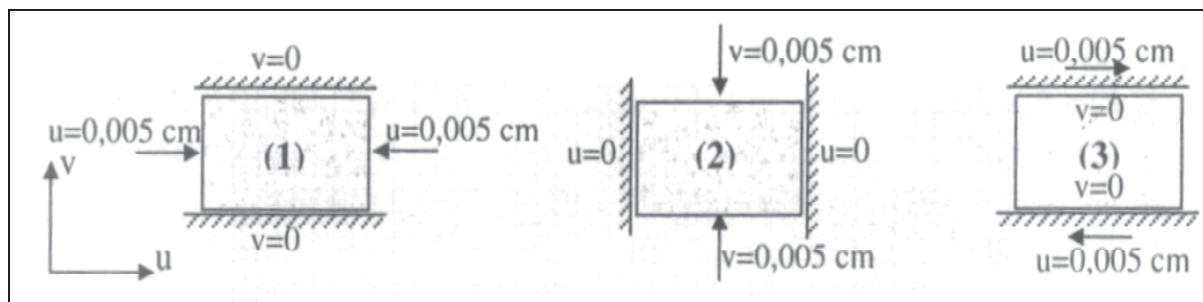
Równania konstytutywne dla warstwy materiału:

$$\sigma_{xi} = E_{xi}(\omega_i)(\varepsilon_{xi} - \varepsilon_{xi}^p) \quad (3.126)$$

$$\varepsilon_{xi} = \frac{\sigma_{xi}}{E_{xi}(\omega_i)} + \varepsilon_{xi}^p \quad (3.127)$$

Bazując na powyższych równaniach można wyznaczyć moduł sprężystości podłużnej dla kierunku X –  $E_{xG}$ . Po wykonaniu wszystkich przypadków obciążeń można wyznaczyć moduły sprężystości  $E$  w pozostałych kierunkach, jak również moduły odkształcalności postaciowej  $G$  i współczynniki Poissona.

Bazującą na podobnych założeniach metodę można znaleźć w [137].



Rys. 3.164. Modelowa komórka muru w różnych stanach obciążeń, [137].

Parametry materiałowe zhomogenizowanego muru wyznaczono na podstawie formuł [137]:

$$\bar{\nu}_y = \bar{\sigma}_x^{(2)} / \bar{\sigma}_y^{(2)} \quad (3.128)$$

$$\bar{\nu}_x = \bar{\sigma}_y^{(1)} / \bar{\sigma}_x^{(1)} \quad (3.129)$$

$$\bar{E}_x = \bar{\sigma}_x^{(1)} (1 - \bar{\nu}_x \bar{\nu}_y) / \bar{\varepsilon}_x^{(1)} \quad (3.130)$$

$$\bar{E}_y = \bar{\sigma}_y^{(2)} (1 - \bar{\nu}_x \bar{\nu}_y) / \bar{\varepsilon}_y^{(2)} \quad (3.131)$$

$$\bar{G} = \bar{\tau}_{xy}^{(3)} / \bar{\gamma}_{xy}^{(3)} \quad (3.132)$$

gdzie:

- (i) – identyfikuje rozpatrywany przypadek przemieszczenia:
- (1) – ściskanie – rozciąganie w kierunku x,
- (2) – ściskanie – rozciąganie w kierunku y,
- (3) – ścinanie w płaszczyźnie xy.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Oczywiście w literaturze [187], [49], [136], [97], [240], [137], [35] można znaleźć wiele wartości  $E$ ,  $G$  i  $\nu$  dla materiału murowego, wyznaczonych empirycznie oraz doświadczalnie, ale jak można się przekonać porównując zawarte w tab. 3.5 moduły sprężystości Younga  $E$ , znacznie się one od siebie różnią i bezwzględnie zaleca się wykonanie badań elementów murowych w ramach prac nad modelowaniem numerycznym konstrukcji murowych.

Tab. 3.5. Moduły sprężystości dla muru ceglano.

Autor	Wzór	Współczynnik sprężystości Younga $E$ [MPa]
Brencich	-	2000
Wierszycki	-	5500
PN-B-03002:1999	$E = \alpha_c f_k$ $f_k = K f_b^{0,65} f_m^{0,25}$	6087
Ciesielski	$E_{sr}^i = \frac{1,20 E_b^i E_m^i}{0,20 E_b^i + E_m^i}$	6600
Matysek	$E = \frac{1,25\xi + 1}{1,25\xi + \beta} E_b$	6776
Hendry	$E = 700\sigma'_c$	7000
Brooks	$\frac{1}{E} = \frac{0,86}{E_b} + \frac{0,14}{E_m}$	7051
Kuczma	-	6193 – 7164 (w zależności od rozpatrywanego modelu)

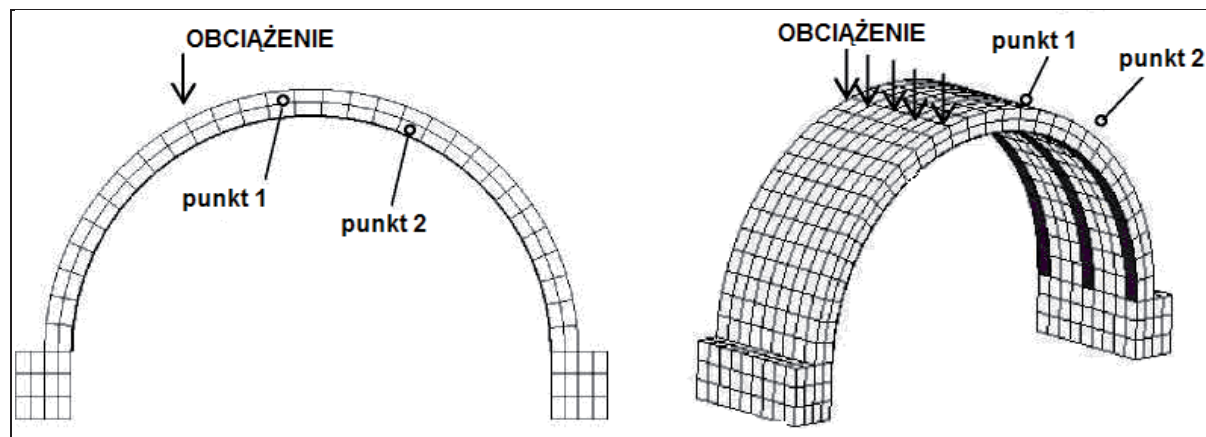
gdzie:

- $E$  – moduł sprężystości muru,
- $\alpha_c$  – cecha sprężystości muru,
- $f_k$  – wytrzymałość charakterystyczna muru na ściskanie,
- $f_b$  – wytrzymałość elementu murowego na ściskanie,
- $f_m$  – wytrzymałość zaprawy na ściskanie,
- $E_{sr}^i$  – średni moduł sprężystości muru,
- $E_b^i$  – średni moduł sprężystości elementu murowego,
- $E_m^i$  – średni moduł sprężystości zaprawy,
- $E_b$  – moduł sprężystości elementu murowego,
- $E_m$  – moduł sprężystości zaprawy,
- $\xi$  – współ. wysokości elementu murowego do grubości zaprawy,
- $\beta$  – współ. moduł sprężystości elementu murowego do modułu sprężystości zaprawy,
- $\sigma'_c$  – wytrzymałość muru na ściskanie.

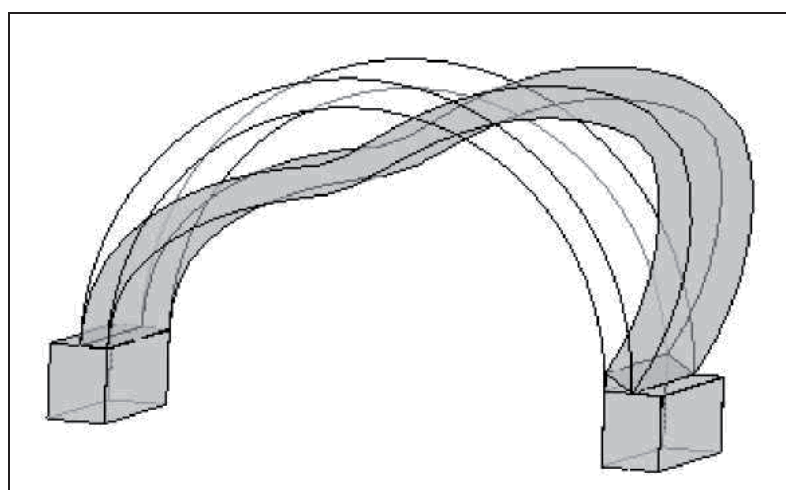
3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

### 3.6.2. Modelowanie numeryczne murowych konstrukcji zakrzywionych

W [57] przedstawiono analizę statyczną murowanych sklepień wzmocnionych materiałami FRP przeprowadzoną za pomocą modeli doświadczalnych i numerycznych dwu i trójwymiarowych (2D, 3D) (rys. 3.165). Mur został potraktowany jako materiał zhomogenizowany, czyli zastosowano makromodelowanie.



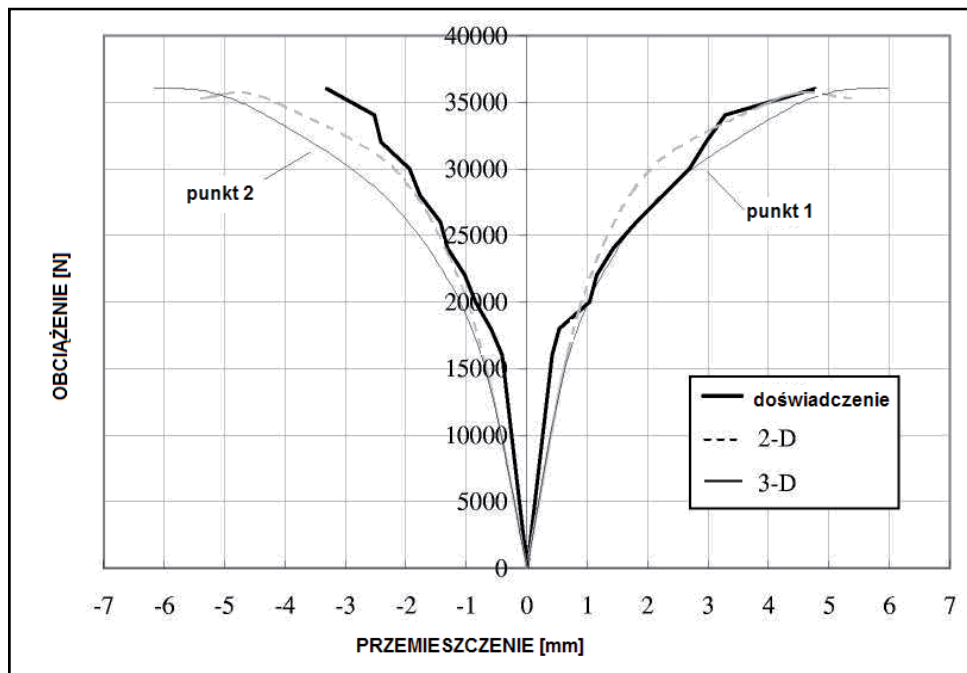
Rys. 3.165. Model numeryczny dwu- i trójwymiarowy sklepienia kolebkowego, [57].



Rys. 3.166. Numeryczny model deformacji sklepienia kolebkowego, [57].

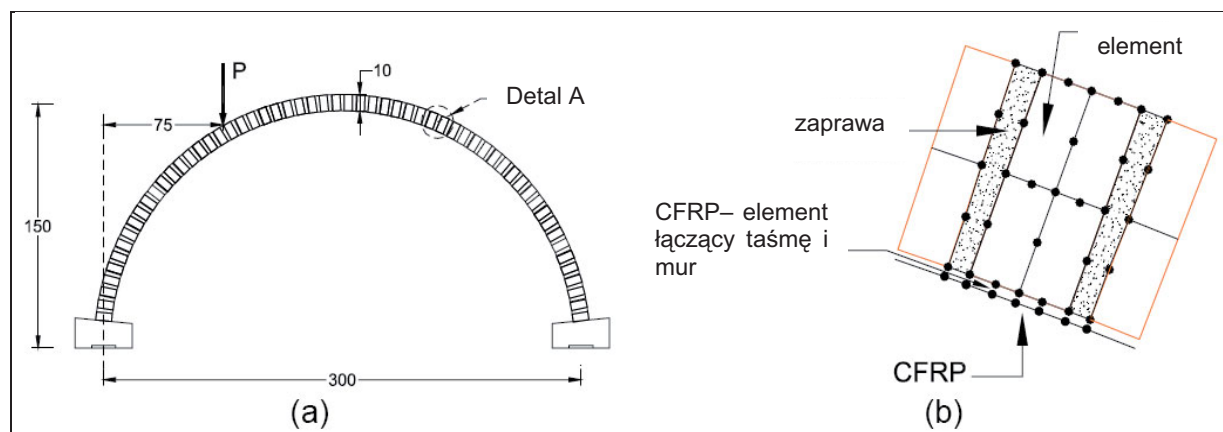
Autorzy powyższego opracowania twierdzą, że proponowany model deformacji (rys. 3.166) i zniszczenia pozwala na analizowanie konstrukcji murowych wzmocnionych materiałami FRP – porównanie wyników na rys. 3.167. Biorąc pod uwagę, że proponowane podejście do modelowania łuków wzmocnionych materiałami FRP jest bardzo uproszczone, autorzy zapowiadają dalsze badania nad rozwojem odpowiedniej teorii, by lepiej symulować współpracę muru i wzmocnienia za pomocą FRP. Jednakże autorzy dostrzegają, że poczynione rozważania niewystarczająco dokładnie opisują globalne zachowanie wzmocnionych zakrzywionych konstrukcji murowych, szczególnie zmiany mechanizmu zniszczenia i wzrostu nośności spowodowany przez wprowadzenie materiałów FRP.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



Rys. 3.167. Zależność przemieszczenia od obciążenia dla modelu rzeczywistego sklepienia kolebkowego i modeli numerycznych dwu- i trzywymiarowych [57].

W pracy [16] zestawiono wyniki badań numerycznych wykonanych na łukach prostych o wymiarach jak na rys. 3.168a (szerokości 90 cm) wzmacnianych materiałami CFRP (taśmami) w różnych konfiguracjach. Zaproponowany nieliniowy model numeryczny muru bazował na mikromodelowaniu. Modelując zagadnienia współpracy styku (rys. 3.168b) cegły i zaprawy oraz muru i materiału CFRP wykorzystano prace [237], [146].



Rys. 3.168. Model łuku (a), model połączenia poszczególnych elementów (b, [16]).

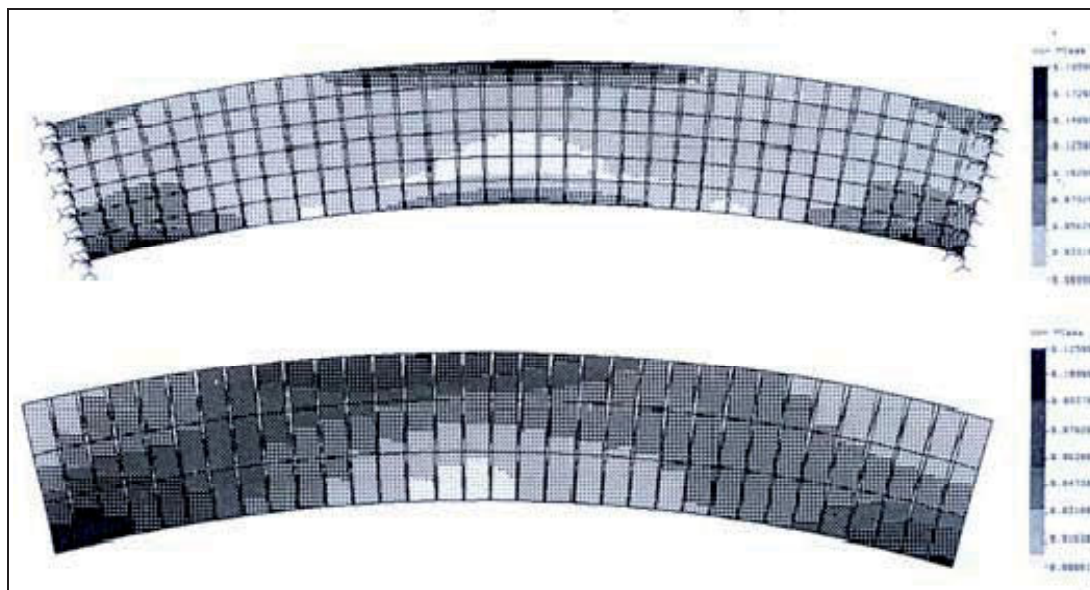
W trakcie analiz numerycznych zauważono, że mechanizm zniszczenia jest ściśle związany z zaproponowaną opcją wzmacnienia. Można to zaobserwować na rys. 3.170.

Powyższe badania numeryczne potwierdziły również badania na modelach laboratoryjnych prezentowane w rozdz. 3.5.

W pracy [214] porównano wyniki analizy wykonanej w środowisku COSMOS/M. Pokazano przydatność stosowania różnych typów elementów skończonych dla różnych materiałów. Cegły modelowano za pomocą elementów PLANE2D oraz SHELL4T, a zaprawę

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

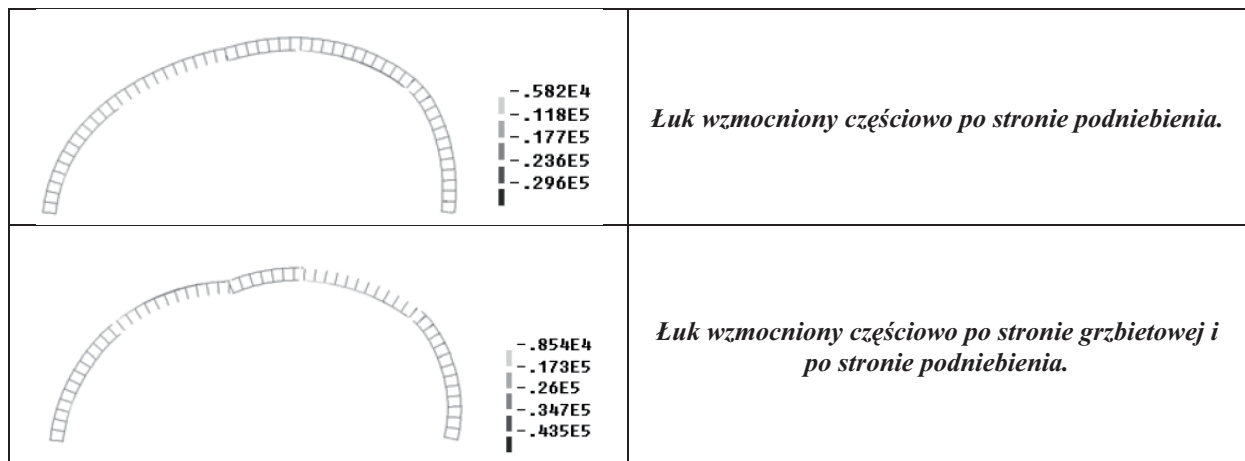
elementami GAP oraz TRUSS2D. Uwidoczniało to powstawanie rozwarstwień w warstwie zaprawy lub pomiędzy cegłą a zaprawą (Rys. 3.169).



Rys. 3.169. Model łuku z użyciem standardowych elementów (wyżej) metody zaproponowanej przez Haiman i Żagar – widoczne rozwarstwienia (niżej), [225].

	<p><i>Łuk bez wzmocnienia.</i></p>
	<p><i>Łuk wzmocniony ciągle po stronie grzbietowej.</i></p>
	<p><i>Łuk wzmocniony ciągle po stronie podniebienia.</i></p>
	<p><i>Łuk wzmocniony częściowo po stronie grzbietowej.</i></p>

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

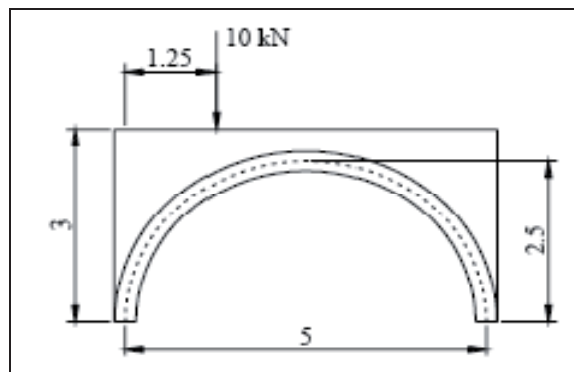


Rys. 3.170. Mechanizmy zniszczenia przy różnym rozkładzie wzmocnienia taśmami CFRP, [16].

W pracy [149] porównano różnego rodzaju metody analizy łuków ceglanych o rozpiętości 5 m, szerokości 1 m, grubości 0,3 m i geometrii oraz obciążeniu jak na (rys. 3.171).

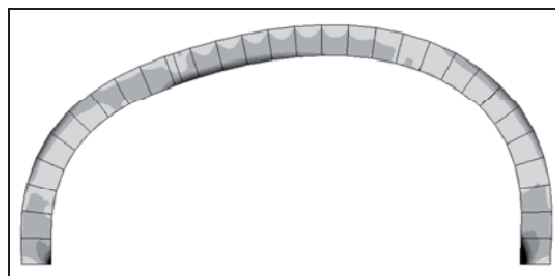
Modele numeryczne poddano różnym rodzajom analiz: analizie liniowej, analizie metodą nośności granicznej i analizie nieliniowej (rys. 3.172 – 3.174). Autor dochodzi do następujących wniosków:

- znacznie lepsze odwzorowanie rzeczywistości można uzyskać modelując poszczególne elementy konstrukcji niż całość,
- należy unikać modeli 3D (trójwymiarowych) jeśli nie są one konieczne,
- należy unikać analizy liniowo – sprężystej przy obliczeniach numerycznych konstrukcji historycznych.



Rys. 3.171. Model łuku wraz z wymiarami i zadanym obciążeniem, [149].

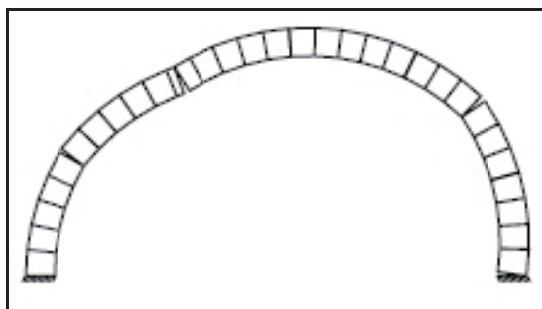
Należy jednak zauważyć, że w innym miejscu autor stwierdza, iż nie można jednoznacznie wykluczyć żadnego z typów analizy i dokonać wyboru jednej, najlepszej.



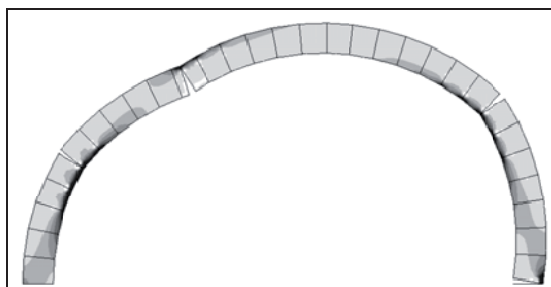
Rys. 3.172. Analiza liniowa, [149].



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

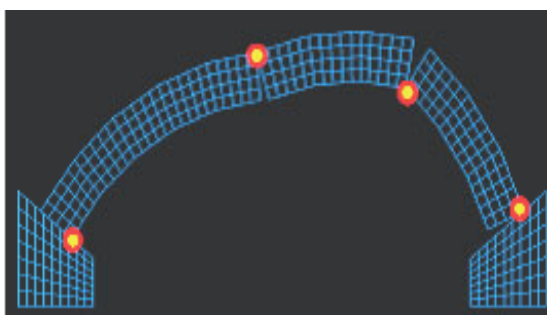


Rys. 3.173. Analiza metodą nośności granicznej, [149].

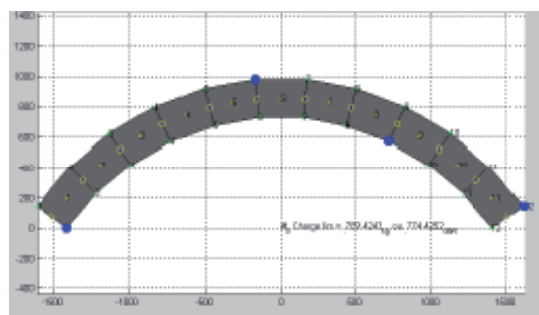


Rys. 3.174. Analiza nieliniowa, [149].

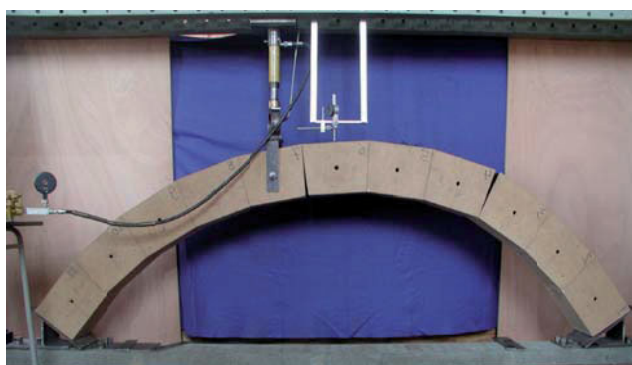
Również w [181] przedstawiono porównanie wyników badań numerycznych przeprowadzonych metodą nośności granicznej (rys. 3.175) z wynikami obliczeń analitycznych (rys. 3.176) oraz badań eksperymentalnych (rys. 3.177). W analizie numerycznej wykorzystano izotropowy, liniowy i sprężysty model materiału. Autorzy przekonują, że osiągnięte wyniki wstępnych badań potwierdzają przydatność zaproponowanej metodologii.



Rys. 3.175. Numeryczny model badanego łuku, [181].



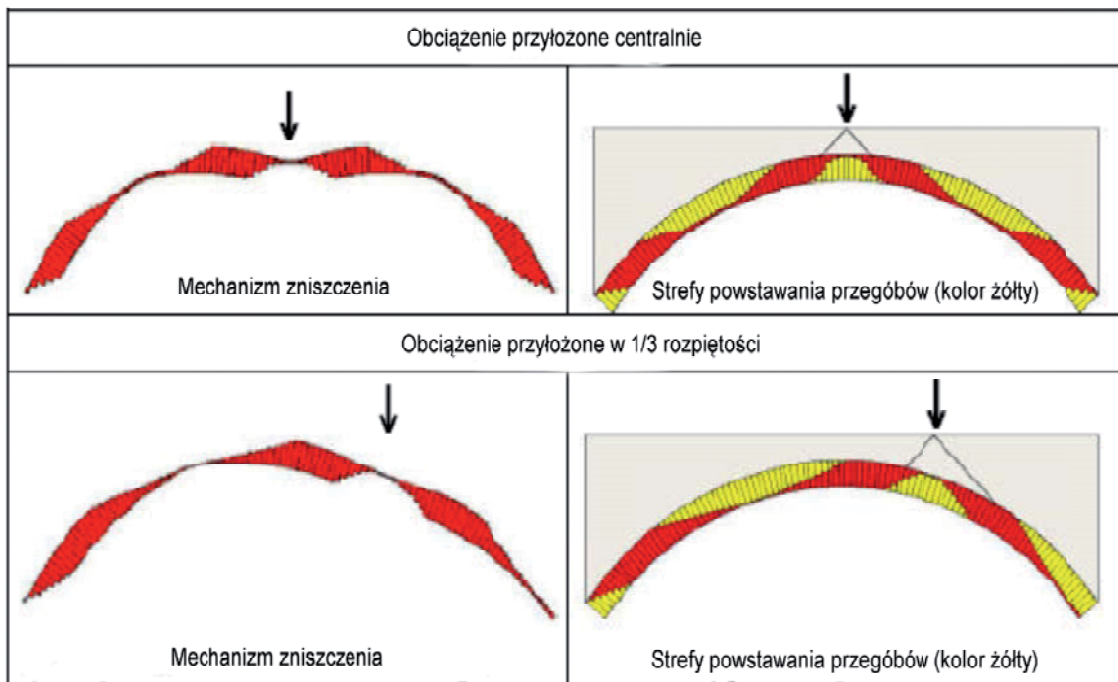
Rys. 3.176. Analityczne rozwiązanie badanego łuku, [181].



Rys. 3.177. Model laboratoryjny badanego łuku, [181].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

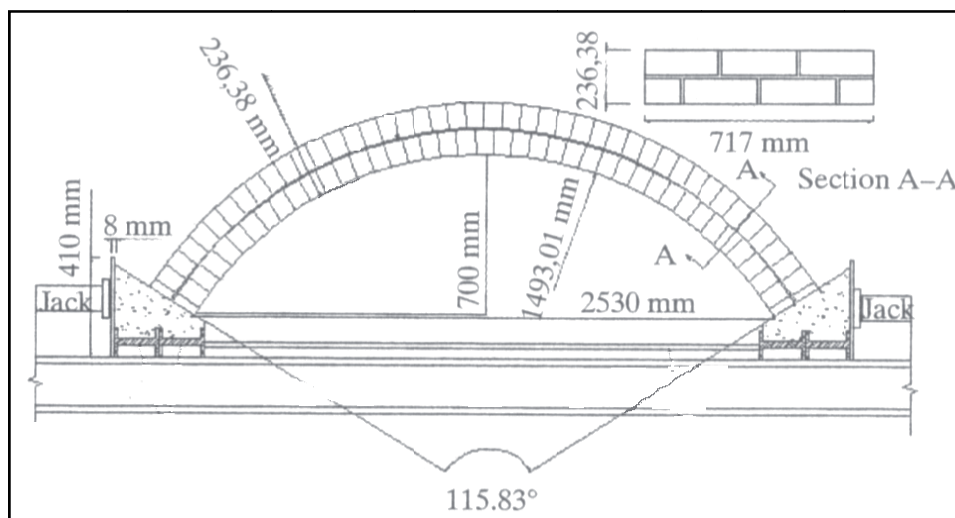
W pracy [34] zaproponowano numeryczny model łuków ceglanych (rys. 3.178), bazujący na nieliniowej metodzie obliczeniowej opartej o klasyczną teorię Castigliano.



Rys. 3.178. Mechanizmy zniszczenia oraz strefy rozwarcia spoin i powstawania przegóbów, [34].

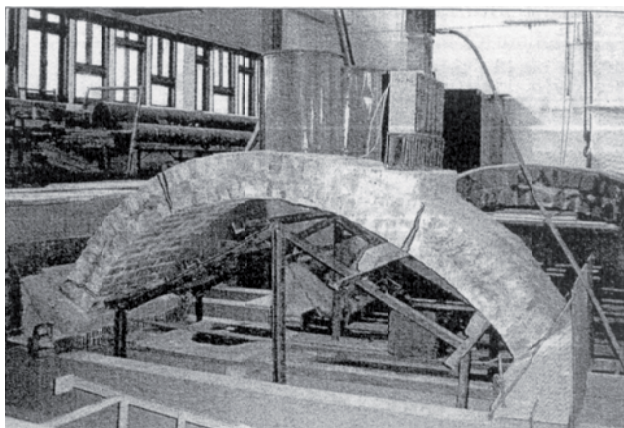
Kumar w [138] prezentuje badania eksperymentalne i numeryczne nad zachowaniem się łuków ceglanych poddanych obciążeniom statycznym. Testy laboratoryjne przeprowadzono na 2 łukach ceglanych o wymiarach jak na rys. 3.179. Porównano je z wynikami nieliniowej, dwuwymiarowej (2D) analizy MES (rys. 3.180).

Wyniki badań (rys. 3.181) potwierdzają przydatność analizy numerycznej do badań pracy statycznej łuków ceglanych. Oczywiście wyniki obu modeli nieznacznie odbiegają od siebie, ale związane jest to z dokładnością modelu numerycznego. Ukazuje to skuteczność takich modeli w wyznaczaniu stref spękania i zniszczenia przekroju.

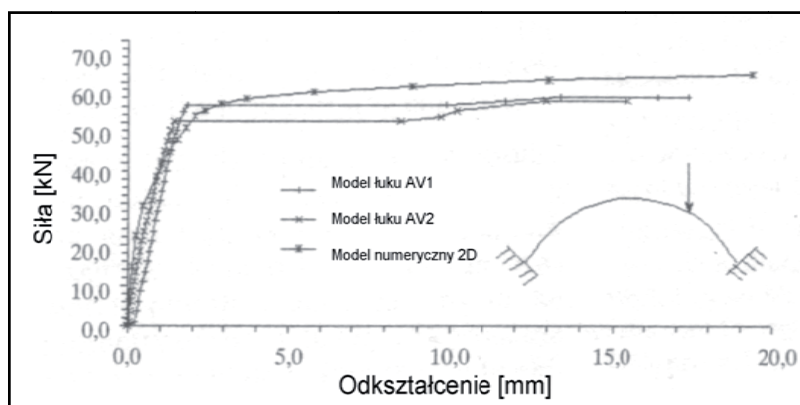


Rys. 3.179. Model laboratoryjny łuków AV1 i AV2, [138].

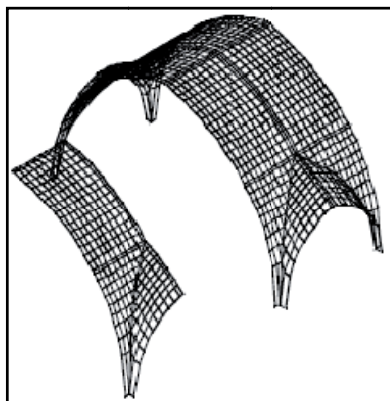
## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury



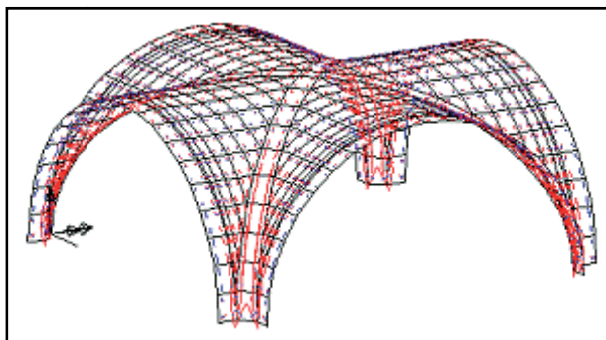
Rys. 3.180. Łuk AV2 podczas badań – widoczne zarysowania, [138].



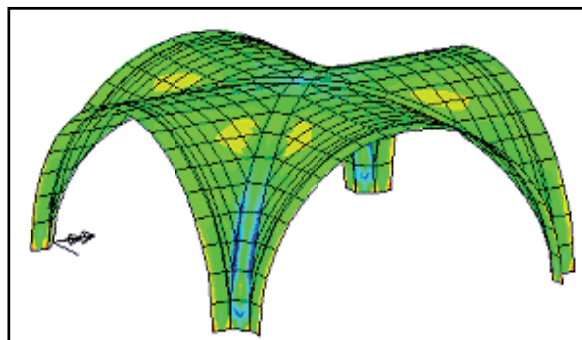
Rys. 3.181. Zestawienie odkształceń w modelach laboratoryjnych i MES powstałych w punkcie przyłożenia siły (1/4 rozpiętości łuku), [138].



Rys. 3.182. Model numeryczny sklepienia, [83].



Rys. 3.183. Model sklepienia – podział na elementy skończone.



Rys. 3.184. Model pracy sklepienia.

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Tak jak w [215], również w [83] przedstawiono numeryczny model sklepienia – stwierdzono, że badania numeryczne mogą w dużym zakresie przyczynić się poprawnej analizie zachowania konstrukcji murowej.

Do stworzenia modelu numerycznego posłużono się oprogramowaniem ANSYS. Model MES 3D wykonany został w całości z elementów czterościennych. Zastępczą charakterystykę materiału otrzymano korzystając z jednej ze znanych metod homogenizacji – metody zaproponowanej przez Aboudi [1]. Z powodu braku danych doświadczalnych, współczynnik Poissona przyjęto na poziomie 0,2. Wartość na tym poziomie, jak twierdzi Frunzio [81], daje wyniki zachowujące rozsądny stopień bezpieczeństwa.

Wielu innych autorów [203], [200], [180] podejmowało również próby modelowania zakrzywionych konstrukcji ceglanych za pomocą różnego oprogramowania, np. LUSAS (rys. 3.182 -3.184).

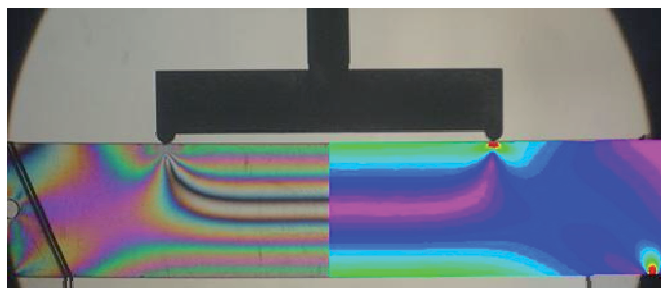
Pomimo potrzeby zaufania analizom numerycznym historycznych konstrukcji murowych, którymi, jak pokazały ostatnie lata, zainteresowanie wzrasta, oraz mimo iż one same rozwijają się stosując coraz bardziej zaawansowane modele istnieją powody oddalające użycie podejścia numerycznego:

- wyższa złożoność zachowania materiałów murowych w porównaniu z takimi materiałami jak beton czy stal,
- brak wszechstronnego, doświadczalnego opisu muru jako materiału, koniecznego do kalibracji modeli numerycznych.

Jednakże udowodniono, na podstawie wielu cykli badań nad elementami murowymi w różnych stanach naprężeń kontrolujących przemieszczenia [62], [148], że dzięki ich wynikom można realistycznie, z dużym prawdopodobieństwem opisywać zachowanie muru, jak i jego poszczególnych komponentów i w ten sposób otrzymywać potrzebne dla użycia zaawansowanych modeli numerycznych własności.

### 3.7. Badania elastooptyczne

Elastooptyka, mimo rozwoju innych doświadczalnych technik pomiarów, a także numerycznych metod obliczeń, nadal stanowi bardzo ważne narzędzie doświadczalnej identyfikacji pól naprężeń i odkształceń, przede wszystkim w płaskich i trójwymiarowych modelach obiektów rzeczywistych obciążonych statycznie lub dynamicznie. Jej zaletą jest możliwość wyznaczania składowych dwu- i trójwymiarowego stanu naprężenia wewnątrz badanego modelu (rys. 3.185), a po uwzględnieniu skal podobieństwa modelowego - w obiektach rzeczywistych (rys. 3.186 – badania przekrojów katedr gotyckich [159]).



Rys. 3.185. Element belkowy (zestawienie wyników. badań elastooptycznych - lewa strona belki, z wynikami numerycznymi - strona prawa).



Rys. 3.186. Model przekroju katedry. gotyckiej podczas badań elastooptycznych [159].

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

Elastoptyka umożliwia również badania konstrukcji rzeczywistych (za pomocą techniki elastoptycznej warstwy powierzchniowej lub tensometrów elastoptycznych), modelowanie zagadnień plastyczności, termosprężystości, a nawet przepływu cieczy. Poniżej przedstawiono podstawy elastoptyki dwu- i trójwymiarowej oraz techniki elastoptycznej warstwy powierzchniowej.

## 3.7.1. Podstawy elastoptyki

Istotą elastoptyki jest wykorzystywanie światła jako nośnika informacji oraz związku między właściwościami optycznymi niektórych materiałów a polem odkształceń (naprężeń). W celu opisu podstawowych zjawisk towarzyszących pomiarom elastoptycznym wykorzystywany jest model falowy światła, który opisują *równania Maxwella*. Wiążą one pole elektryczne i magnetyczne z właściwościami ośrodka, przez który biegnie światło. Zakładając propagację fali elektromagnetycznej w izotropowym dielektryku, równania Maxwella można przedstawić w postaci:

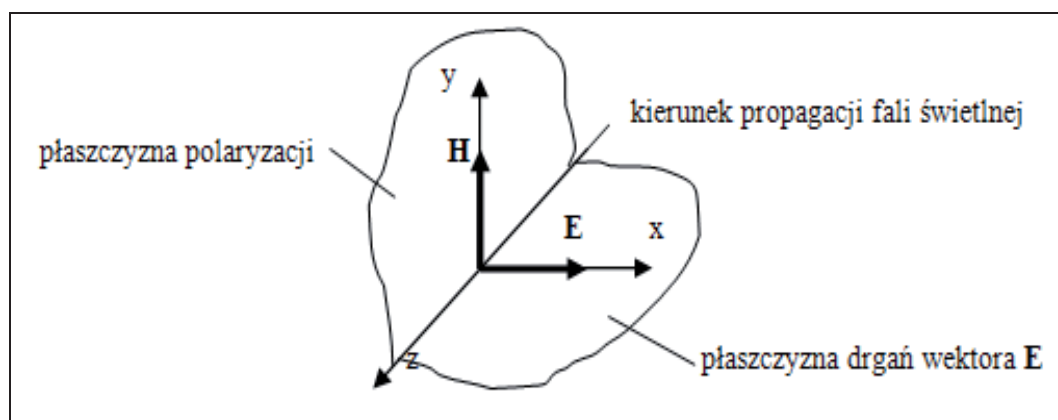
- *równania falowego składowej elektrycznej*

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (3.133)$$

- *równania falowego składowej magnetycznej*

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \ddot{\mathbf{H}} = 0 \quad (3.134)$$

Z analizy tych równań (np. dla składowej elektrycznej) wynika, że fale elektromagnetyczne są poprzeczne, płaskie, a wektory  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{H}$  są wzajemnie prostopadłe i drgają w zgodnej fazie.



Rys. 3.187. Składowe fali elektromagnetycznej.

To sprzężenie obu wektorów umożliwia analizowanie, np. tylko wektora  $\mathbf{E}$  (składowej elektrycznej), co jest zasadne m.in. dlatego, że odbierane przez zmysł wzroku natężenie światła jest wprost proporcjonalne do kwadratu rzeczywistej amplitudy natężenia pola elektrycznego. W postaci zespolonej składowe wektora  $\mathbf{E}$  mają postać:

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_{0x} \exp [i\omega (t - z/c_n)]; \quad \mathbf{E}_y = \mathbf{E}_{0y} \exp [i\omega (t - z/c_n)] \quad (3.135)$$

Natężenie światła można wyrazić jako:

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

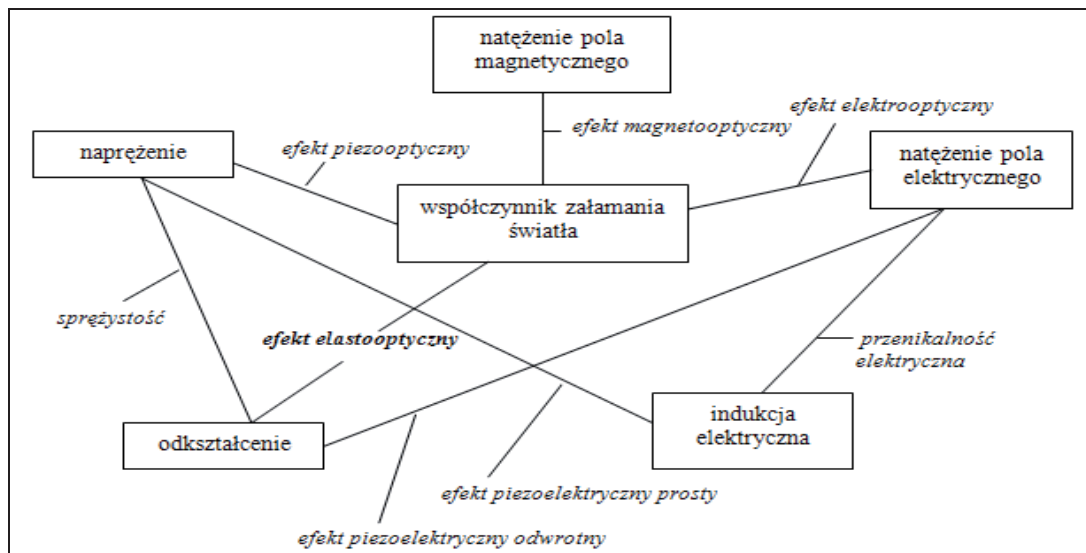
$$I = E \bar{E} = m^2 \quad (3.136)$$

Z analizy wzorów (3.135), po wyeliminowaniu fazy początkowej i wprowadzeniu przesunięcia fazowego zdefiniowanego jako różnica faz obu składowych ( $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ ) wynika, że w ogólnym przypadku dla  $z = \text{const}$  jest spełnione równanie:

$$[E_x / m_x]^2 - 2 \cdot E_x \cdot E_y \cdot \cos \varphi / m_x \cdot m_y + [E_y / m_y]^2 = \sin^2 \varphi \quad (3.137)$$

Tak więc koniec wektora  $\mathbf{E}$  propagującego wzdłuż współrzędnej  $z$  zatacza w przestrzeni krzywą spiralną (helisę), której "przekrój" płaszczyzną  $z = \text{const}$  jest elipsą. Ten stan fali świetlnej jest określany mianem *polaryzacji eliptycznej*.

Obok polaryzacji światła, w elastooptyce wykorzystywana jest *anizotropia optyczna*. W ogólnym przypadku, w ośrodku anizotropowym można zidentyfikować różne związki między poszczególnymi wielkościami fizycznymi charakteryzującymi jego właściwości, co pokazano na poniższym schemacie.



Rys. 3.188. Wybrane właściwości ośrodka anizotropowego.

W odróżnieniu od ośrodków charakteryzujących się naturalną anizotropią właściwości, istnieją ośrodki izotropowe, które zmieniają swoje właściwości na anizotropowe pod wpływem np. pola elektrycznego lub pola naprężeń. Rozpatrzmy to zjawisko zwane *dwójłomnością wymuszoną*, w przypadku ośrodka liniowo dwójłomnego, który najczęściej jest spotykany w elastooptyce. Fala świetlna wchodząc do takiego ośrodka, np. w postaci płasko-równoległej płytki, ulega podzieleniu na dwie fale spolaryzowane liniowo. Ich płaszczyzny drgań, prostopadłe względem siebie, są ściśle zorientowane względem ośrodka. Podział fali wchodzącej ma charakter wektorowy, a powstałe fale: szybsza (nadzwyczajna) i wolniejsza (zwyczajna), nie są składowymi fali wypadkowej propagującej w ośrodku, lecz jego falami własnymi. Wychodząc z ośrodka fale te, zgodnie z zasadą superpozycji, tworzą falę o innym (w ogólnym przypadku) stanie polaryzacji niż fala wchodząca. Występujące przesunięcie faz fal własnych wywołane różnicą dróg optycznych wskazuje, że w ośrodku liniowo dwójłomnym na kierunku propagacji obu fal występują dwie różne wartości współczynnika załamania  $n_1$  i  $n_2$  (odpowiednio dla fali szybszej i wolniejszej). Różnica dróg optycznych wynosi:

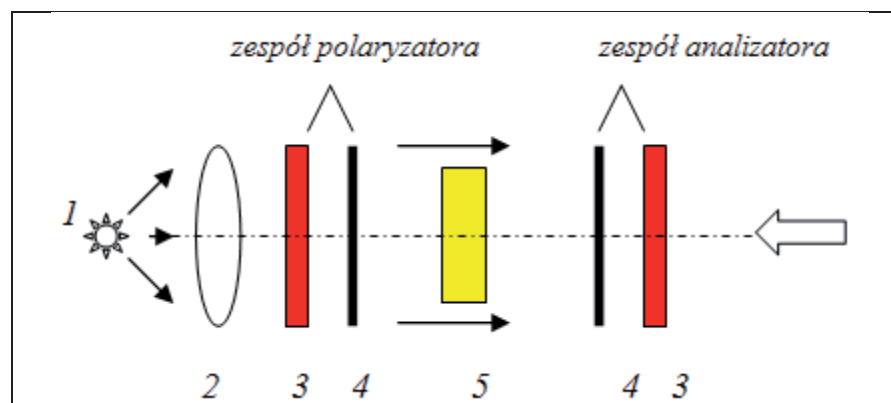
$$\Delta = t |n_1 - n_2| \quad (3.138)$$

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

a różnica  $n_1 - n_2$  jest miarą dwójłomności. Różnicy dróg odpowiada względne przesunięcie faz obu fal:

$$\delta = 2\pi \cdot \Delta / \lambda \quad (3.139)$$

Pożądany stan polaryzacji światła, umożliwiający śledzenie efektu dwójłomności, uzyskuje się w tzw. *polaryskopach*. Są one wyposażone w elementy optyczne umożliwiające uzyskanie światła o określonej polaryzacji oraz analizę zmian wywołanych anizotropią optyczną badanego ośrodka. Typowy schemat polaryskopu z transmisyjną wiązką światła pokazano na rys. 3.189.



Rys. 3.189. Schemat polaryskopu transmisyjnego: 1 - źródło światła (białego lub/monochromatycznego), 2 - układ optyczny formujący wiązkę światła (pożądana wiązka równoległa), 3 - filtr polaryzacyjny, 4 - płytka fazowa, 5 - płytka dwójłomna.

Przestrzeń pomiarowa polaryskopu pokazanego na schemacie znajduje się między zespołami polaryzator (filtr polaryzacyjny, najczęściej foliowy) - płytka fazowa (tzw. ćwierćfalówka). Często noszą one nazwy: polaryzator (3 - 4) i analizator (4 - 3), przy czym konstrukcja polaryskopu umożliwia sprzężony obrót tych zespołów, zmianę ich wzajemnego ustawienia, a także zmianę położenia ćwierćfalówek względem "swoich" filtrów. Filtr polaryzacyjny (liniowy) charakteryzuje się wyróżnionym kierunkiem przepuszczania światła, przy czym stosunek natężenia światła przepuszczanego w kierunku doń prostopadłym do natężenia światła przechodzącego równoległe jest rzędu 1:200, a nawet osiąga 1:300 000. Obecnie najczęściej są stosowane filtry foliowe na bazie polialkoholu winylowego. Warto podkreślić, że wektor  $\mathbf{E}$  fali padającej na filtr ma dwie składowe: prostopadłą do kierunku łańcuchów cząsteczek polialkoholu  $\mathbf{E}^\perp$  i równoległą  $\mathbf{E}^\parallel$ . Składowa  $\mathbf{E}^\perp$  jest przepuszczana z niewielkimi stratami, natomiast składowa  $\mathbf{E}^\parallel$  jest wygaszana.

Zadaniem płytki fazowej współpracującej z filtrem polaryzacyjnym jest uzyskanie możliwości zmiany stanu polaryzacji z liniowej na kołową (i odwrotnie). W polaryskopach elastoptycznych stosuje się płytki fazowe zwane *ćwierćfalówkami*, których cechą charakterystyczną jest to, że światło propaguje w nich z dwoma różnymi prędkościami, a więc są one dwójłomne. Tym samym wektory elektryczne tych dwóch fal własnych są do siebie prostopadłe, a płaszczyzny w których one leżą wyznaczają tzw. oś szybką i wolną. Przesunięcie fazowe jest w tych płytkach ściśle określone i wynosi  $\lambda/4$  (dla danej długości fali światła). W przypadku, gdy oś szybka ćwierćfalówki jest równoległa do kierunku przepuszczania filtra polaryzacyjnego, stan polaryzacji nie ulega zmianie - światło jest nadal spolaryzowane liniowo. Gdy oś szybka tworzy kąt  $\pi/4$  z kierunkiem wektora elektrycznego fali opuszczającej filtr, stan polaryzacji zmienia się i uzyskujemy światło spolaryzowane

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

kołowo. Należy podkreślić, że usytuowanie osi szybkiej ćwierćfalówki pod innym kątem niż  $\pi/4$  generuje polaryzację eliptyczną.

Z punktu widzenia realizacji pomiarów, stan polaryzacji światła wychodzącego z polaryskopu jest w elastooptyce analizowany przede wszystkim amplitudowo, tzn. istotne są informacje o natężeniu światła za analizatorem. W polaryskopie liniowym, ze skrzyżowanymi osiami filtrów polaryzacyjnych (czyli w polaryskopie "z ciemnym polem widzenia" najczęściej stosowanym w pomiarach elastooptycznych), natężenie światła jest opisane równaniem:

$$I = I_{\max} \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\delta/2) = I_{\max} \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\pi\Delta/\lambda) \quad (3.140)$$

W przypadku polaryskopu kołowego (skrzyżowane filtry polaryzacyjne, osie szybsze ćwierćfalówek ustawione pod kątem  $\pi/4$  względem kierunku przepuszczania światła przez filtr i pod kątem  $\pi/2$  względem siebie) rozkład natężenia światła jest opisany równaniem:

$$I = I_{\max} \cdot \sin^2(\delta/2) = I_{\max} \cdot \sin^2(\pi\Delta/\lambda) \quad (3.141)$$

Z analizy wzorów (3.140) i (3.141) wynika, że zmiany natężenia światła za analizatorem są modulowane przez argumenty funkcji sinus, przy czym  $I = 0$  uzyskuje się dla:

- $\alpha = 0$  lub  $\alpha = \pi/2$ , tj. wówczas, gdy kierunek jednego z wektorów własnych ośrodka dwójłomnego pokrywa się z kierunkiem przepuszczania filtra polaryzatora, a drugi - z kierunkiem przepuszczania analizatora,
- $\delta/2 = \pi \cdot \Delta/\lambda = N \cdot \pi$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ), tj. wówczas, gdy różnica dróg optycznych fal własnych ośrodka dwójłomnego  $\Delta$  jest wielokrotnością długości fali światła ( $\Delta = N\lambda$ ), przy czym  $N$  jest nazywane rzędem prążka.

Zmiany natężenia światła za analizatorem są widoczne w postaci linii (prążków), dla których spełnione są warunki:

$$\Delta = const \quad (\delta = const) \quad (3.142)$$

$$\alpha = const \quad (3.143)$$

Porównując warunki (3.142) i (3.143) ze wzorami (3.140) i (3.141) łatwo zauważyć, że w polaryskopie liniowym obserwowane są dwie rodziny linii charakteryzujące zmiany dwójłomności w płycie, natomiast w polaryskopie kołowym - tylko jedna. Linie (prążki) spełniające warunek (3.142) są nazywane *izochromami*, a spełniające warunek (3.143) - *izoklinami*. Dalsza analiza powyższych zależności prowadzi do następujących wniosków:

- sąsiadujące ze sobą izochromy mogą mieć rzędy jednakowe lub różniące się o jeden (czyli różnica dróg optycznych wynosi  $\Delta = 0$  lub  $\Delta = \lambda$ ),
- prążki izochrom i izoklin są od siebie niezależne i mogą "przecinać się" w obrazie obserwowanym za analizatorem,
- w świetle monochromatycznym wygaszenie światła związane z warunkiem (3.109) następuje dla długości fali propagującej przez ośrodek dwójłomny, a więc obserwowane są czarne prążki izochrom na tle obszarów o barwie odpowiadającej danej długości fali światła; w przypadku światła polichromatycznego (najczęściej białego) wygaszenie następuje dla wielu długości fal z zakresu widzialnego, gdy spełniony jest warunek  $\Delta/\lambda_i = N$ , tak więc prążki izochrom obserwowane są jako pasma barwne, którym



## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

- odpowiada określona różnica dróg optycznych; wyjątkiem jest izochroma  $N = 0$  obserwowana w postaci czarnego prążka,
- ponieważ człon  $\sin^2 2\alpha$  równania (3.140) nie zależy od  $\lambda$ , izokliny obserwowane w świetle monochromatycznym i białym są zawsze prążkami czarnymi.

Często w pomiarach elastoptycznych jest wykorzystywany stan polaryzacji kołowej, w którym kierunki przepuszczania światła przez filtry polaryzacyjne są do siebie równoległe. Wówczas rozkład natężenia światła opisuje funkcja:

$$I = I_{\max} \cdot \cos^2(\delta/2) = I_{\max} \cdot \cos^2(\pi\Delta/\lambda) \quad (3.144)$$

a wygaszenie światła następuje dla  $\delta = (2N - 1) \cdot \pi$ . Obserwowana rodzina izochrom ma rzędy  $N = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$  i jest nazywana rodziną izochrom połówkowych. W praktyce pomiarowej występuje również potrzeba określania  $N$  i  $\alpha$  w ściśle określonych punktach, w których z reguły rząd izochromy jest różny od rzędu całkowitego lub połówkowego. W takim przypadku stosowane są tzw. *kompensatory* goniometryczne (azymutalne) lub bezpośrednie. W pierwszym przypadku kompensacja rzędu izochromy (czyli pomiar różnicy dróg optycznych lub częściej opóźnienia względnego faz) dokonywana jest za pomocą elementu układu optycznego polaryskopu obracanego wokół osi optycznej tego układu. W drugim, używane są specjalne przyrządy, w których generowany jest dodatkowy efekt dwójłomności (równy co do wartości, lecz o przeciwnym "znaku"), który po dodaniu do  $N_i(x_i, y_i)$  zeruje różnicę dróg optycznych. Znana wartość opóźnienia wygenerowana w kompensatorze odpowiada poszukiwanej wartości rzędu izochromy w danym punkcie. W elastoptyce najczęściej stosowane są goniometryczne kompensatory Senarmont'e'a i Tardy'ego oraz kompensatory bezpośrednie Soleila i Babineta.

Pomiar parametru izokliny  $\alpha_i(x_i, y_i)$  jest mniej kłopotliwy, gdyż ustalenie jego wartości w dowolnym punkcie badanego obszaru polega na śledzeniu stopnia wygaszenia światła w tym punkcie podczas obrotu płaszczyzny polaryzacji w polaryskopie liniowym. Pozorny ruch prążków izoklin pozwala odróżnić tę rodzinę linii od izochrom, które nie zmieniają swojego położenia.

Materiały stosowane w elastoptyce, poza oczywistym wykazywaniem efektu dwójłomności wymuszonej, powinny spełniać wiele różnych wymogów, często szczegółowych, ze względu na modelowanie różnych obiektów rzeczywistych. Jednak kilka cech i właściwości powinno bezwzględnie charakteryzować takie materiały. Należą do nich: przezroczystość (a ściślej transmisyjność umożliwiająca obserwację izoklin i izochrom), duża czułość objawiająca się niską wartością  $f_\sigma$ , liniowość zależności  $\sigma - \varepsilon$  oraz  $(\sigma_1 - \sigma_2) - N$  w badanym zakresie odkształceń modelu, niski efekt pełzania mechanicznego i optycznego, odpowiedni (dla danego zadania) moduł sprężystości podłużnej, niski efekt brzegowy (tj. pojawianie się prążków izochrom w okolicach brzegu nieobciążonego modelu wraz z czasem), a także dobra obrabialność w przypadku stosowania obróbki mechanicznej do wykonania modelu (alternatywą jest technika odlewania "na gotowo"). W celu porównania podstawowych właściwości różnych materiałów stosowanych w elastoptyce, stosuje się charakterystyki ilościowe. Jedną z nich jest współczynnik jakości:

$$Q = \frac{E}{f_\sigma} \quad (3.145)$$

natomiast drugą - współczynnik czułości:

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$S = \frac{\sigma_{prop.}}{f_{\sigma}} \quad (3.146)$$

W tab. 3.7 podano orientacyjne wartości niektórych wielkości charakteryzujących materiały elastoptyczne stosowane w elastoptyce dwuwymiarowej.

Najczęściej stosowanym materiałem w elastoptyce są kompozycje żywic epoksydowych sieciowanych (utwardzanych) w temperaturze pokojowej lub temperaturach podwyższonych (tzw. utwardzanie na gorąco). W przypadku elastoptyki dwuwymiarowej, posługującej się płaskimi modelami obiektów rzeczywistych, najczęściej stosowane są kompozycje utwardzane w temperaturze pokojowej, a modele są wykonywane na drodze obróbki mechanicznej odlanej uprzednio płyty o żądanej grubości.

Tab. 3.7. Orientacyjne wartości wybranych wielkości charakteryzujących materiały na modele elastoptyczne

Material	$E$ [MN/m <sup>2</sup> ]	$\nu$ [-]	$\sigma_{prop}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	$f_{\sigma}$ [MN/m·rz.iz.]	$Q \times 10^3$ [1/m]
szkło	68 300	0.22	29.4	0.2 - 0.3	233 - 350
żywice epoksydowe					
Araldit D	3 600	0.36	20.6	0.013	250 - 300
Epidian 5	3 200	0.36	20.0	0.0125	230 - 270
żywice allylowe	1 960	-	20.6	0.015	~ 130
żywice poliestrowe	4 000	0.36	-	0.025	~ 155
polimetakrylan metylu	3 400	0.36	19.6	0.260	~ 13
poliwęglan	2 500	0.38	34.5	0.0073	~ 350
elastomer uretanowy	3	0.46	0.14	0.00018	0.017
żelatyna	0.02	-	-	0.0029	0.007

Uwagi:  $\sigma_{prop}$  - granica proporcjonalności; żelatyna jest materiałem używanym niekiedy do modelowania ciężaru własnego konstrukcji, natomiast szkło jest historycznie pierwszym materiałem użytym do budowy modelu elastoptycznego mostu.

Należy zaznaczyć, że zjawisko dwójłomności wymuszonej w tworzywach polimerowych jest związane z odkształceniami sieci łańcuchów polimeru powstałej w trakcie procesu polimeryzacji. Dobór odpowiedniego materiału umożliwi modelowanie różnych obiektów i zjawisk. Przykładowo, zastosowanie elastomerów uretanowych daje możliwość modelowania obiektów o dużej odkształcalności, a odpowiednia modyfikacja kompozycji epoksydowych umożliwi modelowanie ośrodków uwarstwionych [223], [179], [198].

### 3.7.2. Metoda elastoptycznej warstwy powierzchniowej

Zastosowanie metody elastoptycznej jest możliwe w badaniach obiektów rzeczywistych wykonanych z materiałów nie wykazujących efektu dwójłomności wymuszonej. Technika pomiaru, polegająca na naniesieniu na powierzchnię badanego obiektu

## 3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

cienkiej warstwy materiału dwójłomnego (tzw. elastoptycznej warstwy powierzchniowej), a następnie obserwacji w świetle odbitym efektów optycznych wywołanych odkształceniami badanej powierzchni, nosi nazwę techniki (metody) elastoptycznej warstwy powierzchniowej (TEWP). Zaletą TEWP jest możliwość pomiaru odkształceń na powierzchni obiektu wykonanego z rodzimego materiału (bez konieczności budowy modelu fizycznego) [7], [64], [22], [98], [112], [125].

Podstawowe związki między naprężeniami i odkształceniami a efektami optycznymi w warstwie powierzchniowej opierają się na założeniu, że odkształcenia występujące na powierzchni konstrukcji przekazywane są wprost na warstwę naklejoną na tę powierzchnię, co wyrażają równania:

$$\varepsilon_1^w = \varepsilon_1^k, \quad \varepsilon_2^w = \varepsilon_2^k, \quad \text{przy } \sigma_3 = 0 \quad (3.147)$$

stąd:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^w = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^k \quad (3.148)$$

a po uwzględnieniu podstawowego równania elastoptyki (4.5):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N \cdot f_\sigma \quad (3.149)$$

Z faktu prowadzenia obserwacji w świetle odbitym, otrzymuje się zależność między różnicą odkształceń głównych a efektem optycznym (rzędem izochromy) w warstwie:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^w = \frac{(1 + \nu^w) \cdot N \cdot f_\sigma}{2 \cdot t^w E^w} = \frac{N \cdot f_\varepsilon}{2 \cdot t^w} \quad (3.150)$$

Bezpośrednio z danych elastoptycznych ( $N$  i  $\alpha$ ) można wyznaczyć także odkształcenie postaciowe:

$$\gamma_{xy}^k = \gamma_{xy}^w = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^w \cdot \sin 2\alpha = \frac{N \cdot f_\varepsilon \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot t^w} \quad (3.151)$$

W zakresie liniowo-sprężystych odkształceń, naprężenia na powierzchni badanego obiektu określają wzory:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^k = \frac{E^k \cdot N \cdot f_\varepsilon}{2 \cdot t^w \cdot (1 + \nu^k)} \quad (3.152)$$

$$\tau_{xy}^k = \frac{E^k \cdot N \cdot f_\varepsilon \cdot \sin 2\alpha}{4 \cdot t^w \cdot (1 + \tau^k)} \quad (3.153)$$

Powyższe zależności są prawdziwe dla cienkich warstw, rzędu dziesiątych części milimetra. W praktyce jedynie w badaniach niektórych zjawisk (np. uplastycznienia metali) stosuje się warstwy o tak małej grubości. W ogólnym przypadku, m.in. ze względu na stosowanie grubszych warstw, równanie (3.149) jest modyfikowane współczynnikami korekcyjnymi uwzględniającymi wpływ danego czynnika na wartość mierzonych odkształceń, co można ogólnie zapisać w postaci:

3. Modelowanie i analiza pracy statycznej zakrzywionych, historycznych konstrukcji ceglanych w świetle literatury

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^k = K_i \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^w \quad (3.154)$$

Na podstawie efektów optycznych uzyskanych podczas pomiarów techniką EWP można bezpośrednio wyznaczyć różnicę odkształceń głównych  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sim N$  oraz kierunek odkształceń głównych  $\alpha$ . W ogólnym przypadku poszczególne składowe stanu odkształcenia są określane analitycznie lub doświadczalnie, co nosi nazwę *rozdzielania składowych stanu odkształcenia*.

Najprostszym przypadkiem analizy danych uzyskanych techniką EWP jest określenie wartości składowych stanu odkształcenia na krawędzi obszaru pokrytego warstwą wówczas, gdy krawędzie obiektu i warstwy są nieobciążone, tzn.  $\sigma_n$  i  $\tau_s$  są równe zero. W takim przypadku:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \text{ a stąd } \varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 = -\nu \cdot \varepsilon_1 \quad (3.155)$$

a w rezultacie:

$$\varepsilon_1 = \frac{N \cdot f_\varepsilon}{2 \cdot t^w \cdot (1 + \nu_k)} \quad (3.156)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu \cdot \varepsilon_1 = \frac{-\nu \cdot N \cdot f_\varepsilon}{2 \cdot t^w (1 + \nu_k)} \quad (3.157)$$

Ponieważ na krawędzi nie działają obciążenia styczne, to  $\varepsilon_1$  jest skierowane stycznie do tej krawędzi, a  $\varepsilon_2$  - prostopadle.

#### 4. Badania doświadczalne własne

### 4. BADANIA DOŚWIADCZALNE WŁASNE

#### 4.1. Wprowadzenie

Stosowanie nowoczesnych metod naprawy i wzmacniania konstrukcji ceglanych czy też ich poszczególnych elementów (np łuków, sklepień, kopuł) prowadzi do znacznych oszczędności, a niejednokrotnie pozwala na ocalenie obiektów ważnych kulturowo.

Wzmacnianie i naprawa ceglanych konstrukcji zakrzywionych jest zagadnieniem trudnym, wymagającym najczęściej indywidualnego podejścia do każdego przypadku. Z tego właśnie powodu kolejne badania, zwłaszcza prowadzone na modelach w skali technicznej i wykorzystujące nowe technologie są szczególnie oczekiwane.

#### 4.2. Cel i zakres badań

Głównym celem przeprowadzonych badań była próba opisu pracy statycznej zabytkowych, zakrzywionych konstrukcji ceglanych o określonej geometrii, poddanych zabiegom naprawy i wzmacniania.

Ze względu na złożoność badanego zagadnienia, wykonanie badań uwzględniających wszystkie oddziaływujące na ten rodzaj konstrukcji czynniki jest bardzo kosztowne i czasochłonne.

Stąd, zasadniczym celem i przedmiotem przeprowadzonych badań doświadczalnych była weryfikacja nowych technologii stosowanych do wzmacniania tego typu konstrukcji (taśmy i siatki węglowe, wklejane pręty stalowe, drewno klejone – stosowane po stronie grzbietowej, mając na uwadze, że zazwyczaj po stronie podniebienia występują polichromie). Za szczególnie istotne uznano zbadanie rozkładów i wartości odkształceń i naprężeń we wzmacnianych modelach oraz szacowanie stopnia wykorzystania przekroju elementów wzmacniających. Przeprowadzone badania materiałowe miały głównie na celu dostarczenie danych do budowy oraz weryfikacji modelu MES oraz modelu analitycznego.

#### 4.3. Badania materiałów użytych do konstrukcji łuków (modeli badawczych) oraz elementów wzmacniających

Wykonane badania miały na celu określenie niektórych cech fizycznych i wytrzymałościowych materiałów zastosowanych do wykonania modeli badawczych oraz przyjętych w modelu MES i modelu analitycznym.

W wypadku siatek z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10, zaprawy Ruredil X Mesh M25 są to jedne z pierwszych badań tego rodzaju materiałów wykonywane w Polsce i mogą się przyczynić do głębszego ich poznania, a w dalszej kolejności wspomóc rozpoznanie zagadnień związanych z zastosowaniem ich do wzmacniania konstrukcyjnego uszkodzonych konstrukcji murowych.

W ramach badań materiałowych przeprowadzono:

- badania cegły pełnej klasy 10 obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na ściskanie,
- badania zaprawy wapiennej BaunitBayosan Reinkalkputz RK 39 obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na zginanie,
  - wytrzymałości na ściskanie,
- badania siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na rozciąganie,

## 4. Badania doświadczalne własne

- modułu sprężystości na rozciąganie,
- badania zaprawy Ruredil X Mesh M25 obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na zginanie,
  - wytrzymałości na ściskanie,
  - wytrzymałości na odrywanie zaprawy od cegły,
  - wytrzymałości na ścinanie,
- badania taśm S&P Lammelle 150/2000 (100/1.4) obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na rozciąganie,
  - modułu sprężystości na rozciąganie,
- badania kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na zginanie,
  - wytrzymałości na ściskanie,
  - wytrzymałość na odrywanie od cegły,
- badania stalowych żebrowanych i gwintowanych prętów  $\varnothing$  8 obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na rozciąganie,
- badania połączenia klejowego "pręt stalowy– mur" obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałość na rozciąganie.

#### 4.3.1. Opis stanowisk badawczych i urządzeń pomiarowych

Wszystkie badania materiałowe przeprowadzono w Laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej zgodnie z obowiązującymi normami dotyczącymi danych pomiarów.

Do badań materiałowych wykorzystano następujące urządzenia pomiarowe:

- do badań wytrzymałości na rozciąganie siatek z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10, taśm CFRP S&P Lammelle 150/2000 (100/1.4) oraz prętów stalowych, wykorzystano maszynę wytrzymałościową uniwersalną ZDM 10/91 o maksymalnej sile zrywającej 20 kN (rys. 4.1);



Rys. 4.1. Stanowisko badawcze w próbie rozrywania.

miar wydłużenia rejestrowano za pomocą indukcyjnych czujników przemieszczeń W50 TS o zakresie pomiarowym  $\pm 50$  mm, klasy 0,5% (marki Hottinger Baldwin Messtechnik)

#### 4. Badania doświadczalne własne

sterownych przez oprogramowanie CATMAN (Hottinger Baldwin Messtechnik) zapewniające współpracę komputera PC z urządzeniami pomiarowymi;

– do badań wytrzymałości na zginanie, ściskanie i ścinanie zapraw, kompozycji epoksydowych i cegieł wykorzystano maszynę wytrzymałościową uniwersalną ZDM 5/91 (rys. 4.2) wraz z odpowiednim osprzętem;



Rys. 4.2. Prasa hydrauliczna uniwersalna ZDM 5/91.

– do badań wytrzymałości na odrywanie zaprawy od cegły posłużono się przyrządem DYNA Z15, (rys. 4.3);



Rys. 4.3. DYNA Z15.

Z powodu występowania różnych oznaczeń określanych wartości (np. wytrzymałości na ściskanie) w zależności od stosowanej normy, w poniższych obliczeniach starano się ujednolicić stosowane oznaczenia według trendów europejskich.

#### 4.3.2. Badania cegły

Badania przeprowadzono w maju 2007 r. w laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej.

## 4. Badania doświadczalne własne

Wg. informacji pozyskanych od producenta cegieł, użyta do badań cegła była klasy 10 o wytrzymałości na ściskanie ok. 10 MPa.

## 4.3.2.1. Oznaczenie wytrzymałości na ściskanie

Pomiar wytrzymałości na ściskanie wykonano na 6 próbkach wg. [189] na maszynie wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91, a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_c = \frac{F_c}{A} \quad (4.1)$$



Rys. 4.4. Badanie wytrzymałości na ściskanie – próbka nr c1 w trakcie niszczenia.



Rys. 4.5. Zniszczona próbka nr c3.

Tab. 4.1. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałość ściskanie

nr próbki	wymiary próbki a x b [mm]	pole przekroju próbki <b>A</b> [mm <sup>2</sup> ]	siła niszcząca <b>F<sub>c</sub></b> [N]	wytrzymałość na ściskanie <b>f<sub>c</sub></b> [MPa]
c1	126,5 x 123,5	15 622,75	240 000	15,36
c2	129,0 x 123,0	15 867,00	256 000	16,13
c3	124,0 x 129,0	15 996,00	280 000	17,50
c4	126,5 x 123,5	15 622,75	240 000	15,36
c5	129,0 x 123,0	15 867,00	256 000	16,13
c6	126,5 x 123,5	15 622,75	240 000	15,36

Tab. 4.2. Średnia wytrzymałość na ściskanie oraz statystyczne opracowanie wyników\*

kształt i wymiary próbki	[mm]	powierzchnia ściskania 125x125
liczba próbek <b>n</b>	[szt.]	6
średnia wytrzymałość na ściskanie <b>f<sub>c, śr</sub></b>	[MPa]	<b>15,97</b>
odchylenie standardowe <b>s</b>	[MPa]	0,78
błąd średni <b>s<sub>r</sub></b>	[MPa]	0,39
współczynnik zmienności <b>v</b>	[%]	4,78

\*Statystyczne opracowanie wyników badań przeprowadzono na podstawie następujących wzorów:

– średnia arytmetyczna wytrzymałość na ściskanie **f**

$$\bar{f}_c = \frac{\sum f_{ci}}{n} \quad (4.2)$$



## 4. Badania doświadczalne własne

– odchylenie standardowe  $s$ 

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum(f_{ci} - f_c)^2}{n-1}} \quad (4.3)$$

– błąd średni  $s_r$ , średniej arytmetycznej

$$s_r = \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (4.4)$$

– współczynnik zmienności  $\nu$ 

$$\nu = \frac{s}{f_c} \cdot 100 \quad (4.5)$$

Z przeprowadzonych badań wytrzymałości na ściskanie otrzymano  $f_{c,śr}=15,97$  MPa, czyli wyniki lepsze niż podane przez producenta cegieł  $f_c=10$  MPa. Do dalszych obliczeń przyjęto dane podane przez producenta.

## 4.3.3. Badania zaprawy wapiennej BaumiBayosan Reinkalkputz RK 39

Własności badanej zaprawy wapiennej BaumiBayosan Reinkalkputz RK 39 wg. [126]:

– uziarnienie ok. 0 - 2,2 mm- wytrzymałość na ściskanie po 28 dniach  $> 2,5$  N/mm<sup>2</sup>.

## 4.3.3.1. Oznaczenie wytrzymałości na zginanie

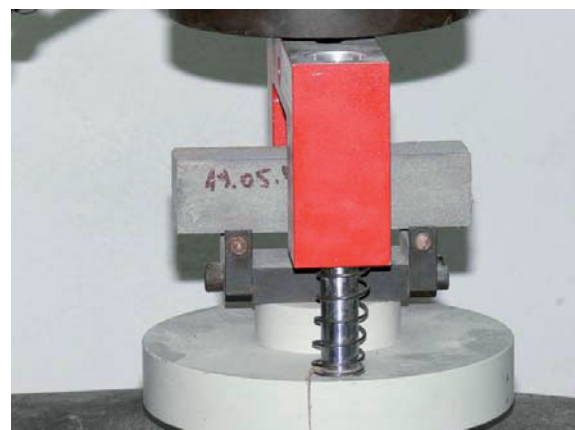
Oznaczenie wytrzymałości na zginanie wykonano na 6 próbkach wg. [193] na przystosowanej do tego pomiaru przystawce (rys. 4.6) do maszyny wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91, a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_m = \frac{1,5 \cdot F_m \cdot l}{b^3} \quad (4.6)$$

przyjmując wg. [193]  $l = 100$  mm oraz  $b = 40$  mm.



Rys. 4.6. Przystawka do badania wytrzymałości na zginanie w prasie mechanicznej wg [193].



Rys. 4.7. Badanie wytrzymałości na zginanie wg [193] – próbka nr 1.

## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.3. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałość na zginanie

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_m$ [N]	wytrzymałość na zginanie $f_m$ [MPa]
belecзки z zaprawy o wymiarach 40 × 40 × 160 [mm]	z1	380	0,89
	z2	360	0,84
	z3	360	0,84
	z4	370	0,87
	z5	380	0,89
	z6	360	0,84

Tab. 4.4. Średnia wytrzymałość na zginanie oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki	[mm]	belecзка 40 × 40 × 160
liczba próbek $n$	[szt.]	6
średnia wytrzymałość na zginanie $f_{m,śr}$	[MPa]	<b>0,86</b>
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	0,02
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,008
współczynnik zmienności $v$	[%]	0,23

## 4.3.3.2. Oznaczenie wytrzymałości na ściskanie

Pomiar wytrzymałości na ściskanie wykonano na 12 próbkach wg. [191] na maszynie wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91, a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_c = \frac{F_c}{A} \quad (4.7)$$

Wg. [191] przyjęto:  $A = 1600 \text{ mm}^2$ .

Tab. 4.5. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałość na ściskanie

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_c$ [N]	wytrzymałość na ściskanie $f_c$ [MPa]
próbki z zaprawy pozostałe z badania na zginanie	z1.1	4460	2,79
	z1.2	4400	2,75
	z2.1	4240	2,65
	z2.2	4300	2,69
	z3.1	4320	2,70
	z3.2	4300	2,69
	z4.1	4360	2,73
	z4.2	4400	2,75
	z5.1	4380	2,74
	z5.2	4340	2,71
	z6.1	4420	2,76
	z6.2	4390	2,74

Tab. 4.6. Średnia wytrzymałość na ściskanie oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki	[mm]	powierzchnia ściskania 40×40
liczba próbek $n$	[szt.]	12
średnia wytrzymałość na ściskanie $f_{c,śr}$	[MPa]	<b>2,72</b>
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	0,03
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,09
współczynnik zmienności $v$	[%]	1,13

## 4. Badania doświadczalne własne

Z przeprowadzonych badań wytrzymałości na ściskanie otrzymano  $f_{c,śr}=2,72$  MPa, czyli wyniki lepsze niż podane przez producenta cegieł  $f_c > 2,5$  MPa. Do dalszych obliczeń przyjęto dane podane przez producenta.

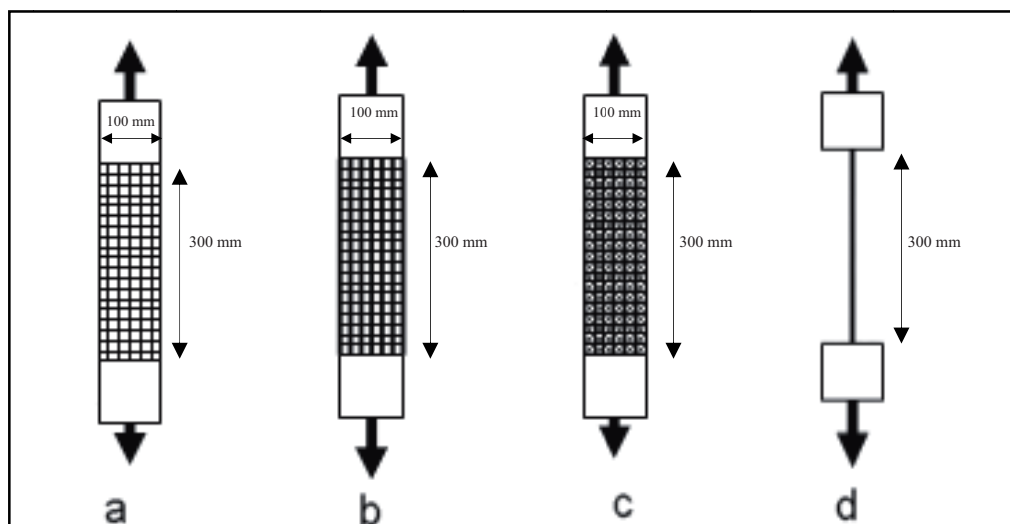
## 4.3.4. Badania siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10

Własności badanej siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10, wg. [127]:

- ciężar siatki Ruredil X Mesh C10 – ok.  $206 \text{ g/m}^2$
- szerokość fabryczna siatki – ok. 101,7 cm
- ilość wiązek w fabrycznej szerokości siatki – 107
- naprężenia zrywające przy rozciąganiu – 4800 MPa
- moduł sprężystości – 240 GPa
- gęstość włókien –  $1,78 \text{ g/cm}^2$
- wydłużenie przy zerwaniu – 1,8 %
- obciążenie zrywające  $> 160 \text{ Kg/cm}$  (w odniesieniu do szerokości jednostkowej ok. 1 cm)

## 4.3.4.1. Oznaczenie wytrzymałości na rozciąganie

Pomiar wytrzymałości na rozciąganie wykonano bazując na [195] i wykorzystując maszynę wytrzymałościową uniwersalną ZDM 5/91. Próbki badanej siatki o szerokości pasma 100 mm (rys. 4.8) wklejono z każdej strony pomiędzy stalowe płytki (rys. 4.9) za pomocą żywicy na bazie epoksydu FK 20, i umieszczono w szczękach maszyny wytrzymałościowej, (rys. 4.10).



Rys. 4.8. Próbki siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10:

- a) pojedyncza siatka długości 500 mm i szerokości 100 mm, składająca się z 11 wiązek,
- b) podwójna siatka długości 500 mm i szerokości 100 mm, każda siatka składająca się z 11 wiązek,
- c) podwójna siatka długości 500 mm i szerokości 100 mm (druga warstwa siatki zorientowana pod kątem  $\pm 45^\circ$  w stosunku do poprzedniej warstwy siatki),
- d) pojedyncza wiązka z siatki długości 500 mm i szerokości 4 mm.

## 4. Badania doświadczalne własne



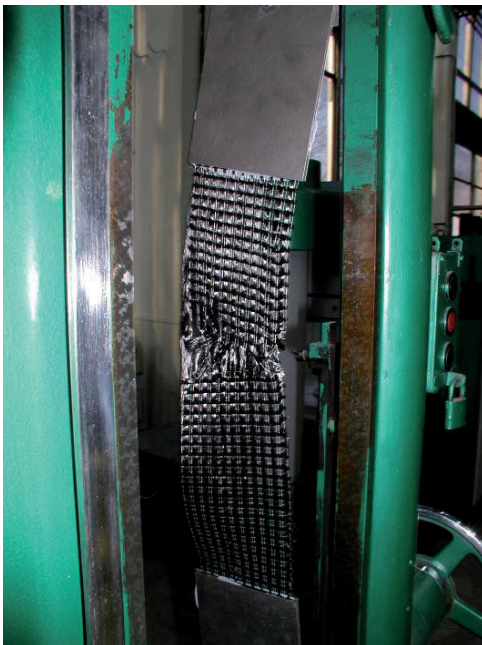
*Rys. 3.9. Mocowanie siatki w płytach stalowych.*



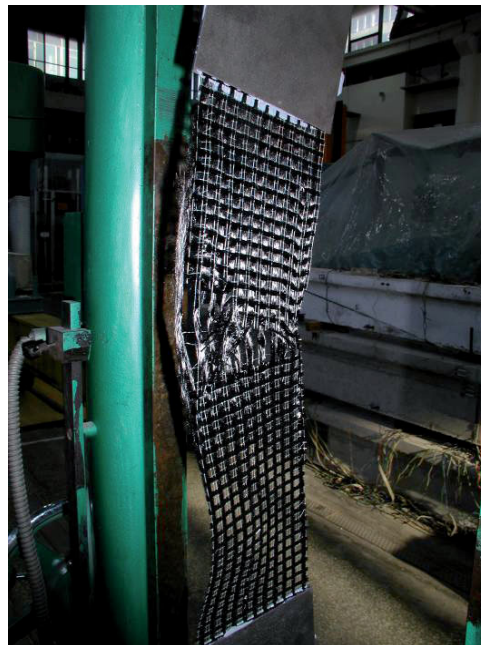
*Rys. 3.10. Próbką siatki w maszynie wytrzymałościowej.*

#### 4.3.4.1.1. Badania pojedynczej siatki o długości 500 mm i szerokości 100 mm

Badania wykonano na 4 próbkach siatki Ruredil X Mesh C10 (rys. 4.11 i 4.12). Ścieżkę równowagi statycznej i wartość siły zrywającej przedstawiono na (rys. 4.13).

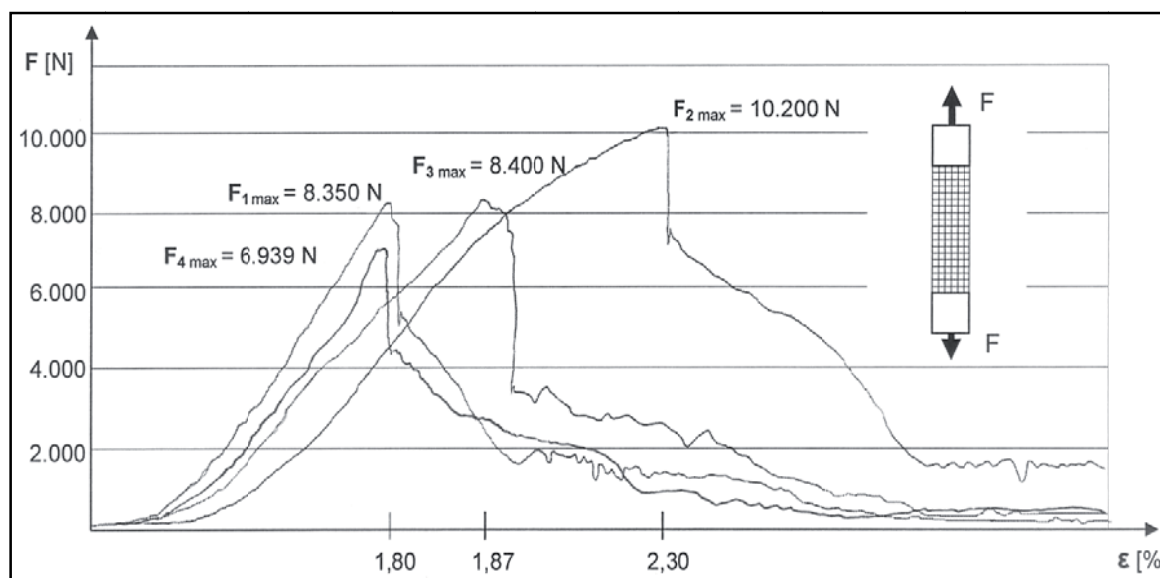


*Rys. 4.11. Zniszczenie próbki nr 1.*



*Rys. 4.12. Zniszczenie próbki nr 2.*

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 3.13. Ścieżka równowagi statycznej wraz z siłą zrywającą (pojedyncza siatka).

Biorąc pod uwagę własności badanej siatki oraz to, że za wytrzymałość siatki odpowiada tylko szerokość efektywna siatki – szerokość wiązek z włókien wchodzących w jej skład, otrzymano wyniki przedstawione w tab. 4.7.

Wytrzymałości na rozciąganie obliczono wg. wzoru:

$$f_t = \frac{F_t}{A} \quad (4.8)$$

Wartość odkształceń przy zerwaniu obliczono wg. wzoru:

$$\varepsilon(\%) = 100 \cdot \frac{\Delta L_0}{L_0} \quad (4.9)$$

Moduł sprężystości obliczono wg. wzoru:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.10)$$

Tab. 4.7. Wyniki badań wytrzymałości na rozciąganie (pojedyncza siatka)

Nr próbki	Siła zrywająca	Szerokość próbki	Długość próbki	Ilość wiązek w próbce	Szerokość wiązki	Szerokość efektywna siatki	Grubość wiązki	Pole przekroju próbki	Wytrzymałość na rozciąganie	Wydłużenie próbki	Odkształcenie próbki	Moduł sprężystości próbki
	$F_t$	$a$	$b$	$i$	$a1$	$d = i \cdot a1$	$g$	$A = d \cdot g$	$f_t = F_t / A$	$b1$	$\varepsilon = (b1 / b) \cdot 100$	$E$
	[N]	[mm]	[mm]	[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm <sup>2</sup> ]	[MPa]	[mm]	[%]	[GPa]
1	8 350	100	300	11	4	44	0,047	2,068	4 038	5,4	1,80	224
2	10 200	100	300	11	4	44	0,047	2,068	4 932	6,9	2,30	214
3	8 400	100	300	11	4	44	0,047	2,068	4 062	5,6	1,87	218
4	6 939	100	300	11	4	44	0,047	2,068	3 355	5,4	1,80	186
średnia	8 472	100	300	11	4	44	0,047	2,068	4 097	5,8	1,94	211

Tab. 4.8. Średnia wytrzymałość na rozciągnięciu oraz statystyczne opracowanie wyników

liczba próbek $n$	[szt.]	4
średnia wytrzymałość na rozciąganie $f_{t, \text{sr}}$	[MPa]	4 097
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	417
błąd średni $s_r$	[MPa]	209
współczynnik zmienności $v$	[%]	10,19

## 4. Badania doświadczalne własne

## 4.3.4.1.2. Badania podwójnej siatki o długości 500 mm i szerokości 100 mm

Badania wykonano na 3 próbkach siatki Ruredil X Mesh C10 (rys. 4.14 – 4.16). Ścieżkę równowagi statycznej i wartość siły zrywającej przedstawiono na (rys. 4.17) a otrzymane wyniki w tab. 4.9.



Rys.4.14. Zniszczenie próbki nr 5.



Rys.4.15. Zniszczenie próbki nr 7.

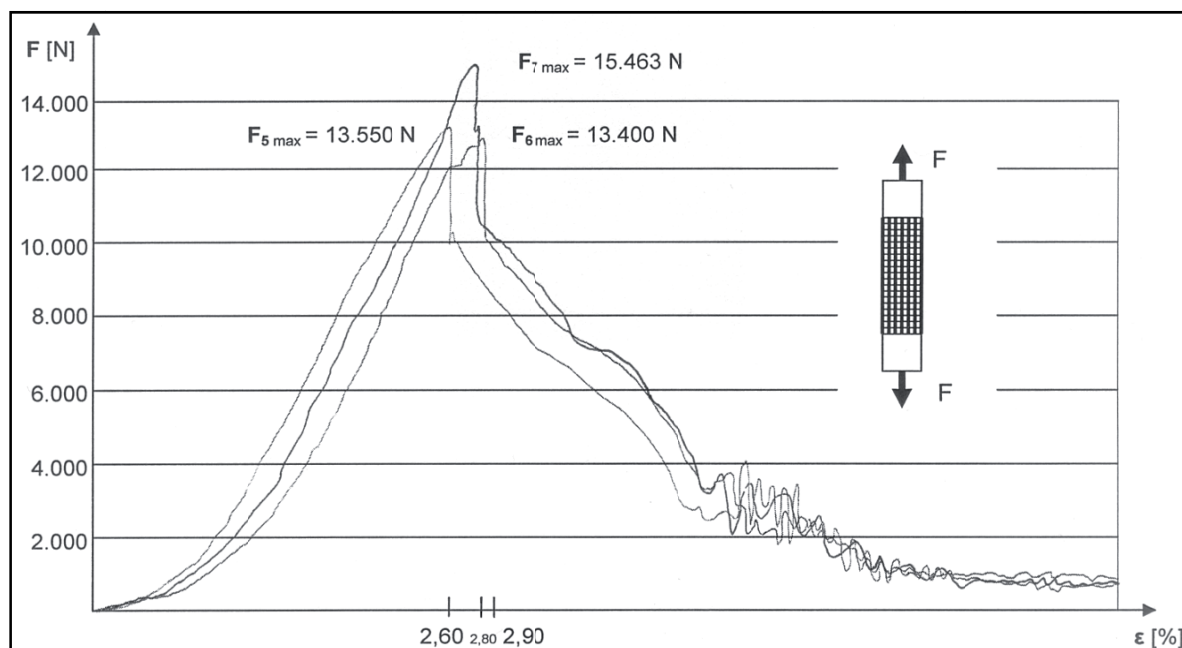


Rys.4.16. Zniszczenie próbki nr 6.

Tab. 4.9. Wyniki badań wytrzymałości na rozciąganie (podwójna siatka)

Nr próbki	Siła zrywająca	Szerokość próbki	Długość próbki	Ilość wiązek w próbce	Szerokość wiązki	Szerokość efektywna siatki	Grubość wiązki	Pole przekroju próbki	Wytrzymałość na rozciąganie	Wydłużenie próbki	Odkształcenie próbki
	$F_t$	$a$	$b$	$i$	$a1$	$d = i \cdot a1$	$g$	$A = d \cdot g$	$f_t = F_t / A$	$b1$	$\varepsilon = (b1 / b) \cdot 100$
	[N]	[mm]	[mm]	[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm <sup>2</sup> ]	[MPa]	[mm]	[%]
5	13 550	4	300	22	4	88	0,047	4,136	3 276	7,8	2,60
6	13 400	4	300	22	4	88	0,047	4,136	3 240	8,4	2,80
7	15 463	4	300	22	4	88	0,047	4,136	3 739	8,7	2,90
średnia	14 138	100	300	22	4	88	0,047	4,136	3 418	8,3	2,77

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.17. Ścieżka równowagi statycznej wraz z siłą zrywającą (podwójna siatka).

Tab. 4.10. Średnia wytrzymałość na rozciąganie oraz statystyczne opracowanie wyników

liczba próbek $n$	[szt.]	3
średnia wytrzymałość na rozciąganie $f_{t, \bar{s}r}$	[MPa]	3 418
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	213
błąd średni $s_r$	[MPa]	123
współczynnik zmienności $v$	[%]	6,24

4.3.4.1.3. Badania podwójnej siatki o długości 500 mm i szerokości 100 mm (druga warstwa siatki zorientowana pod kątem  $\pm 45^\circ$  w stosunku do poprzedniej)

Badania wykonano na 2 próbkach siatki Ruredil X Mesh C10 (rys. 4.18 – 4.20). Ścieżkę równowagi statycznej i wartość siły zrywającej przedstawiono na (rys. 4.21) a otrzymane wyniki w tab. 4.11.



Rys. 3.18. Zniszczenie próbki nr 8.



Rys. 3.19. Zniszczenie próbki nr 8.

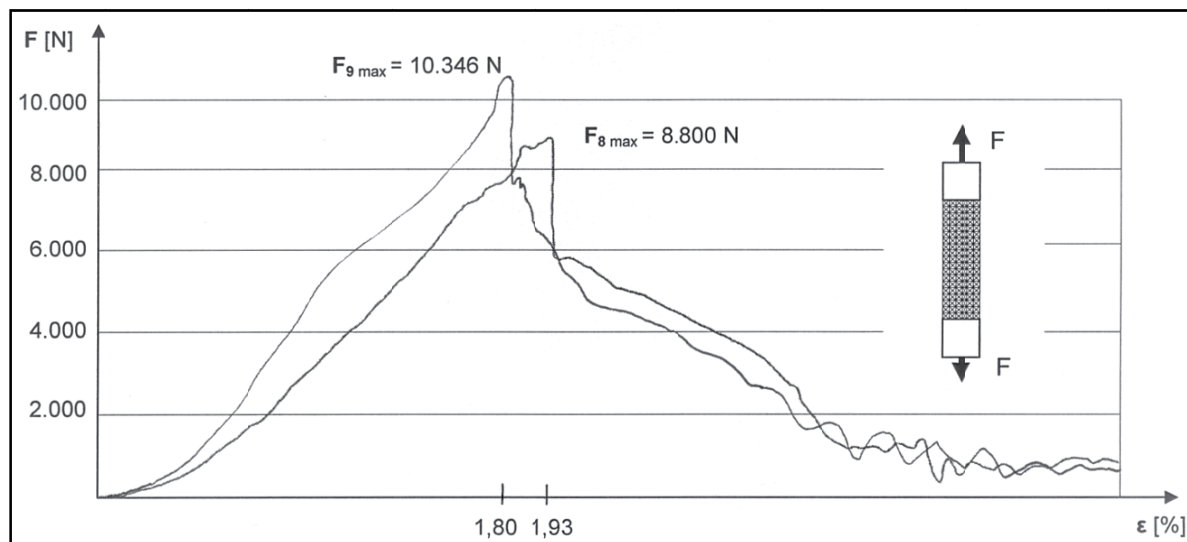
## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 3.20. Zniszczenie próbki nr 9.

Tab. 4.11. Wyniki badań wytrzymałości (podwójna siatka – druga warstwa zorientowana pod kątem  $\pm 45^\circ$ )

Nr próbki	Siła zrywająca	Szerokość próbki	Długość próbki	Wydłużenie próbki	Odształcenie próbki
	$F_t$	a	b	b1	$\epsilon = (b1 / b) \cdot 100$
	[N]	[mm]	[mm]	[mm]	[%]
8	8 800	100	300	5,8	1,93
9	10 346	100	300	5,4	1,80
średnia	9 573	100	300	5,6	1,87

Rys. 3.21. Ścieżka równowagi statycznej wraz z siłą zrywającą (podwójna siatka - druga warstwa siatki zorientowana została pod kątem  $\pm 45^\circ$ ).

## 4.3.4.1.4. Badania pojedynczej wiązki z siatki o długości 500 mm i szerokości 4 mm

Badania wykonano na 1 próbce siatki Ruredil X Mesh C10 (rys. 4.22 – 4.24). Ścieżkę równowagi statycznej i wartość siły zrywającej przedstawiono na (rys. 4.25). Biorąc pod uwagę własności badanej siatki, otrzymano wyniki przedstawione w tab. 4.12.



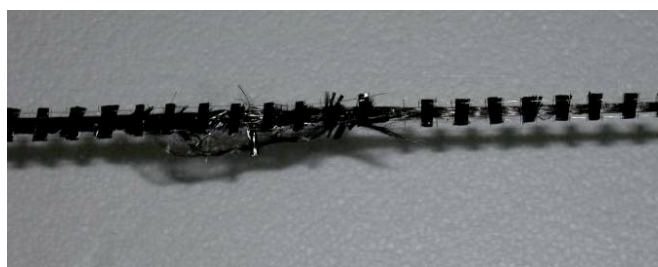
## 4. Badania doświadczalne własne



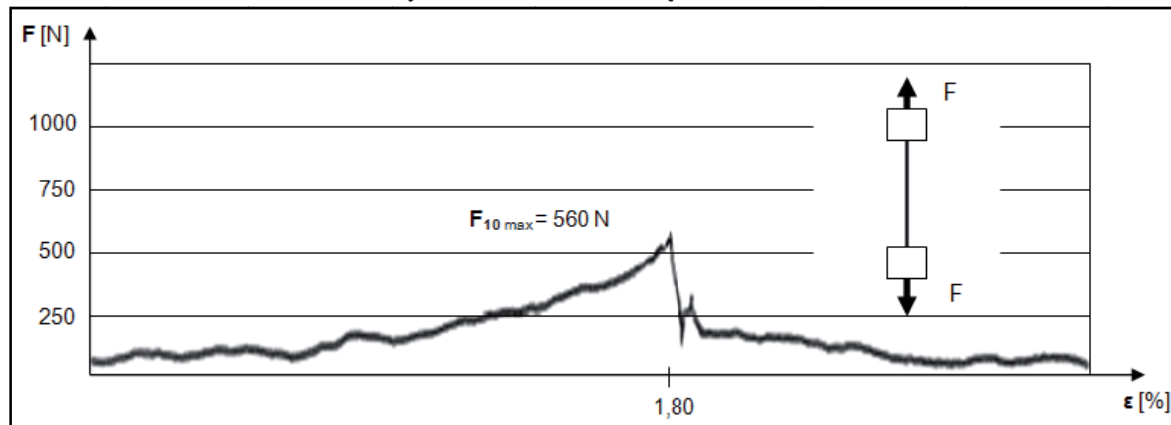
Rys. 3.22. Próbkę wiązki nr 10 przed zniszczeniem.



Rys. 3.23. Zniszczenie wiązki nr 10.



Rys. 4.24. Zniszczona wiązka nr 10.



Rys. 4.25. Ścieżka równowagi statycznej wraz z siłą zrywającą (pojedyncza wiązka).

Tab. 4.12. Wyniki badań wytrzymałości (pojedyncza wiązka)

Nr próbki	Siła zrywająca	Szerokość próbki	Długość próbki	Ilość wiązek w próbce	Szerokość wiązki	Szerokość efektywna siatki	Grubość wiązki	Pole przekroju próbki	Wytrzymałość na rozciąganie	Wydłużenie próbki	Odształcenie próbki	Moduł sprężystości próbki
	$F_t$	$a$	$b$	$i$	$a1$	$d = i \cdot a1$	$g$	$A = d \cdot g$	$f_t = F_t / A$	$b1$	$\epsilon = (b1 / b) \cdot 100$	$E$
	[N]	[mm]	[mm]	[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm <sup>2</sup> ]	[MPa]	[mm]	[%]	[GPa]
10	<b>560</b>	100	300	1	4	4	0,047	0,188	<b>2 979</b>	5,4	1,80	165

Przeprowadzone badanie siatek miało jedynie charakter weryfikacji danych producenta. Należy zauważyć, że otrzymane wyniki częściowo odbiegają od danych przedstawionych przez producenta siatki (brak danych co do sposobu i zakresu badań wykonanych przez producenta).

## 4. Badania doświadczalne własne

Zdecydowanie najlepszą wytrzymałość na rozciąganie wykazały pojedyncze siatki z próbek 1, 2 i 3. Jak widać, podwojenie siatki przyniosło wzrost siły niszczącej o ok. 50 % w stosunku do siły niszczącej pojedynczą siatkę.

Próbki nr 8 i 9 (podwójna siatka z drugą warstwą siatki zorientowaną pod kątem  $\pm 45^\circ$  w stosunku do poprzedniej warstwy siatki) nie polepszyły wyników badań. Spowodowane jest to zbyt małą szerokością badanej siatki – włókna zorientowane pod kątem  $\pm 45^\circ$  prawie w ogóle nie biorą udziału w rozciąganiu (nie są zamocowane z obu stron).

Wartość wytrzymałości na rozciąganie dla próbki nr 10 jest znacznie niższa od pozostałych.

Do dalszych obliczeń przyjęto dane podane przez producenta.

## 4.3.5. Badania zaprawy mineralnej Ruredil X Mesh M25

Do badań w próbie zginania, ściskania i ścinania wykorzystano maszynę wytrzymałościową – prasę hydrauliczną ZD-40. Wilgotność mierzono wilgotnościomierzem MTA 10. Wytrzymałość na odrywanie mierzono przyrządem DYNA Z15.

Badania wykonano na 2 rodzajach cegieł (zabytkowych – gotyckich oraz współczesnych) o różnej wilgotności. Wyniki pomiarów wilgotności zestawiono w tab. 4.13.

Tab. 4.13. Wyniki badań wilgotności cegieł

materiał	nr próbki	wilgotność zmierzona [%]	wilgotność rzeczywista [%]	wilgotność średnia [%]
cegła współczesna sucha	w1	6,5	4,6	4,3
	w2	6,0	4,2	
	w3	6,2	4,3	
	w4	5,8	4,1	
cegła współczesna mokra	w5	18,0	12,6	12,7
	w6	17,9	12,5	
	w7	18,5	12,9	
	w8	18,1	12,7	
cegła zabytkowa sucha	w9	7,5	5,3	5,1
	w10	7,0	4,9	
	w11	7,0	4,9	
	w12	7,5	5,3	
cegła zabytkowa mokra	w13	17,5	12,3	12,1
	w14	17,5	12,3	
	w15	17,0	11,9	
	w16	17,0	11,9	

## 4.3.5.1. Oznaczenie wytrzymałość na zginanie

Pomiar wytrzymałości na zginanie wykonano wg. [193] na przystosowanej do tego pomiaru przystawce (rys. 4.6) do maszyny wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91, a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_m = \frac{1,5 \cdot F_m \cdot l}{b^3} \quad (4.11)$$

przyjmując wg. [193]  $l = 100$  mm oraz  $b = 40$  mm.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.26. Badanie wytrzymałości na zginanie wg. [193] – próbka nr 3.

Tab. 4.14. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałości na zginanie

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_m$ [N]	wytrzymałość na zginanie $f_m$ [MPa]
belecзки z zaprawy o wymiarach $40 \times 40 \times 160$ [mm]	z1	2000	4,7
	z2	2200	5,2
	z3	2000	4,7
	z4	2100	4,9
	z5	2200	5,2
	z6	2100	4,9

Tab. 4.15. Średnia wytrzymałość na zginanie oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki	[mm]	belecзка $40 \times 40 \times 160$
liczba próbek $n$	[szt.]	6
średnia wytrzymałość na zginanie $f_{m, \text{sr}}$	[MPa]	<b>4,93</b>
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	0,177
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,072
współczynnik zmienności $v$	[%]	3,6

#### 4.3.5.2. Oznaczenie wytrzymałości na ściskanie

Pomiar wytrzymałości na ściskanie wykonano wg. [191] na maszynie wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91, a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_c = \frac{F_c}{A} \quad (4.12)$$

Wg. [191] przyjęto:  $A = 1600 \text{ mm}^2$ .

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.27. Badanie wytrzymałości na ściskanie – próbka nr c2.1 – przed zniszczeniem.



Rys. 4.28. Badanie wytrzymałości na ściskanie – próbka nr c2.1 – w trakcie niszczenia.

Tab. 4.16. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałości na ściskanie

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_c$ [N]	wytrzymałość na ściskanie $f_c$ [MPa]
próbki z zaprawy Ruredil	c1.1	43000	28,9
	c1.2	37000	23,1
	c2.1	41000	25,6
	c2.2	37000	23,1
	c3.1	35000	21,9
	c3.2	35000	21,9
	c4.1	32000	20,0
	c4.2	31000	19,4
	c5.1	35000	21,9
	c5.2	35000	22,5
	c6.1	31000	19,4
	c6.2	35000	21,9

Tab. 4.17. Średnia wytrzymałość na ściskanie oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki	[mm]	powierzchnia ściskania 40x40
liczba próbek $n$	[szt.]	12
średnia wytrzymałość na ściskanie $f_{c, \text{sr}}$	[MPa]	22,5
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	1,81
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,52
współczynnik zmienności $v$	[%]	8,06

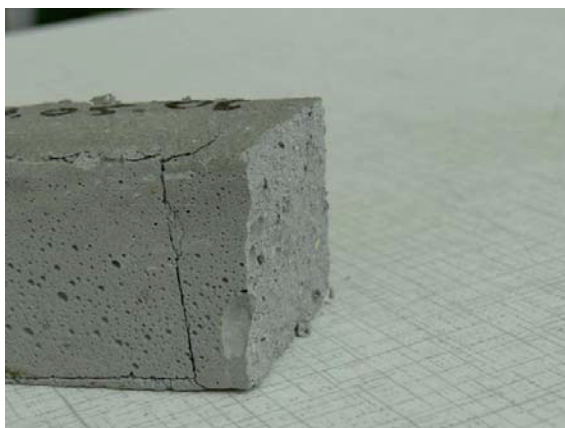


Rys. 4.29. Próbkę nr c1.1 – po zniszczeniu.



Rys. 4.30. Próbkę nr c3.1 – po zniszczeniu.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.31. Próbka nr c1.2 – po zniszczeniu.

## 4.3.5.3. Oznaczenie wytrzymałości na odrywanie zaprawy od cegły

Badanie wykonano wg. [192] przyrządem DYNA Z15, a wytrzymałość na odrywanie wyznaczono ze wzoru:

$$f_h = \frac{4 \cdot F_h}{\pi \cdot D^2} \quad (4.13)$$

Wg. [192] przyjęto:  $D = 50$  mm.

Tab. 4.18. Wyniki badań wytrzymałości na odrywanie (porównanie różnych rodzajów cegieł i zapraw)

material	grubość warstwy zaprawy [mm]	nr próbki	obciążenie przy zniszczeniu $F_h$ [N]	wytrzymałość na odrywanie – zmierzona $f_h$ [MPa]	sposób zniszczenia wg normy	wytrzymałość na odrywanie – średnia $f_{h, \bar{s}r}$ [MPa]
cegła współczesna sucha	5	o5	4500	2,29	A/B	2,328
	5	o6	4600	2,34	A/B	
	5	o7	4500	2,29	A/B	
	5	o8	4700	2,39	A/B	
cegła współczesna sucha	20	o13	4400	2,24	A/B	2,265
	20	o14	4500	2,29	A/B	
	20	o15	4400	2,24	A/B	
	20	o16	4500	2,29	A/B	
cegła zabytkowa sucha	5	o17	2100	1,08	A	1,10
	5	o18	2200	1,12	A	
	5	o19	2200	1,12	A	
	5	o20	2100	1,08	A	
cegła zabytkowa mokra	5	o21	1200	0,60	A	0,60
	5	o22	1200	0,60	A	
	5	o23	1200	0,60	A	
	5	o24	1200	0,60	A	
cegła zabytkowa sucha /zaprawa cem-wap/	5	o25	850	0,43	B	0,44
	5	o26	900	0,46	B	
	5	o27	890	0,45	B	
	5	o28	830	0,42	B	
cegła zabytkowa mokra /zaprawa cem-wap/	5	o29	650	0,33	A	0,33
	5	o30	600	0,30	A – 70% B – 30%	
	5	o31	720	0,36	A	
	5	o32	650	0,33	A	

## 4. Badania doświadczalne własne

Postać zniszczenia wg. [192] :

- A – zniszczenie kohezyjne w warstwie podłoża ceglanoego,
- A/B – zniszczenie adhezyjne pomiędzy podłożem a warstwą zaprawy,
- B – zniszczenie kohezyjne w warstwie zaprawy.

Wg. [192] jeśli występuje kombinacja powyższych typów zniszczenia, należy przez wizualną ocenę zniszczonej powierzchni określić procentowy udział poszczególnych typów – jak w tab. 4.18.

Tab. 4.19. Statystyczne opracowanie wyników badań wytrzymałości na odrywanie

rodzaj badanej próbki	średnia arytmetyczna wytrzymałość na rozciąganie	odchylenie średnie	błąd średni średniej arytmetycznej	współczynnik zmienności
	$f_{h, \text{sr}}$	$s$	$s_r$	$U$
cegła współczesna sucha /zaprawa Ruredil/	<b>2,328</b>	0,038	0,01875	1,611
cegła współczesna sucha /zaprawa Ruredil/ gr. 20 mm	<b>2,265</b>	0,025	0,01250	1,104
cegła zabytkowa sucha /zaprawa cem-wap/	<b>0,440</b>	0,015	0,00750	3,409
cegła zabytkowa mokra /zaprawa cem-wap/	<b>0,330</b>	0,015	0,00750	4,545



Fot. 4.32. Przygotowywanie próby na odrywanie wg. [192].



Rys. 4.33. Badanie wytrzymałości na odrywanie – próbka o1.



Rys. 4.34. Badanie wytrzymałości na odrywanie – próbka o2.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.35. Próbką o6 – po zniszczeniu.



Rys. 4.36. Próbką o15 i o16 – po zniszczeniu.

## 4.3.5.4. Oznaczenie wytrzymałości elementu murowego na ścinanie

Badanie wykonano wg. [190] na maszynie wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91 (rys. 3.37), a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_{voi} = \frac{F_v}{2A_i} \quad (4.14)$$

Przyjęto:  $A_i = 244,8 \text{ cm}^2 = 24.480 \text{ mm}^2$  /dla próbki z cegły współczesnej/  
 $A_i = 243,75 \text{ cm}^2 = 24.375 \text{ mm}^2$  /dla próbki z cegły zabytkowej/

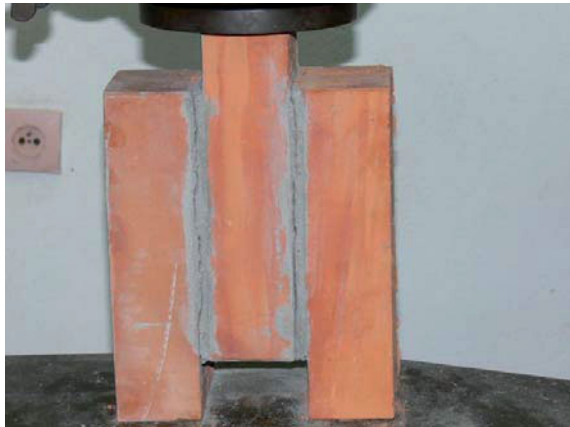
Tab. 4.20. Wyniki badań wytrzymałości na ścinanie

materiał	nr próbki	obciążenie przy zniszczeniu $F_v$ [N]	wytrzymałość na ścinanie $f_{voi}$ [MPa]	sposób zniszczenia wg normy	wytrzymałość na ścinanie – średnia $f_{voi, \text{sr}}$ [MPa]
element murowy – cegły współczesne	s1	22400	0,458	ściananie wewnątrz zaprawy (rys. 3.40) ściananie na styku element murowy – zaprawa (rys. 3.41)	<b>0,466</b>
	s2	23200	0,474	ściananie wewnątrz zaprawy	
element murowy – cegły zabytkowe	s3	30000	0,615	ściananie na styku element murowy – zaprawa (rys. 3.43)	<b>0,625</b>
	s4	31000	0,635	ściananie w elemencie murowym	



Rys. 4.37. Próbką s1 w maszynie wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.38. Próbkę s1 w trakcie badania.



Rys. 4.39. Próbkę s1 – widoczna powierzchnia ścinania.



Rys. 4.40. Próbkę s1 – sposób zniszczenia.



Rys. 4.41. Próbkę s1 – sposób zniszczenia.



Rys. 4.42. Próbkę s3 w maszynie wytrzymałościowej.



Rys. 4.43. Próbkę s3 – sposób zniszczenia.

Przeprowadzone badania miały na celu weryfikację wartości podanych przez producenta. Do dalszych badań przyjęto te właśnie dane.

#### 4.3.6. Badania taśm CFRP

Badanie wykonano opierając się na [195], [12]. Z taśm S&P Lamelle CFK 150/2000 (o przekroju 100/1.4) przygotowano próbki o wymiarach 250×15 mm. Wartość naprężenia przy zrywaniu obliczono wg wzoru:



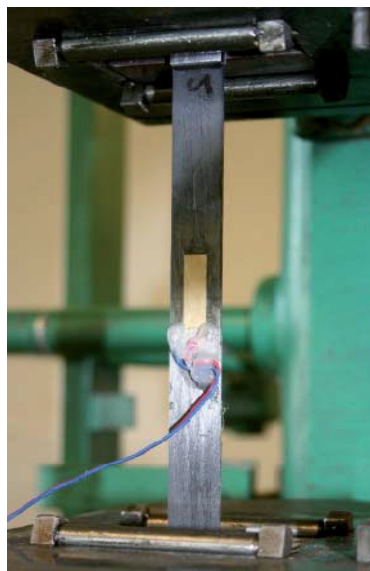
## 4. Badania doświadczalne własne

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.15)$$

Na końcach próbek przyklejono za pomocą dwuskładnikowego kleju na bazie żywicy epoksydowej Resin 55 po dwie podkładki aluminiowe (50×15×1,4 mm), umożliwiające zamocowanie ich w szczękach maszyny wytrzymałościowej (prasa mechaniczna uniwersalna ZDM 10/91). Tensometr elektrooporowy RL 120/20, do pomiaru odkształceń podłużnych, został umieszczony w połowie długości każdej z próbek (rys. 4.44). Moduł sprężystości taśm wyznaczono w przedziale od 0,1 do 0,4 wartości naprężenia niszczonego.

Tab. 4.21. Wyniki pomiarów siły niszczonej oraz wytrzymałości na rozciąganie

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_t$ [N]	wytrzymałość na rozciąganie $f_t$ [MPa]	moduł sprężystości $E_t$ [GPa]
próbki o wymiarach 50×15×1,4 [mm]	t1	58800	2800	164,15
	t2	57876	2756	163,90
	t3	62244	2964	164,05
	t4	60060	2860	164,25
	t5	59325	2825	164,35



Rys. 4.44. Badanie próbki taśmy CFRP w maszynie wytrzymałościowej ZDM 10/91 (widoczny tensometr elektrooporowy).

Tab. 4.22. Wyniki badań modułu sprężystości taśmy CFK 150/2000 przy rozciąganiu

kształt i wymiary próbki	[mm]	powierzchnia rozciągania 15x1,4
liczba próbek $n$	[szt.]	5
średni moduł sprężystości przy rozciąganiu taśmy $E_{t, \text{sr}}$	[GPa]	<b>164,15</b>
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	0,132
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,059
współczynnik zmienności $v$	[%]	0,08

Badania miały charakter weryfikacyjny. Otrzymana wartość modułu w badaniu - 164,15 GPa - jest zbliżona do wartości deklarowanej przez producenta - 165 GPa. W dalszych rozważaniach przyjęto tą drugą wartość. Modułu sprężystości taśmy przy ściskaniu nie badano.

## 4. Badania doświadczalne własne

## 4.3.7. Badania kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5

## 4.3.7.1. Oznaczanie wytrzymałości kompozycji klejowej na zginanie

Badanie wytrzymałości na zginanie kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 przeprowadzono wg. [193] na przystosowanej do tego pomiaru przystawce (rys. 4.45) do maszyny wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91, a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_m = \frac{1,5 \cdot F_m \cdot l}{b^3} \quad (4.16)$$

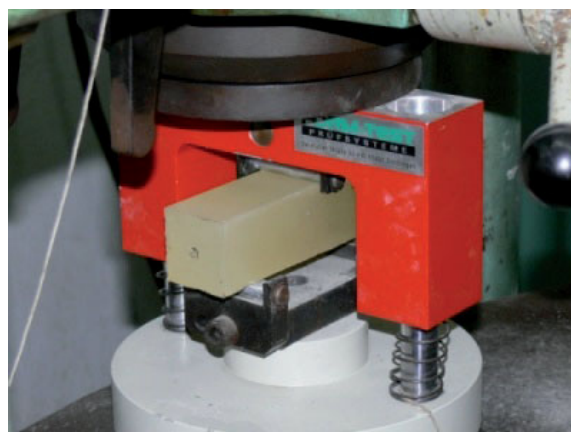
przyjmując wg. [193]  $l = 100$  mm oraz  $b = 40$  mm.

Tab. 4.23. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałości na zginanie wg. [193]

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_m$ [N]	wytrzymałość na zginanie $f_m$ [MPa]
beleczki z kompozycji epoksydowej wg [1] o wymiarach $40 \times 40 \times 160$ [mm]	k1	17600	41,254
	k2	17600	41,254
	k3	17800	41,723
	k4	17700	41,489
	k5	17800	41,723

Tab. 4.24. Wyniki badań wytrzymałości kompozycji klejowej na zginanie wg. [193]

kształt i wymiary próbki	[mm]	beleczka $40 \times 40 \times 160$
liczba próbek $n$	[szt.]	5
średnia wytrzymałość na zginanie $f_{m, \text{sr}}$	[MPa]	<b>41,49</b>
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	0,188
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,09
współczynnik zmienności $v$	[%]	0,45



4.45. Badanie wytrzymałości kompozycji klejowej na zginanie wg. [193].

## 4.3.7.2. Oznaczanie wytrzymałości kompozycji klejowej na ściskanie

Pomiar wytrzymałości na ściskanie kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 wykonano wg. [191] na przystosowanej do tego pomiaru przystawce

## 4. Badania doświadczalne własne

(rys. 4.45) do maszyny wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91, a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_c = \frac{F_c}{A} \quad (4.17)$$

Wg. [191] przyjęto:  $A = 1600 \text{ mm}^2$

Badanie wytrzymałości na ściskanie wykonano na próbkach złamanych w czasie badania wytrzymałości na zginanie.



4.46. Badanie wytrzymałości kompozycji klejowej na ściskanie wg. [191].

Tab. 4.25. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałości na ściskanie

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_c$ [N]	wytrzymałość na ściskanie $f_c$ [MPa]
próbki z kompozycji epoksydowej wg. [186] pozostałe z badania na ściskanie	k1.1	167680	104,8
	k1.2	167680	104,8
	k2.1	168960	105,6
	k2.2	168800	105,5
	k3.1	173440	108,4
	k3.2	173600	108,5
	k4.1	174080	108,8
	k4.2	174240	108,9
	k5.1	171040	106,9
	k5.2	170880	106,8
	k6.1	171200	107,0
	k6.2	170880	106,8

Tab. 4.26. Średnia wytrzymałość na ściskanie oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki	[mm]	powierzchnia ściskania 40×40
liczba próbek $n$	[szt.]	12
średnia wytrzymałość na ściskanie $f_{c, \text{śr}}$	[MPa]	<b>106,9</b>
odchylenie standardowe $s$	[MPa]	1,183
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,592
współczynnik zmienności $v$	[%]	1,11

## 4. Badania doświadczalne własne

## 4.3.7.3. Oznaczanie wytrzymałości kompozycji klejowej na ścinanie

Badanie wykonano wg. [190] na maszynie wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91 (rys. 3.37), a wytrzymałość wyznaczono ze wzoru:

$$f_v = \frac{F_v}{b \cdot h} \quad (4.18)$$

Tab. 4.27. Wyniki badań wytrzymałości na ścinanie

nr próbki	wymiary powierzchni ścinanej b x h [mm]	powierzchnia ścinania <b>A</b> [mm <sup>2</sup> ]	siła ścinająca <b>F<sub>t</sub></b> [N]	wytrzymałość na ścinanie wiązania <b>f<sub>v</sub></b> [MPa]
1	100,5 x 91,3	9175,65	27500	3,00
2	100,6 x 92,4	9295,44	31400	3,38
3	100,5 x 91,4	9185,70	26800	2,92
4	100,5 x 91,3	9175,65	27500	3,00
5	100,5 x 91,4	9185,70	26800	2,92
6	100,6 x 92,4	9295,44	31400	3,38

Tab. 4.28. Średnia wytrzymałość na ścinanie oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki	[mm]	powierzchnia ściskania 40x40
liczba próbek <b>n</b>	[szt.]	6
średnia wytrzymałość na ściskanie <b>f<sub>v, śr</sub></b>	[MPa]	3,1
odchylenie standardowe <b>s</b>	[MPa]	0,187
błąd średni <b>s<sub>r</sub></b>	[MPa]	0,093
współczynnik zmienności <b>v</b>	[%]	6,02

## 4.3.7.4. Oznaczenie wytrzymałości na odrywanie kompozycji klejowej od cegły

Badanie wykonano wg. [192] przyrządem DYNA Z15, a wytrzymałość na odrywanie wyznaczono ze wzoru:

$$f_h = \frac{4 \cdot F_h}{\pi \cdot D^2} \quad (4.19)$$

Wg. [192] przyjęto:  $D = 50$  mm.

Tab. 4.29. Wyniki badań wytrzymałości na odrywanie kompozycji klejowej od cegły

materiał	nr próbki	obciążenie przy zniszczeniu <b>F<sub>h</sub></b> [kN]	wytrzymałość na odrywanie – zmierzona <b>f<sub>h</sub></b> [MPa]	sposób zniszczenia wg normy
cegła współczesna	o1	7100	3,60	A
	o2	6600	3,35	A
	o3	7400	3,80	A

Typy zniszczenia wg [192] :

A – zniszczenie kohezyjne w warstwie podłoża ceglanoego.

## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.30. Średnia wytrzymałość na odrywanie kompozycji od cegły oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki	[mm]	powierzchnia odrywania 1963,5 mm <sup>2</sup>
liczba próbek <i>n</i>	[szt.]	3
średnia wytrzymałość na odrywanie $f_{h, \acute{s}r}$	[MPa]	<b>3,60</b>
odchylenie standardowe <i>s</i>	[MPa]	0,156
błąd średni $s_r$	[MPa]	0,09
współczynnik zmienności <i>v</i>	[%]	4,34

## 4.3.8. Badania stalowych prętów żebrowanych Ø 8 i prętów gwintowanych Ø8

Oznaczenie wytrzymałości na rozciąganie wykonano na 3 próbkach (z każdego rodzaju prętów) wykorzystując maszynę wytrzymałościową uniwersalną ZDM 5/91.

Jako obliczeniowe pola przekroju badanych prętów przyjęto:

- dla prętów ze stali żebrowanej Ø8 wg. wzoru

$$A_{SO} = \frac{1000 \cdot m}{\rho \cdot L_t} \quad (4.20)$$

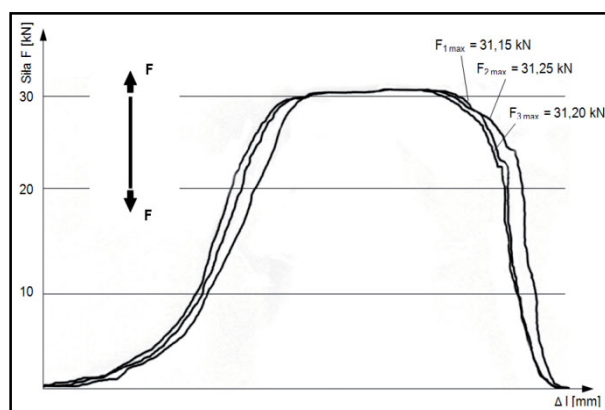
- dla prętów ze stali gwintowanej Ø8 wg. informacji zawartych w [185].

Tab. 4.31. Obliczeniowe pola przekroju badanych prętów

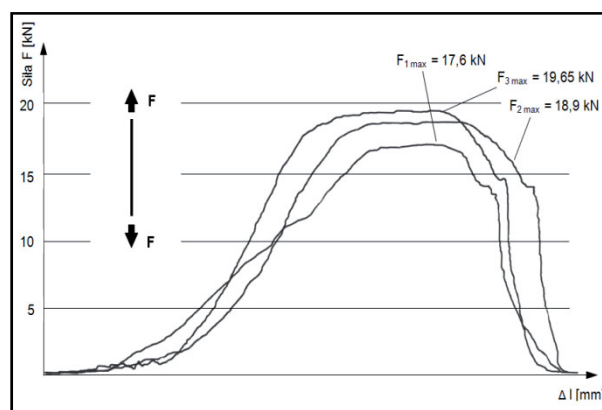
rodzaj pręta	średnica znamionowa próbki [mm]	znamionowe pole przekroju próbki [mm <sup>2</sup> ]	obliczeniowe pole przekroju próbki $A_{SO}$ [mm <sup>2</sup> ]
pręt żebrowany	Ø8	50,27	<b>52,66</b>
pręt gwintowany	Ø8	50,27	<b>31,37</b>

W przypadku obu rodzajów prętów stalowych wyznaczono wytrzymałość na rozciąganie korzystając ze wzoru:

$$f_t = \frac{F_t}{A_{SO}} \quad (4.21)$$



Rys. 4.47. Ścieżki równowagi statycznej wraz z siłą zrywającą dla próbek z pręta żebrowanego.



Rys. 4.48. Ścieżki równowagi statycznej wraz z siłą zrywającą dla próbek z pręta żebrowanego.

## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.32. Wyniki pomiarów siły niszczącej oraz wytrzymałości na rozciąganie

materiał	nr próbki	siła niszcząca $F_t$ [N]	wytrzymałość na rozciąganie $f_t$ [MPa]
stal żebrowana $\varnothing 8$	p1	31150	<b>591,5</b>
	p2	31250	<b>593,4</b>
	p3	31200	<b>592,5</b>
stal gwintowana $\varnothing 8$	p4	17600	<b>561,0</b>
	p5	18900	<b>602,5</b>
	P6	19650	<b>626,4</b>

Tab. 4.33. Średnia wytrzymałość na rozciąganie stali prętów oraz statystyczne opracowanie wyników

kształt i wymiary próbki [mm]	pręt żebrowany $\varnothing 8$ powierzchnia przekroju 52,66 mm <sup>2</sup>	pręt gwintowany $\varnothing 8$ powierzchnia przekroju 31,37 mm <sup>2</sup>
liczba próbek $n$ [szt.]	3	3
średnia wytrzymałość na rozciąganie $f_{t, \text{sr}}$ [MPa]	<b>592,5</b>	<b>596,6</b>
odchylenie standardowe $s$ [MPa]	0,64	23,76
błąd średni $s_r$ [MPa]	0,37	13,72
współczynnik zmienności $v$ [%]	0,109	3,98

Bazując na powyższych wynikach badań, w dalszych rozważaniach przyjęto dla obu rodzajów zastosowanych elementów stalowych  $E=210$  GPa.



Rys. 4.49. Próbkę pręta żebrowanego w maszynie wytrzymałościowej podczas próby rozciągania.



Rys. 4.50. Próbkę pręta gwintowanego w maszynie wytrzymałościowej podczas próby rozciągania.



Rys. 4.51. Próbki prętów żebrowanych po zniszczeniu.



Rys. 4.52. Próbki prętów gwintowanych po zniszczeniu.

## 4. Badania doświadczalne własne

**4.3.9. Badanie wytrzymałości połączenia klejowego "pręt stalowy – mur"**

Badania wytrzymałości połączenia "pręt stalowy – klej – mur" wykonano na 3 próbkach. Próbkę wykonano stosując pręt gwintowany  $\varnothing 8$  wklejony za pomocą kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 w elementu murowym (jak na rys. 4.53) na głębokości 10 cm.

Pomiaru wielkości siły wrywającej dokonano umieszczając próbki w maszynie wytrzymałościowej uniwersalnej ZDM 5/91 w specjalnie do tego celu sporządzonej przystawce. Wyniki pomiaru siły wrywającej oraz opis postaci zniszczenia połączenia przedstawiono w tab. 4.34.

Tab. 4.32. Wyniki pomiarów siły niszczącej układ

materiał	nr próbki	obciążenie przy zniszczeniu $F$ [N]	sposób zniszczenia
połączenie "pręt stalowy – klej – mur"	u1	120 000	zniszczenie w cegle
	u2	156 000	zniszczenie w cegle
	u3	132 000	zniszczenie w cegle



Rys. 4.53. Próbkę nr 2 podczas próby wrywania.



Rys. 4.54. Zniszczona próbka nr 3.



Rys. 4.55. Postać zniszczenia połączenia „pręt stalowy – klej – mur”.

#### 4. Badania doświadczalne własne

Wszystkie badane próbki uległy zniszczeniu poprzez zniszczenie kohezyjne materiału muru. Uwidoczniała się postać zniszczenia związana z koncentracją naprężeń stycznych w przekroju w początku połączenia (postać zniszczenia z wyrwanym z ośrodka kotwiącego charakterystycznym stożkiem – rys. 4.55). Badanie potwierdza przydatność zakotwienia klejowego prętów stalowych przy stosowaniu ich we wzmacnianiu konstrukcji ceglanych.

#### 4.4. Badania laboratoryjne na modelach w skali technicznej

Badania na modelach w skali technicznej przeprowadzono w laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej w czerwcu, lipcu i sierpniu 2007 r.

##### 4.4.1. Opis modeli badawczych

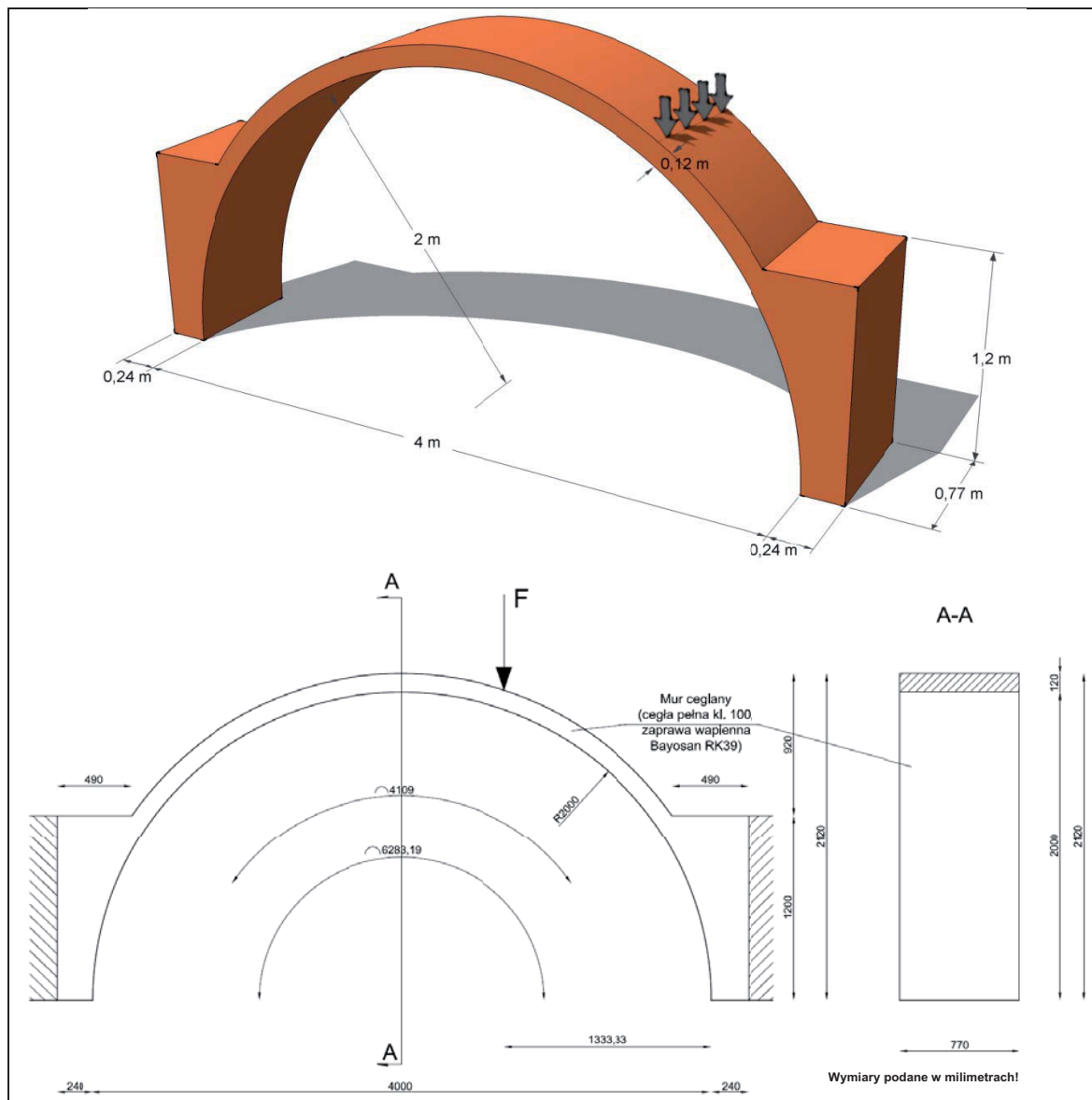
Badania wykonano na 7 łukach ceglanych o wysokości przekroju – grubości 0,12 m, szerokości 0,77 m, rozpiętości 4 m i promieniu 2 m każdy – rys. 4.56. Łuki o kształcie koleby wymurowano z materiałów przypominających swoimi cechami materiały w obiektach zabytkowych (cegły pełnej ceramicznej klasy 10 oraz zaprawy wapiennej BaunitBayosan Reinkalkputz RK 39), korzystając z deskowania przenośnego typu TOP50 firmy DOKA (rys. 4.57). Deskowania użyto jako zabezpieczenia, natomiast krążyny starano się wykonać w tzw. technice „z wolnej ręki” generując w ten sposób imperfekcje obecne zwykle w sklepieniach historycznych już w fazie wykonywania. Schemat statyczny podparcia i obciążenia we wszystkich badanych łukach zrealizowano w ten sam sposób (rys. 4.56). Wszystkie modele łuków poddano monotonicznie narastającym obciążeniom statycznym realizowanym na całej szerokości łuku, w 1/3 rozpiętości przez siłownik, aż do zniszczenia.

Każdy z łuków został wzmocniony w inny sposób.

- Model A1 – łuk niewzmocniony – łuk świadkowy.
- Model A2 – łuk wzmocniony za pomocą materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej.
- Model A3 – łuk wzmocniony za pomocą 2 taśm węglowych CFRP S&P Lamelle CFK 150/2000 (o przekroju 100/1.4) doklejonych w rozstawie osiowym 40 cm po stronie grzbietowej oraz materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej.
- Model A4 – łuk wzmocniony za pomocą materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej oraz po stronie podniebienia łuku.
- Model A5 – łuk wzmocniony za pomocą prętów stalowych  $\varnothing 8$  osadzonych w bruzdach wykonanych w powierzchni grzbietowej łuku ceglano, wklejonych za pomocą kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5.
- Model A6 – łuk wzmocniony 2 taśmami węglowymi CFRP S&P Lamelle CFK 150/2000 (o przekroju 100/1.4) przyklejonymi w rozstawie osiowym 40 cm po stronie grzbietowej.
- Model A7 – łuk wzmocniony za pomocą dźwigara z drewna klejonego warstwowo klasy GL24 połączonego z łukiem ceglano przy użyciu stalowych kotew wklejanych  $\varnothing 8$  (po stronie grzbietowej łuku).



## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.56. Wymiary, schemat podparcia i obciążenia badanych łuków.



Rys. 4.57. Łuki na deskowaniu przenośnym typu TOP50.

## 4. Badania doświadczalne własne

Materiały użyte do wzmocnień:

Taśmy FRP – specyfikację użytych do wzmacniania taśm podano w tab. 4.33, [10]. Do doklejania taśm użyto kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 z dodatkiem mączki kwarcowej, (rozdz. 3.5.1).

Tab. 4.33. Dane techniczne zastosowanych taśm S&P Lamelle CFK 150/2000

rodzaj taśmy		S&P Lamelle CFK 150/2000
szerokość taśmy $b_f$	[mm]	100
grubość taśmy $t_f$	[mm]	1,4
moduł Younga $E$	[GPa]	> 168
wytrzymałość na rozciąganie $f_t$	[MPa]	> 2800
odkształcenie przy zerwaniu $\epsilon$	[%]	> 1,5

Taśmy CFRP są fabrycznie przygotowane do klejenia z jednej strony; taśmy przed wklejeniem zostały oczyszczone i odtłuszczone przy użyciu acetonu technicznego [243];

Siatki Ruredil X Mesh C10 – dane techniczne użytych do wzmacniania siatek podano w tab. 4.34 i tab. 4.35; do klejenia siatek użyto gotowej zaprawy systemowej Ruredil X Mesh C15, której dane techniczne podano w tab. 4.36 [127].

Tab. 4.34. Właściwości mechaniczne włókna węglowego użytego w siatce Ruredil X Mesh C10

rodzaj siatki		Ruredil X Mesh C10
gęstość włókien	[g/cm <sup>3</sup> ]	1,78
moduł Younga $E$	[GPa]	240
wytrzymałość na rozciąganie $f_t$	[MPa]	4800
odkształcenie przy zerwaniu $\epsilon$	[%]	1,8

Tab. 4.35. Dane techniczne zastosowanych siatek Ruredil X Mesh C10

rodzaj siatki		Ruredil X Mesh C10
ciężar włókien węglowych w siatce	[g/m <sup>2</sup> ]	168
grubość obliczeniowa przekroju włókien węglowych w kierunku 0° lub 90°	[mm]	0,047
obciążenie zrywające w kierunku 0° i 90°	[Kg/cm]	> 160

Tab. 4.36. Właściwości zaprawy Ruredil X Mesh M25

rodzaj zaprawy		Ruredil X Mesh M25
wytrzymałość na ściskanie $f_c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	38
wytrzymałość na zginanie $f_m$	[N/mm <sup>2</sup> ]	7,5
moduł Younga $E$	[MPa]	15 000

Pręty stalowe żebrowane i gwintowane  $\varnothing 8$  – dane techniczne użytych do wzmacniania prętów podano w [185], [186]; do wklejania prętów użyto kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 z dodatkiem mączki kwarcowej.

Dźwigar z drewna klejonego warstwowo klasy GL24 – dane techniczne użytego do wzmacniania dźwigara podano w [194]; do połączenia dźwigara z łukiem ceglany użyto kotew stalowych gwintowanych  $\varnothing 8$  wklejonych w łuk za pomocą kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 z dodatkiem mączki kwarcowej.

## 4. Badania doświadczalne własne

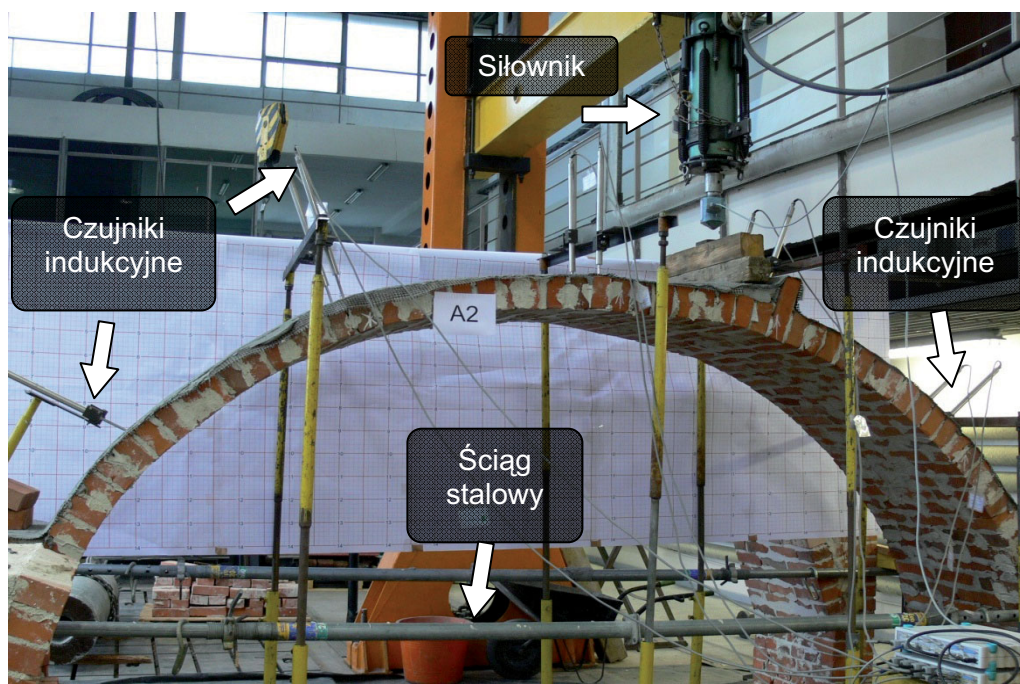
## 4.4.2. Opis stanowiska badawczego i urządzeń pomiarowych

Stanowisko badawcze przedstawiono na rys. 3.58. Zastosowano siłownik hydrauliczny o zakresie 0-100 kN firmy VEB Werkzeugstoffprüfmaschine Leipzig oraz siłomierz tensometryczny ETP 7920-10 o zakresie do 100 kN, klasy 0,5%, firmy MOM Kalibergyár. Do rejestracji wyników przemieszczeń użyto indukcyjnych czujników przemieszczeń W50 TS o zakresie pomiarowym  $\pm 50$  mm, klasy 0,5%, firmy Hottinger Baldwin Messtechnik sprzężonych z komputerem PC (wyposażonym w oprogramowanie CATMAN firmy Hottinger Baldwin Messtechnik do współpracy komputera z urządzeniami pomiarowymi tej firmy) oraz wielokanałowego systemu pomiarowego UPM 100 firmy Hottinger Baldwin Messtechnik.

Podczas badania rejestrowano:

- wartości siły obciążającej – za pomocą komputera,
- ugięcia łuków – czujniki indukcyjne,
- odkształcenia w taśmie węglowej – tensometry elektrooporowe typu RL 120/20 o bazie pomiarowej 20 mm,
- odkształcenia w dźwigarze z drewna klejonego – tensometry elektrooporowe typu RL 120/20 o bazie pomiarowej 20 mm,
- odkształcenia w prętach stalowych żebrowanych  $\varnothing 8$  wklejonych w łuk – tensometry elektrooporowe typu RL 120/20 o bazie pomiarowej 20 mm,
- odkształcenia kotew stalowych gwintowanych  $\varnothing 8$  łączących dźwigar z drewna klejonego – tensometry elektrooporowe typu RL 120/20 o bazie pomiarowej 20 mm,
- wartość siły niszczącej – rejestracja komputerowa,
- sposób zniszczenia – opis i dokumentacja fotograficzna.

Tensometry elektrooporowe na taśmach i prętach stalowych zostały naklejone na całość ich długości zgodnie z rysunkami towarzyszącymi każdemu z wykresów przedstawionych w rozdz. 4.43, a na dźwigarze drewnianym i kotwach stalowych tylko w wybranych miejscach. Tensometry na taśmach zatopionych w kompozycji klejowej lub pokrytych wzmocnieniem FRCM zostały zabezpieczone woskiem pszczelim.



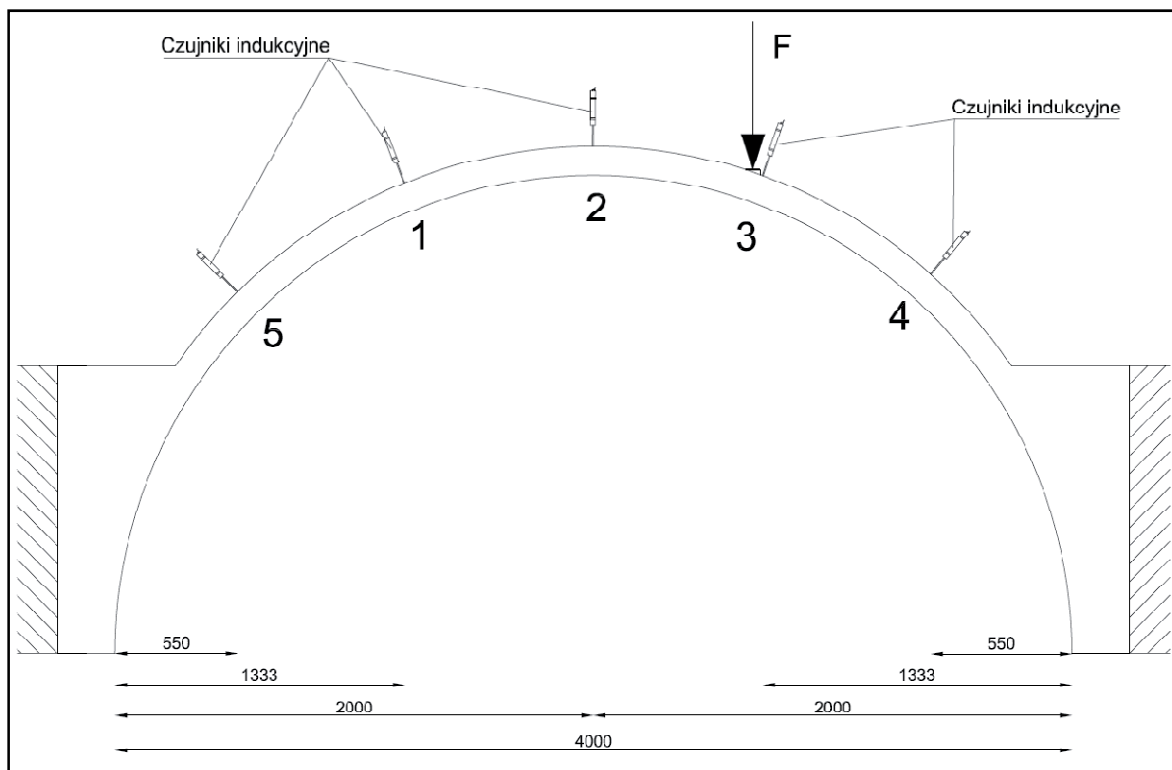
Rys. 4.58. Stanowisko badawcze. Rozmieszczenie czujników indukcyjnych – łuk A2.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.59. Zestaw komputerowy do pomiaru siły, przemieszczeń oraz odkształceń.

Strefy, w których zaproponowano założenie czujników indukcyjnych w każdym z łuków (rys. 4.60) wyznaczono dwiema metodami: metodą elementów skończonych MES (rys. 4.61 – 4.62) oraz przy pomocy programu RING (rys. 4.63). Wyznaczone tymi sposobami miejsca wystąpienia przewidywanych przegubów w łuku A1 znajdują się w tych samych strefach, co z dużym prawdopodobieństwem potwierdza prawidłowość przeprowadzonych symulacji.

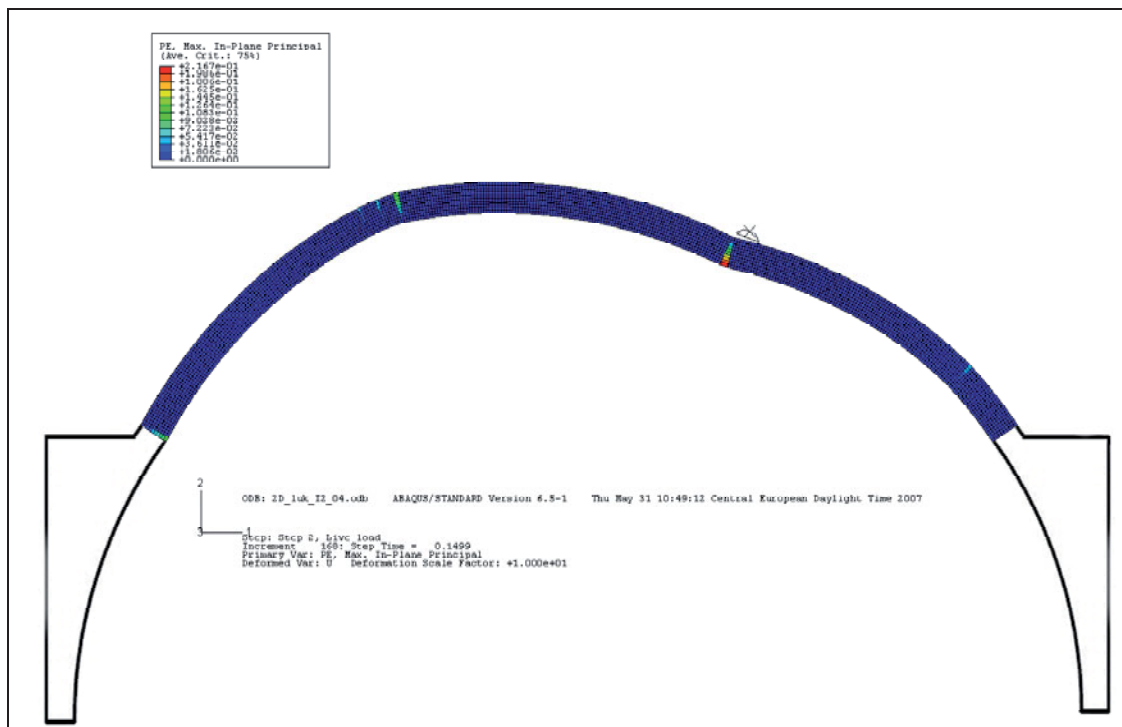


Rys. 4.60. Miejsca rozmieszczenia punktów pomiarowych – czujników indukcyjnych.

## 4. Badania doświadczalne własne

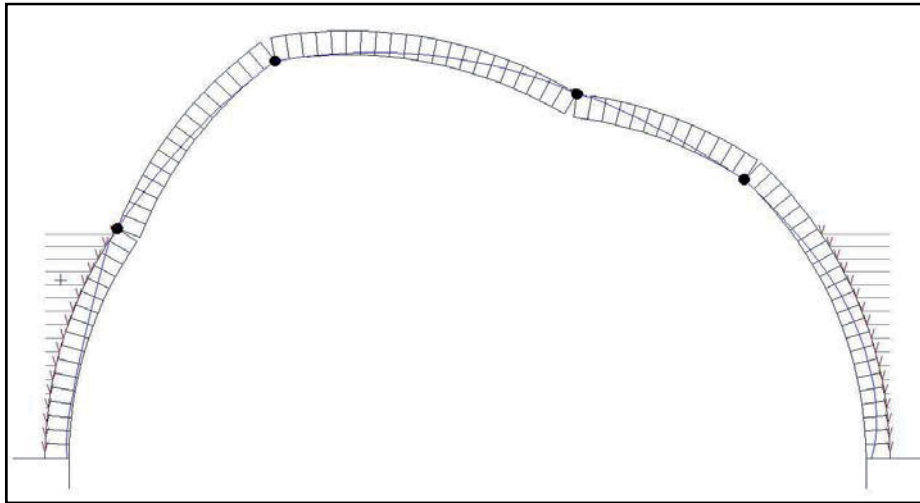


Rys. 4.61. Deformacje w łuku A1 - wyniki z obliczeń MES (I-Deas) (skala zniekształcona).



Rys. 4.62. Deformacje w łuku A1 – wyniki z obliczeń MES (Abaqus 6.5.1) – model ograniczony do części łuku pomiędzy szczytami poszerzonych węzłowi ( $l=3,30$  m).

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.63. Deformacje w łuku AI - wyniki z programu RING (skala zniekształcona).

Należy zauważyć, że RING (w wersji 1.5) jest programem do szybkiej analizy niewzmocnionych łuków ceglanych. Oprogramowanie bazuje na numerycznym wykorzystaniu metody analizy "mechanizmów" zaproponowanej przez Heymana [101].

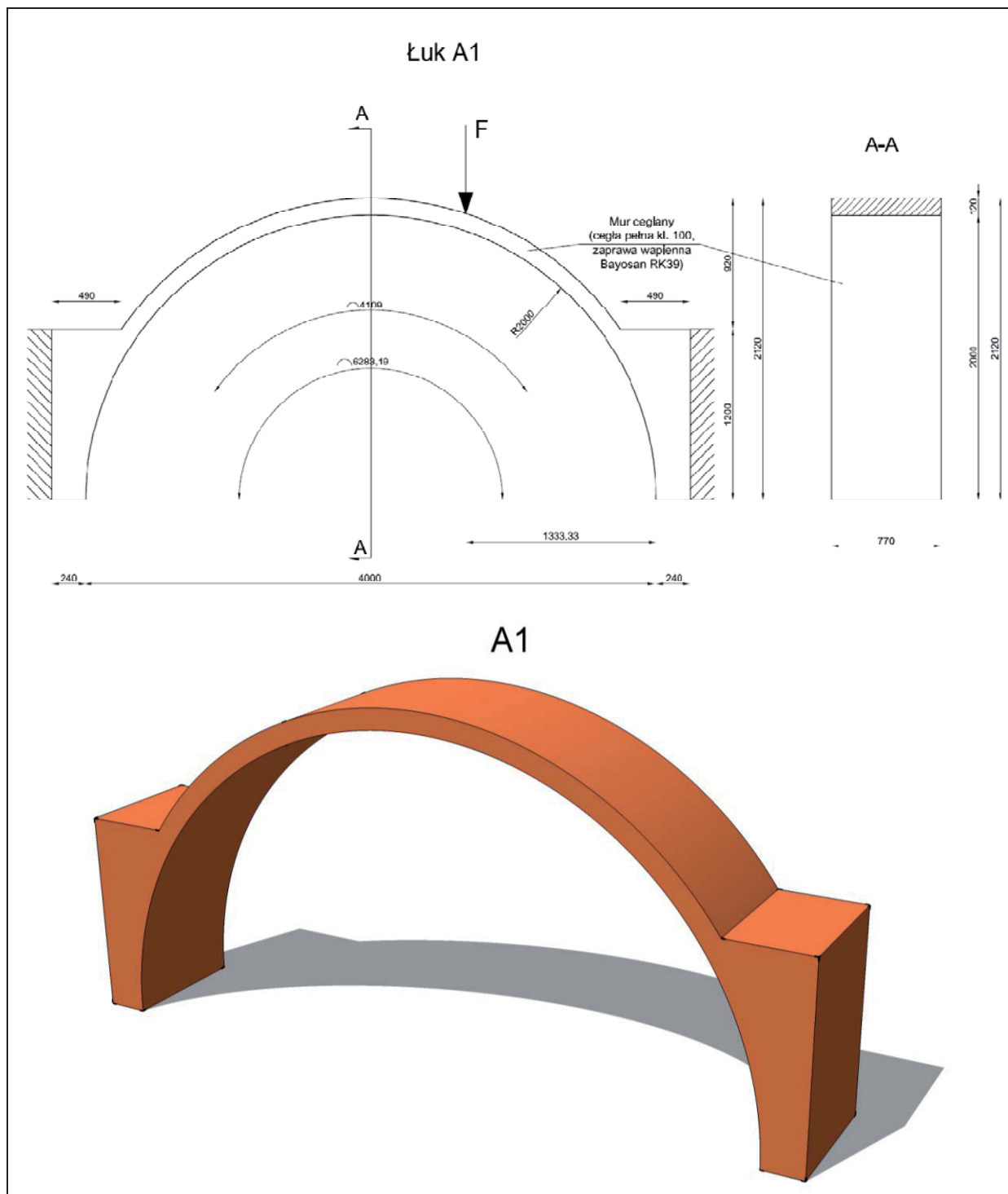
Do podobnej analizy można wykorzystać również programy ArchieM lub ARCO. Oprogramowanie to bazuje na zasadzie zachowania równowagi w metodzie analizy plastycznej. Zgodnie z tą zasadą łuk ceglany jest w stanie równowagi, jeśli pod wpływem ciężaru własnego i zewnętrznych obciążeń możliwe jest wyznaczenie linii ciśnień, która mieści się całkowicie w grubości przekroju, a naprężenia ściskające są wystarczająco niskie. Zastosowanie teorii plastyczności w studiach nad konstrukcjami ceglanyimi zapoczątkował Heyman w swojej pracy *The stone skeleton*, [104].

## 4. Badania doświadczalne własne

## 4.4.3. Wyniki badań

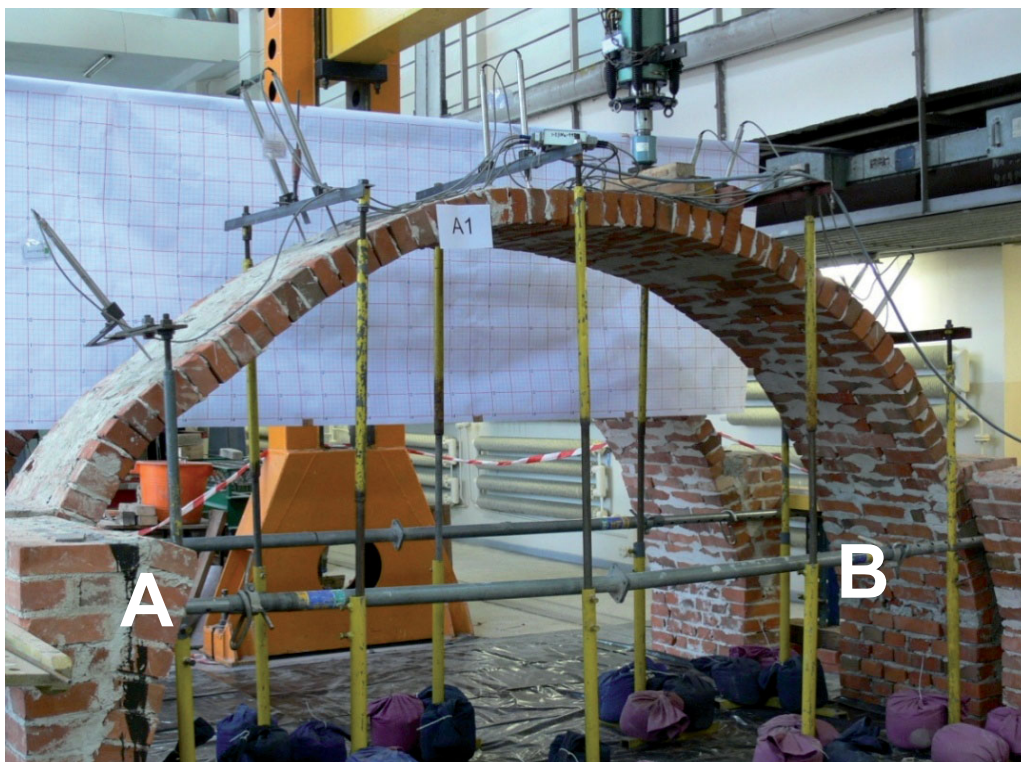
## 4.4.3.1. Badania modelu niewzmocnionego – model A1 – łuk świadkowy

Jako pierwszy poddano badaniom model A1 – niewzmocniony (rys. 4.64), będący łukiem świadkowym. Obciążenie realizowano zgodnie z planem przedstawionym we wcześniejszej części tego rozdziału na stanowisku badawczym jak na rys. 4.59.

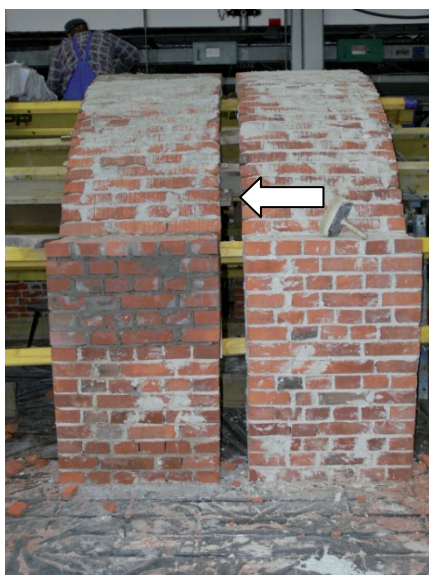


Rys. 4.64. Model łuku A1 – widok z boku i przekrój poprzeczny A-A.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.65. Łuk A1 – widok ogólny (opisane podpory A i B).



Rys. 4.66. Łuk A1 (po lewej) w trakcie murowania.



Rys. 4.67. Podpora B oraz pozostałości łuku A1.



Rys. 4.68. Podpora A po zniszczeniu łuku A1.



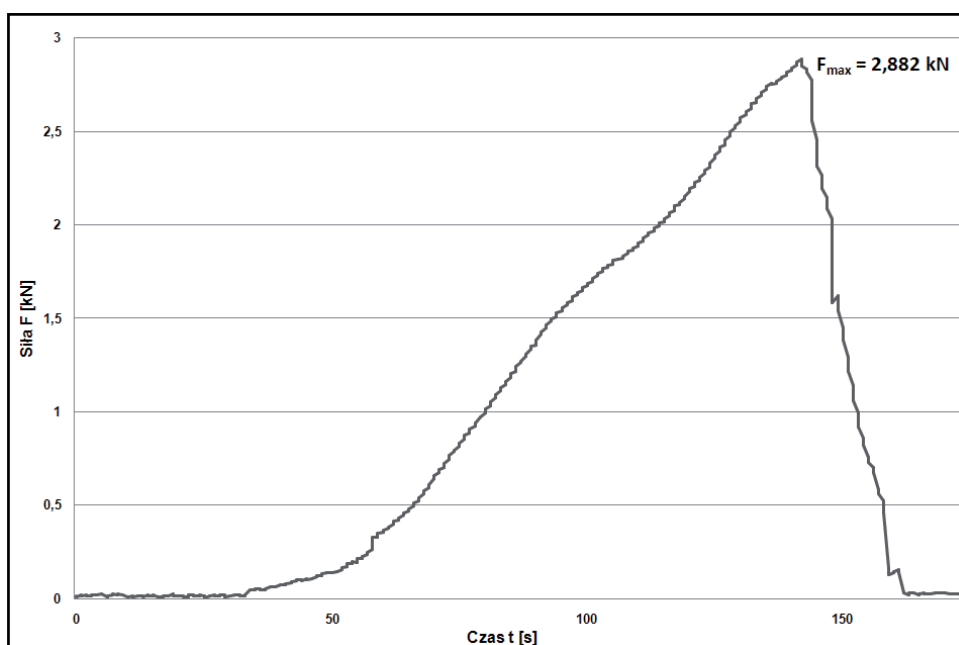
## 4. Badania doświadczalne własne

Podczas badania wyznaczono ścieżkę równowagi statycznej (rys. 4.69) oraz zmierzono siłę niszczącą dla tego modelu wynoszącą 2,882 kN. Mierzono również przemieszczenia w wyznaczonych na wstępnym etapie badań przekrojach. Wyniki tych pomiarów pokazano w tab. 4.33. oraz na rys. 4.73 a zależność pomiędzy nimi przedstawiono na rys. 4.70.

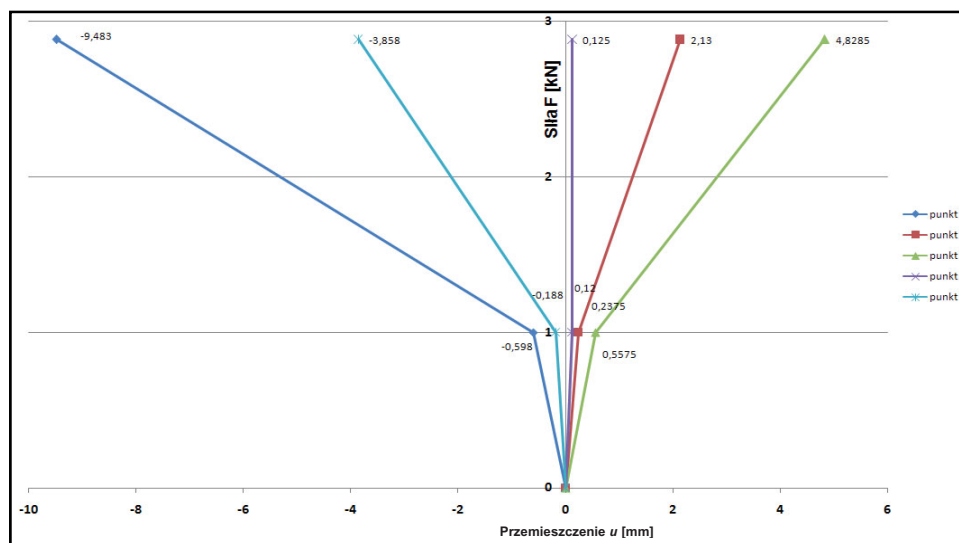
Tab. 4.33. Wyniki pomiarów przemieszczeń w łuku A1

punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła F [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
0	0	0	0	0	0
1	-0,598	0,2375	0,5575	0,120	-0,188
2,882	-9,483	2,130	4,8285	0,125	-3,858

\* wartości ujemne przemieszczeń obrazują wypiętrzenie modelu łuku



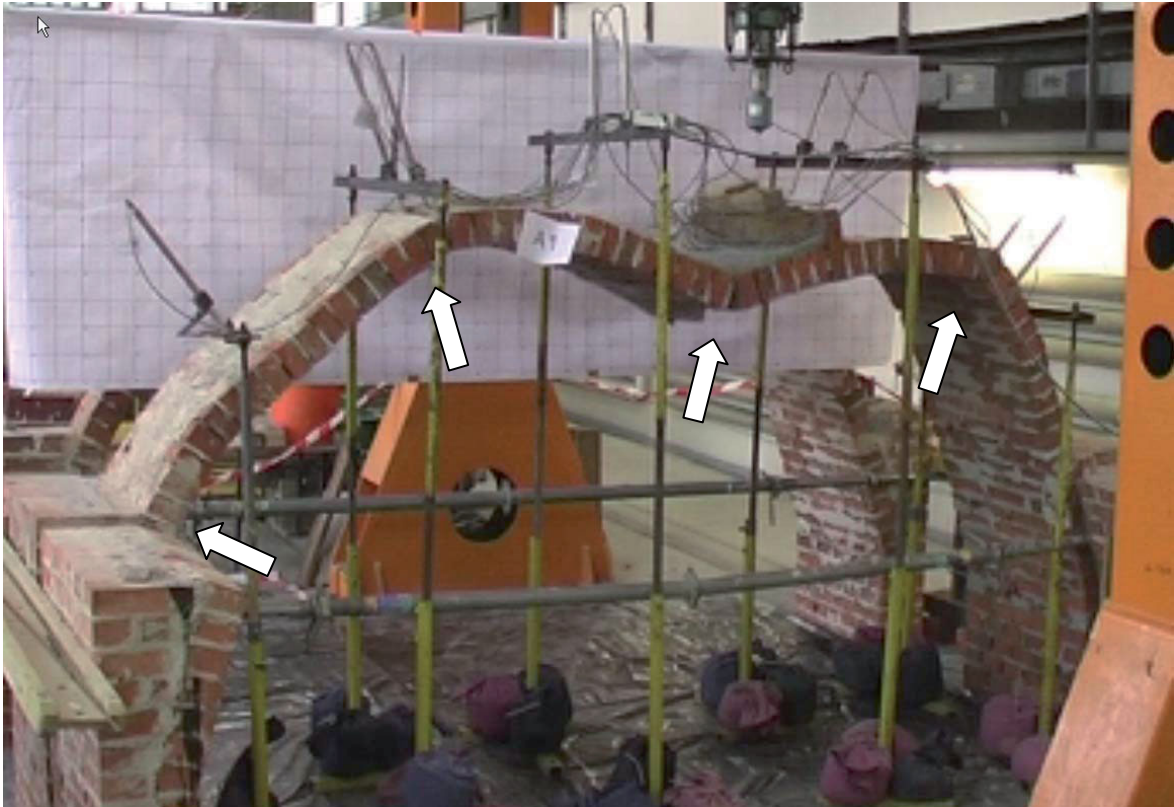
Rys. 4.69. Ścieżka równowagi statycznej dla łuku A1.



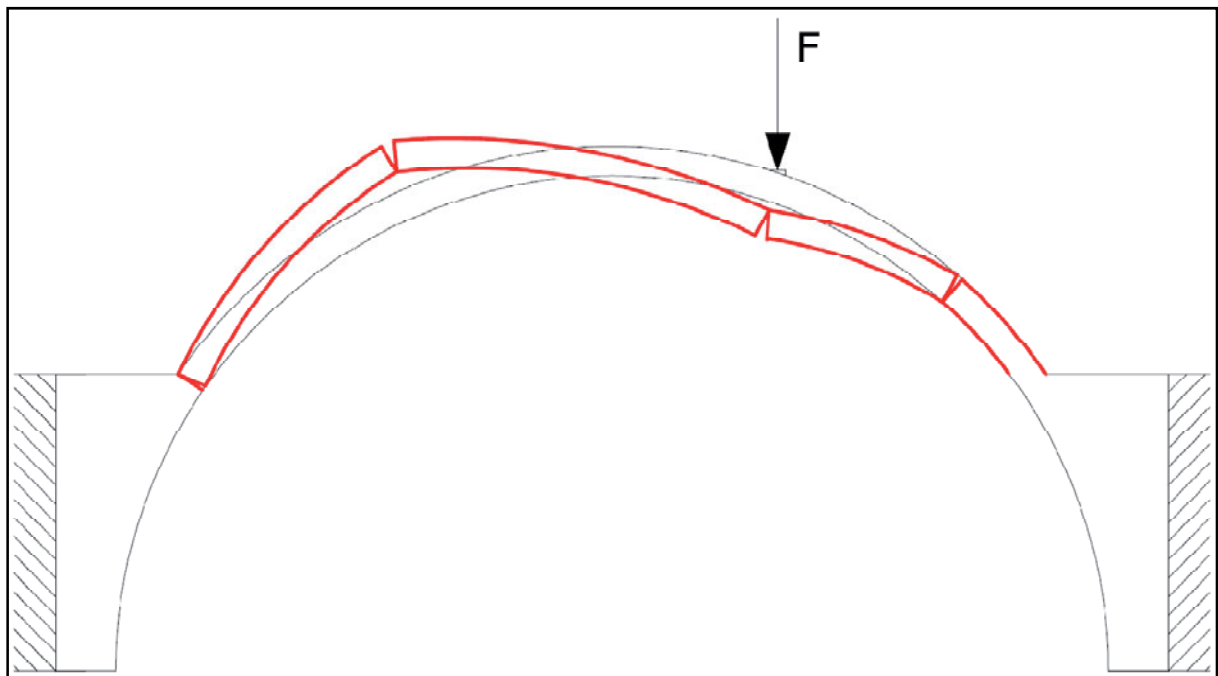
Rys. 4.70. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w poszczególnych punktach pomiarowych w łuku A1.

## 4. Badania doświadczalne własne

Na rys. 4.71 przedstawiono rzeczywistą postać zniszczenia, a na rys. 4.72 model zniszczenia łuku A1 wraz z powstałymi przegubami.

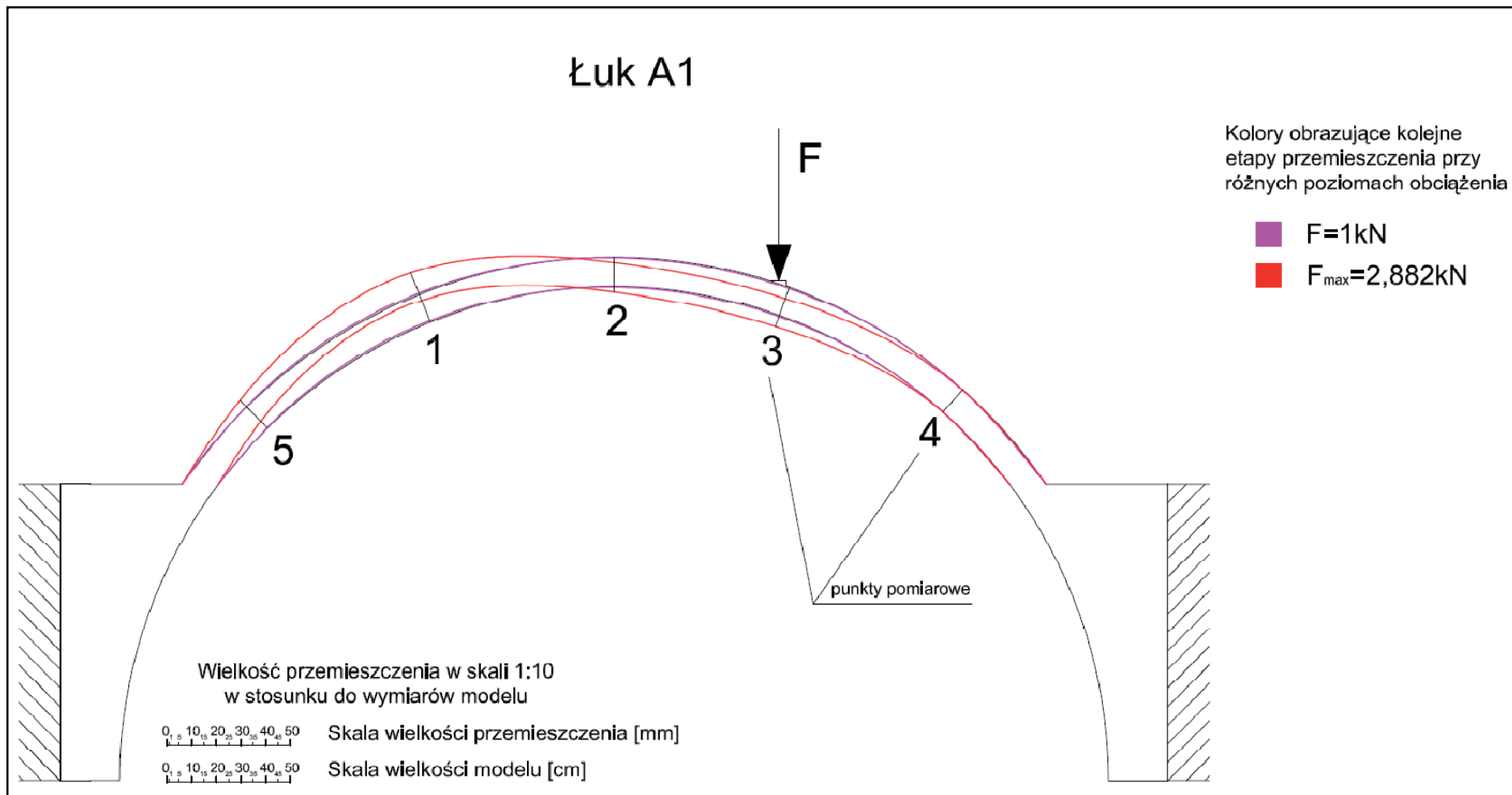


Rys. 4.71. Postać zniszczenia łuku A1 – zaznaczone powstałe przeguby (siła niszcząca 2,882 kN).



Rys. 4.72. Model zniszczenia łuku A1 wraz z powstałymi przegubami.

Zgodnie z przewidywaniami oraz informacjami zawartymi w literaturze, w niewzmocnionym łuku A1 w trakcie niszczenia powstały 4 przeguby.

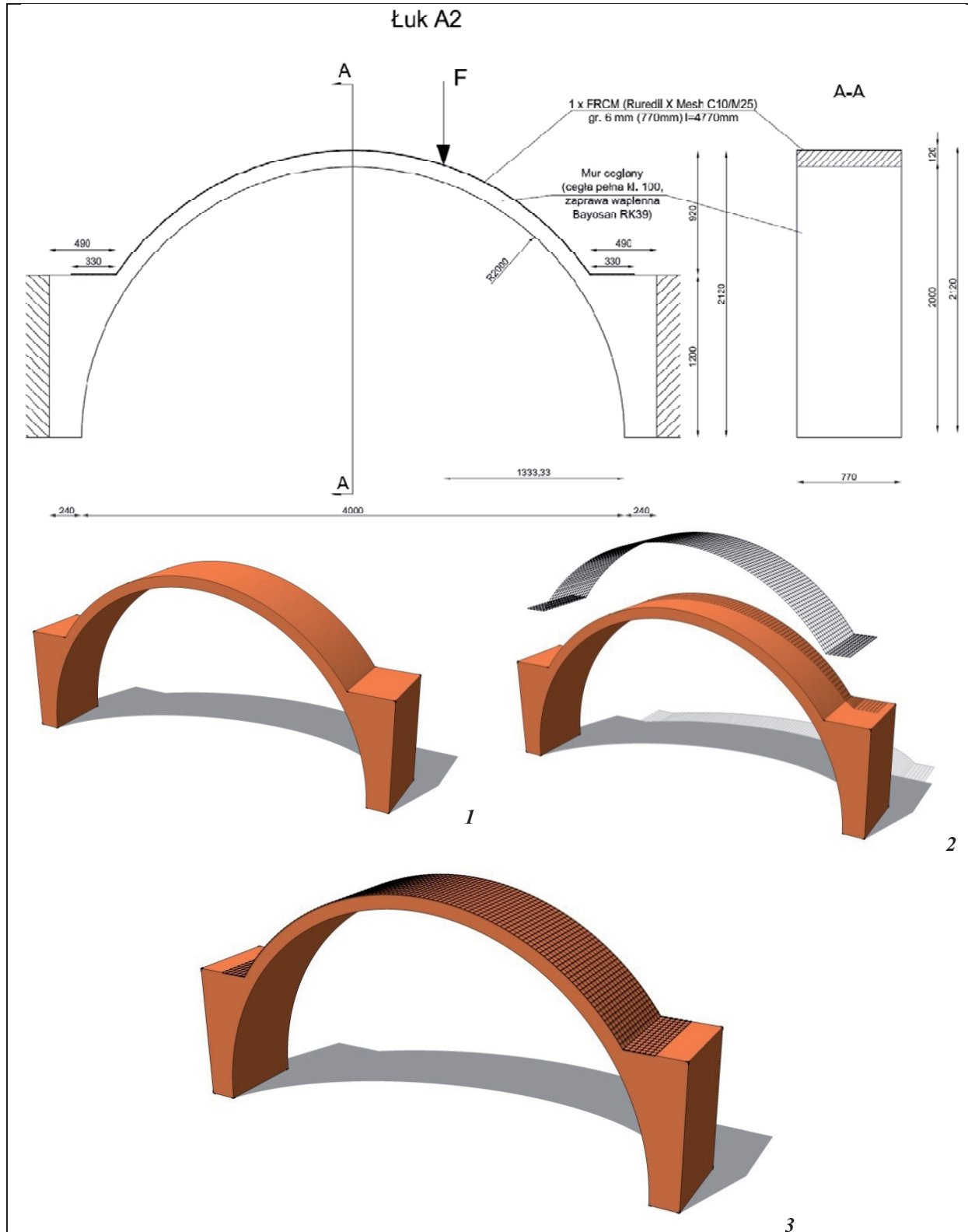


Rys. 4.73. Przemieszczenia w 5 punktach pomiarowych przy kolejnych poziomach obciążenia – łuk A1.

## 4. Badania doświadczalne własne

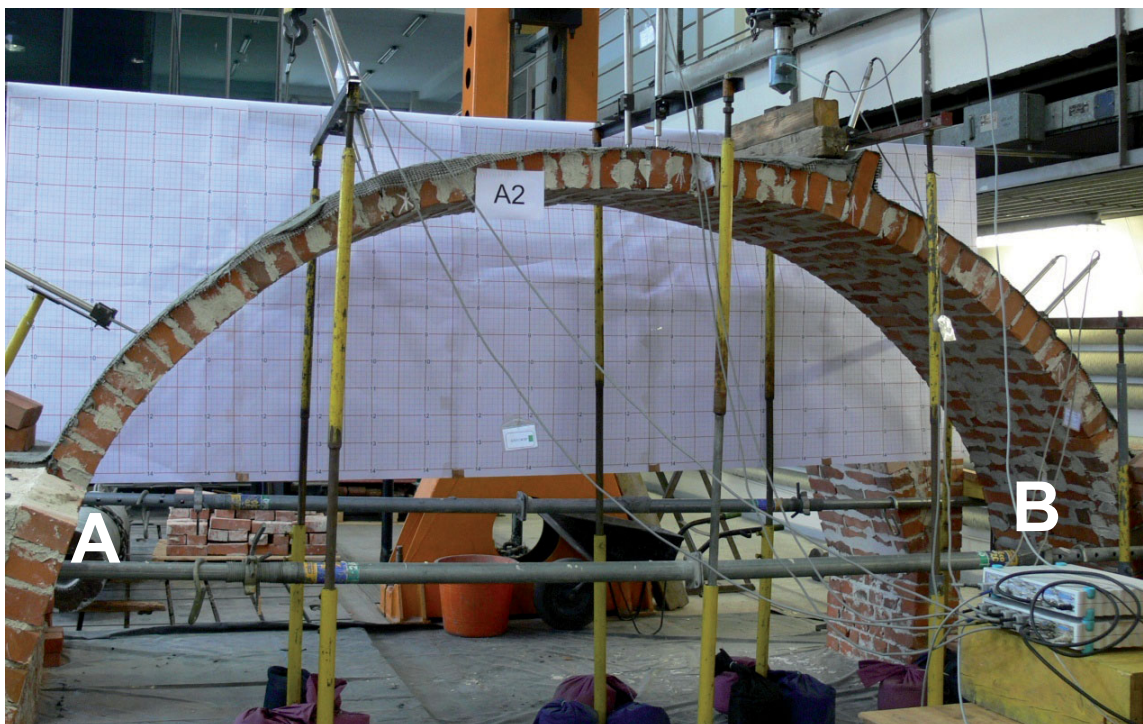
#### 4.4.3.2. Badania modelu łuku wzmocnionego za pomocą materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej – model A2

Model skonstruowano jak na rys. 4.74. Obciążenie realizowano identycznie jak dla łuku A1.



Rys. 4.74. Model łuku A2 – widok z boku i przekrój poprzeczny A-A oraz kolejne etapy wzmocnienia (1-3).

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.75. Łuk A2 – widok ogólny (opisane podpory A i B).

Na rys. 4.75 – 4.79 przedstawiono model badawczy (również w trakcie budowy), a na rys. 4.80 – 4.84 – zachowanie łuku podczas badania.

Wyznaczono ścieżkę równowagi statycznej (rys. 4.85) oraz zmierzono siłę niszczącą dla tego modelu wynoszącą 10,866 kN. Mierzono również przemieszczenia w wyznaczonych przekrojach. Wyniki tych pomiarów pokazano w tab. 4.34. oraz na rys. 4.94 a zależność pomiędzy nimi przedstawiono na rys. 4.86.



Rys. 4.76. Łuk A2 i materiały do wzmocnienia (siatka z włókna węglowego i zaprawa mineralna).



Rys. 4.77. Naklejanie siatki z włókna węglowego na łuk A2.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.78. Widok ogólny łuku A2 (łuk środkowy) z naklejoną siatką z włókna węglowego.



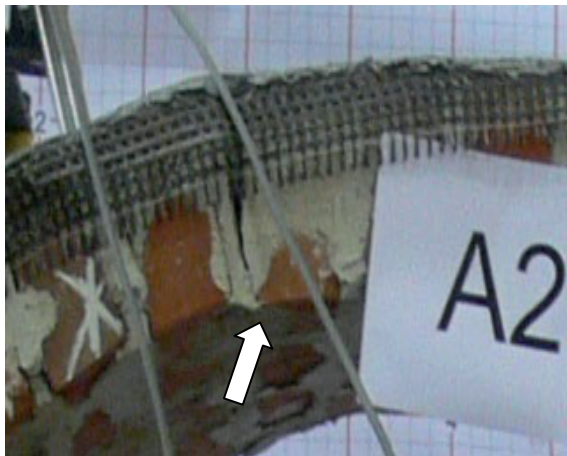
Rys. 4.79. Siatka z włókna węglowego wklejona w zaprawę mineralną.



Rys. 4.80. Zarysowanie pod miejscem przyłożenia obciążenia (siła ok. 3 kN).



Rys. 4.81. Zarysowanie i ścięcie spoiny pod miejscem przyłożenia obciążenia (siła ok. 8 kN).



Rys. 4.82. Przegub po stronie podniebienia łuku (siła 10,866 kN).



Rys. 4.83. Zmiażdżenie cegieł po stronie grzbietowej w obszarze przyłożenia obciążenia (siła 10,866 kN).

## 4. Badania doświadczalne własne

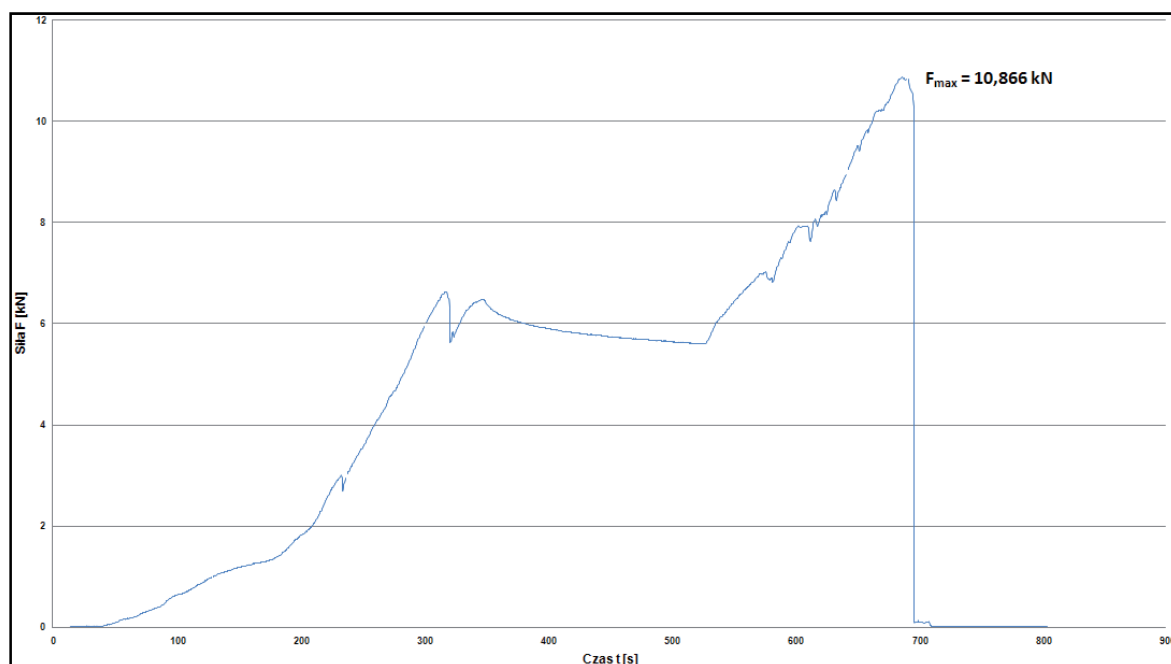


Rys. 4.84. Przegub na podporze lewej 'A' (siła 10,866 kN).

Tab. 4.34. Wyniki pomiarów przemieszczeń w łuku A2

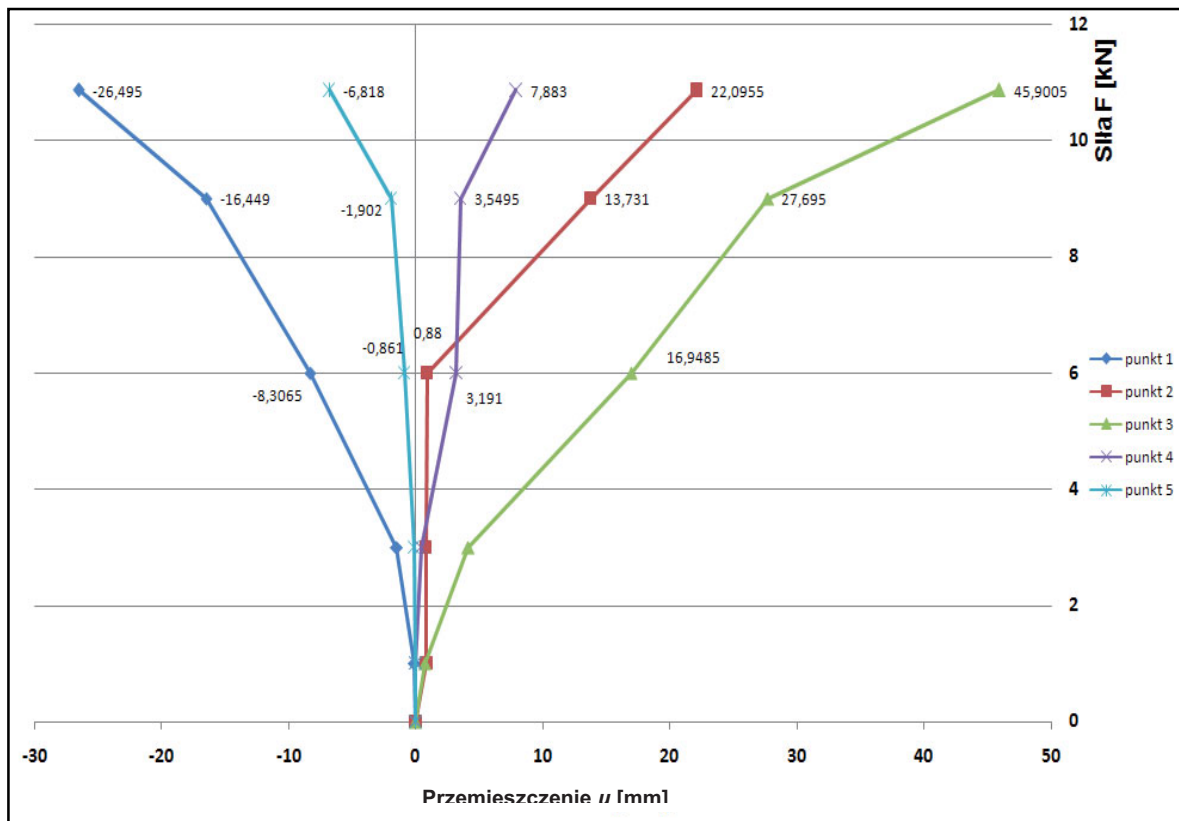
punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła F [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-0,0810	0,8465	0,7505	-0,0080	-0,0030
3	-1,4900	0,8075	4,1285	0,4000	-0,1230
6	-8,3065	0,8800	16,9485	3,1910	-0,8610
9	-16,4490	13,7310	27,6950	3,5495	-1,9020
10,866	-26,4950	22,0955	45,9005	7,8830	-6,8180

\* wartości ujemne przemieszczeń obrazują wypiętrzenie modelu łuku



Rys. 4.85. Ścieżka równowagi statycznej dla łuku A2.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.86. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w poszczególnych punktach pomiarowych w łuku A2.

Na rys. 4.87 – 4.90 przedstawiono fragmenty zniszczonego łuku A2 kładąc nacisk na zobrazowanie odspojenia materiału FRCM od konstrukcji łuku. Zaobserwowano odspojenie siatki z włókna węglowego od konstrukcji murowej z fragmentami cegieł co świadczy o tym, że zniszczenie (zerwanie) nastąpiło w warstwie muru.



Rys. 4.87. Zniszczony łuk A2, widoczna rozerwana siatka z włókna węglowego.



Rys. 4.88. Odspojenia siatki z włókna węglowego od zniszczonej konstrukcji łuku A2.



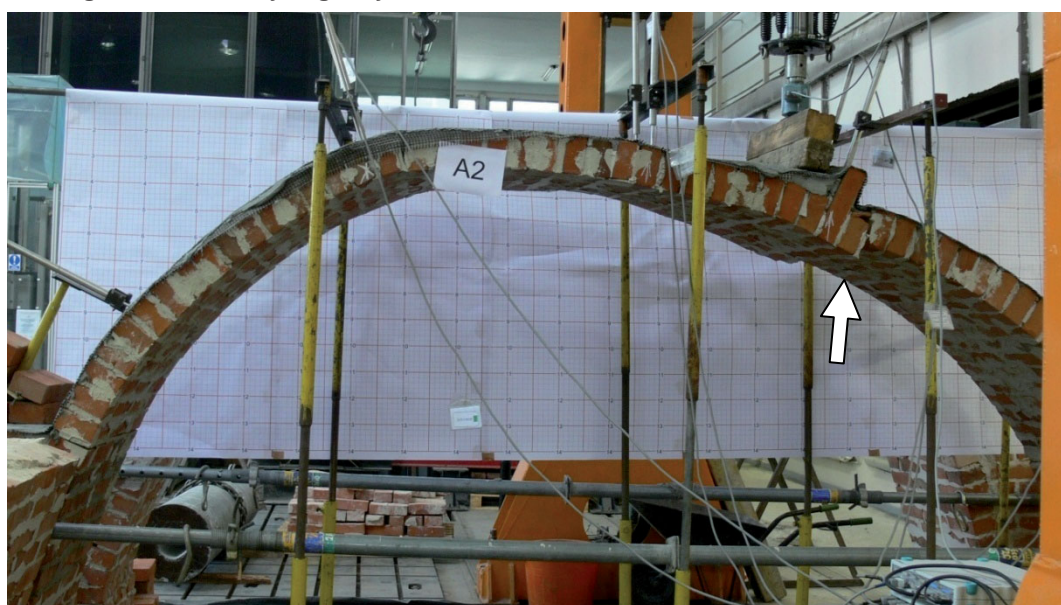
## 4. Badania doświadczalne własne



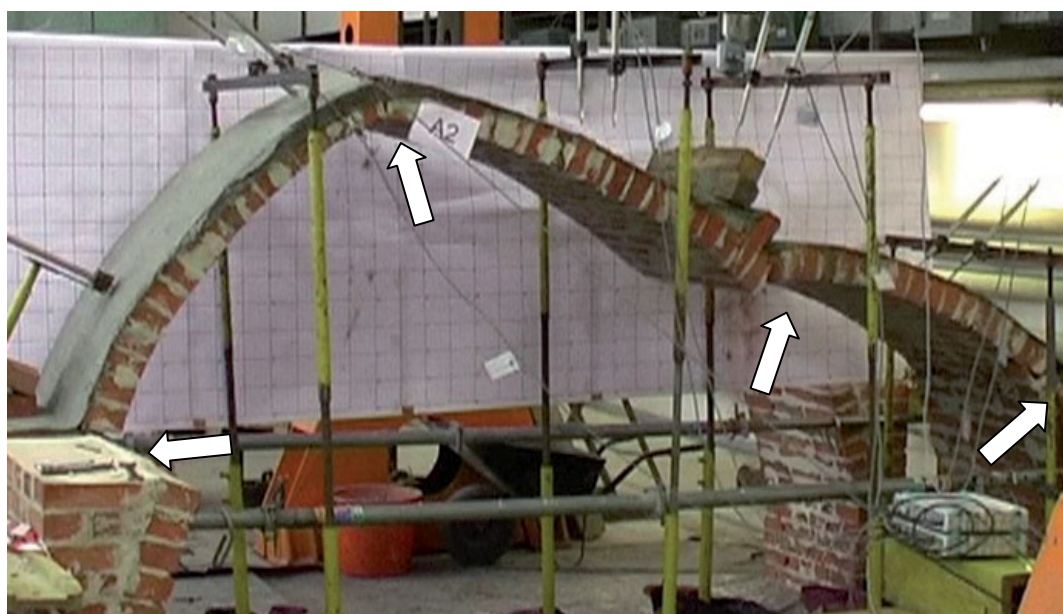
Rys. 4.89. Zniszczenie siatki z włókna węglowego, widoczne odspojenie zaprawy wraz z fragmentami cegieł od konstrukcji ceglanej.



Rys. 4.90. Pozostałości siatki wzmacniającej na podporze lewej 'A'.



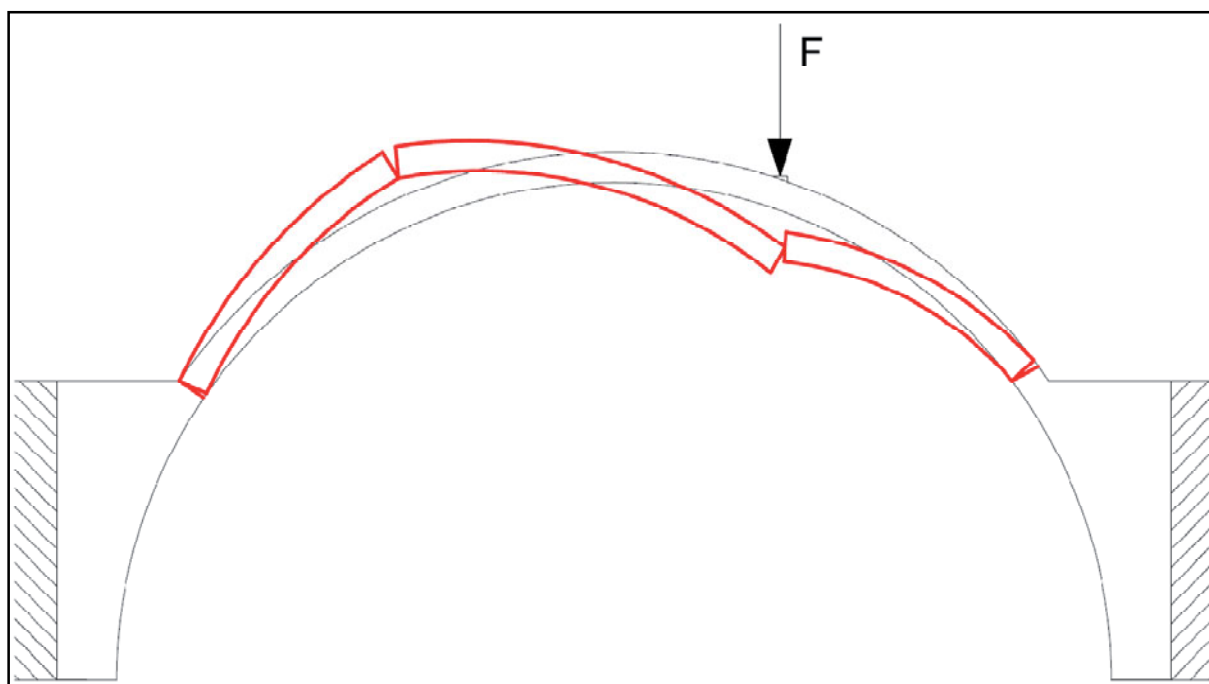
Rys. 4.91. Początkowa faza zniszczenia – obciążenie ok. 9 kN.



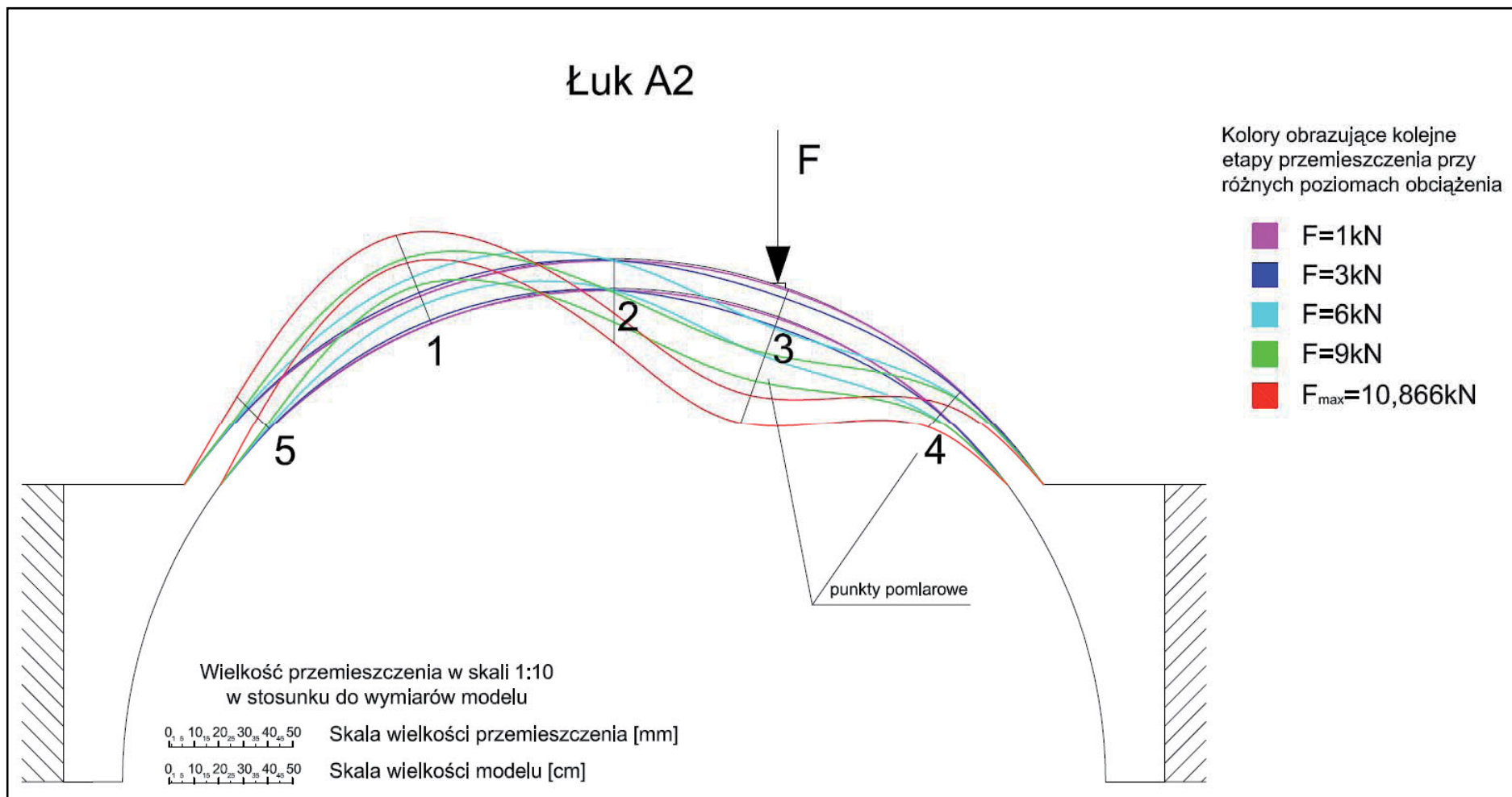
Rys. 4.92. Schemat zniszczenia łuku A2 – zaznaczone powstałe przeguby (siła 10,866 kN).

## 4. Badania doświadczalne własne

Na rys. 4.91 i 4.92 przedstawiono rzeczywistą postać zniszczenia, a na rys. 4.93 model zniszczenia łuku A2 wraz z powstałymi przegubami. Można zauważyć, że w miejscu przegubu "1" nastąpiło również ścięcie w spoinie pomiędzy cegłami.



Rys. 4.93. Model zniszczenia łuku A2 wraz z powstałymi przegubami.

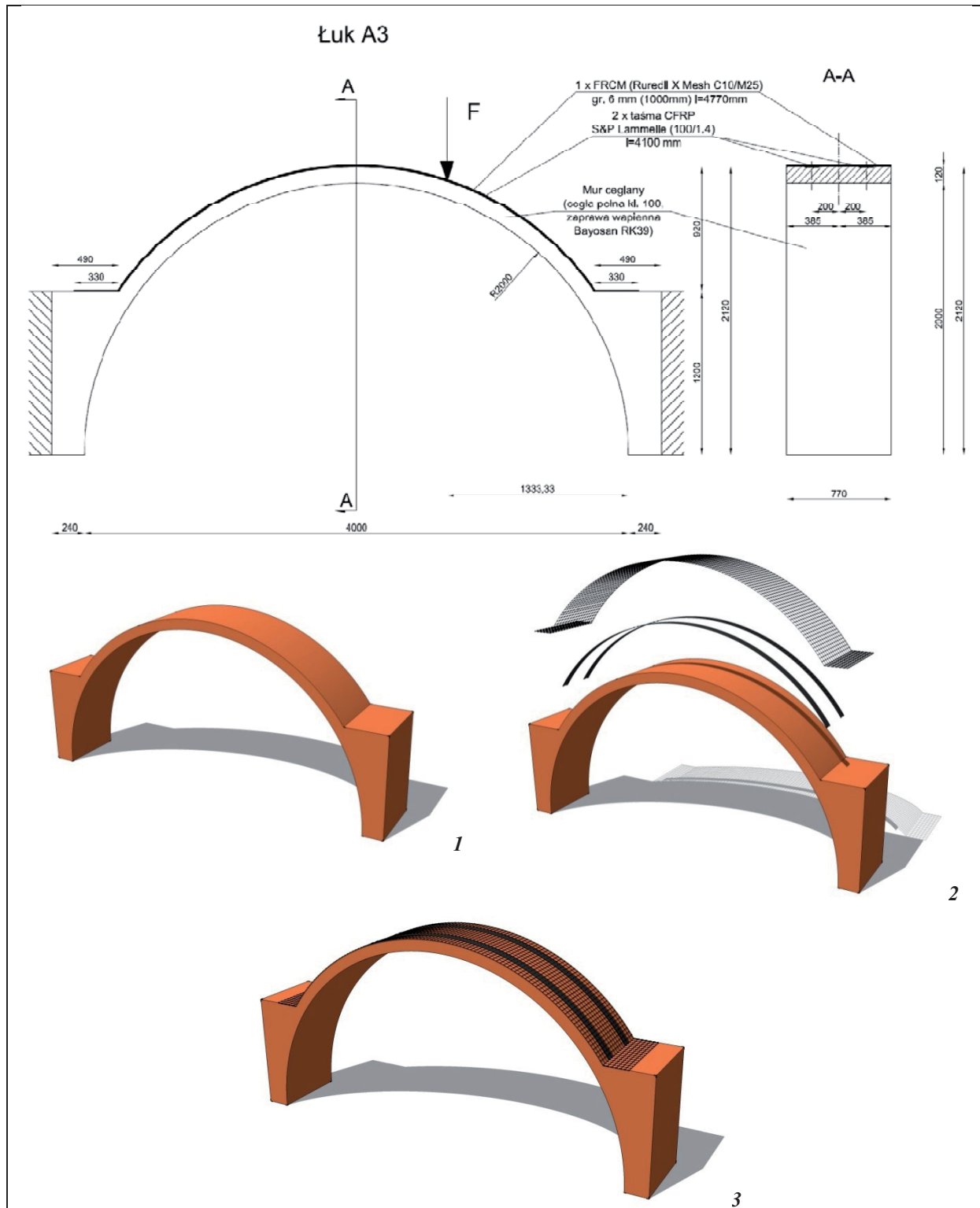


*Rys. 4.94. Przemieszczenia w 5 punktach pomiarowych przy kolejnych poziomach obciążenia – łuk A2.*

## 4. Badania doświadczalne własne

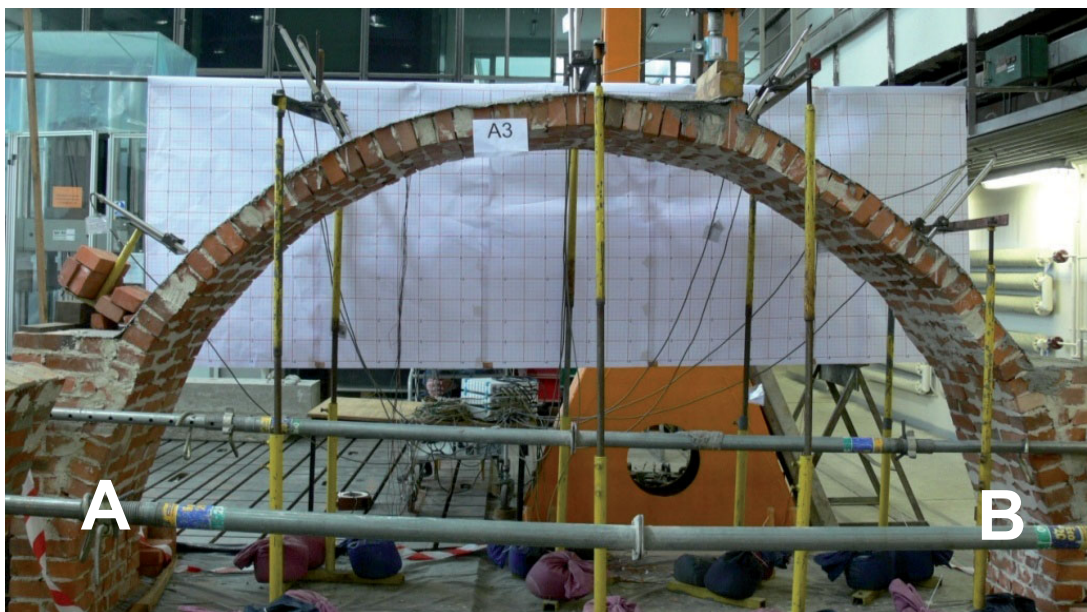
#### 4.4.3.3. Badania modelu wzmacnionego za pomocą taśm węglowymi CFRP S&P Lammelle (100/1.4) oraz materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej łuku – model A3

Model skonstruowano jak na rys. 4.95. Obciążenie realizowano identycznie jak w poprzednich przypadkach.



Rys. 4.95. Model łuku A3 – widok z boku i przekrój poprzeczny A-A oraz kolejne etapy wzmacniania (1-3).

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.96. Łuk A3 – widok ogólny (opisane podpory A i B).



Rys. 4.97. Taśmy FRP CFK150/2000 przyklejone do łuku A3.



Rys. 4.98. Taśmy FRP CFK150/2000 z tensometrami przyklejone do łuku A3.



Rys. 4.99. Taśmy FRP CFK150/2000 przyklejone do łuku A3 w odstępach co 40 cm.



Rys. 4.100. Tensometr elektrooporowy na taśmie FRP w łuku A3.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.101. Siatka z włókien węglowych przyklejana do łuku A3.



Rys. 4.102. Siatka z włókien węglowych w trakcie przyklejania na łuk i taśmy FRP w łuku A3.



Rys. 4.103. Łuk A3 z świeżo naklejoną siatką z włókna węglowego, bez górnej warstwy zaprawy.

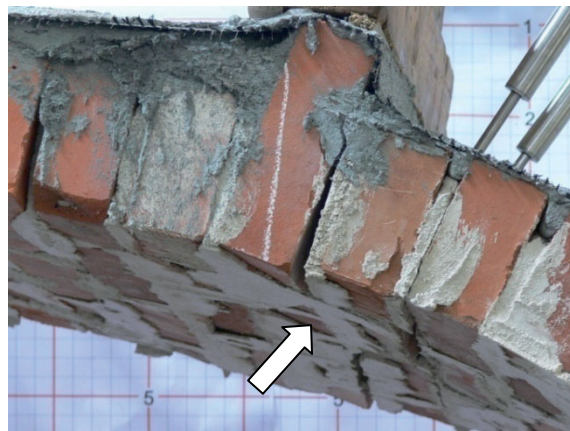


Rys. 4.104. Łuk A3 z naklejonym wzmocnieniem FRCM.

Na rys. 4.97 – 4.104 przedstawiono model badawczy w trakcie budowy i wzmacniania, a na rys. 4.105 – 4.112 zachowanie konstrukcji – zarysowania powstałe podczas badania.



Rys. 4.105. Zarysowanie pod miejscem przyłożenia obciążenia (siła ok. 7 kN).

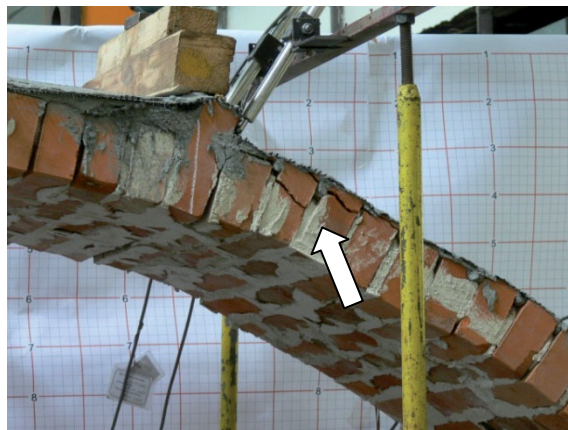


Rys. 4.106. Zarysowanie pod miejscem przyłożenia obciążenia (siła ok. 21 kN).

## 4. Badania doświadczalne własne



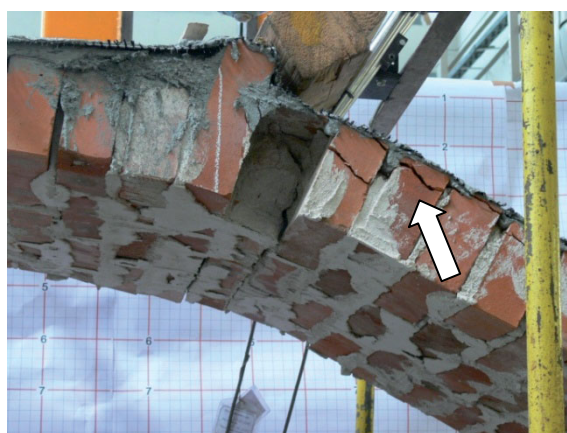
Rys. 4.107. Miażdżenie cegieł w podporze prawej 'B' (siła ok. 22,5 kN).



Rys. 4.108. Zmiażdżenie łuku po stronie grzbietowej w obszarze przyłożenia obciążenia (siła ok. 25,5 kN)



Rys. 4.109. Zniszczenie łuku - ścięcie spoin i zmiżdżenie cegieł w strefie podpory lewej 'A' (siła 26,675 kN).



Rys. 4.110. Zmiażdżenie cegieł po stronie grzbietowej w obszarze przyłożenia obciążenia (siła 26,675 kN).



Rys. 4.111. Zmiażdżona cegła w podporze prawej 'B', widoczne rozerwanie statki wzmacniającej.



Rys. 4.112. Zmiażdżone cegły w podporze lewej 'A', widoczne odspojenie statki wzmacniającej od podpory.

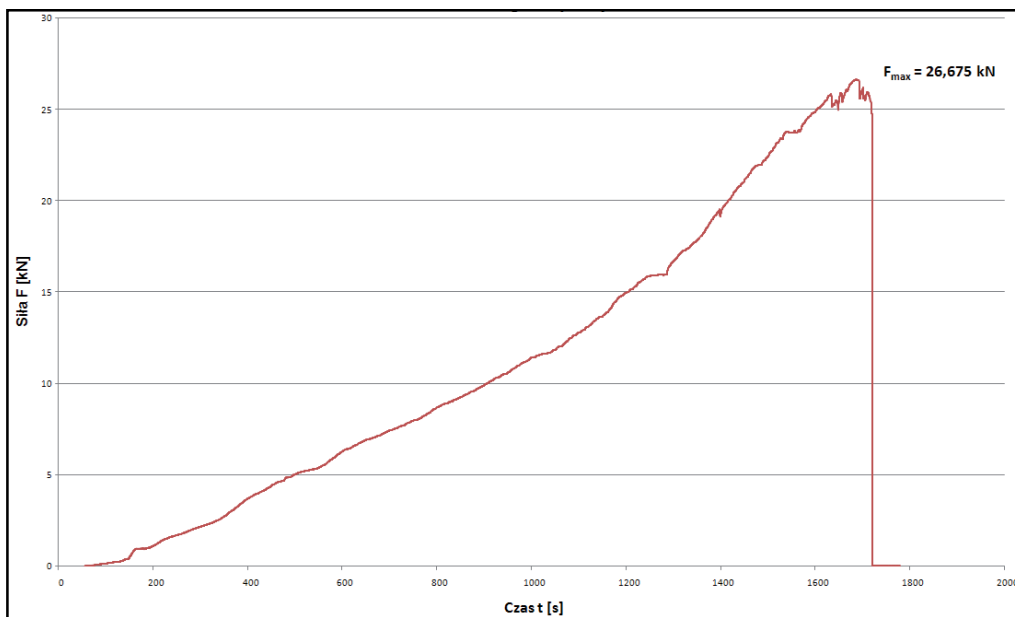
Podczas badania wyznaczono ścieżkę równowagi statycznej (rys. 4.113) oraz zmierzono siłę niszczącą dla tego modelu wynoszącą 26,675 kN. Mierzono również przemieszczenia w wyznaczonych punktach pomiarowych. Wyniki tych pomiarów zaprezentowano w tab. 4.35. oraz na rys. 4.121 a zależność pomiędzy nimi przedstawiono na rys. 4.114.

## 4. Badania doświadczalne własne

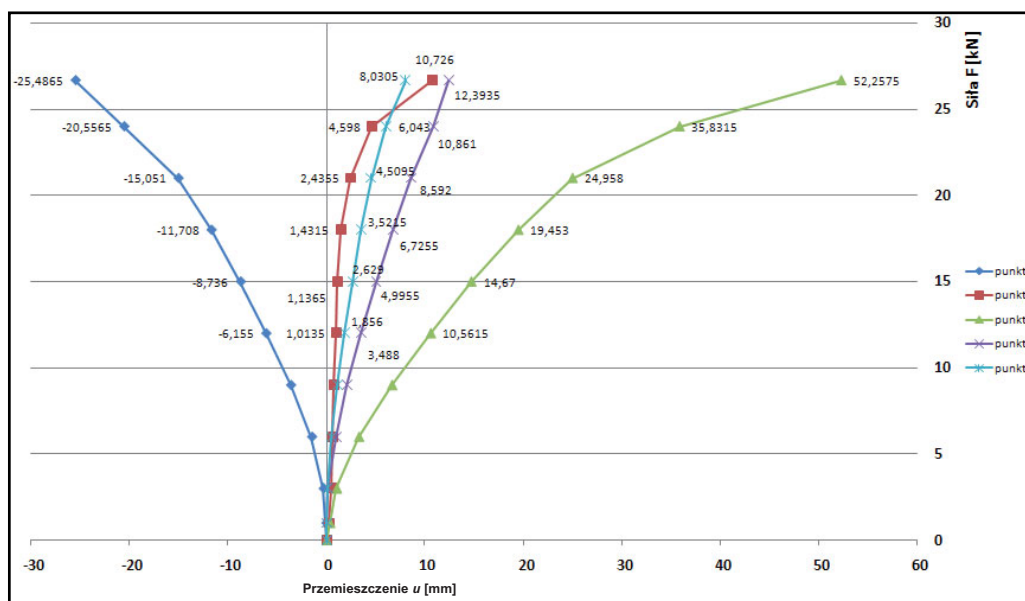
Tab. 4.35. Wyniki pomiarów przemieszczeń w łuku A3

punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła F [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-0,0635	0,2280	0,3320	0,0065	0,0000
3	-0,3380	0,4965	1,0100	0,1665	0,0765
6	-1,5090	0,5835	3,2670	0,9630	0,4945
9	-3,6445	0,7775	6,6250	2,0610	1,1035
12	-6,1550	1,0135	10,5615	3,4880	1,8560
15	-8,7360	1,1365	14,6700	4,9955	2,6290
18	-11,7080	1,4315	19,4530	6,7255	3,5215
21	-15,0510	2,4355	24,9580	8,5920	4,5095
24	-20,5565	4,5980	35,8315	10,8610	6,0430
26,675	-25,4865	10,7260	52,2575	12,3935	8,0305

\* wartości ujemne przemieszczeń obrazują wypiętrzenie modelu łuku



Rys. 4.113. Ścieżka równowagi statycznej dla łuku A3.



Rys. 4.114. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w poszczególnych punktach pomiarowych – łuk A3.



## 4. Badania doświadczalne własne

W trakcie badań przeprowadzono również pomiary odkształceń we wzmacniającej taśmie węglowej. Wyznaczono naprężenia normalne  $\sigma$  w taśmie oraz naprężenia ścinające  $\tau$  w spoinie klejowej. Wyniki tych pomiarów przedstawiono w tab. 4.36 (odkształcenia), 4.37 i 4.38 (naprężenia) oraz na rys. 4.115 – 4.117. W tabeli 4.39 i na rys. 4.118 przedstawiono procent wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie taśmy węglowej.

**Naprężenia normalne  $\sigma$**  w taśmach z włókien węglowych wyznaczono wg wzoru:

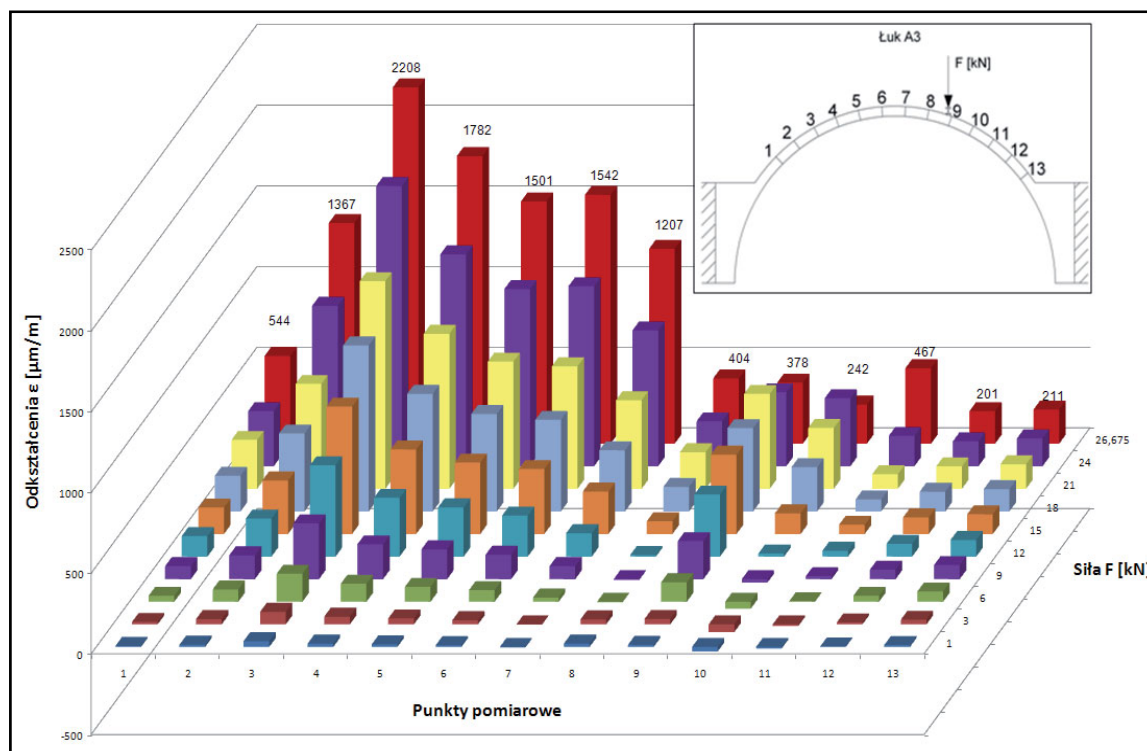
$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (4.22)$$

**Naprężenia styczne  $\tau$**  w spoinie klejowej:

$$\tau = \frac{(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \cdot A_t}{A_s} \quad (4.23)$$

Tab. 4.36. Wyniki pomiarów odkształceń taśmy węglowej w łuku A3

siła F [kN]	punkty pomiarowe												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	6	14	36	21	16	11	-3	21	13	-28	-9	3	12
3	15	33	78	48	37	26	-1	31	34	-48	-10	12	29
6	37	76	174	112	92	72	26	-2	121	-42	4	37	64
9	81	148	346	216	185	151	81	-4	236	-21	19	59	87
12	127	236	566	364	305	254	145	10	384	19	36	79	103
15	164	332	790	524	443	403	263	79	492	128	57	103	122
18	221	483	1029	729	604	568	379	152	516	274	74	122	138
21	303	650	1287	961	788	759	549	227	588	377	90	139	152
24	341	994	1737	1313	1098	1115	842	278	458	421	188	154	172
26,675	544	1367	2208	1782	1501	1542	1207	404	378	242	467	201	211

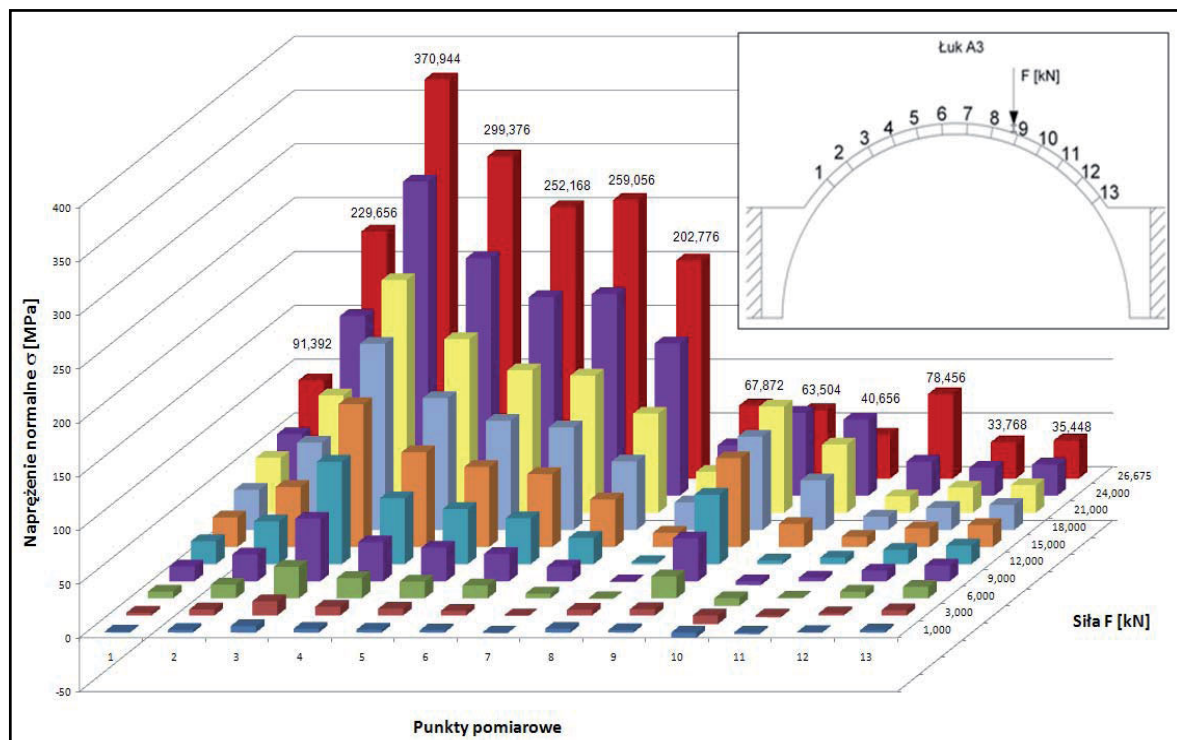


Rys. 4.115. Odkształcenia " $\varepsilon$ " w taśmie węglowej w punktach od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A3.

## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.37. Naprężenia normalne  $\sigma$  w taśmie węglowej w łuku A3

siła F [kN]	punkty pomiarowe												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1,008	2,352	6,048	3,528	2,688	1,848	-0,504	3,528	2,184	-4,704	-1,512	0,504	2,016
3	2,52	5,544	13,104	8,064	6,216	4,368	-0,168	5,208	5,712	-8,064	-1,68	2,016	4,872
6	6,216	12,768	29,232	18,816	15,456	12,096	4,368	-0,336	20,328	-7,056	0,672	6,216	10,752
9	13,608	24,864	58,128	36,288	31,08	25,368	13,608	-0,672	39,648	-3,528	3,192	9,912	14,616
12	21,336	39,648	95,088	61,152	51,24	42,672	24,36	1,68	64,512	3,192	6,048	13,272	17,304
15	27,552	55,776	132,72	88,032	74,424	67,704	44,184	13,272	82,656	21,504	9,576	17,304	20,496
18	37,128	81,144	172,872	122,472	101,472	95,424	63,672	25,536	86,688	46,032	12,432	20,496	23,184
21	50,904	109,2	216,216	161,448	132,384	127,512	92,232	38,136	98,784	63,336	15,12	23,352	25,536
24	57,288	166,992	291,816	220,584	184,464	187,32	141,456	46,704	76,944	70,728	31,584	25,872	28,896
26,675	91,392	229,656	370,944	299,376	252,168	259,056	202,776	67,872	63,504	40,656	78,456	33,768	35,448

Rys. 4.116. Naprężenia normalne  $\sigma$  w taśmie węglowej w punktach od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A3.Tab. 4.38. Naprężenia styczne  $\tau$  w spoinie klejowej – łuk A3

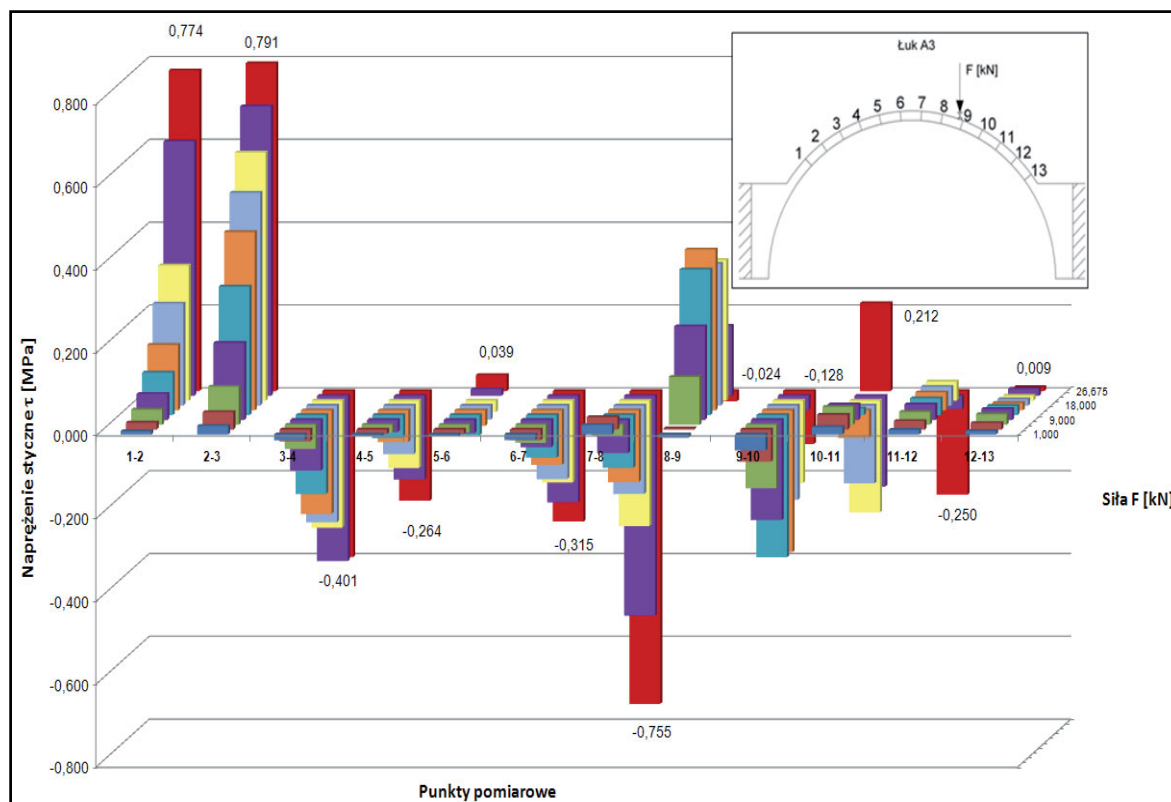
siła F [kN]	punkty pomiarowe											
	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13
1	0,008	0,021	-0,014	-0,005	-0,005	-0,013	0,023	-0,008	-0,039	0,018	0,011	0,008
3	0,017	0,042	-0,028	-0,010	-0,010	-0,025	0,030	0,003	-0,077	0,036	0,021	0,016
6	0,037	0,092	-0,058	-0,019	-0,019	-0,043	-0,026	0,116	-0,153	0,043	0,031	0,025
9	0,063	0,186	-0,122	-0,029	-0,032	-0,066	-0,080	0,226	-0,242	0,038	0,038	0,026
12	0,103	0,310	-0,190	-0,056	-0,048	-0,103	-0,127	0,352	-0,343	0,016	0,040	0,023
15	0,158	0,431	-0,250	-0,076	-0,038	-0,132	-0,173	0,389	-0,342	-0,067	0,043	0,018
18	0,246	0,514	-0,282	-0,118	-0,034	-0,178	-0,214	0,342	-0,228	-0,188	0,045	0,015
21	0,326	0,599	-0,307	-0,163	-0,027	-0,198	-0,303	0,340	-0,199	-0,270	0,046	0,012
24	0,614	0,699	-0,399	-0,202	0,016	-0,257	-0,531	0,169	-0,035	-0,219	-0,032	0,017
26,675	0,774	0,791	-0,401	-0,264	0,039	-0,315	-0,755	-0,024	-0,128	0,212	-0,250	0,009

## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.39. Stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie taśmy węglowej – łuk A3

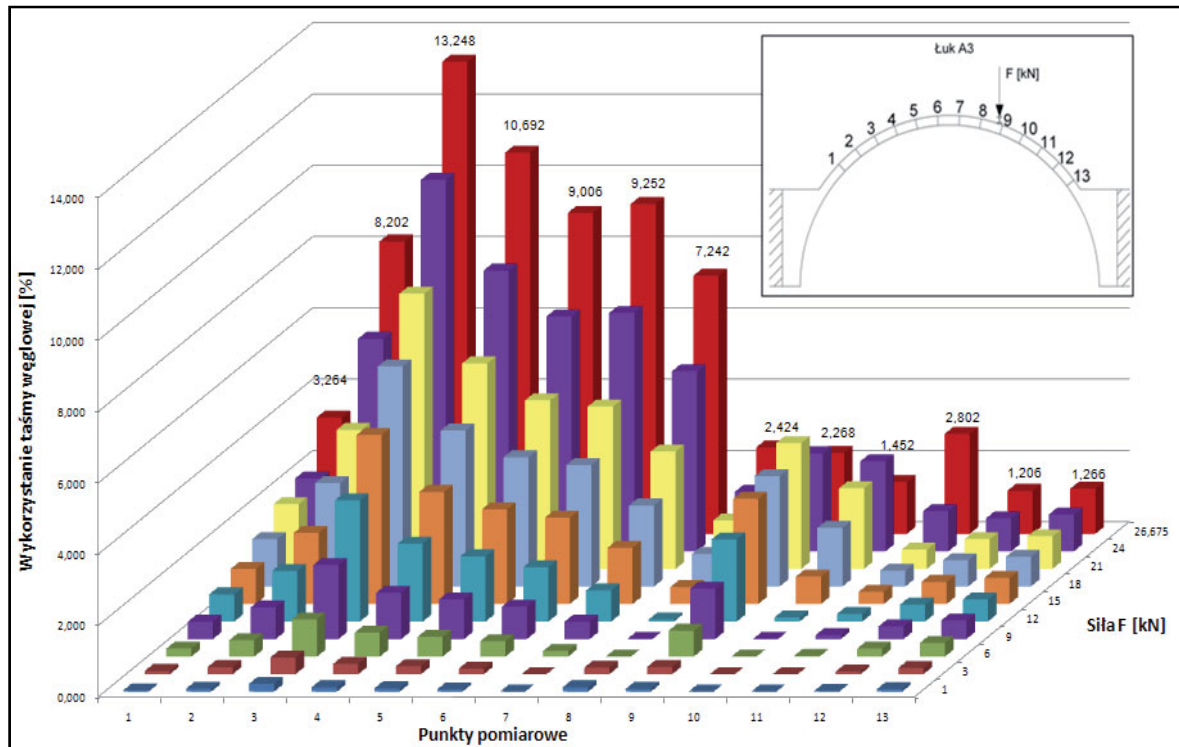
siła F [kN]	punkty pomiarowe												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	wykorzystanie wytrzymałości na rozciąganie taśmy węglowej [%]												
1	0,036	0,084	0,216	0,126	0,096	0,066	-	0,126	0,078	-	-	0,018	0,072
3	0,090	0,198	0,468	0,288	0,222	0,156	-	0,186	0,204	-	-	0,072	0,174
6	0,222	0,456	1,044	0,672	0,552	0,432	0,156	-	0,726	-	0,024	0,222	0,384
9	0,486	0,888	2,076	1,296	1,110	0,906	0,486	-	1,416	-	0,114	0,354	0,522
12	0,762	1,416	3,396	2,184	1,830	1,524	0,870	0,060	2,304	0,114	0,216	0,474	0,618
15	0,984	1,992	4,740	3,144	2,658	2,418	1,578	0,474	2,952	0,768	0,342	0,618	0,732
18	1,326	2,898	6,174	4,374	3,624	3,408	2,274	0,912	3,096	1,644	0,444	0,732	0,828
21	1,818	3,900	7,722	5,766	4,728	4,554	3,294	1,362	3,528	2,262	0,540	0,834	0,912
24	2,046	5,964	10,422	7,878	6,588	6,690	5,052	1,668	2,748	2,526	1,128	0,924	1,032
26,675	3,264	8,202	13,248	10,692	9,006	9,252	7,242	2,424	2,268	1,452	2,802	1,206	1,266

Na rys. 4.119 przedstawiono rzeczywistą postać zniszczenia, a na rys. 4.120 model zniszczenia łuku A3 wraz z powstałymi przegubami. Obserwowano, że na podporach nastąpiło ścięcie w spoinie pomiędzy cegłami, przegub utworzył się również w miejscu przyłożenia siły.

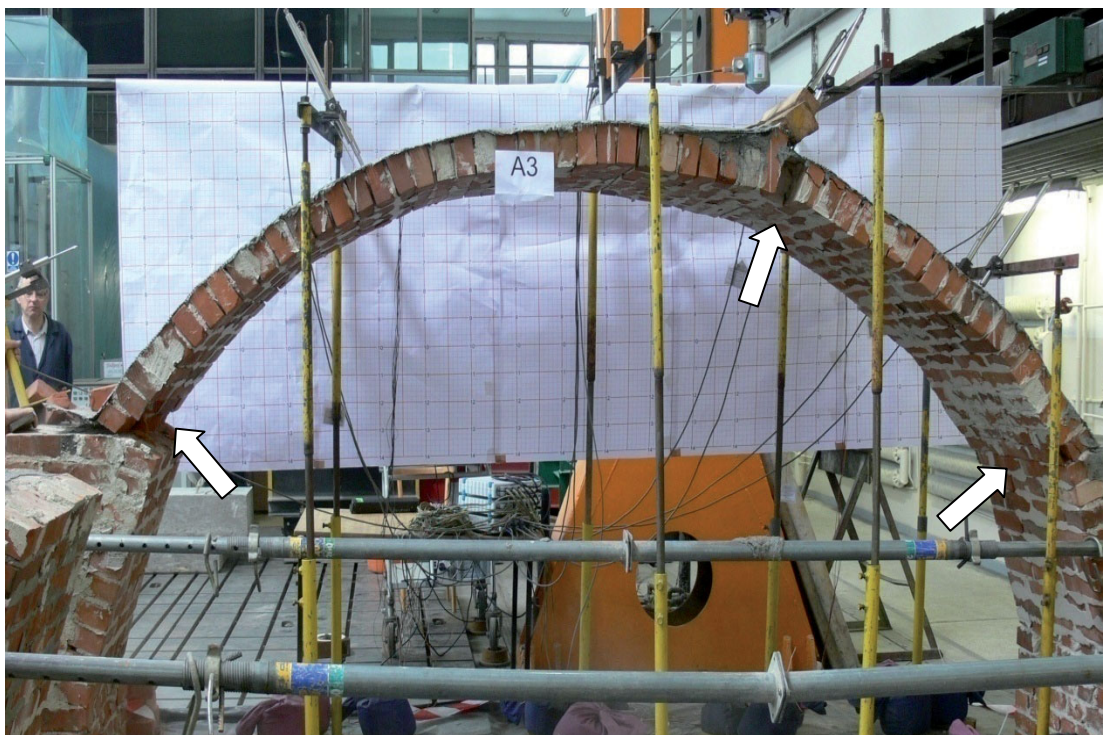


Rys. 4.117. Naprężenia styczne  $\tau$  w spoinie klejowej pomiędzy punktami od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą  $F$  w łuku A3.

## 4. Badania doświadczalne własne

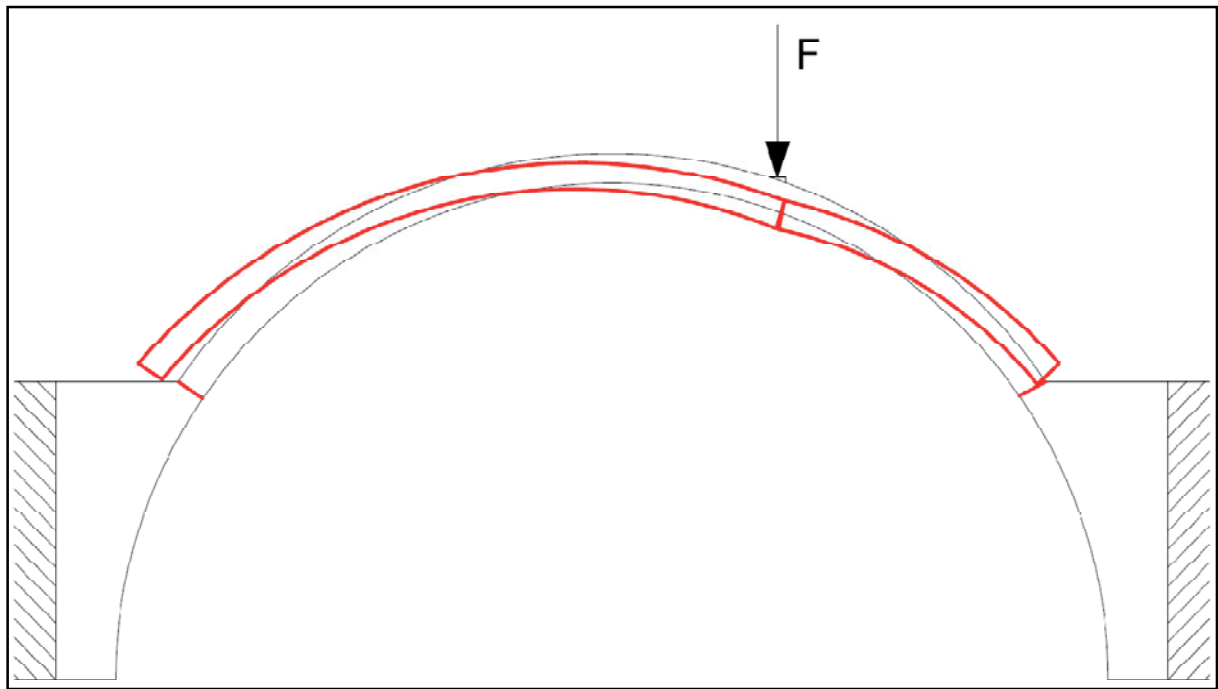


Rys. 4.118. Stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie taśmy węglowej w [%] w punktach od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A3.

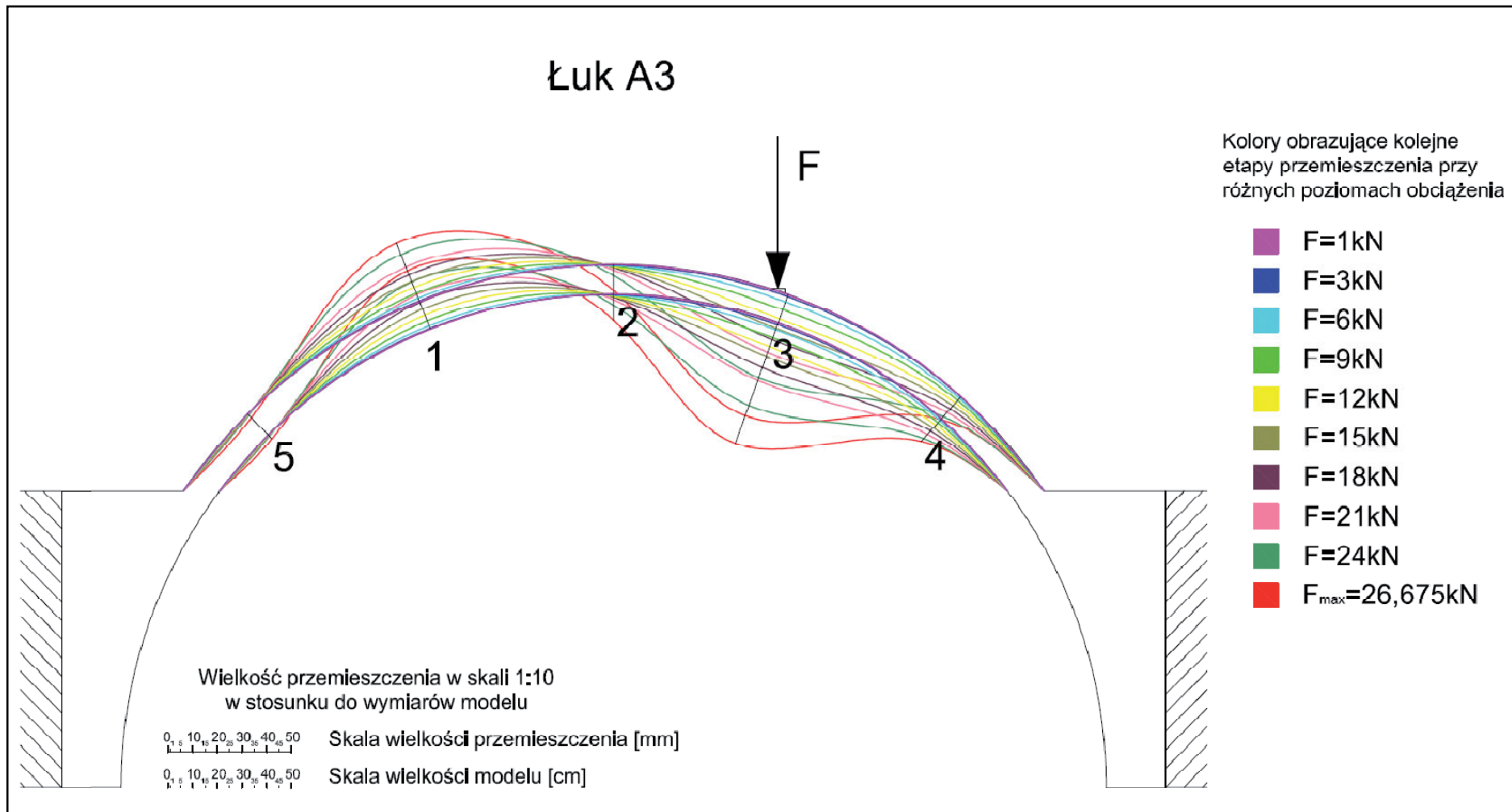


Rys. 4.119. Postać zniszczenia łuku A3 – zaznaczone powstałe przeguby (siła 26,675 kN).

## 4. Badania doświadczalne własne



*Rys. 4.120. Model zniszczenia łuku A3 wraz z powstałymi przegubami.*

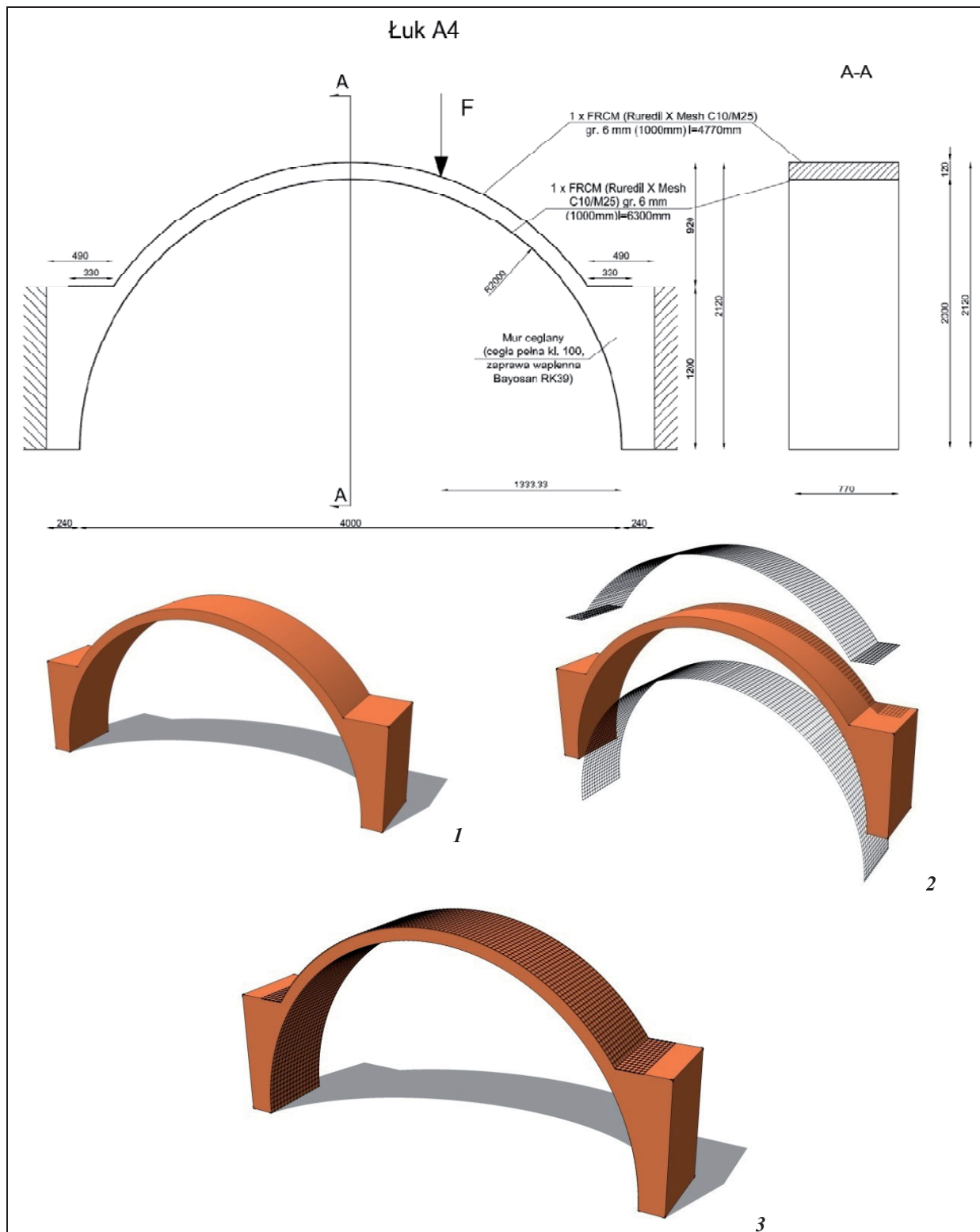


Rys. 4.121. Przeszyczenia w 5 punktach pomiarowych przy kolejnych poziomach obciążenia – łuk A3.

## 4. Badania doświadczalne własne

#### 4.4.3.4. Badania modelu wzmocnionego za pomocą materiału FRCM – siatki z włókna węglowego Ruredil X Mesh C10 osadzonej w zaprawie Ruredil X Mesh M25 po stronie grzbietowej oraz po stronie podniebienia łuku – model A4

Model skonstruowano jak na rys. 4.122. Obciążenie realizowano identycznie jak w poprzednich przypadkach.



Rys. 4.122. Model łuku A4 – widok z boku i przekrój poprzeczny A-A oraz etapy wzmocnienia łuku (1-3).

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.123. Łuk A4 – widok ogólny (opisane podpory A i B).

Na rys. 4.124 – 4.128 przedstawiono model badawczy w trakcie wzmacniania, a na rys. 4.129 – 4.132 zachowanie łuku – zarysowania powstałe podczas badania.



Rys. 4.124. Pierwsza warstwa zaprawy we wzmacnieniu FRCM.



Rys. 4.125. Przyklejanie siatki z włókna węglowego na łuk A4.



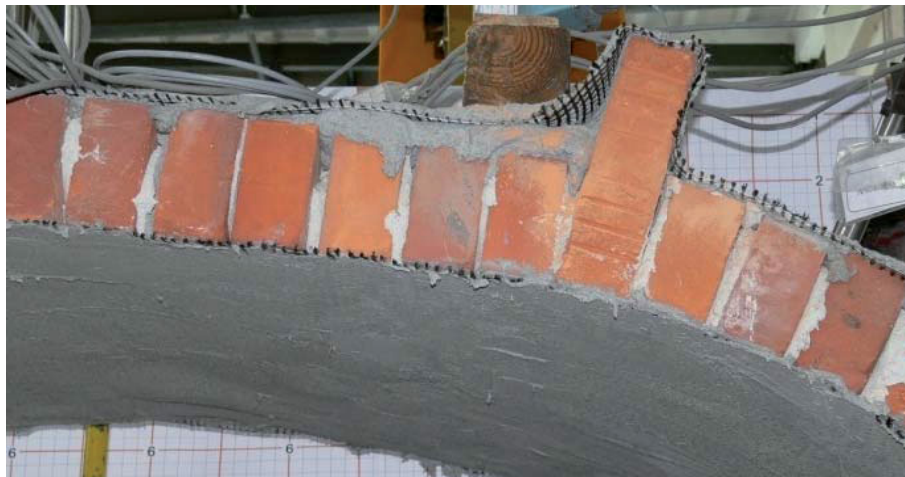
## 4. Badania doświadczalne własne



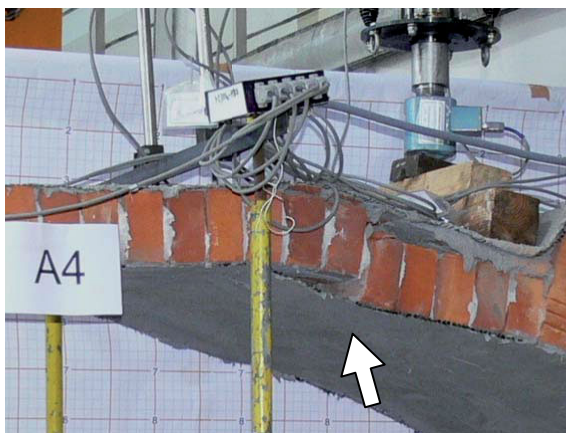
Rys. 4.126. Druga warstwa zaprawy we wzmocnieniu FRCM.



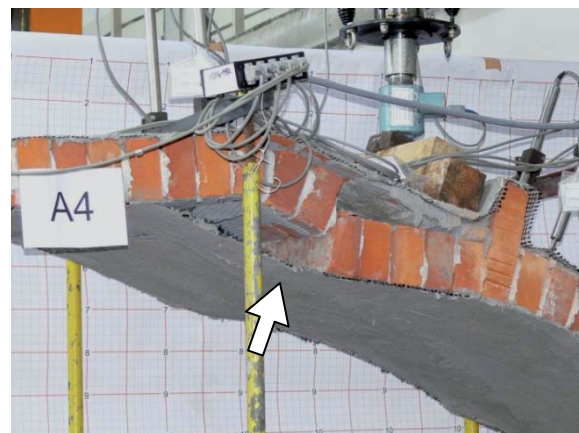
Rys. 4.127. Wzmocnienie FRCM po stronie podniebienia łuku A4.



Rys. 4.128. Wzmocnienie FRCM po obu stronach łuku A4.



Rys. 4.129. Ścięcie spoiny (siła ok. 21 kN).

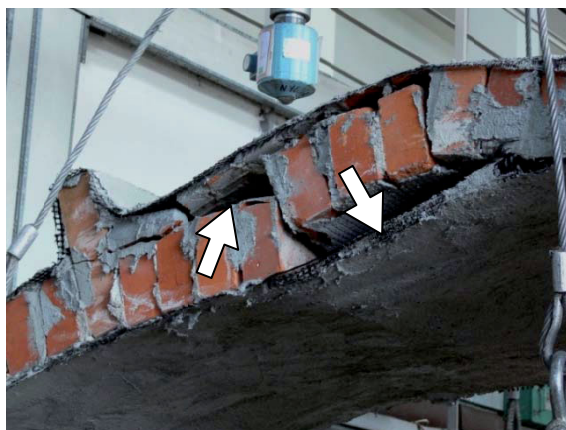


Rys. 4.130. Wykształcenie przegubu (siła ok. 25 kN).

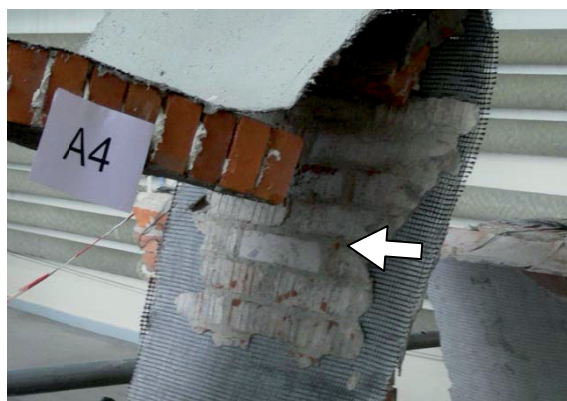
## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.131. Zniszczeni łuku (siła 26,368 kN).



Rys. 4.132. Odspojenie siatki (siła 26,368 kN).



Rys. 4.133. Odspojenie statki wzmacniającej z fragmentami łuku.

Na rys. 4.133 przedstawiono fragment zniszczonego łuku A4 obrazujący odspojenie materiału FRCM. Obserwowano odspojenie siatki z włókna węglowego od konstrukcji murowej z fragmentami cegieł co świadczy o tym, że zniszczenie (zerwanie) nastąpiło częściowo w ośrodku murowym, częściowo w warstwie zaprawy.

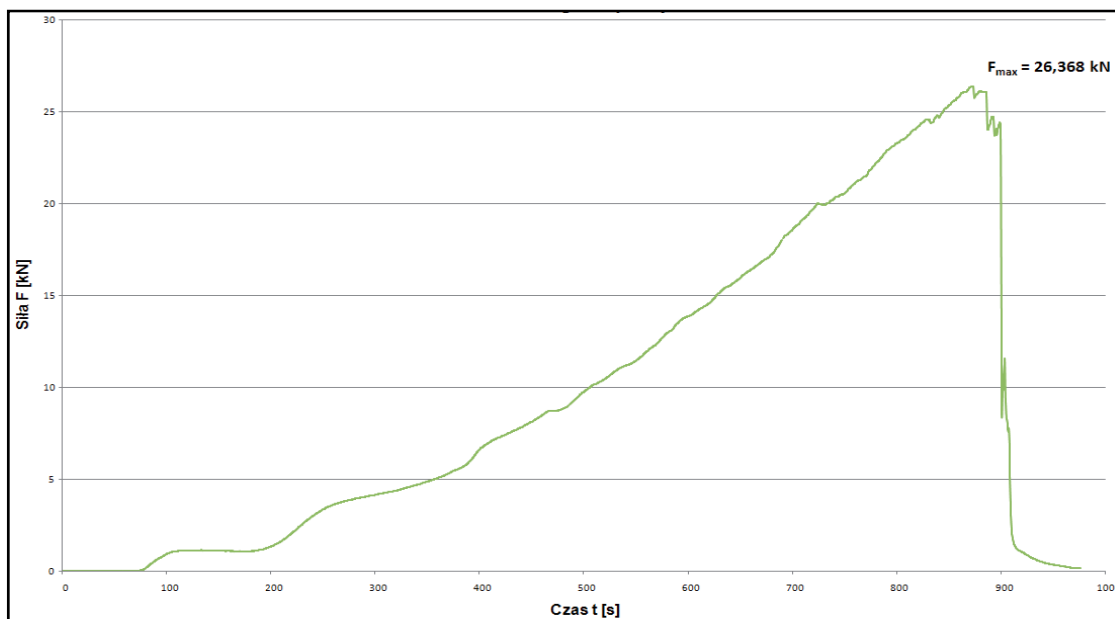
Wyznaczono ścieżkę równowagi statycznej (rys. 4.134) oraz mierzono siłę niszczącą wynoszącą 26,368 kN. Mierzono również przemieszczenia w wyznaczonych przekrojach. Wyniki tych pomiarów podano w tab. 4.40 oraz na rys. 4.138 a zależność pomiędzy nimi przedstawiono na rys. 4.135.

Tab. 4.40. Wyniki pomiarów przemieszczeń w łuku A4

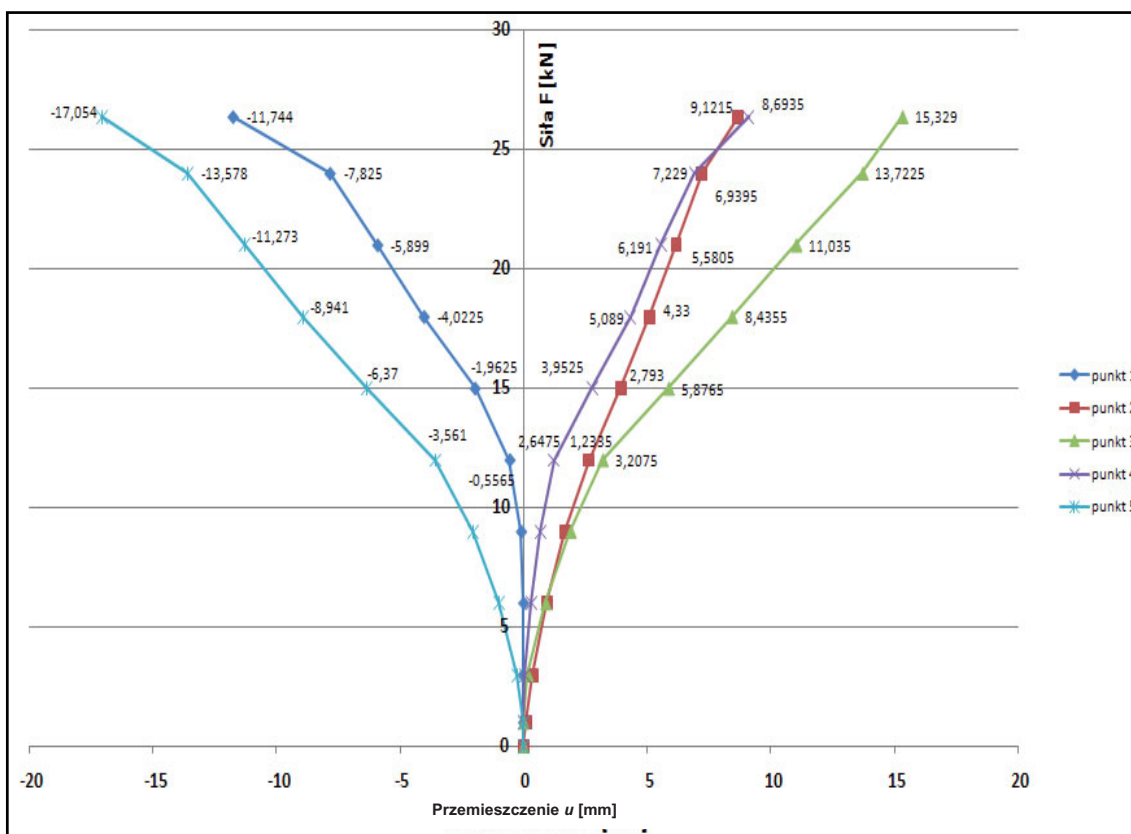
punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła F [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-0,0045	0,1095	0,0050	0,0000	0,0020
3	-0,0015	0,3835	0,1835	0,0685	-0,2410
6	0,0035	0,9470	0,9015	0,3170	-0,9760
9	-0,0910	1,6705	1,9110	0,6750	-2,0230
12	-0,5565	2,6475	3,2075	1,2335	-3,5610
15	-1,9625	3,9525	5,8765	2,7930	-6,3700
18	-4,0225	5,0890	8,4355	4,3300	-8,9410
21	-5,8990	6,1910	11,0350	5,5805	-11,2730
24	-7,8250	7,2290	13,7225	6,9395	-13,5780
26,368	-11,7440	8,6935	15,3290	9,1215	-17,0540

\* wartości ujemne przemieszczeń obrazują wypiętrzenie modelu łuku

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.134. Ścieżka równowagi statycznej dla łuku A4.



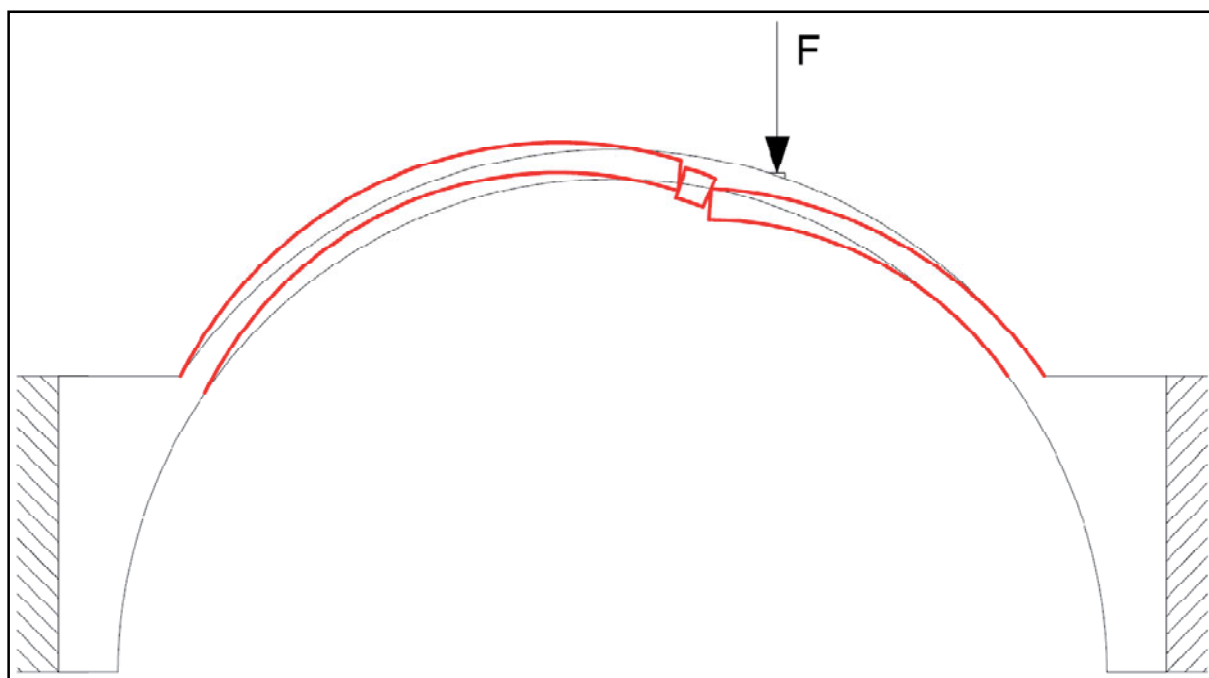
Rys. 4.135. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w poszczególnych punktach pomiarowych – łuk A4.

Na rys. 4.136 przedstawiono rzeczywistą postać zniszczenia, a na rys. 4.137 model zniszczenia łuku A4 wraz z powstałymi przegubami. Można zauważyć, że przegub i ściecie utworzyły się w miejscu przyłożenia siły. Pomimo znacznego obciążenia nie doszło do zniszczenia całego łuku, a tylko do zniszczenia fragmentu – bez zawalenia się konstrukcji.

## 4. Badania doświadczalne własne

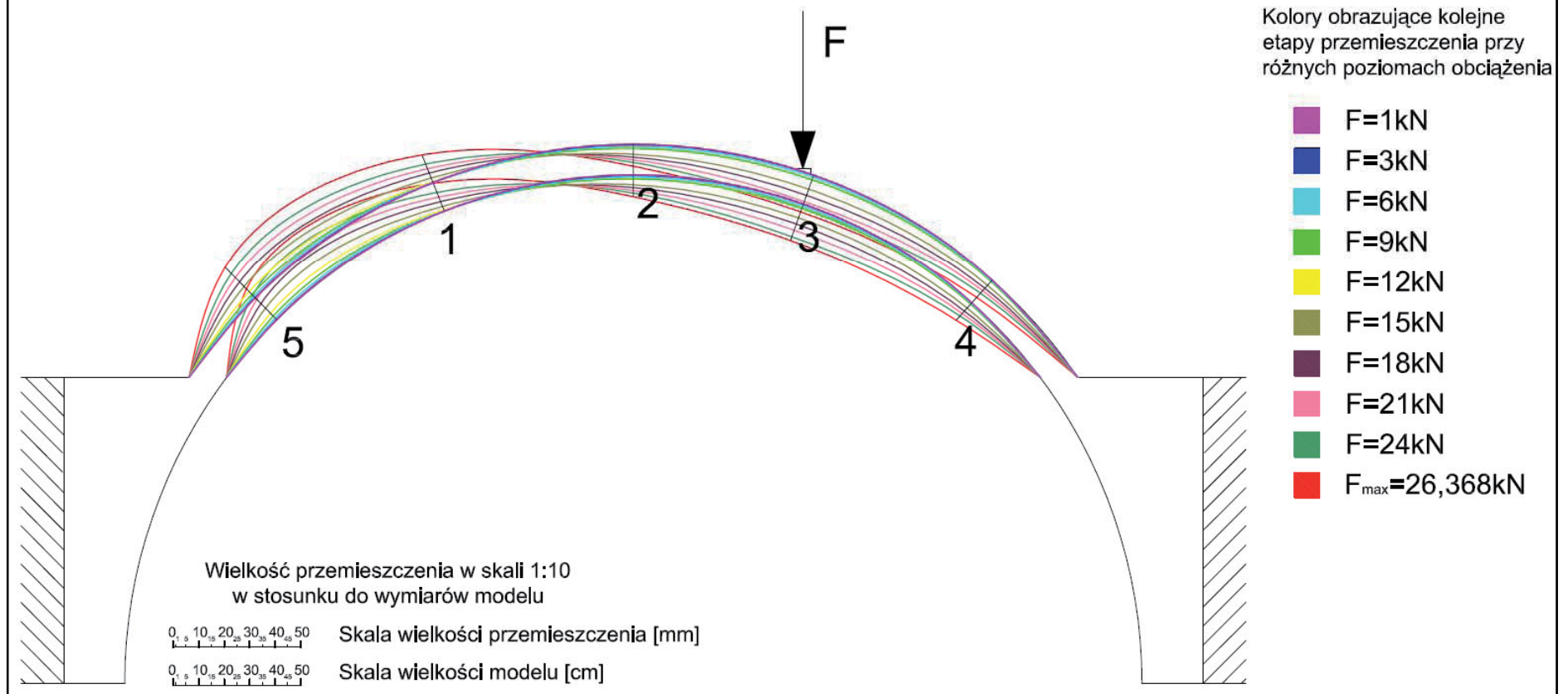


Rys. 4.136. Schemat zniszczenia łuku A4 – zaznaczony powstały przegub (siła 26,368 kN).



Rys.4.137. Model zniszczenia łuku A4.

# Łuk A4

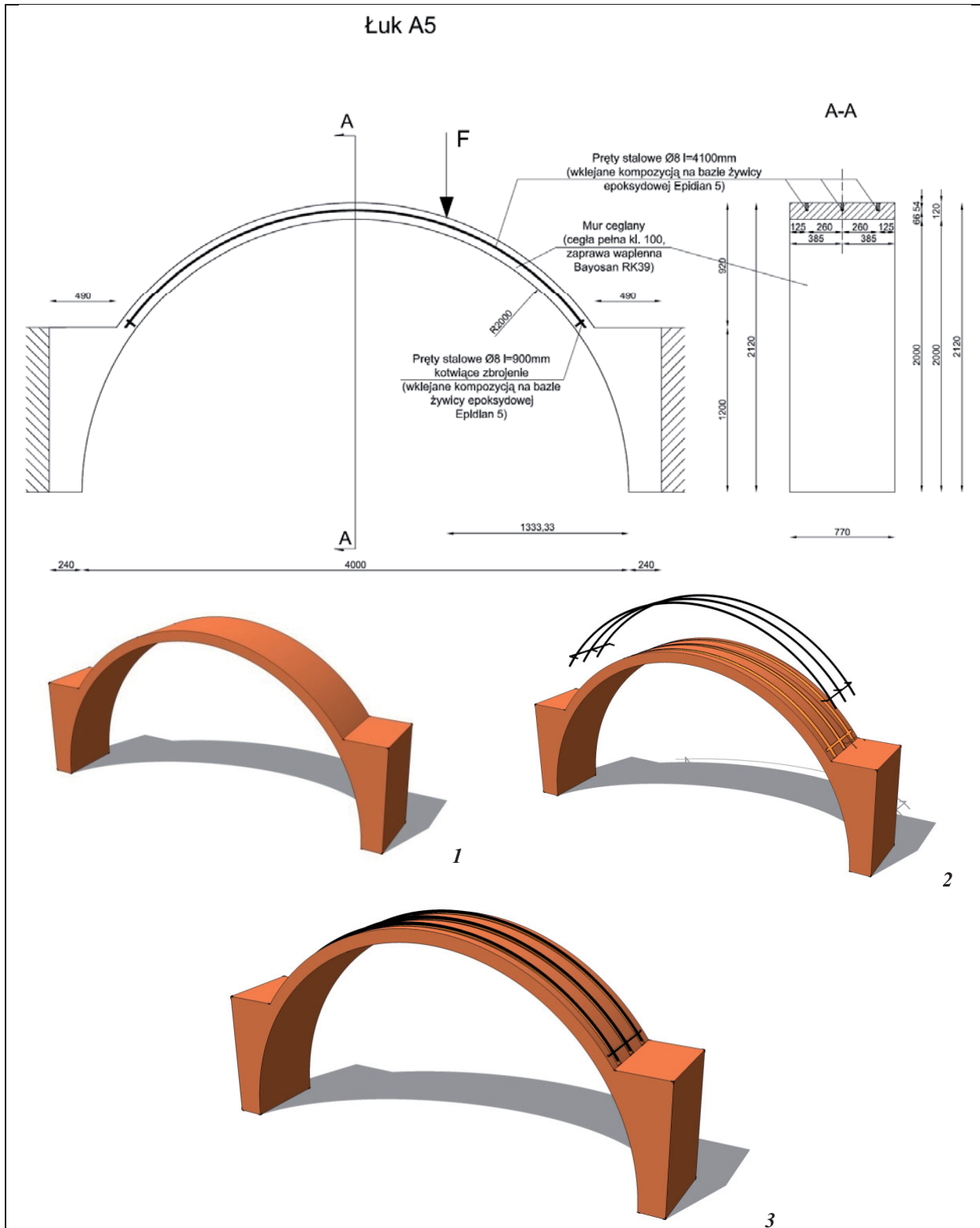


Rys. 4.138. Przemieszczenia w 5 punktach pomiarowych przy kolejnych poziomach obciążenia – łuk A4.

## 4. Badania doświadczalne własne

#### 4.4.3.5. Badania modelu wzmacnionego za pomocą prętów stalowych $\varnothing 8$ , osadzonych w brzdach wykonanych po stronie grzbietowej łuku, wklejonych za pomocą kompozycji klejowej na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 – model A5

Model skonstruowano jak na rys. 4.139. Obciążenie realizowano identycznie jak w poprzednich przypadkach.



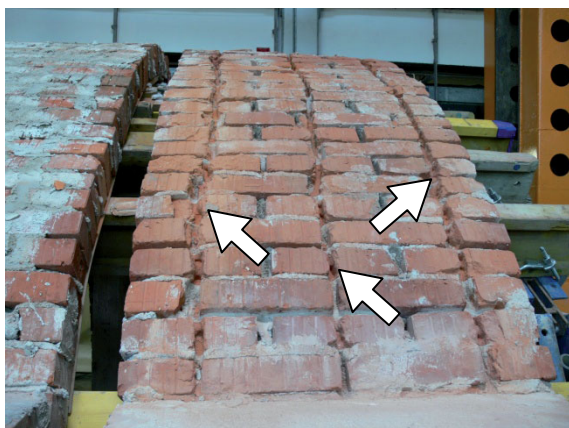
Rys. 4.139. Model łuku A5 – widok z boku i przekrój poprzeczny A-A oraz etapy wzmacniania łuku (1-3).

## 4. Badania doświadczalne własne

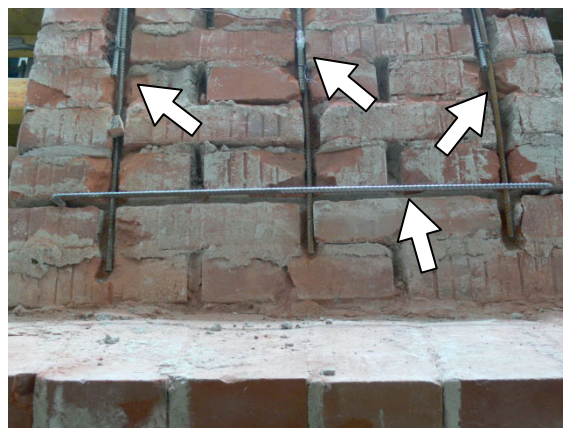


Rys. 4.140. Łuk A5 – widok ogólny (opisane podpory A i B).

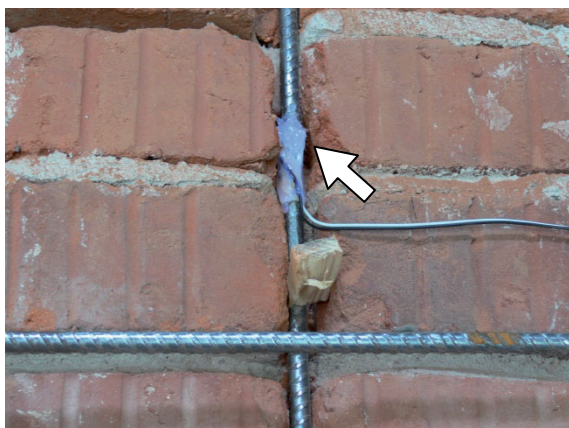
Na rys. 4.141 – 4.145 przedstawiono model badawczy w trakcie budowy i wzmacniania, a na rys. 4.146 – 4.147 zmiany i zarysowania powstałe podczas badania.



Rys. 4.141. Bruzdy na pręty stalowe w łuku A5.



Rys. 4.142. Strzemię poprzeczne utrzymujące wzmacniające pręty stalowe.



Rys. 4.143. Tensometr elektrooporowy na przecie stalowym.



Rys. 4.144. Wzmacniające pręty stalowe zalane kompozycja klejową.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.145. Gotowe wzmocnienie w łuku A5.



Rys. 4.146. Zarysowanie podniebienia łuku A5 (siła ok. 11 kN).



Rys. 4.147. Zarysowanie (tworzenie przegubu) w miejscu przyłożenia obciążenia (siła ok. 17 kN).

Wyznaczono ścieżkę równowagi statycznej (rys. 4.150) oraz mierzono siłę niszczącą wynoszącą 19,314 kN. Mierzono również przemieszczenia w wyznaczonych przekrojach. Wyniki tych pomiarów zaprezentowano w tabeli 4.41 oraz na rys. 4.158 a zależność pomiędzy nimi przedstawiono na rys. 4.151.

Tab. 4.41. Wyniki pomiarów przemieszczeń w łuku A5

punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła F [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-1,5000	-0,5790	0,5835	1,6815	-1,5090
3	-1,9585	-0,0515	1,6195	1,8220	-2,1650
6	-2,9350	0,6725	3,3245	2,0455	-3,2910
9	-4,3210	1,4475	5,4345	2,4560	-4,8090
12	-7,3755	2,1775	9,2855	3,6625	-8,0060
15	-11,2200	2,9355	13,7875	5,1965	-11,9900
18	-17,0410	3,9215	20,3360	7,4800	-17,5550
19,314	-21,5445	4,8475	25,4595	9,1780	-21,8300

\* wartości ujemne przemieszczeń obrazują wypiętrzenie modelu łuku



## 4. Badania doświadczalne własne

Na rys. 4.148 – 4.149 przedstawiono fragmenty zniszczonego łuku A5 kładąc nacisk na zobrazowanie odspojenia wklejonych prętów stalowych od konstrukcji łuku.

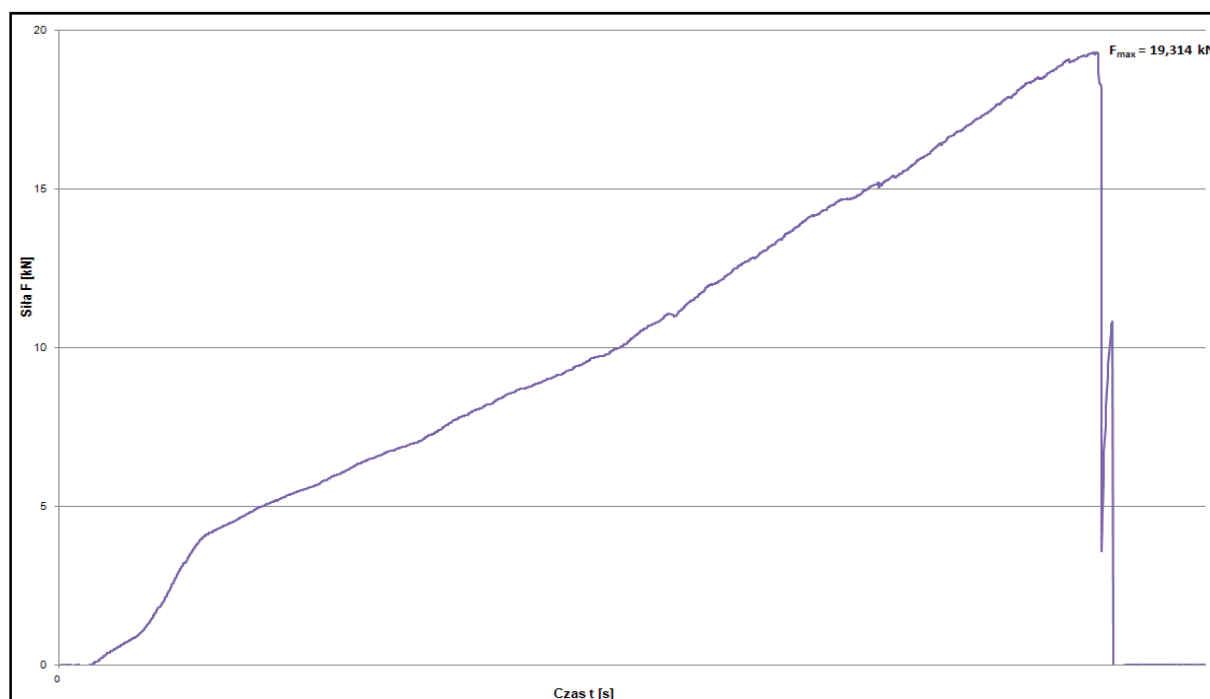


Rys. 4.149. Pręt stalowy z przyklejonymi fragmentami cegły z łuku A5.



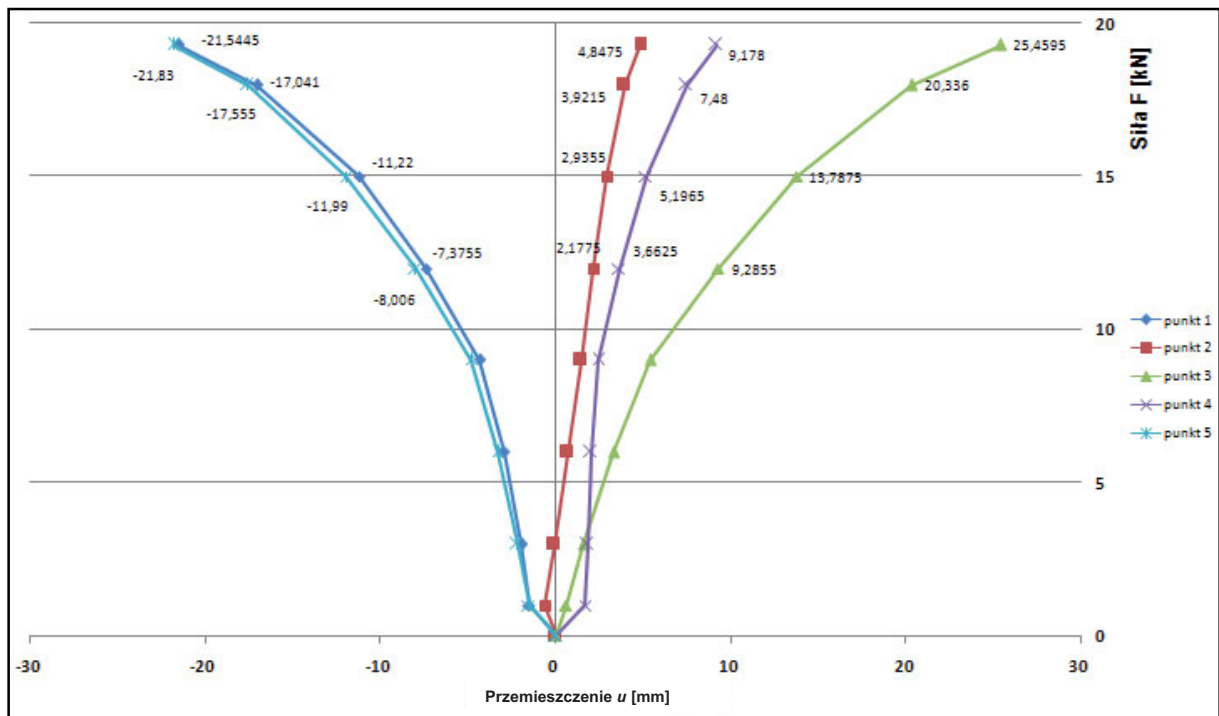
Rys. 4.150. Pręt stalowy z fragmentami przyklejonej cegły z łuku A5.

Zaobserwowano odspojenie prętów stalowych od konstrukcji murowej z fragmentami cegieł, co świadczy o tym, że zniszczenie (zerwanie) połączenia nastąpiło w ośrodku murowym, a spoina klejowa pozostała nienaruszona.



Rys. 4.150. Ścieżka równowagi statycznej dla łuku A5.

## 4. Badania doświadczalne własne



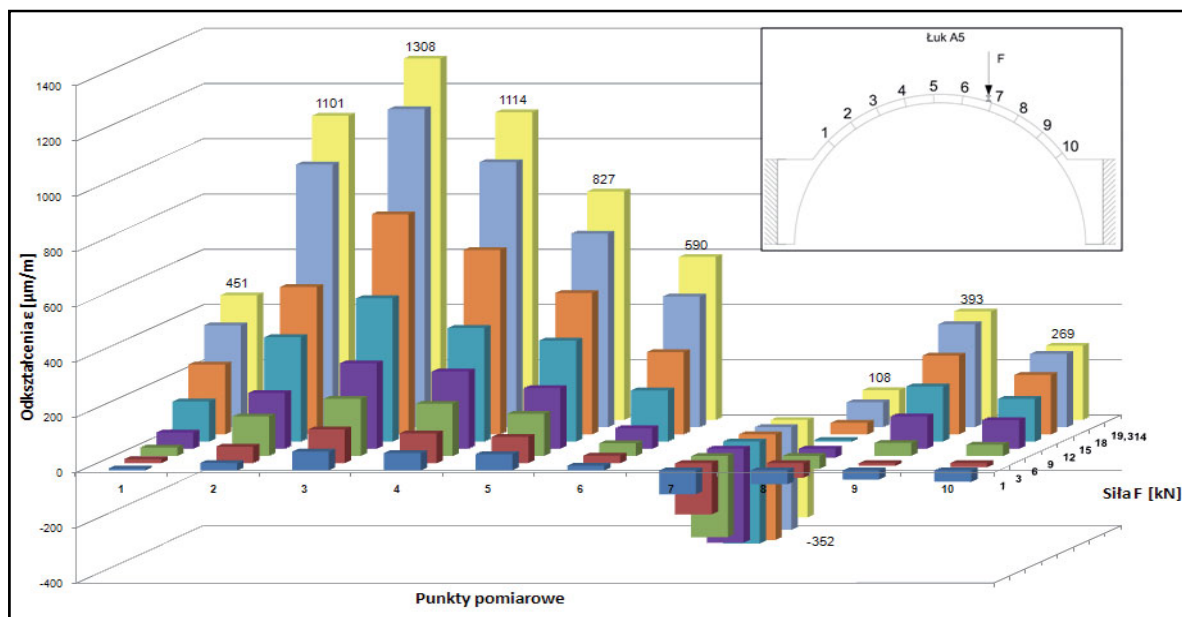
Rys. 4.151. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w poszczególnych punktach pomiarowych – łuk A5.

W trakcie badań przeprowadzono również pomiary odkształceń we wzmacniającym pręcie stalowym. Wyznaczono naprężenia normalne  $\sigma$  w stali oraz naprężenia ścinające  $\tau$  w spoinie klejowej. Wyniki tych pomiarów przedstawiono w tab. 4.42 (odkształcenia), 4.43 i 4.44 (naprężenia) oraz na rys. 4.152 – 4.154. W tabeli 4.45 i na rys. 4.155 przedstawiono stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie pręta stalowego.

Tab. 4.42. Wyniki pomiarów odkształceń w pręcie stalowym w łuku A5

siła F [kN]	punkty pomiarowe									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	odkształcenia $\epsilon$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]									
1	7	27	68	63	59	17	-86	-50	-33	-41
3	15	60	122	108	95	27	-185	-53	-9	-14
6	31	143	207	189	153	46	-294	-47	47	41
9	59	202	309	280	219	74	-340	-32	117	104
12	145	378	519	411	366	185	-369	6	200	155
15	253	533	797	668	512	298	-382	42	285	215
18	369	951	1151	960	701	473	-371	90	373	265
19,314	451	1101	1308	1114	827	590	-352	108	393	269

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.152. Odkształcenia " $\epsilon$ " w pręcie stalowym w punktach od 1 do 10 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A5.

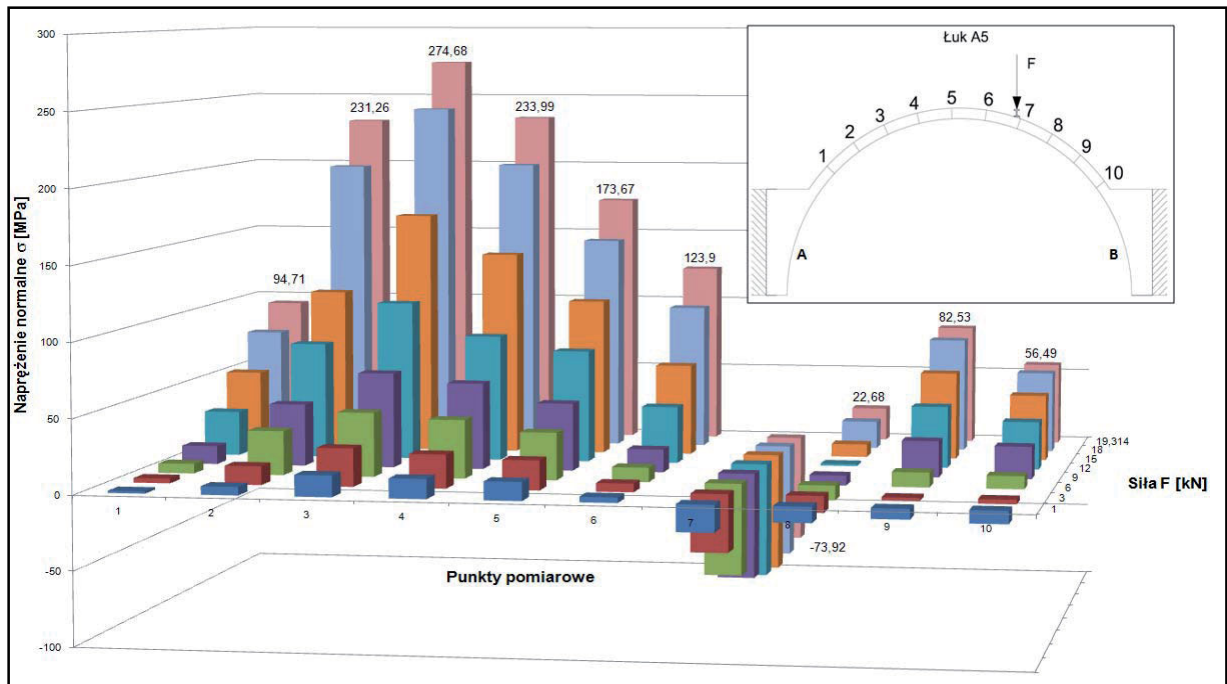
Tab. 4.43. Naprężenia normalne " $\sigma$ " w pręcie stalowym – łuk A5

siła F [kN]	punkty pomiarowe									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	naprężenia normalne $\sigma$ [MPa]									
1	1,47	5,63	14,28	13,16	12,39	3,57	-18,06	-10,5	-6,93	-8,61
3	3,15	12,62	25,62	22,69	19,95	5,67	-38,85	-11,13	-1,89	-2,94
6	6,51	29,98	43,47	39,62	32,13	9,66	-61,74	-9,87	9,87	8,61
9	12,39	42,39	64,89	58,79	45,99	15,54	-71,40	-6,72	24,57	21,84
12	30,45	79,38	108,99	86,39	76,86	38,85	-77,49	1,26	42,00	32,55
15	53,13	112,02	167,37	140,2	107,52	62,58	-80,22	8,82	59,85	45,15
18	77,49	199,65	241,71	201,56	147,21	99,33	-77,91	18,9	78,33	55,65
19,314	94,71	231,26	274,68	233,99	173,67	123,9	-73,92	22,68	82,53	56,49

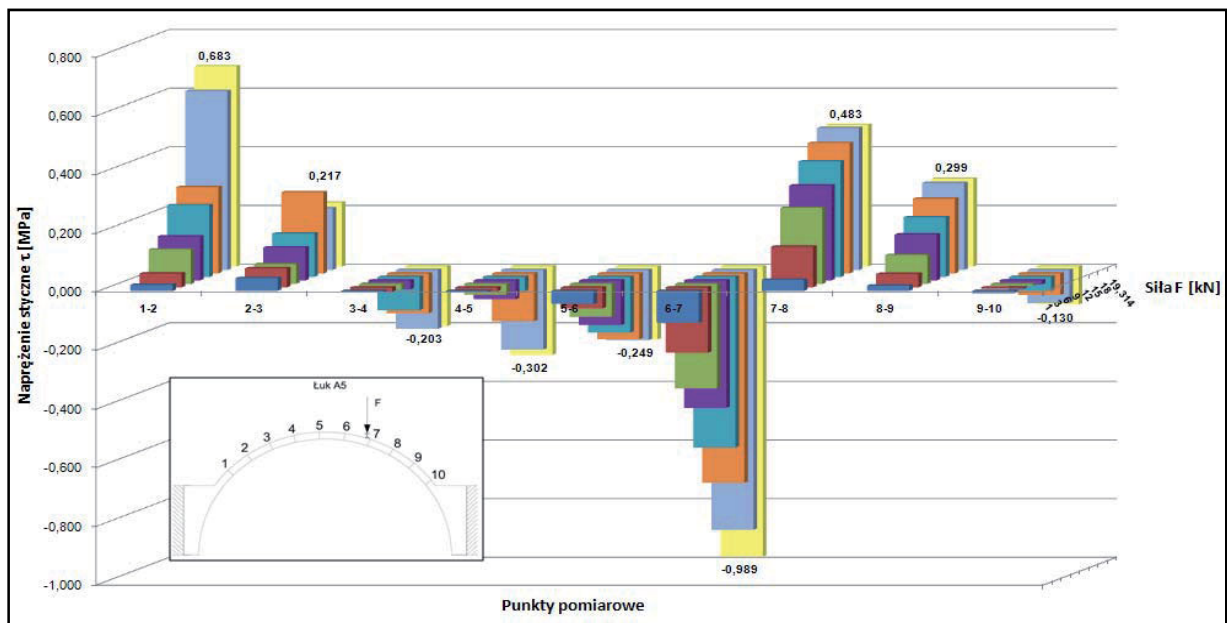
Tab. 4.44. Naprężenia styczne " $\tau$ " w spoinie klejowej – łuk A5

siła F [kN]	punkty pomiarowe								
	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
	naprężenia styczne $\tau$ [MPa]								
1	0,021	0,043	-0,006	-0,004	-0,044	-0,108	0,038	0,018	-0,008
3	0,047	0,065	-0,015	-0,014	-0,071	-0,223	0,139	0,046	-0,005
6	0,117	0,067	-0,019	-0,037	-0,112	-0,357	0,259	0,099	-0,006
9	0,150	0,113	-0,031	-0,064	-0,152	-0,435	0,323	0,156	-0,014
12	0,245	0,148	-0,113	-0,048	-0,190	-0,582	0,394	0,204	-0,047
15	0,294	0,277	-0,136	-0,163	-0,225	-0,714	0,445	0,255	-0,074
18	0,611	0,210	-0,201	-0,272	-0,239	-0,886	0,484	0,297	-0,113
19,314	0,683	0,217	-0,203	-0,302	-0,249	-0,989	0,483	0,299	-0,130

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.153. Naprężenia normalne " $\sigma$ " w taśmie węglowej w punktach od 1 do 10 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A5.

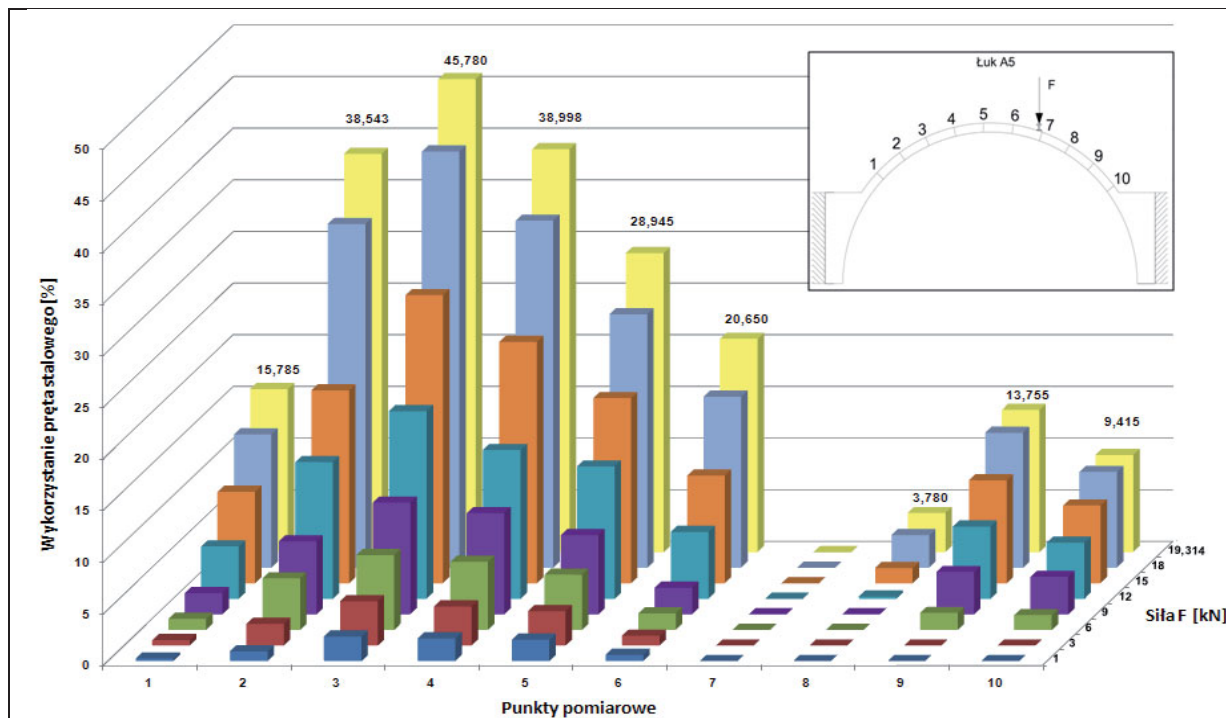


Rys. 4.154. Naprężenia styczne " $\tau$ " w spoinie klejowej pomiędzy punktami od 1 do 10 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A5.

Tab. 4.45. Stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie pręta stalowego – łuk A5

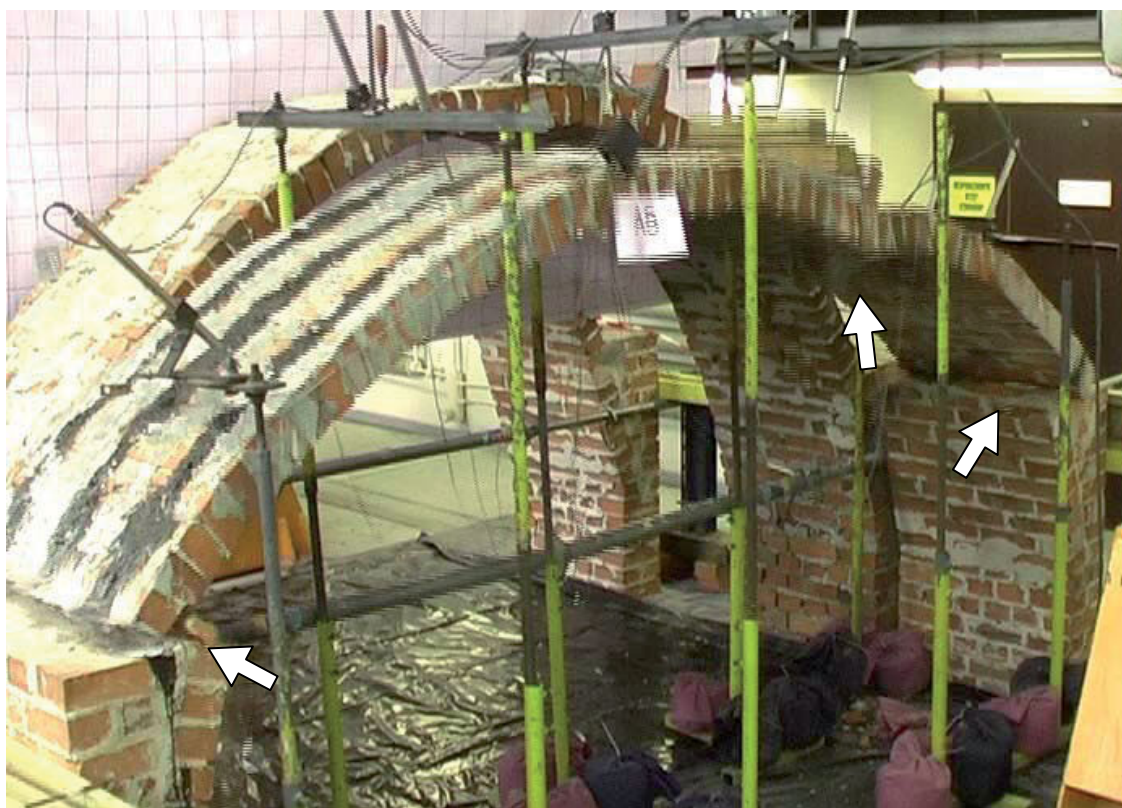
siła F [kN]	punkty pomiarowe									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	wykorzystanie wytrzymałości na rozciąganie pręta stalowego [%]									
1	0,245	0,938	2,380	2,193	2,065	0,595	-	-	-	-
3	0,525	2,103	4,270	3,782	3,325	0,945	-	-	-	-
6	1,085	4,997	7,245	6,603	5,355	1,610	-	-	1,645	1,435
9	2,065	7,065	10,815	9,798	7,665	2,590	-	-	4,095	3,640
12	5,075	13,230	18,165	14,398	12,810	6,475	-	0,210	7,000	5,425
15	8,855	18,670	27,895	23,367	17,920	10,430	-	1,470	9,975	7,525
18	12,915	33,275	40,285	33,593	24,535	16,555	-	3,150	13,055	9,275
19,314	15,785	38,543	45,780	38,998	28,945	20,650	-	3,780	13,755	9,415

## 4. Badania doświadczalne własne



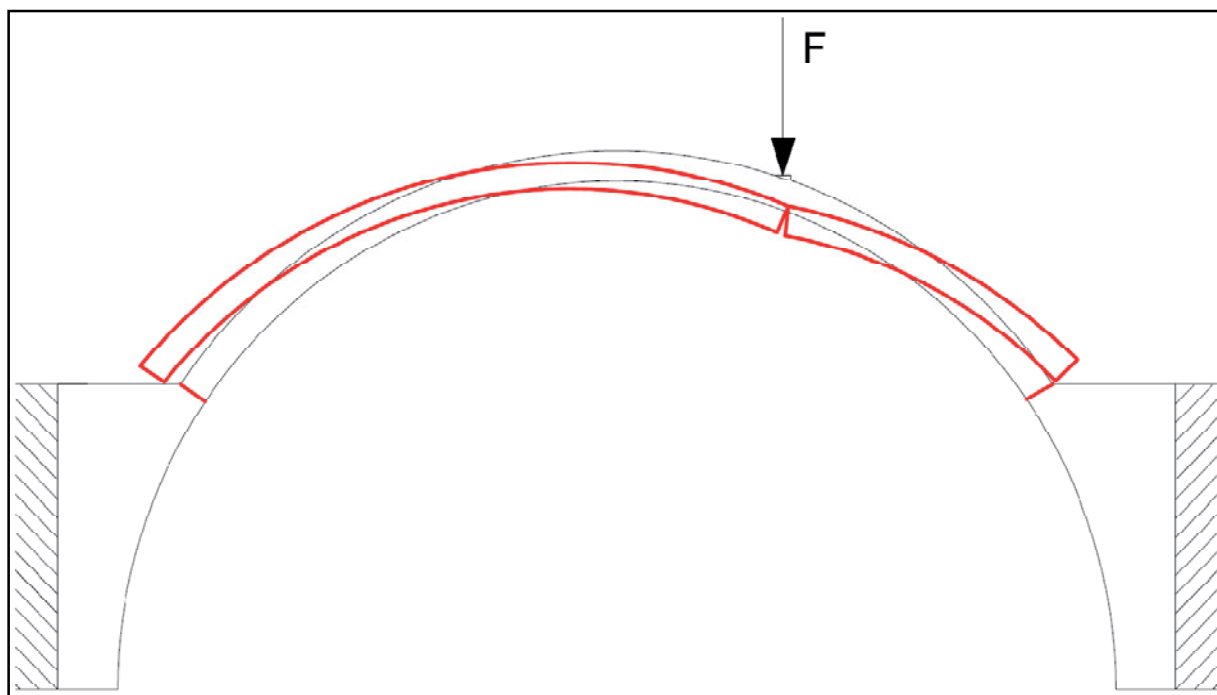
Rys. 4.155. Stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie pręta stalowego w [%] w punktach od 1 do 10 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A5.

Na rys. 4.156 przedstawiono rzeczywistą postać zniszczenia, a na rys. 4.157 model zniszczenia łuku A5 wraz z powstałymi przegubami. Należy zauważyć, że w pierwszym etapie obserwowano zniszczenie na podporach (ścięcie podpór), dopiero później nastąpiło rozwarcie przegubu pod miejscem przyłożenia siły.

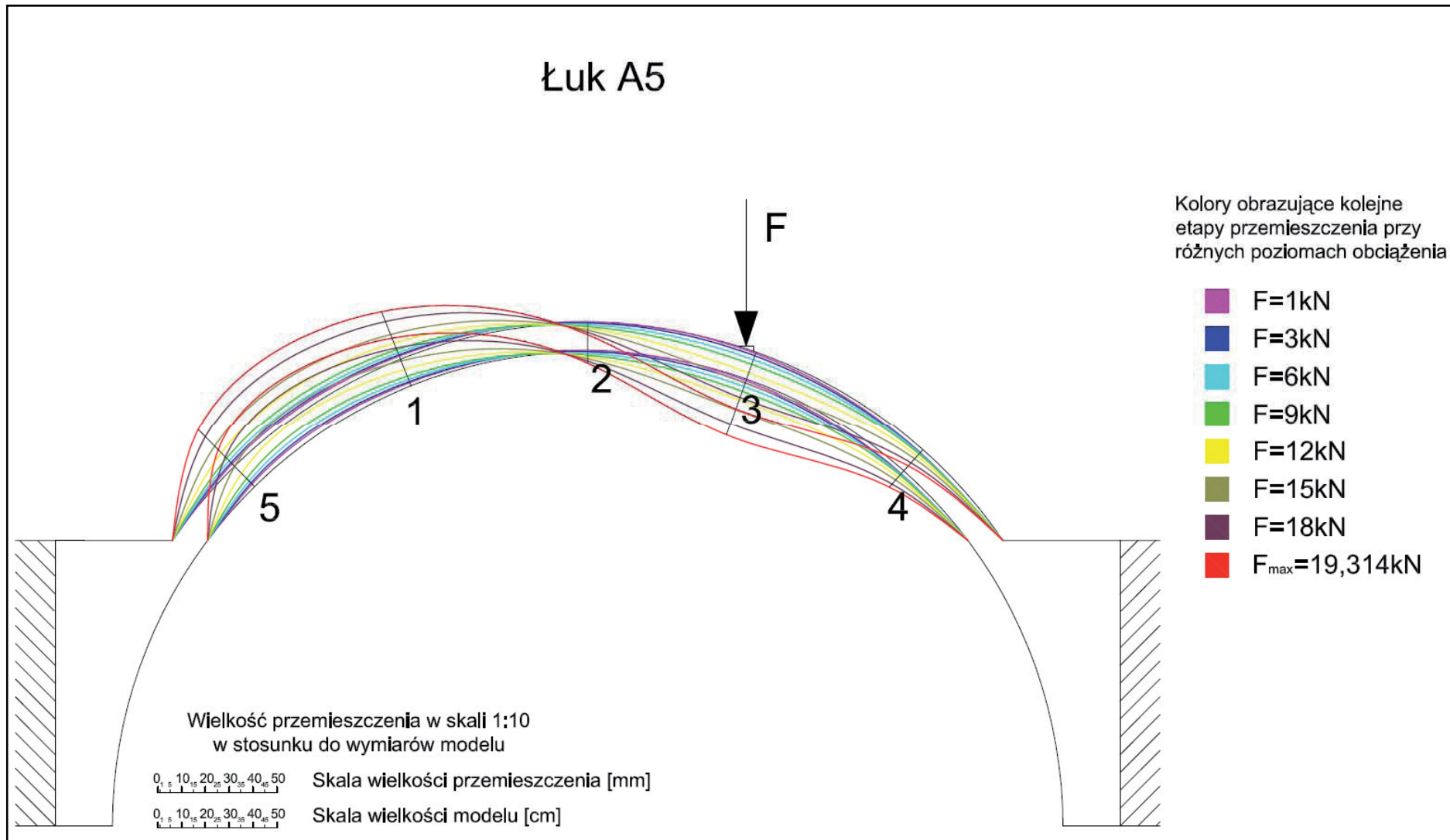


Rys. 4.156. Schemat zniszczenia łuku A5 – zaznaczone powstałe przeguby (siła 19,314 kN).

## 4. Badania doświadczalne własne



*Rys. 4.157. Model zniszczenia łuku A5 wraz z powstałymi przegubami.*

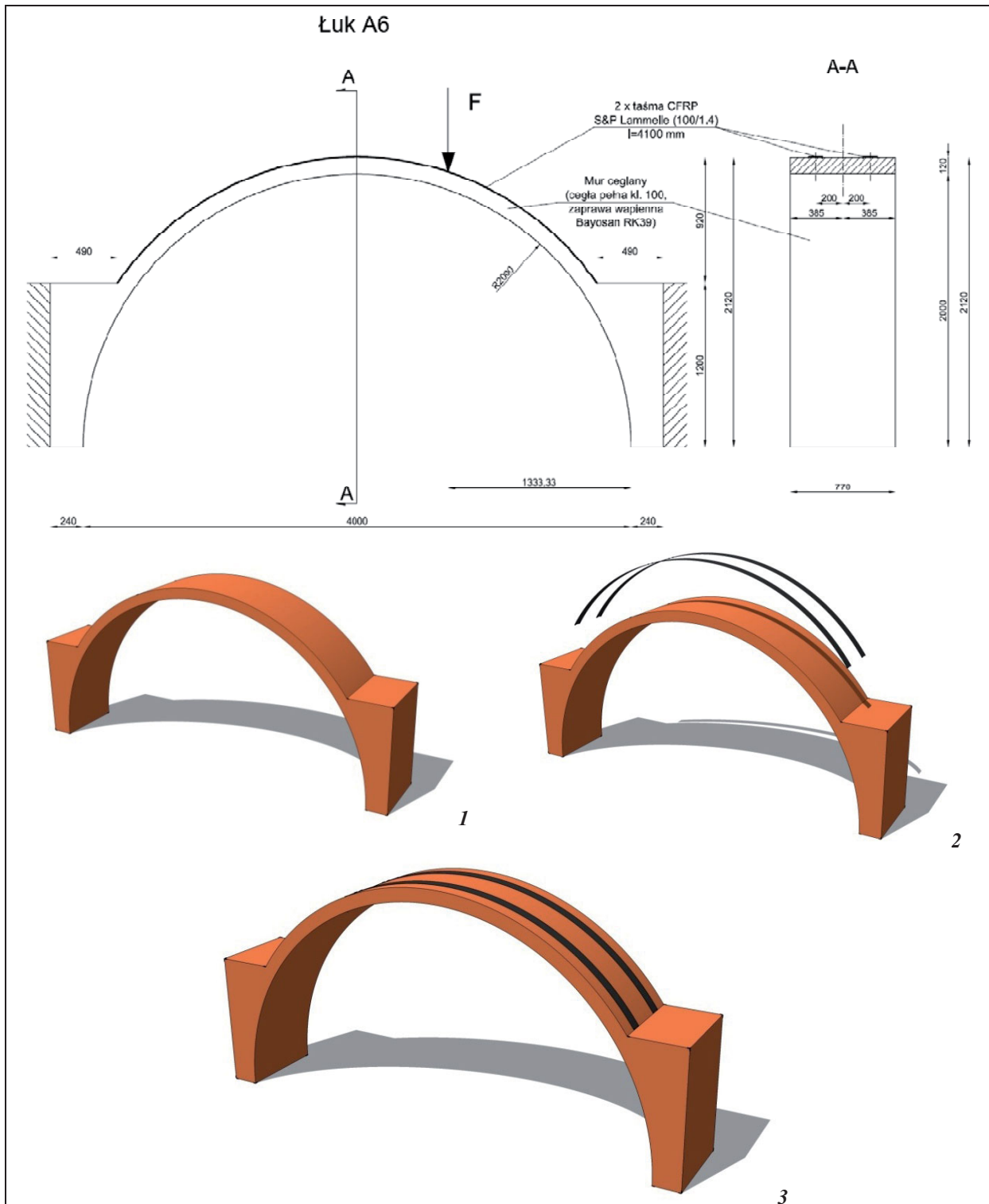


Rys. 4.158. Przemieszczenia w 5 punktach pomiarowych przy kolejnych poziomach obciążenia – łuk A5.

## 4. Badania doświadczalne własne

#### 4.4.3.6. Badania modelu wzmacnionego za pomocą 2 taśm węglowych CFRP S&P Lamelle CFK 150/2000 (o przekroju 100/1.4) doklejenych po stronie grzbietowej – model A6

Model skonstruowano jak na rys. 4.159. Obciążenie realizowano identycznie jak w poprzednich przypadkach.



Rys. 4.159. Model łuku A6 – widok z boku i przekrój poprzeczny A-A oraz etapy wzmacniania łuku (1-3).



## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.160. Łuk A6 – widok ogólny (opisane podpory A i B).

Na rys. 4.161 – 4.162 przedstawiono model badawczy w trakcie przygotowań do badań, a na rys. 4.163 – 4.169 pracę modelu podczas badania.

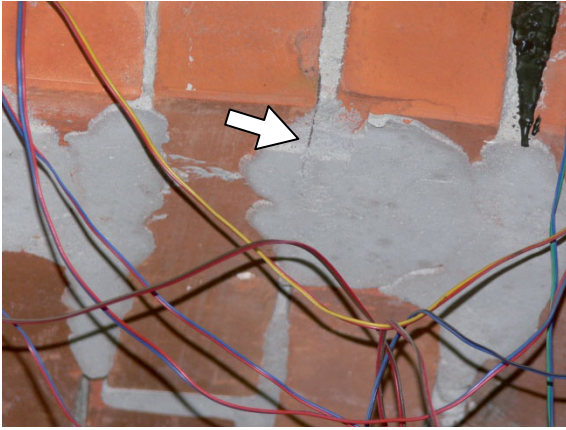


Rys. 4.161. Łuk A6 wraz z czujnikami przemieszczeń.



Rys. 4.162. Tensometr elektrooporowy na taśmie CFRP w łuku A6.

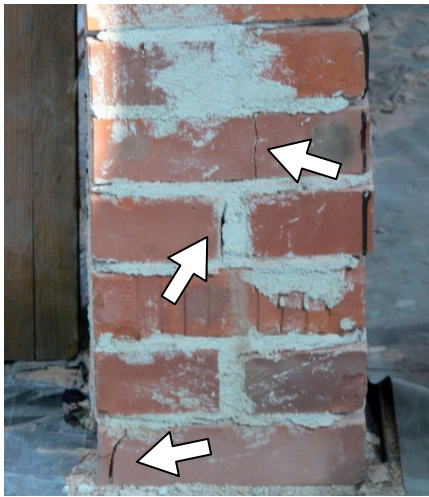
## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.163. Zarysowanie w środku rozpiętości łuku A6 (siła ok. 6kN).



Rys. 4.164. Odspojenie kleju i taśmy CFRP od podpory 'B' (siła ok. 9,5 kN).



Rys. 4.165. Niszczenie podpory 'B' (siła ok. 12 kN).



Rys. 4.166. Ścinanie na podporze 'B' (siła ok. 15 kN).



Rys. 4.167. Odspojenie fragmentów cegieł na podporze 'B' (siła ok. 15 kN).



Rys. 4.168. Ścięcie pod miejscem przyłożenia obciążenia (siła ok. 16 kN).

## 4. Badania doświadczalne własne



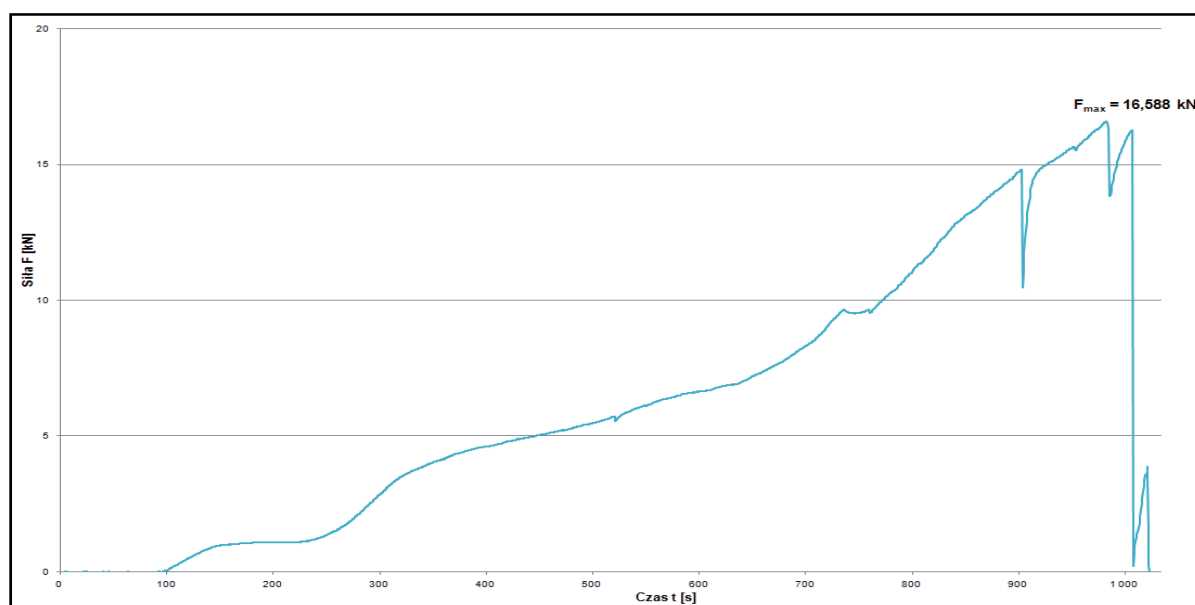
Rys. 4.169. Ścięcie na podporze 'A' (siła ok. 16,5 kN).

Podczas badania wyznaczono ścieżkę równowagi statycznej (rys. 4.170) oraz zmierzono siłę niszczącą dla tego modelu wynoszącą 16,588 kN. Mierzono również przemieszczenia w wyznaczonych punktach pomiarowych. Wyniki tych pomiarów zaprezentowano w tabeli 4.46 oraz na rys. 4.182, a zależność pomiędzy nimi przedstawiono na rys. 4.171.

Tab. 4.46. Wyniki pomiarów przemieszczeń "u" w łuku A6

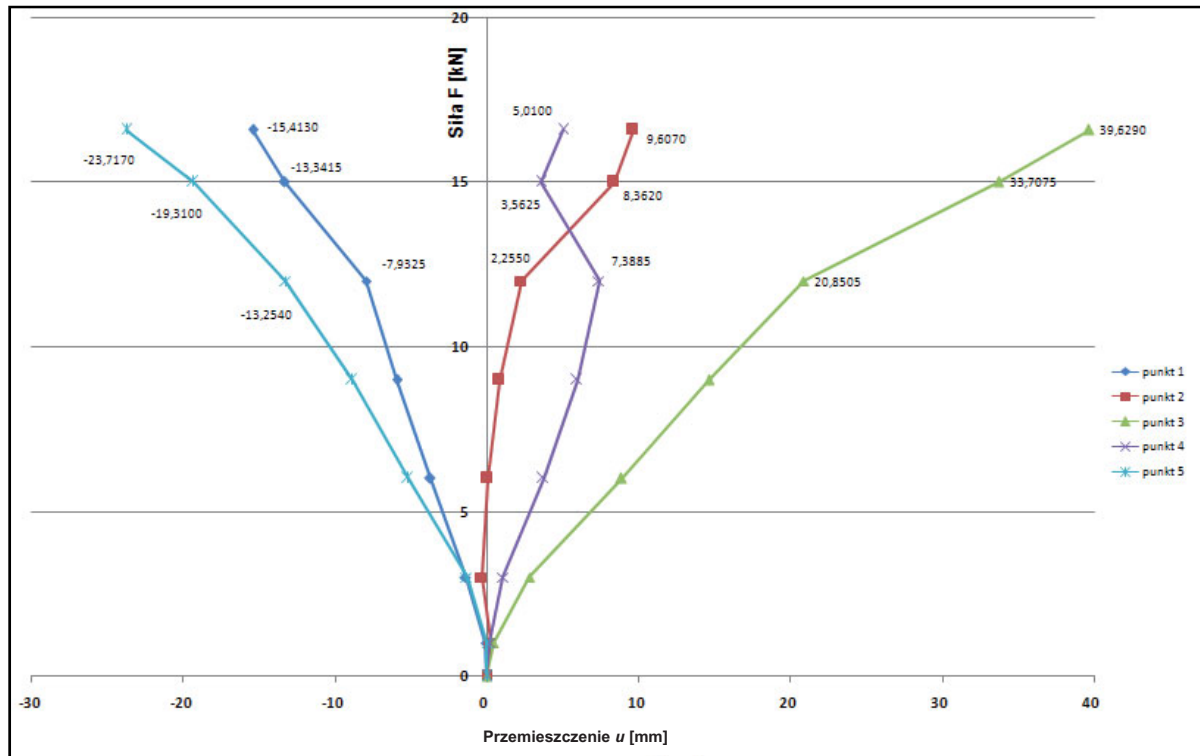
punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła F [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-0,1285	0,2120	0,4490	0,1605	0,0050
3	-1,4160	-0,3410	2,8015	1,0765	-1,3070
6	-3,7325	0,0550	8,8435	3,6980	-5,2060
9	-5,9195	0,8065	14,6035	5,9565	-8,8570
12	-7,9325	2,2550	20,8505	7,3885	-13,2540
15	-13,3415	8,3620	33,7075	3,5625	-19,3100
16,588	-15,4130	9,6070	39,6290	5,0100	-23,7170

\* wartości ujemne przemieszczeń obrazują wypiętrzenie modelu łuku



Rys. 4.170. Ścieżka równowagi statycznej dla łuku A6.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.171. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w poszczególnych punktach pomiarowych w łuku A6.

W trakcie badań przeprowadzono również pomiary odkształceń  $\varepsilon$  we wzmacniającej łuk taśmie węglowej. Wyznaczono naprężenia normalne  $\sigma$  w taśmie oraz naprężenia ścinające  $\tau$  w spoinie klejowej. Wyniki tych pomiarów przedstawiono w tab. 4.47 (odkształcenia), 4.48 i 4.49 (naprężenia) oraz na rys. 4.172 – 4.174. W tabeli 4.50 i na rys. 4.175 przedstawiono stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie taśmy węglowej.

Tab. 4.47. Wyniki pomiarów odkształceń "ε" taśmy węglowej w łuku A6

siła F [kN]	punkty pomiarowe												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	odkształcenia $\varepsilon$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]												
1	18	20	7	-6	-20	-13	-70	7	10	14	16	122	17
3	109	112	62	23	-39	-11	153	43	50	55	64	112	54
6	141	152	82	33	-56	14	254	196	166	188	219	132	173
9	197	229	130	59	-128	68	245	357	292	359	389	255	292
12	252	298	168	69	-334	145	291	500	463	568	585	329	432
15	306	381	222	93	-516	174	369	630	688	860	846	637	634
16,588	346	439	264	115	-560	183	438	684	797	996	967	917	715

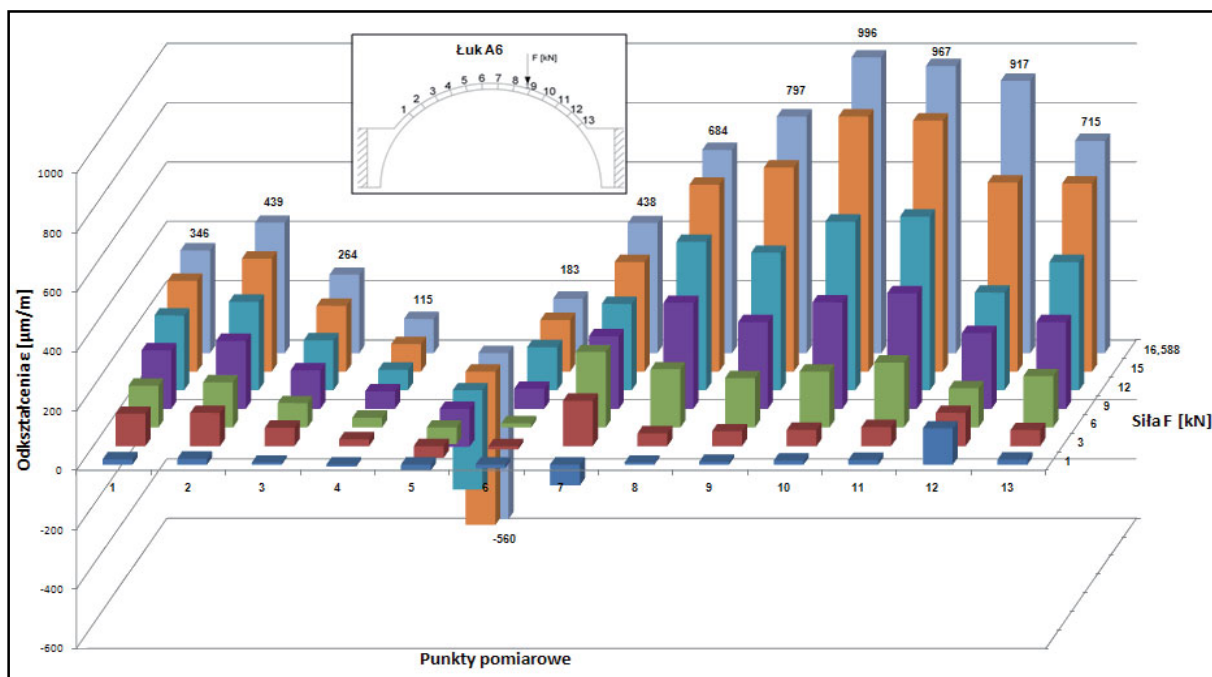
Tab. 4.48. Naprężenia normalne "σ" w taśmie węglowej w łuku A6.

siła F [kN]	punkty pomiarowe												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	naprężenia normalne $\sigma$ [MPa]												
1	3,024	3,360	1,176	-1,008	-3,360	-2,184	-11,760	1,176	1,680	2,352	2,688	20,496	2,856
3	18,312	18,816	10,416	3,864	-6,552	-1,848	25,704	7,224	8,400	9,240	10,752	18,816	9,072
6	23,688	25,536	13,776	5,544	-9,408	2,352	42,672	32,928	27,888	31,584	36,792	22,176	29,064
9	33,096	38,472	21,840	9,912	-21,504	11,424	41,160	59,976	49,056	60,312	65,352	42,840	49,056
12	42,336	50,064	28,224	11,592	-56,112	24,360	48,888	84,000	77,784	95,424	98,280	55,272	72,576
15	51,408	64,008	37,296	15,624	-86,688	29,232	61,992	105,840	115,584	144,480	142,128	107,016	106,512
16,588	58,128	73,752	44,352	19,320	-94,080	30,744	73,584	114,912	133,896	167,328	162,456	154,056	120,120

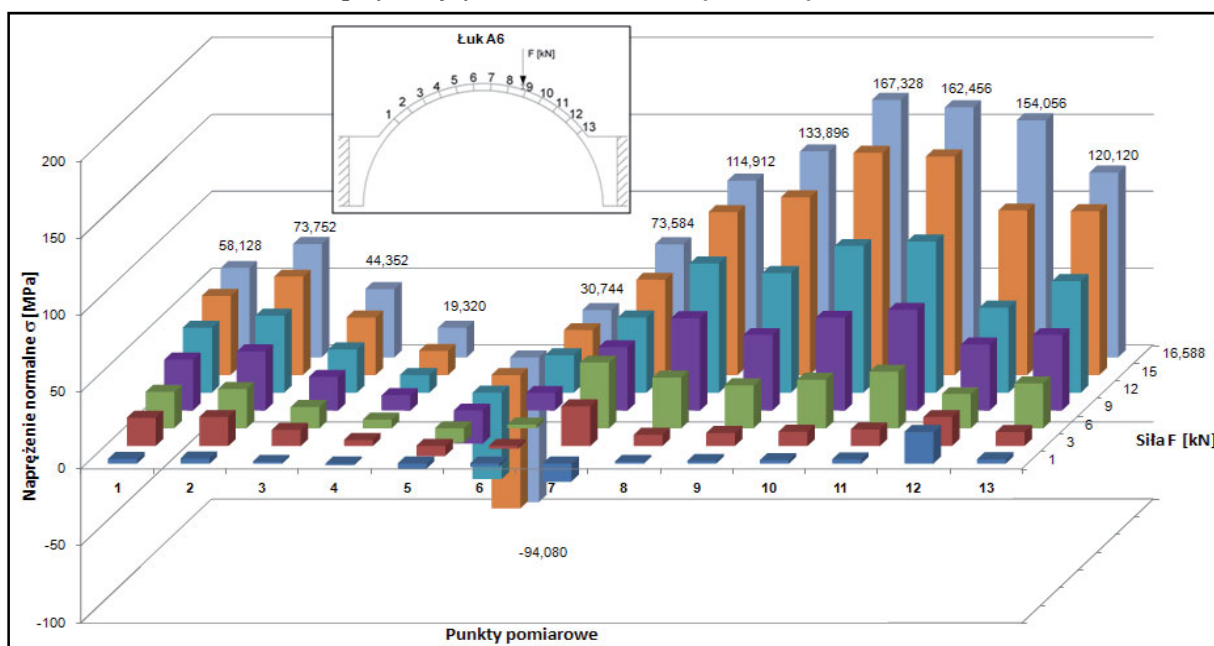
## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.49. Naprężenia styczne "τ" w spoinie klejowej – łuk A6

siła F [kN]	punkty pomiarowe											
	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13
	naprężenia styczne τ [MPa]											
1	0,002	-0,012	-0,012	-0,013	0,007	-0,054	0,072	0,003	0,004	0,002	0,100	-0,099
3	0,003	-0,047	-0,037	-0,058	0,026	0,154	-0,103	0,007	0,005	0,008	0,045	-0,055
6	0,010	-0,066	-0,046	-0,084	0,066	0,226	-0,055	-0,028	0,021	0,029	-0,082	0,039
9	0,030	-0,093	-0,067	-0,176	0,184	0,167	0,105	-0,061	0,063	0,028	-0,126	0,035
12	0,043	-0,122	-0,093	-0,379	0,451	0,137	0,197	-0,035	0,099	0,016	-0,241	0,097
15	0,071	-0,150	-0,121	-0,573	0,649	0,183	0,246	0,055	0,162	-0,013	-0,197	-0,003
16,588	0,087	-0,165	-0,140	-0,635	0,699	0,240	0,231	0,106	0,187	-0,027	-0,047	-0,190

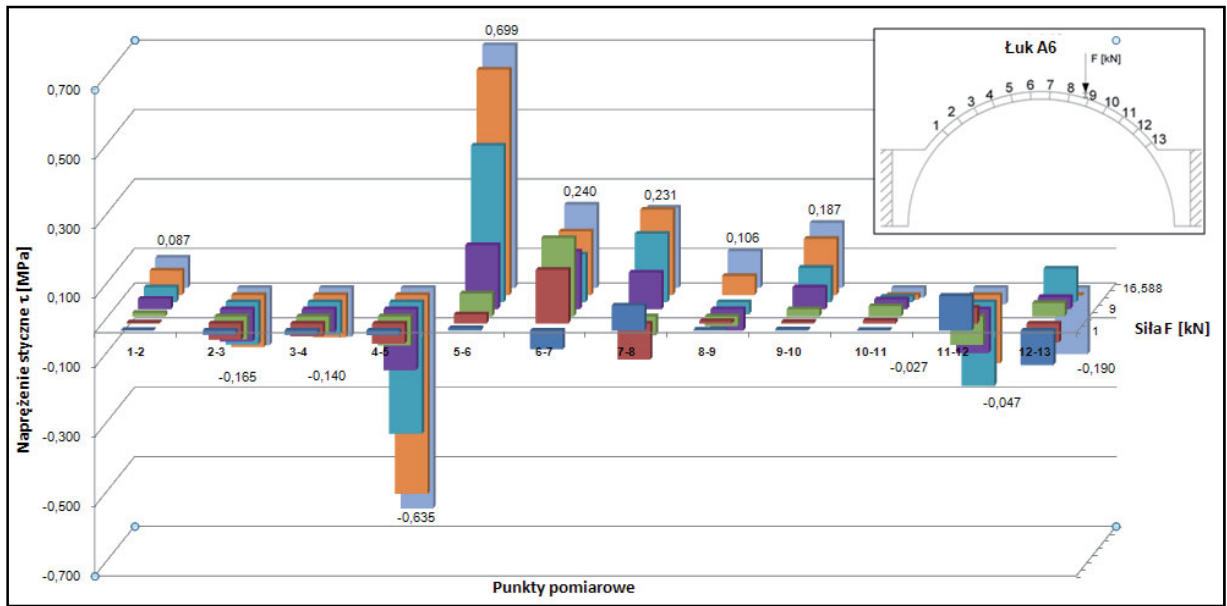


Rys. 4.172. Odkształcenia "ε" w taśmie węglowej w punktach od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A6.



Rys. 4.173. Naprężenia normalne "σ" w taśmie węglowej w punktach od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A6.

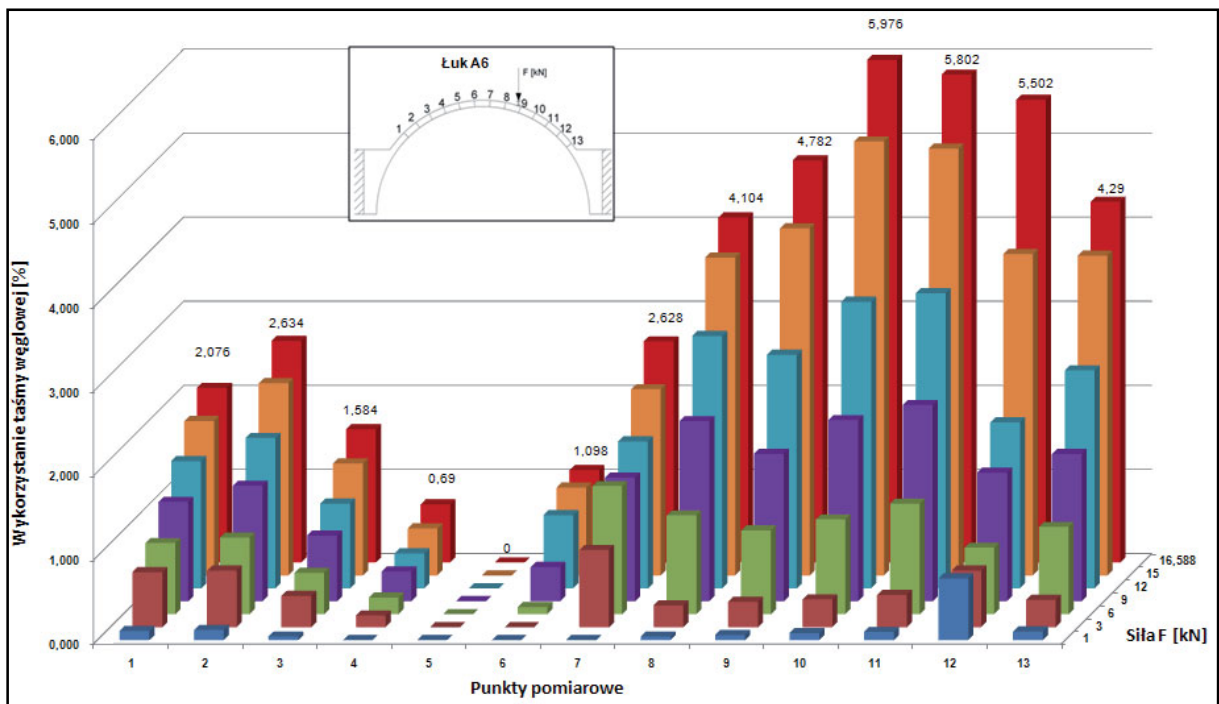
4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.174. Naprężenia styczne  $\tau$  w spoinie klejowej między punktami od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą  $F$  w łuku A6.

Tab. 4.50. Stopień wykorzystania wytrzymałości taśmy węglowej na rozciąganie – łuk A6

siła F [kN]	punkty pomiarowe												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	wykorzystanie wytrzymałości taśmy na rozciąganie [%]												
1	0,108	0,120	0,042	-	-	-	-	0,042	0,060	0,084	0,096	0,732	0,102
3	0,654	0,672	0,372	0,138	-	-	0,918	0,258	0,300	0,330	0,384	0,672	0,324
6	0,846	0,912	0,492	0,198	-	0,084	1,524	1,176	0,996	1,128	1,314	0,792	1,038
9	1,182	1,374	0,780	0,354	-	0,408	1,470	2,142	1,752	2,154	2,334	1,530	1,752
12	1,512	1,788	1,008	0,414	-	0,870	1,746	3,000	2,778	3,408	3,510	1,974	2,592
15	1,836	2,286	1,332	0,558	-	1,044	2,214	3,780	4,128	5,160	5,076	3,822	3,804
16,588	2,076	2,634	1,584	0,690	-	1,098	2,628	4,104	4,782	5,976	5,802	5,502	4,290



Rys. 4.175. Stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie taśmy węglowej w [%] w punktach od 1 do 13 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą  $F$  w łuku A3.

## 4. Badania doświadczalne własne

Na rys. 4.176 – 4.178 przedstawiono fragmenty zniszczonego łuku A6 dokumentując odspojenie materiału FRP od konstrukcji łuku. Obserwowano odspojenie taśmy FRP od konstrukcji murowej z fragmentami cegieł co świadczy o tym, że zniszczenie (zerwanie) połączenia nastąpiło w ośrodku kotwiącym.



*Rys. 4.176. Fragment łuku przyklejony do taśmy FRP po zniszczeniu łuku A6.*

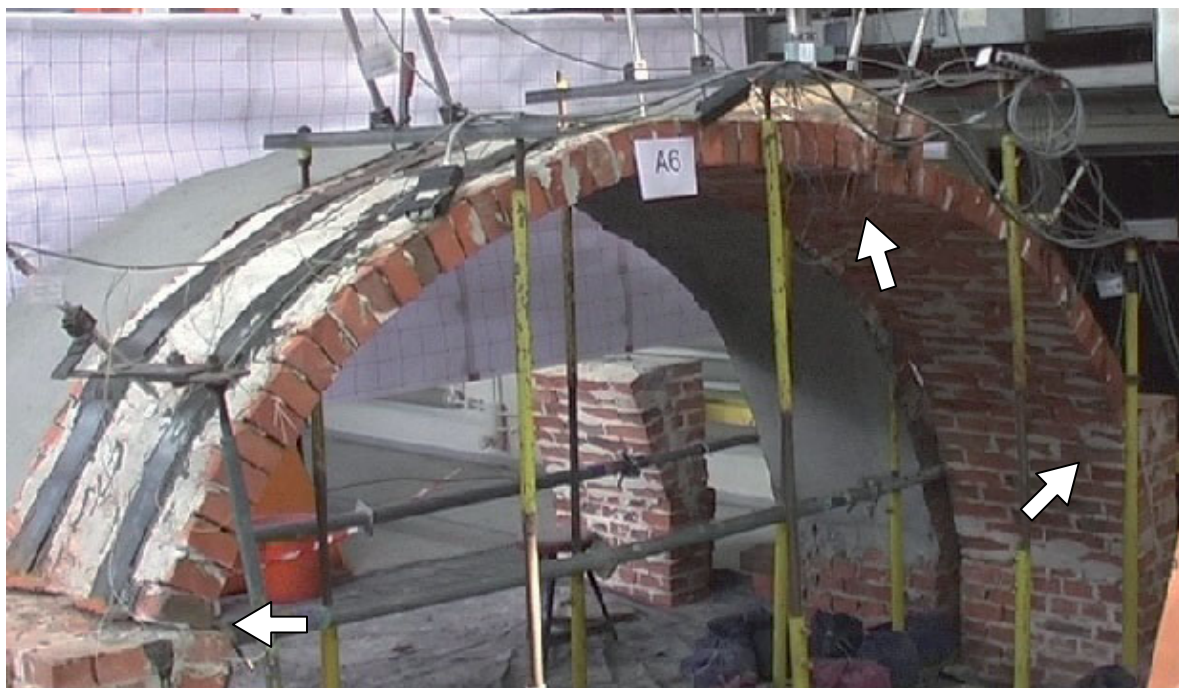


*Rys. 4.177. Taśmy FRP z przyklejonymi fragmentami łuku A6.*



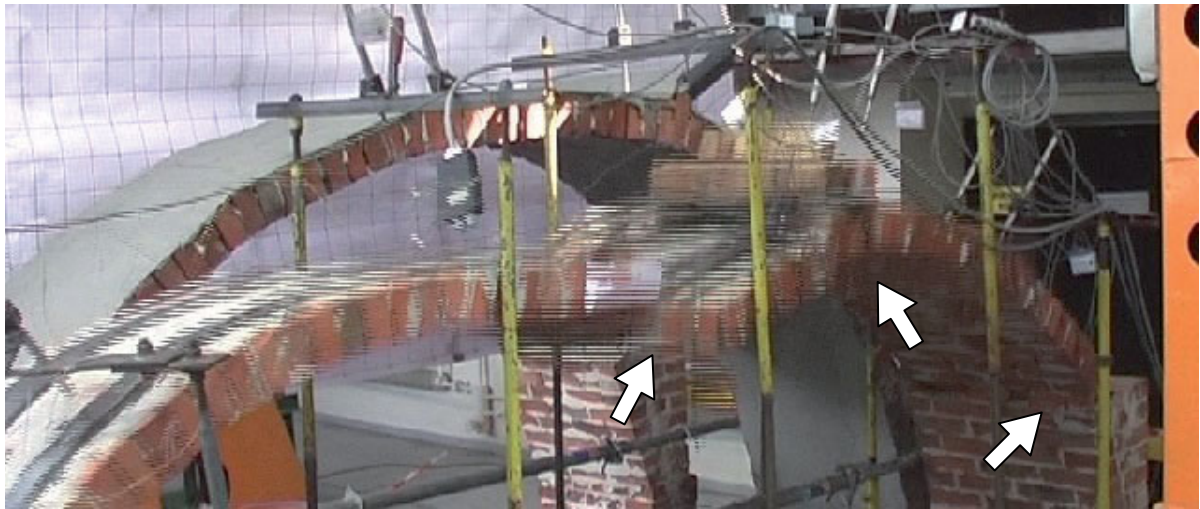
*Rys. 4.178. Rozszczepienie taśmy FRP po zniszczeniu łuku A6.*

Na rys. 4.179 i 4.180 przedstawiono postać zniszczenia, a na rys. 4.181 model zniszczenia łuku A2 wraz z powstałymi przegubami.

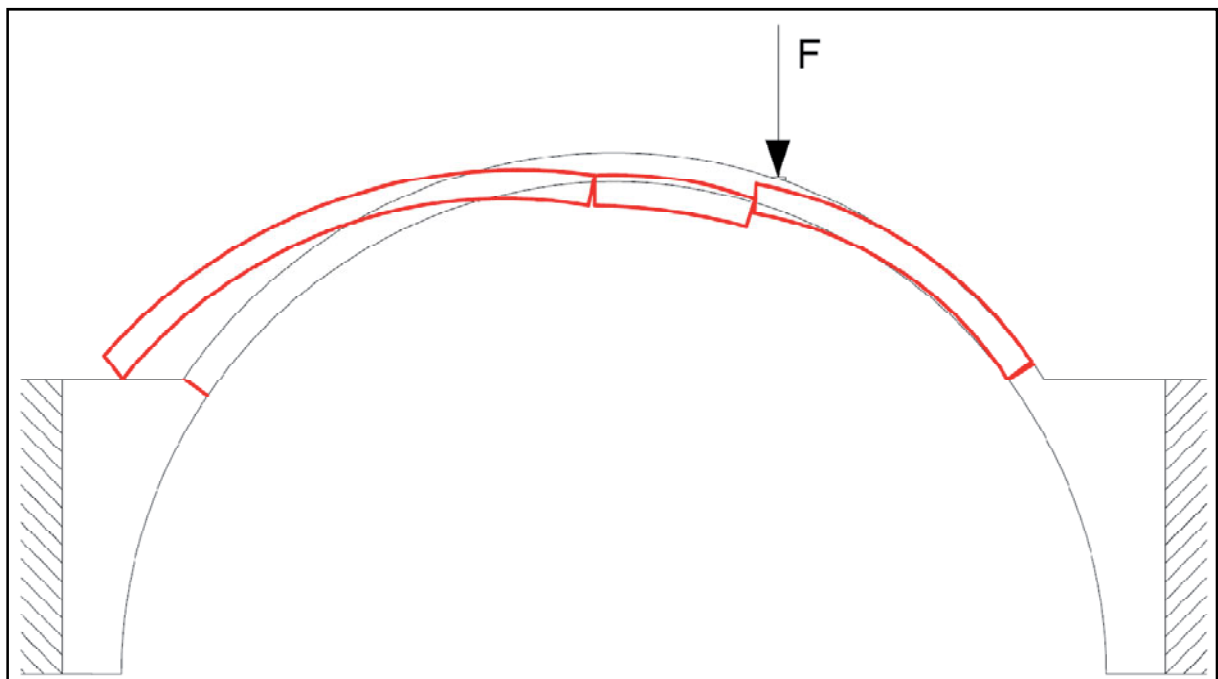


*Rys. 4.179. Pierwsza faza zniszczenia łuku A6 (siła 16,588) – widoczne powstające przeguby.*

## 4. Badania doświadczalne własne



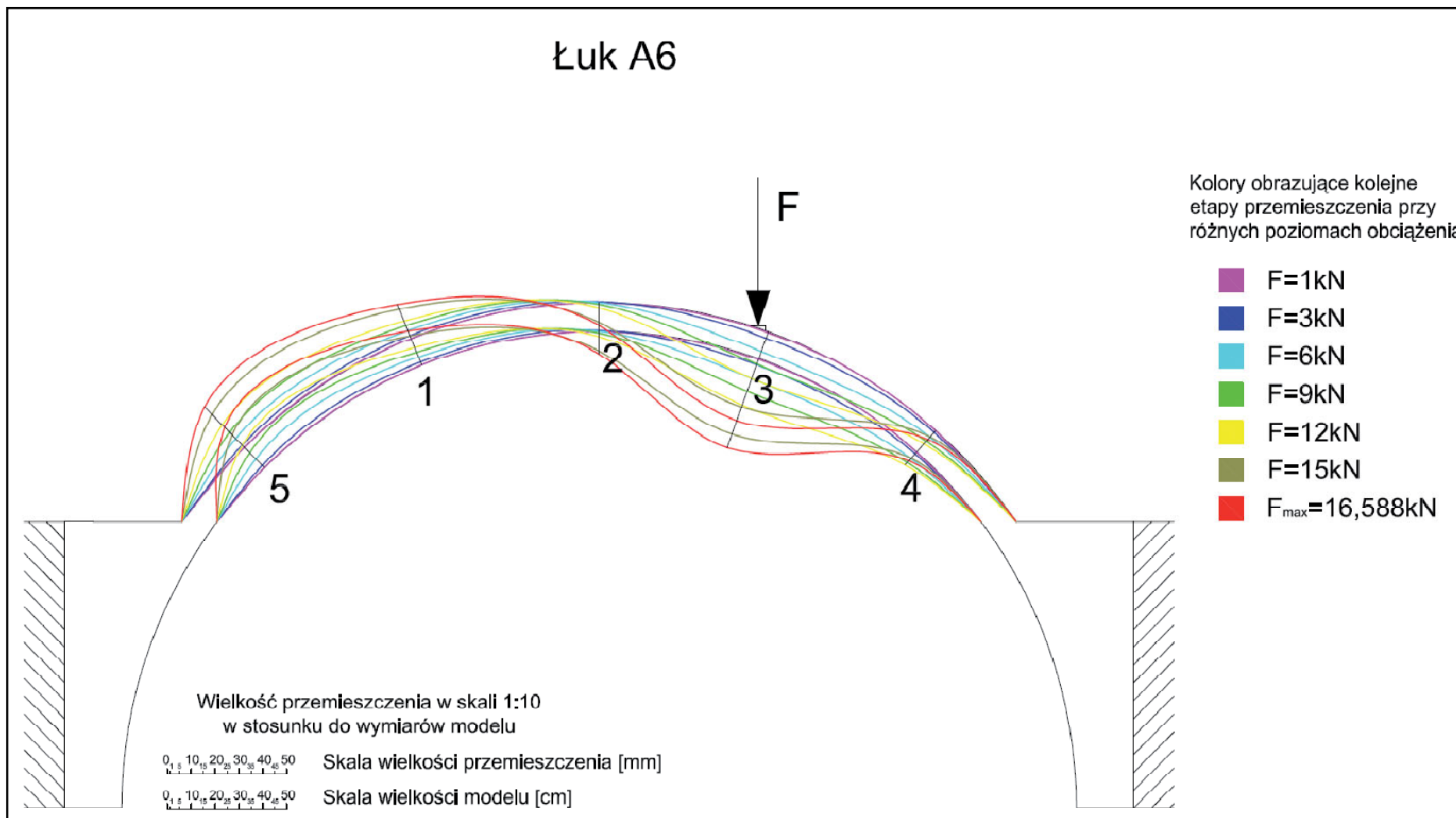
Rys. 4.180. Zniszczenie łuku A6.



Rys. 4.181. Model zniszczenia łuku A6 wraz z powstałymi przegubami.



# Łuk A6

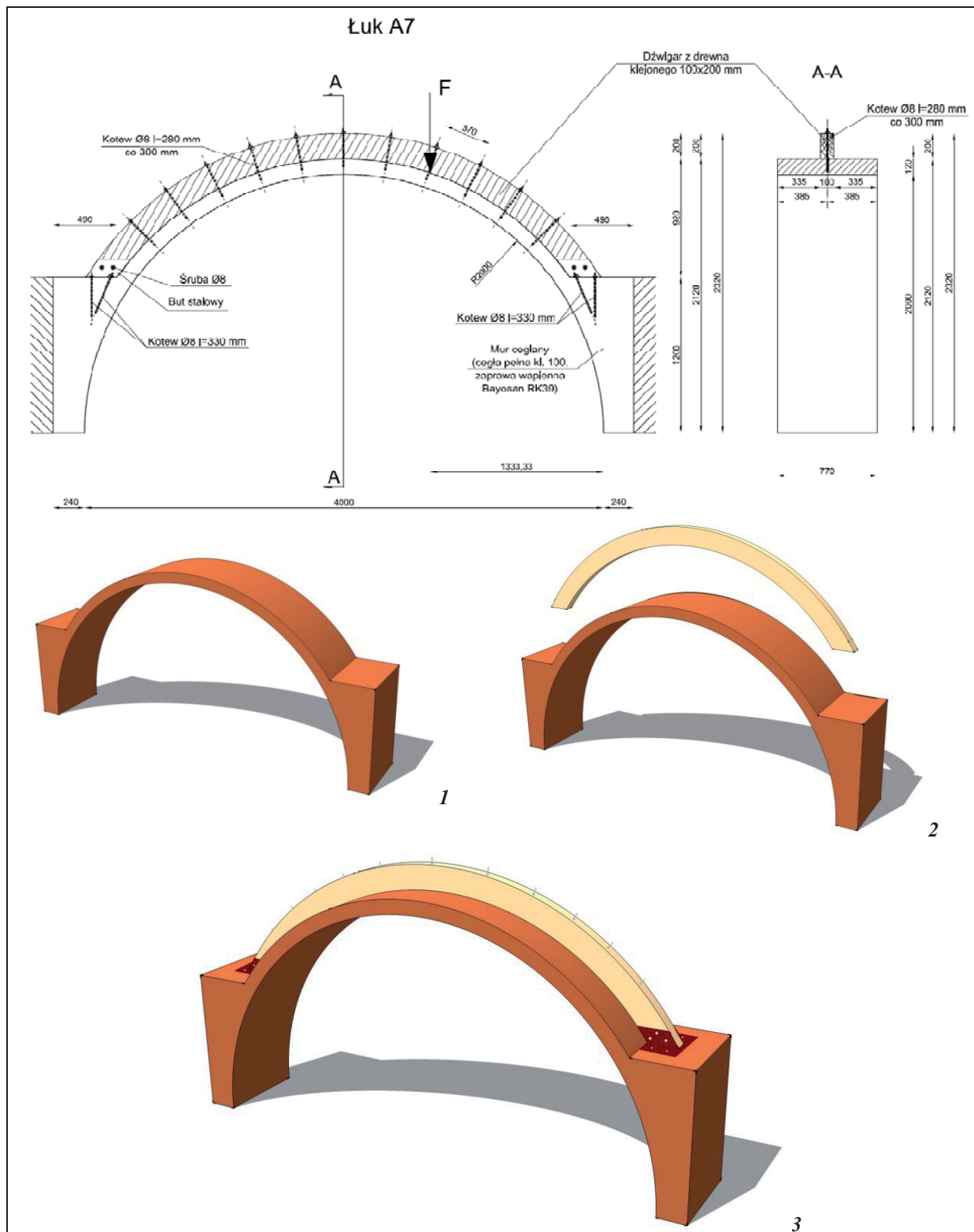


Rys. 4.182. Przemieszczenia w 5 punktach pomiarowych przy kolejnych poziomach obciążenia – łuk A6.

## 4. Badania doświadczalne własne

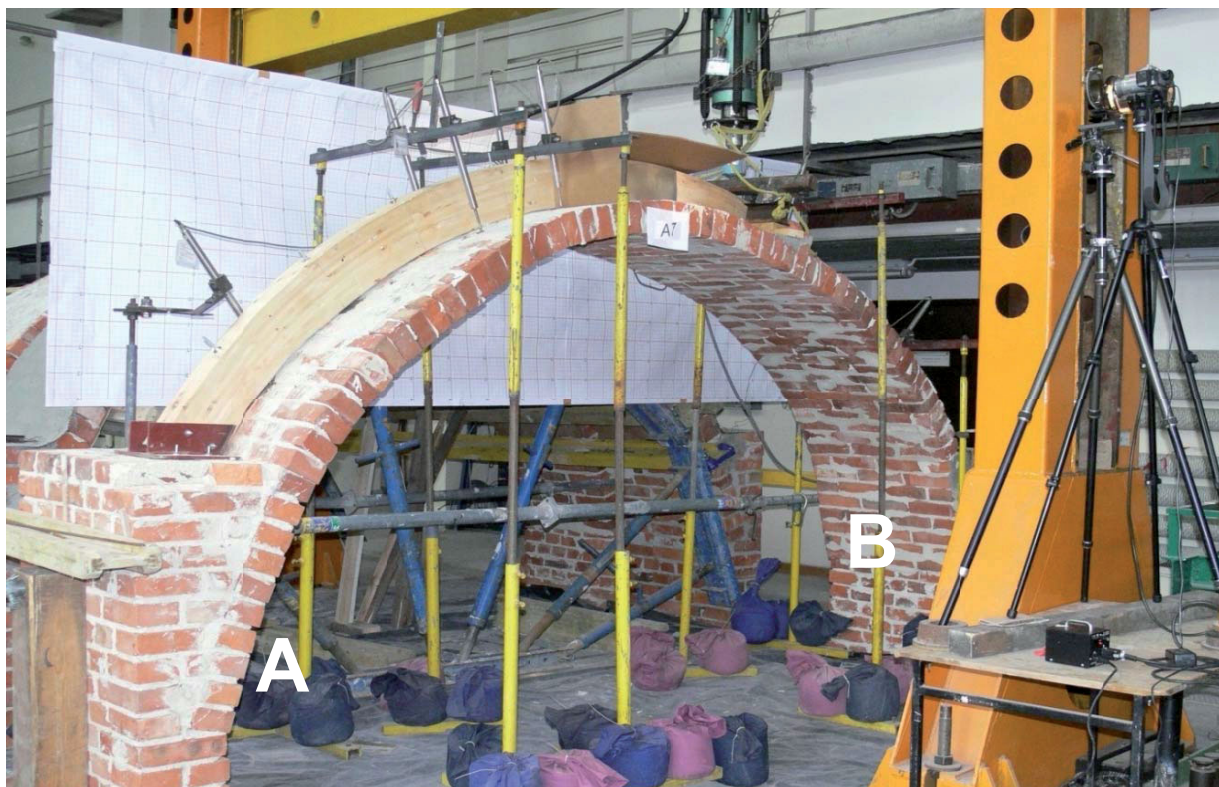
4.4.3.7. Badania modelu wzmacnionego za pomocą dźwigara z drewna klejonego klasy GL24 po stronie grzbietowej łuku, połączonego z łukiem ceglany przy użyciu stalowych kotew wklejanych  $\varnothing 8$  – model A7

Model jak na rys. 4.183. Obciążenie realizowano identycznie jak w poprzednich przypadkach.



Rys. 4.183. Model łuku A7 – widok z boku i przekrój poprzeczny A-A oraz etapy wzmacniania łuku (1-3).

## 4. Badania doświadczalne własne

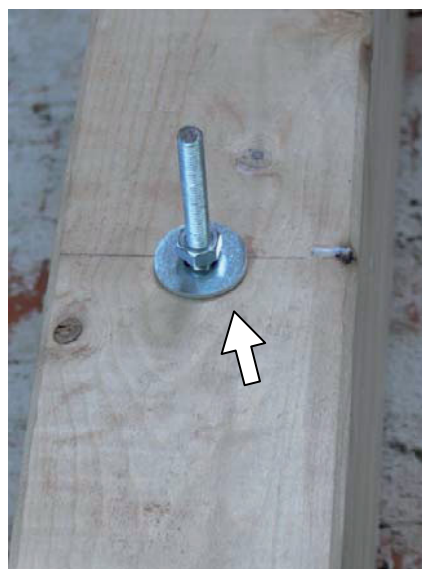


Rys. 4.184. Łuk A7 – widok ogólny (opisane podpory A i B), widoczny polaryskop do badań elastoptycznych.

Na rys. 4.185 – 4.190 przedstawiono model badawczy (również w trakcie budowy), a na rys. 4.191 – 4.194 pracę modelu podczas badania.

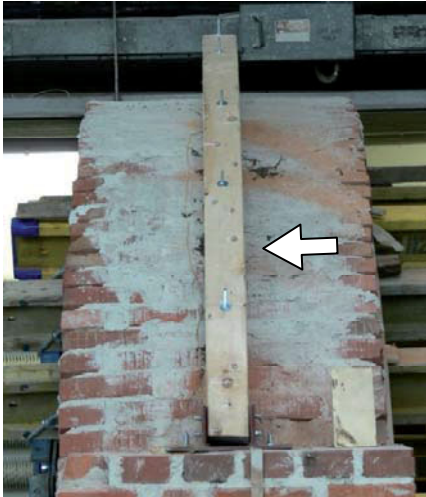


Rys. 4.185. Łuk A7 wraz ze wzmocnieniem.



Rys. 4.186. Kotew łącząca łuk ceglany A7 z wzmacniającym łukiem z drewna klejonego.

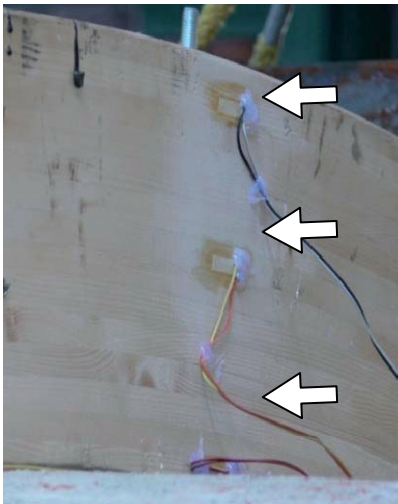
## 4. Badania doświadczalne własne



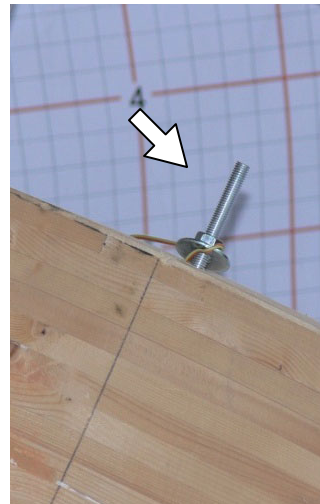
Rys. 4.187. Wzmacniający łuk z drewna klejonego.



Rys. 4.188. Stalowe mocowanie łuku z drewna klejonego w podporze 'A'.



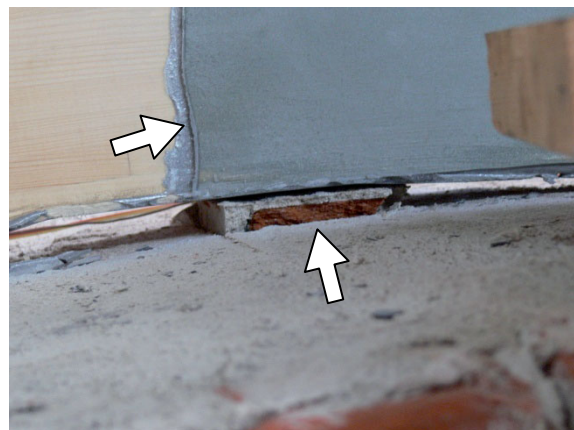
Rys. 4.189. Tensometry elektrooporowe na łuku z drewna klejonego.



Rys. 4.190. Kotew stalowa wypchna przez zniekształcony łuk A7 (siła ok. 20 kN).



Rys. 4.191. Zarysowanie łuku A7 (siła ok. 25 kN).



Rys. 4.192. Zarysowanie łuku A7 (siła ok. 25 kN), widoczna naklejona warstwa do badań elastooptycznych.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.193. Niszczenie łuku A7 (siła ok. 28 kN).



Rys. 4.194. Kotwy łączące wzmocnienie w drewna klejonego w łukiem A7 – widok po zniszczeniu.

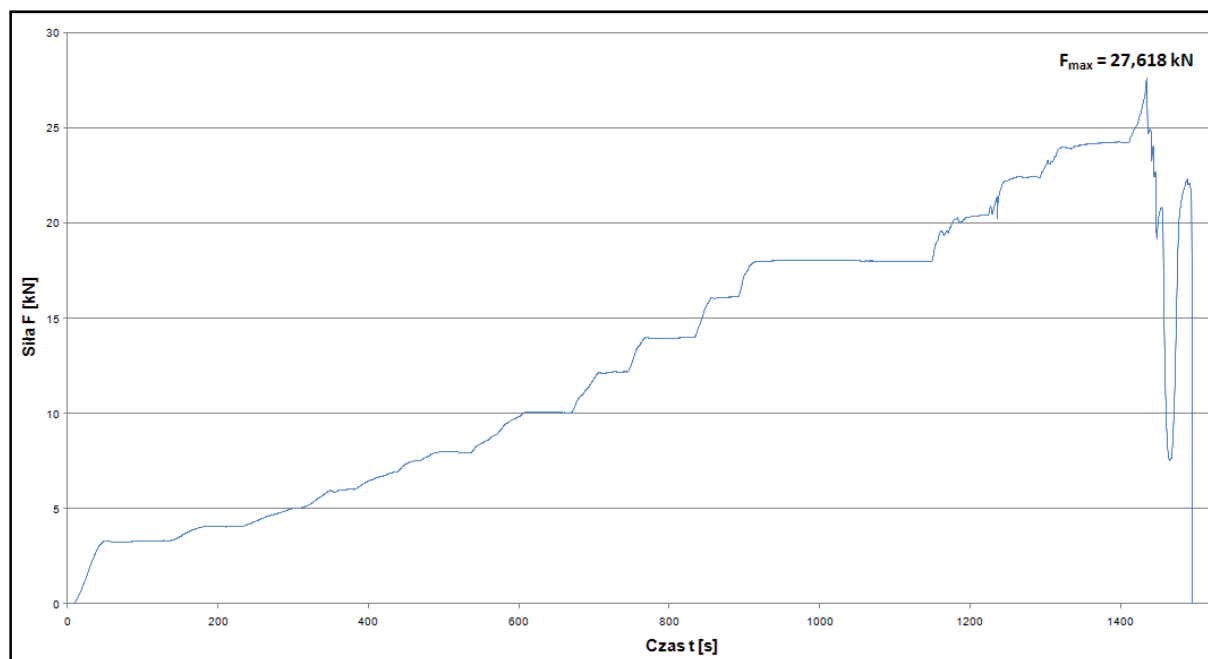
Wyznaczono ścieżkę równowagi statycznej (rys. 4.195) oraz mierzono siłę niszczącą dla tego modelu wynoszącą 27,618 kN. Mierzono również przemieszczenia w wyznaczonych przekrojach. Wyniki tych pomiarów podano w tabeli 4.51 oraz na rys. 4.204 a zależność pomiędzy nimi przedstawiono na rys. 4.196.

Tab. 4.51. Wyniki pomiarów przemieszczeń w łuku A7

punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła F [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,021	0,005	0,052	0,004	-0,001
3	0,024	0,129	0,393	0,005	-0,002
6	0,027	0,347	1,084	0,005	-0,198
9	-0,047	0,541	2,026	0,008	-0,601
12	-0,648	0,571	3,351	-0,001	-1,270
15	-1,263	0,569	4,980	-0,020	-2,168
18	-2,502	0,515	6,849	0,005	-3,721
21	-6,265	-1,250	12,098	0,070	-6,396
24	-11,438	-4,203	18,479	0,715	-9,365
27	-12,644	-5,464	21,405	0,857	-10,306
27,618	-12,662	-5,480	21,454	0,858	-10,306

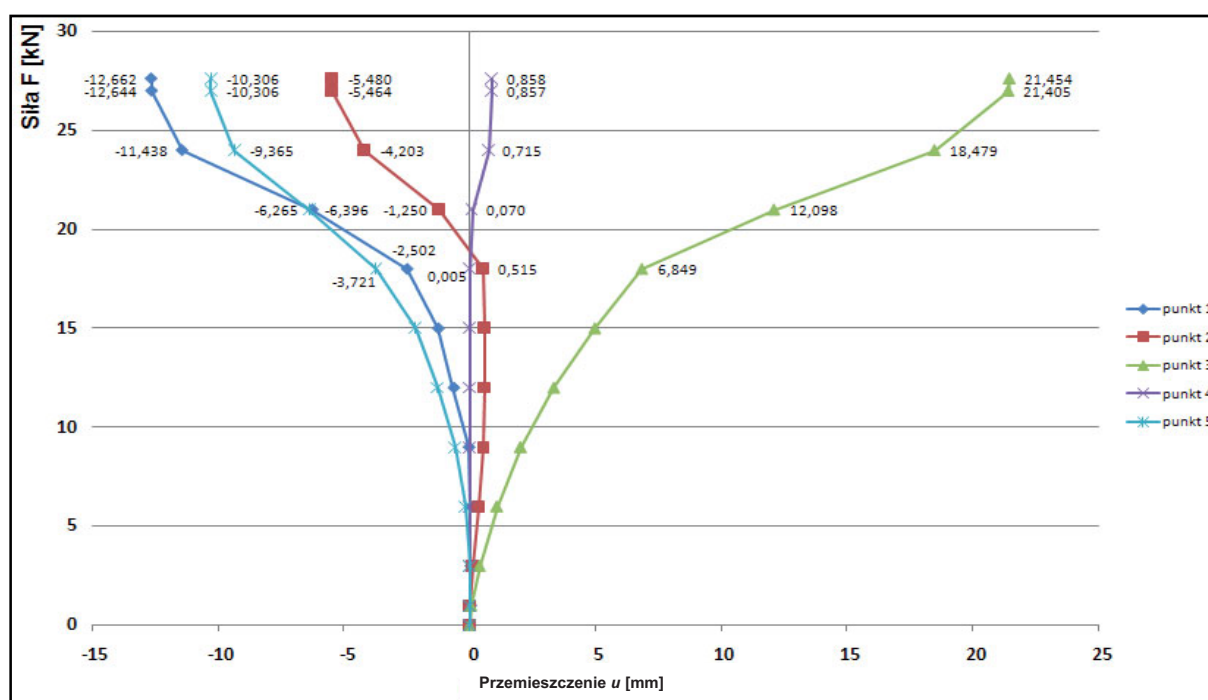
\* wartości ujemne przemieszczeń obrazują wypiętrzenie modelu łuku

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.195. Ścieżka równowagi statycznej dla łuku A7.

W trakcie badań przeprowadzono również pomiary odkształceń w łącznikach stalowych (kotwach) łączącym konstrukcję łuku ceglanoego ze wzmacniającym łukiem z drewna klejonego. Prowadzono również pomiar odkształceń we wzmacniającym łuku z drewna klejonego. Wyznaczono naprężenia normalne  $\sigma$  w wybranych łącznikach stalowych oraz drewnie klejonym. Wyniki tych pomiarów przedstawiono w tab. 4.52 (kotwy stalowe - odkształcenia), tab. 4.53 (kotwy stalowe - naprężenia), tab. 4.54 (drewno klejone - odkształcenia), tab. 4.55 (drewno klejone - naprężenia) oraz na rys. 4.197 - 4.201. W tabeli 4.56 i na rys. 4.202 przedstawiono stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie kotew stalowych.



Rys. 4.196. Zależność: siła "F" - przemieszczenie "u" w poszczególnych punktach pomiarowych w łuku A7.

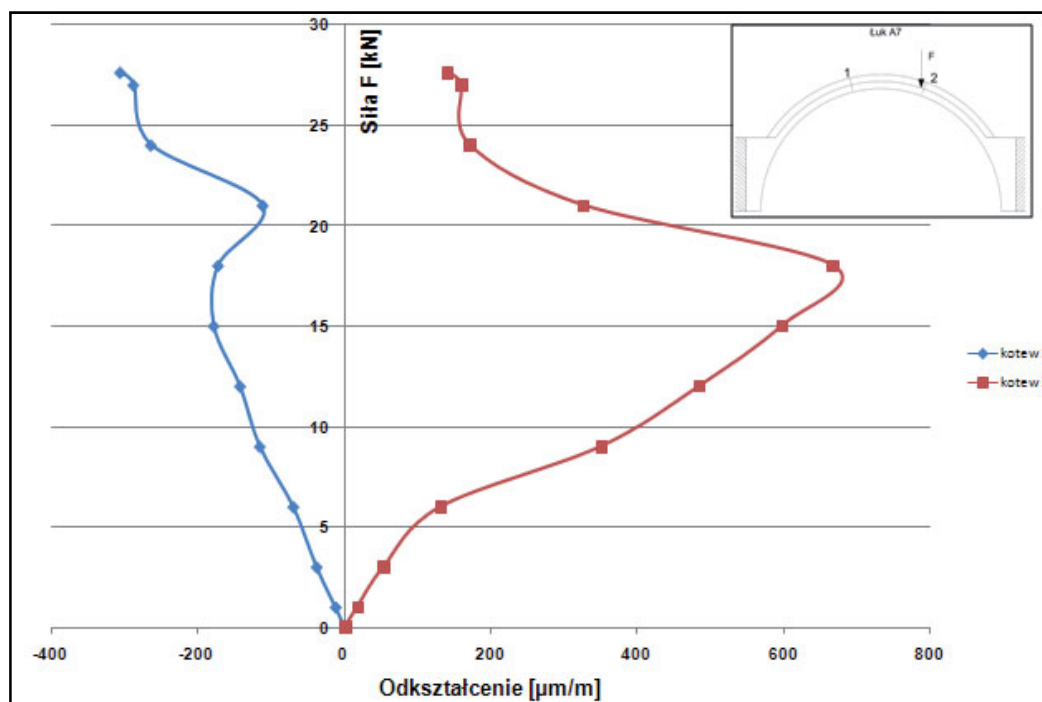
## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.52. Wyniki pomiarów odkształceń kotew stalowych w łuku A7

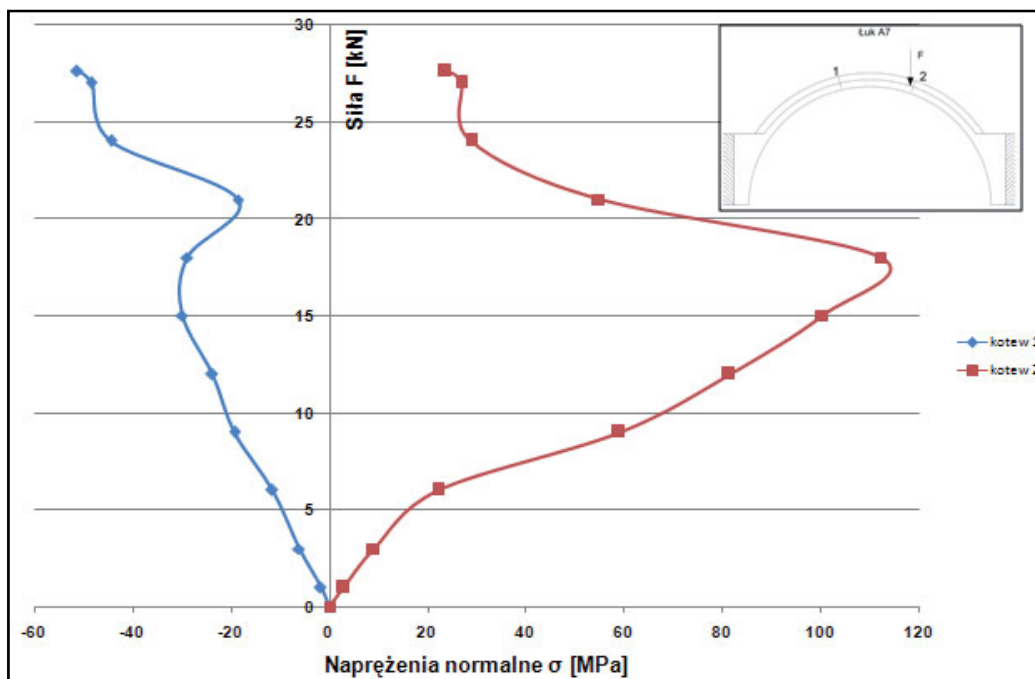
kotew nr	1	2
siła $F$ [kN]	odkształcenie $\varepsilon$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	
0	0	0
1	-12	17
3	-38	53
6	-70	131
9	-116	350
12	-143	484
15	-179	597
18	-173	667
21	-112	326
24	-265	171
27	-289	159
27,618	-307	140

Tab. 4.53. Naprężenia normalne " $\sigma$ " w kotwach stalowych w łuku A7

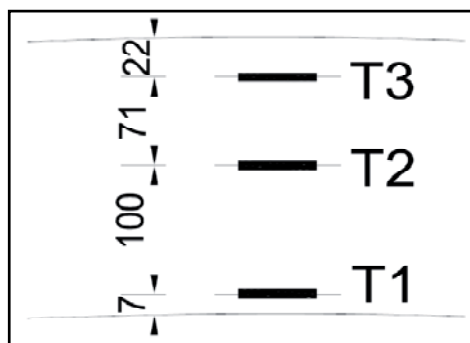
kotew nr	1	2
siła $F$ [kN]	naprężenie normalne $\sigma$ [MPa]	
0	0,000	0,000
1	-2,016	2,856
3	-6,384	8,904
6	-11,760	22,008
9	-19,488	58,800
12	-24,024	81,312
15	-30,072	100,296
18	-29,064	112,056
21	-18,816	54,768
24	-44,520	28,728
27	-48,552	26,712
27,618	-51,576	23,520

Rys. 4.197. Odkształcenia " $\varepsilon$ " w kotwach stalowych nr 1 i 2 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą " $F$ " w łuku A7.

## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.198. Naprężenia normalne "σ" w kotwach stalowych nr 1 i 2 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A7.



Rys. 4.199. Układ tensometrów na łuku z drewna klejonego.

Tab. 4.54. Wyniki pomiarów odkształceń w drewnie klejonym w łuku A7

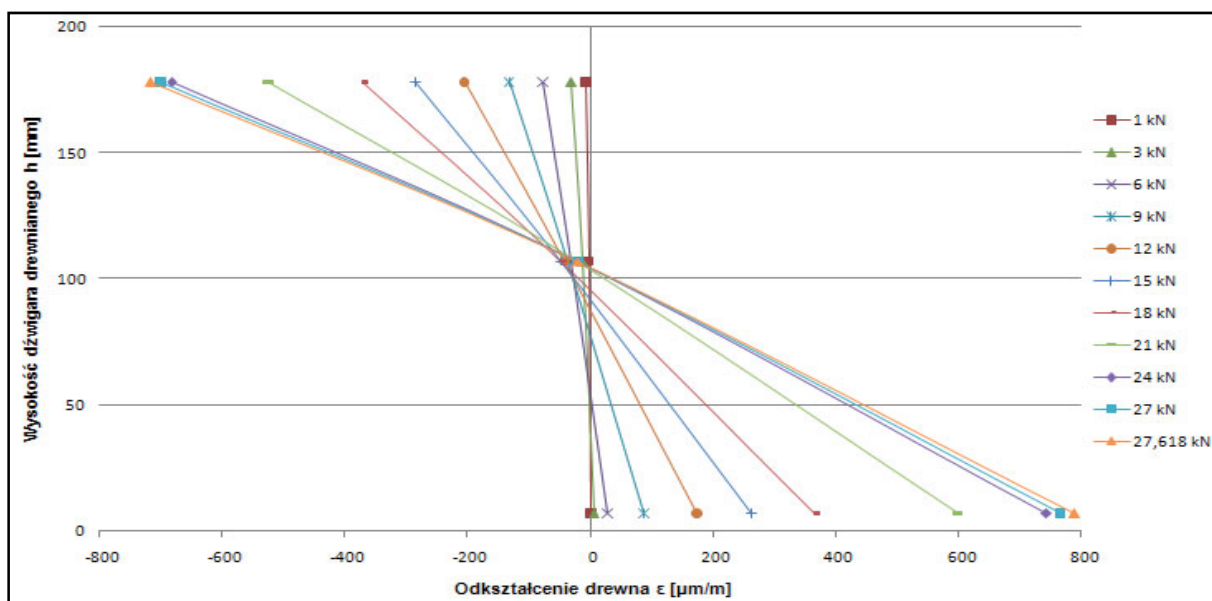
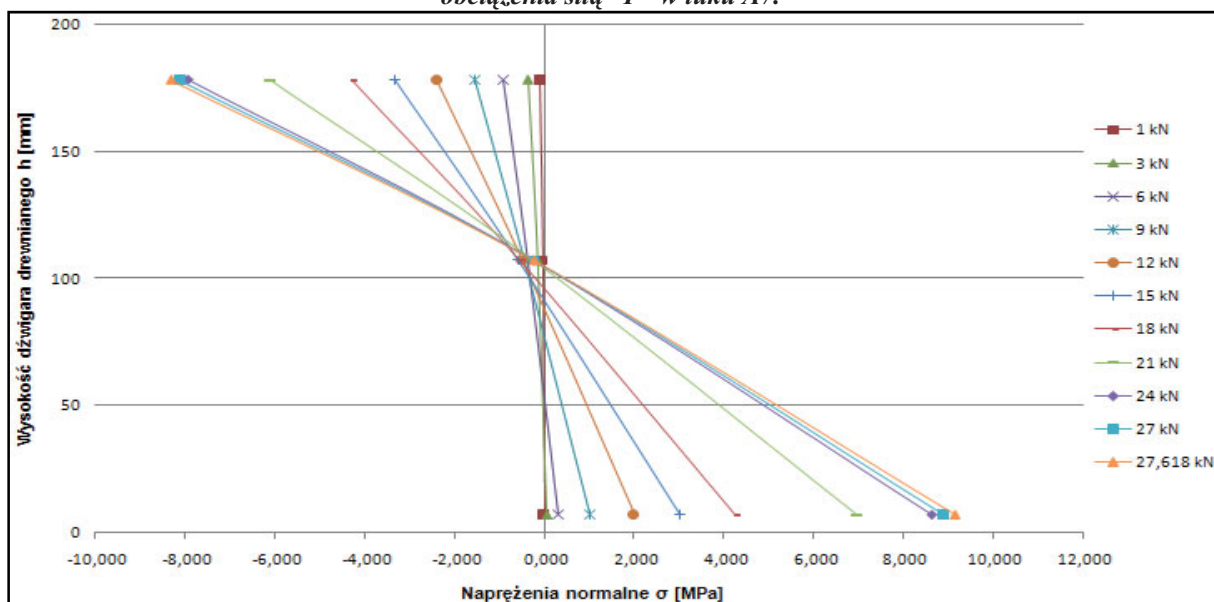
punkty pomiarowe siła F [kN]	odkształcenie ε [μm/m]		
	1	2	3
0	0	0	0
1	0	-3	-8
3	5	-13	-32
6	28	-31	-78
9	88	-38	-133
12	173	-42	-206
15	262	-49	-286
18	366	-48	-371
21	599	-21	-526
24	743	-21	-683
27	766	-20	-701
27,618	789	-20	-717



## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.55. Naprężenia normalne  $\sigma$  w drewnie klejonym w łuku A7

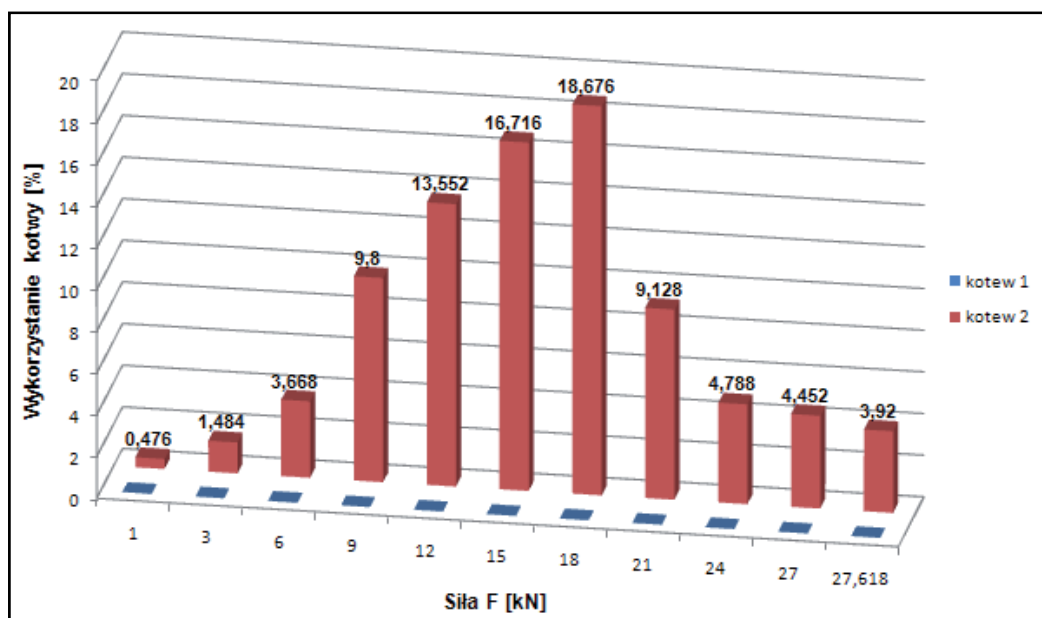
punkty pomiarowe	1	2	3
siła F [kN]	naprężenie normalne $\sigma$ [MPa]		
0	0	0	0
1	0,0000	-0,0348	-0,0928
3	0,0580	-0,1508	-0,3712
6	0,3248	-0,3596	-0,9048
9	1,0208	-0,4408	-1,5428
12	2,0068	-0,4872	-2,3896
15	3,0392	-0,5684	-3,3176
18	4,2456	-0,5568	-4,3036
21	6,9484	-0,2436	-6,1016
24	8,6188	-0,2436	-7,9228
27	8,8856	-0,2320	-8,1316
27,618	9,1524	-0,2320	-8,3172

Rys. 4.200. Odkształcenia  $\varepsilon$  w drewnie klejonym w punktach od 1 do 3 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą  $F$  w łuku A7.Rys. 4.201. Naprężenia normalne  $\sigma$  w drewnie klejonym w punktach od 1 do 3 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą  $F$  w łuku A7.

## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.56. Wykorzystanie wytrzymałości na rozciąganie kotew stalowych – łuk A7

kotew	1	2
siła F [kN]	wykorzystanie kotwi [%]	
1	0	0,476
3	0	1,484
6	0	3,668
9	0	9,800
12	0	13,552
15	0	16,716
18	0	18,676
21	0	9,128
24	0	4,788
27	0	4,452
27,618	0	3,920



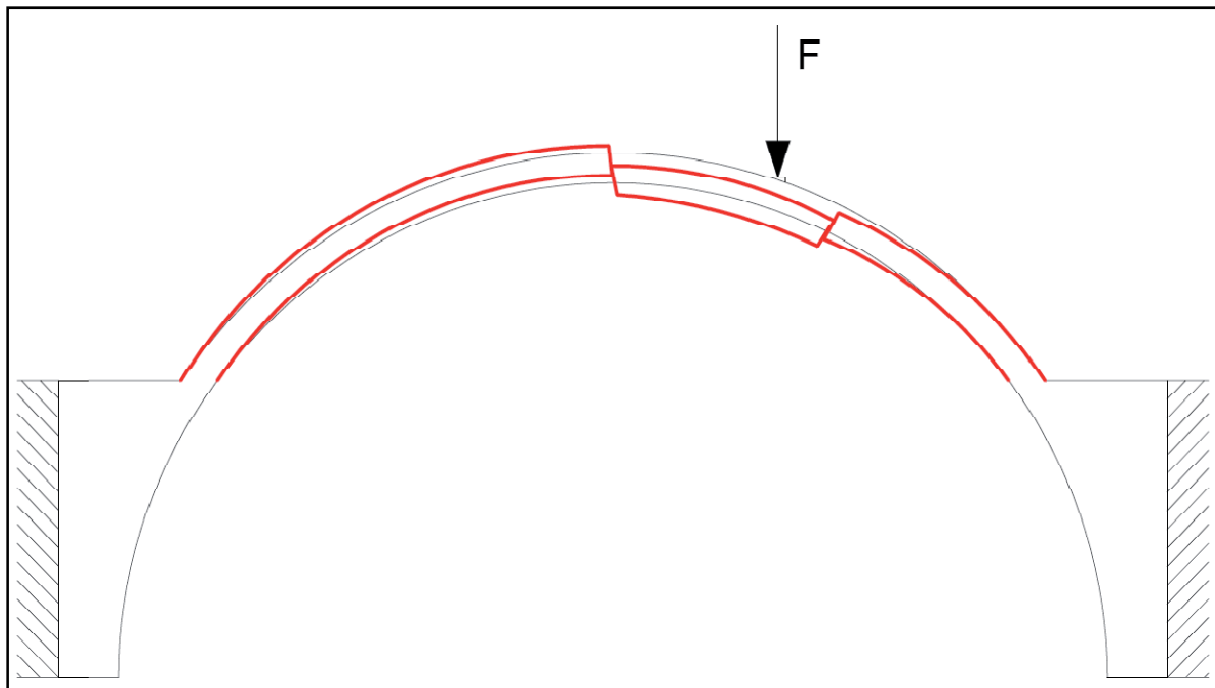
Rys. 4.202. Stopień wykorzystania wytrzymałości na rozciąganie w [%] w kotwach 1 i 2 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A7.

Na rys. 4.202 przedstawiono rzeczywistą postać zniszczenia, a na rys. 4.203 model zniszczenia łuku A7.

## 4. Badania doświadczalne własne

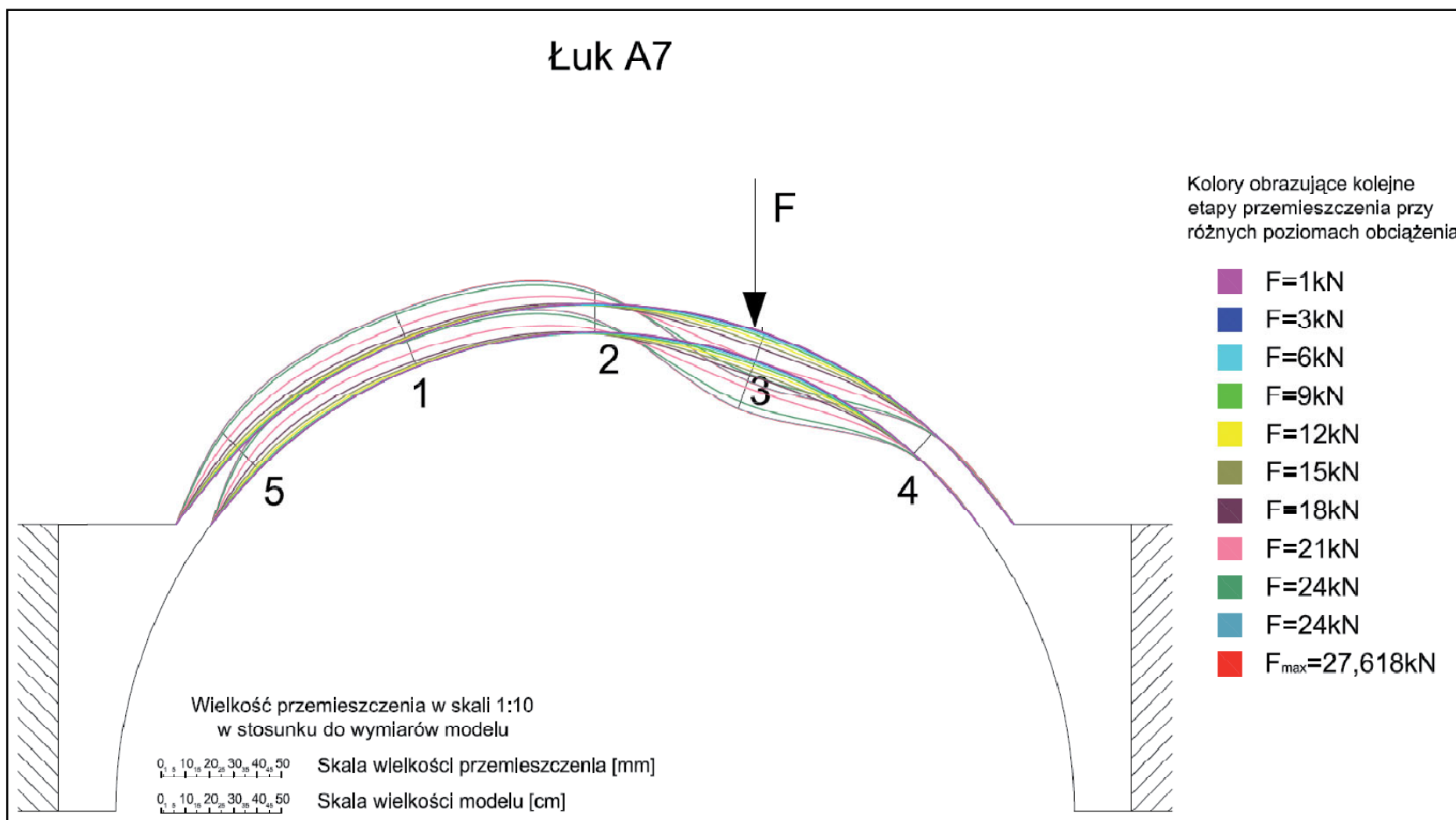


Rys. 4.202. Schemat zniszczenia łuku A7 (siła 27,618 kN).



Rys. 4.203. Model zniszczenia łuku A7 wraz z powstałymi przegubami.

# Łuk A7



Rys. 4.204. Przemieszczenia w 5 punktach pomiarowych przy kolejnych poziomach obciążenia – łuk A7.

## 4. Badania doświadczalne własne

## 4.5. Badania elastooptyczne

## 4.5.1. Wprowadzenie

Badania przeprowadzono na wybranych modelach łuków (niewzmocniony łuk A1, wzmacniony łuk A7) oraz na dźwigarze z drewna klejonego wzmacniającym wykonany w skali technicznej łuk A7. Modele badawcze wykonano w skali 1:12. Badania na modelu w skali technicznej z doklejoną w środku dźwigara warstwą powierzchniową (wykonaną z żywicy epoksydowej Epidian 5 z dodatkiem ftalanu dwu-n-butylu (12 cz. w.), utwardzanej w temperaturze pokojowej utwardzaczem aminowym Z1(10 cz. w.)) o wymiarach 200×650 mm. Grubość warstwy wynosiła  $t_w = 3 \text{ mm}$ ,  $E_w = 3200 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu_w = 0.37$ , odkształceniowa wartość rzędu izochromy,  $f_\varepsilon = 0.942 \cdot 10^{-3}$ . Dla drewna przyjęto współczynnik Poissona  $\nu_{dr} = 0,37$  – tab. 5.1. Stanowisko do badań modeli w skali pokazano na rys. 4.205. Stanowisko do badań modelu w skali technicznej pokazano na rys. 4.184.

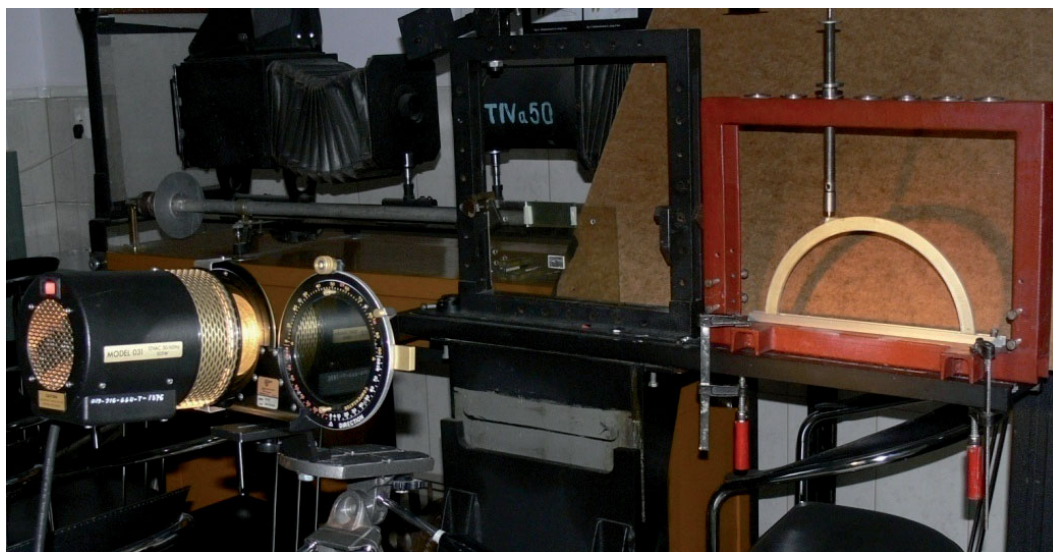
Warstwa została doklejona do badanej powierzchni klejem odblaskowym, sporządzonym na bazie tej samej kompozycji, z której wykonano warstwę, lecz z dodatkiem pyłu aluminiowego.

Pamiętając, że podstawowym założeniem TEWP jest przenoszenie odkształceń przez warstwę kleju, warstwa ta była możliwie cienka, a jej adhezja do powierzchni łuku oraz warstwy bardzo dobra, co uzyskano poprzez dokładne oczyszczenie oraz odtłuszczenie powierzchni: drewna i warstwy, stykających się z klejem.

Aparatura pomiarowa (polaryskop) stosowany w badaniach w świetle odbitym, w tym techniką EWP, charakteryzuje się specyficzną cechą konstrukcyjną, tj. wszystkie zespoły optyczne (filtry polaryzacyjne, płytki fazowe) znajdują się z tej samej strony materiału dwójłomnego. W badaniach zastosowano polaryskop firmy Vishay typu V - model 031, którego konstrukcja umożliwia prowadzenie goniometrycznej kompensacji (pomiaru) rzędu izochromy, mocowanie kompensatora, aparatu fotograficznego, wymianę źródła światła na stroboskopowe. Zastosowany polaryskop pokazano na rys. 4.205 oraz rys. 4.207.

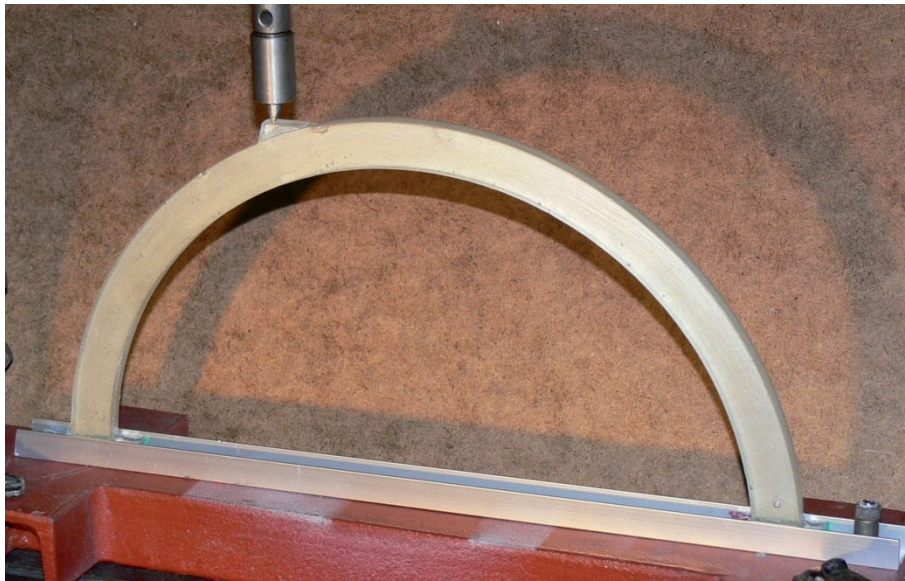
## 4.5.2. Badania modeli w skali 1:12

Badania modelu niewzmocnionego łuku A1 (rys. 4.206) przeprowadzono w laboratorium Wydziału Mechanicznego Politechniki Wrocławskiej.



Rys. 4.205. Model niewzmocnionego łuku A1 na stanowisku do badań elastooptycznych.

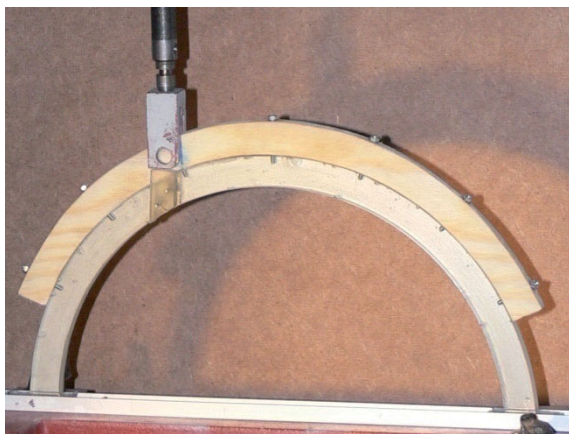
## 4. Badania doświadczalne własne



*Rys. 4.206. Model niewzmocnionego łuku A1.*



*Rys. 4.207. Model wzmocnionego łuku A7 na stanowisku do badań elastoptycznych.*

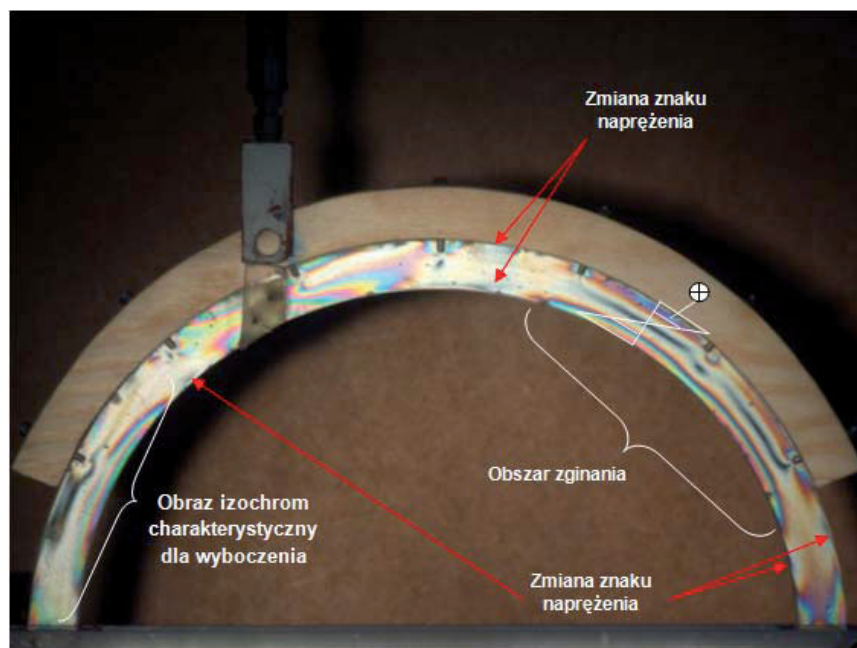
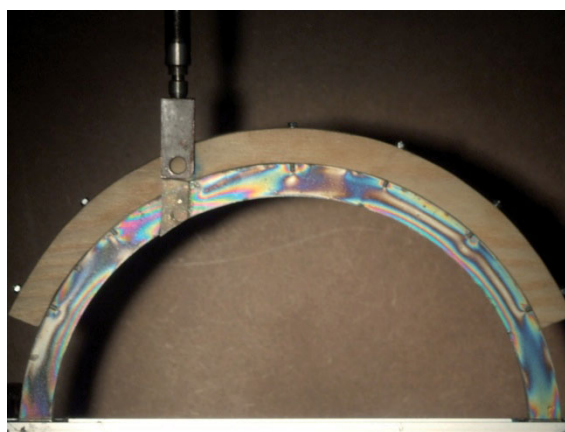
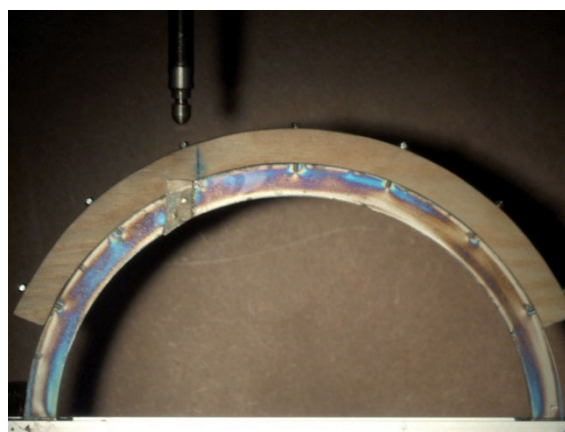


*Rys. 4.208. Model wzmocnionego łuku A7.*



*Rys. 4.209. Szczegół wykonania punktu przyłożenia obciążenia w łuku A7.*

## 4. Badania doświadczalne własne

Rys. 4.210. *Izochromy całkowite  $F = 215.67\text{ N}$ .*Rys. 4.211. *Izochromy połówkowe  $F = 215.67\text{ N}$ .*Rys. 4.212. *Izochromy całkowite  $F = 0$ , napięte kotwy.*Rys. 4.213. *Izochromy połówkowe  $F = 0$ , napięte kotwy.*

W modelu widoczna jest niesymetryczna praca łuku. Prawdopodobnie wynika to z różnego napięcia kotew, co przy utwierdzeniu końców łuku daje właśnie taki efekt. Możliwym wydaje się również wpływ geometrii otworów pod kotwy.

## 4. Badania doświadczalne własne

## 4.5.3. Badania modelu w skali technicznej

Badania modelu w skali technicznej (rys. 4.201) przeprowadzono w laboratorium Wydziału Budownictwa Politechniki Wrocławskiej (w trakcie badań opisanych w rozdz. 4.4).



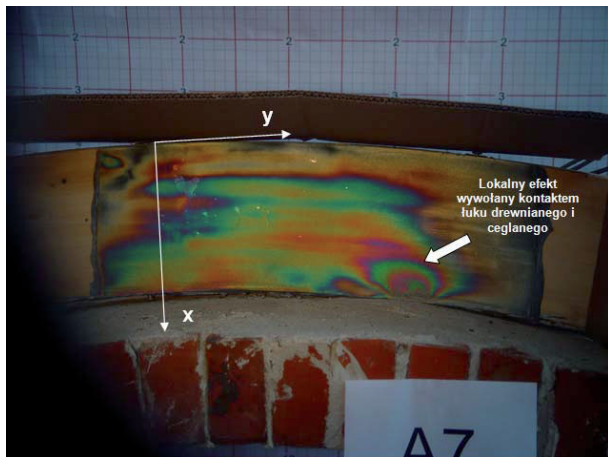
Rys. 4.214. Optyczna warstwa powierzchniowa naklejona na wzmocnienie łuku A7.

Odształcenie w przekroju, na kierunku  $y$  pokazanym poniżej, obliczano ze wzoru:

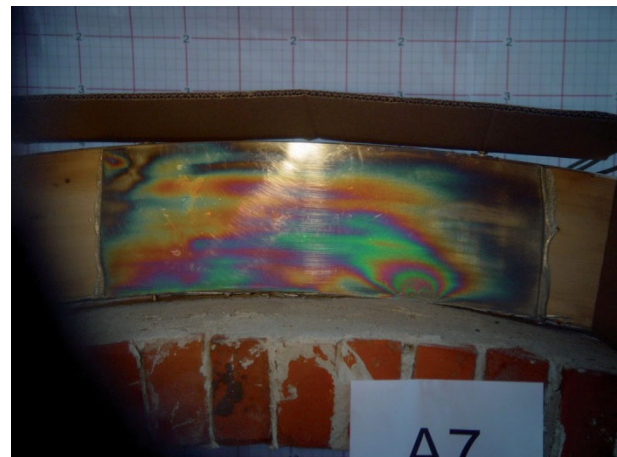
$$\varepsilon_y = N \cdot f_\varepsilon / (1 + \nu_{dr}) \quad (4.24)$$

gdzie:

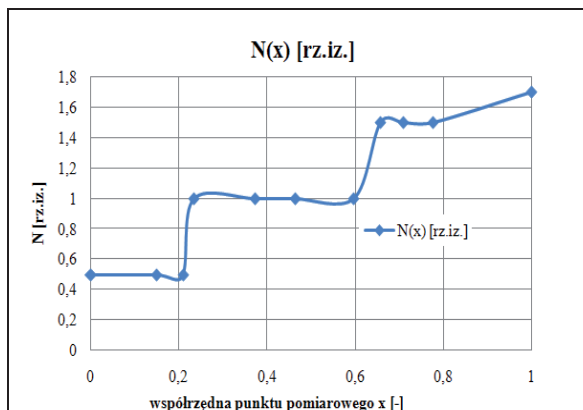
- $N$  – siła,
- $\varepsilon_y$  – odkształcenie w kierunku osi  $y$ ,
- $f_\varepsilon$  – odkształceniowa wartość rzędu izochromy,
- $\nu_{dr}$  – współczynnik Poissona dla drewna



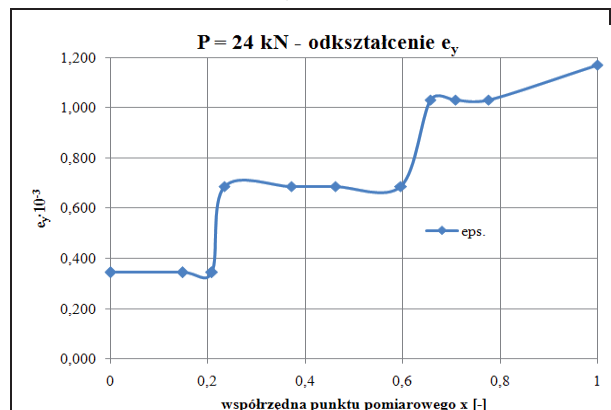
Rys. 4.215. Izochromy całkowite, obciążenie ok. 24,0 kN.



Rys. 4.216. Izochromy połówkowe, obciążenie ok. 24,0 kN.



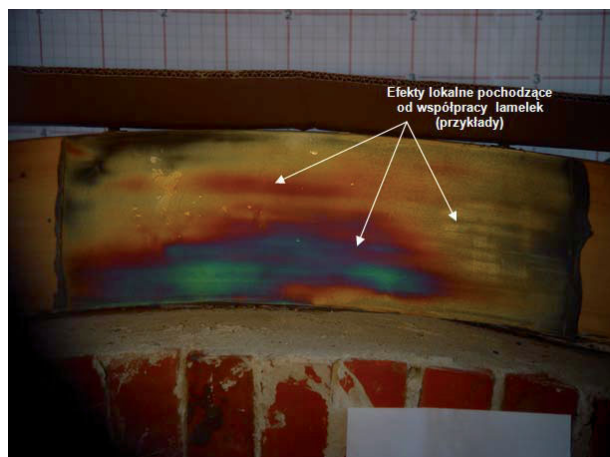
Rys. 4.217. Odształcenia drewna w badanym przekroju w łuku A7 (siła 24 kN) – wyniki z pomiarów tensometrycznych.



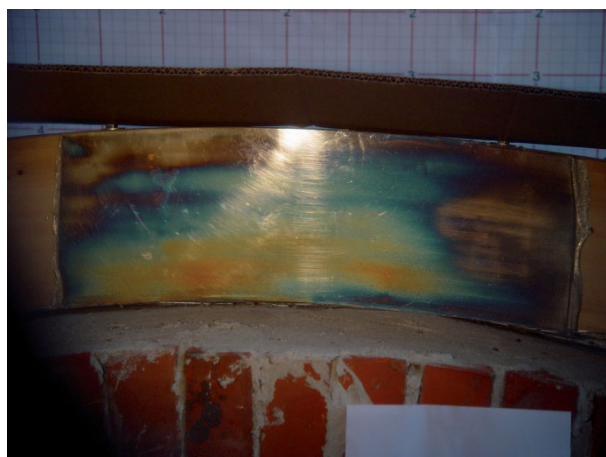
Rys. 4.218. Odształcenia drewna w badanym przekroju w łuku A7 (siła 24 kN) – wyniki z pomiarów elastooptycznych.



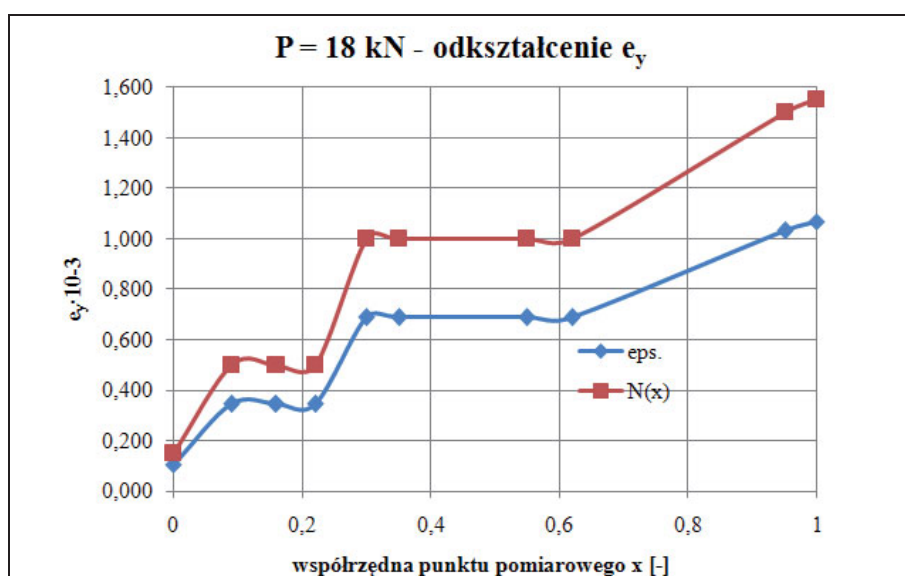
## 4. Badania doświadczalne własne



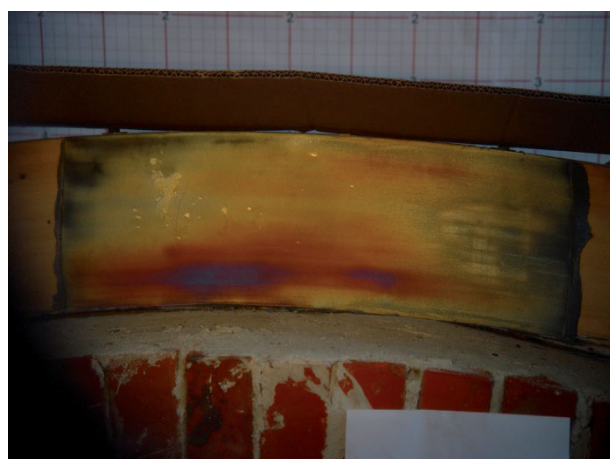
Rys. 4.219. Izochromy całkowite, obc. 18 kN.



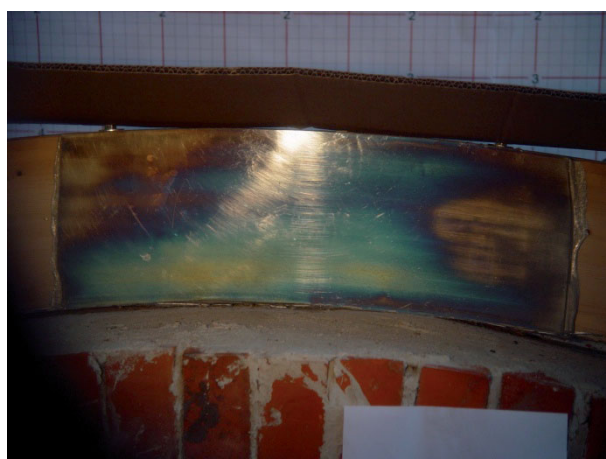
Rys. 4.220. Izochromy połówkowe, obc. 18 kN.



Rys. 4.221. Odształcenia drewna w badanym przekroju w łuku A7 (siła 18 kN).

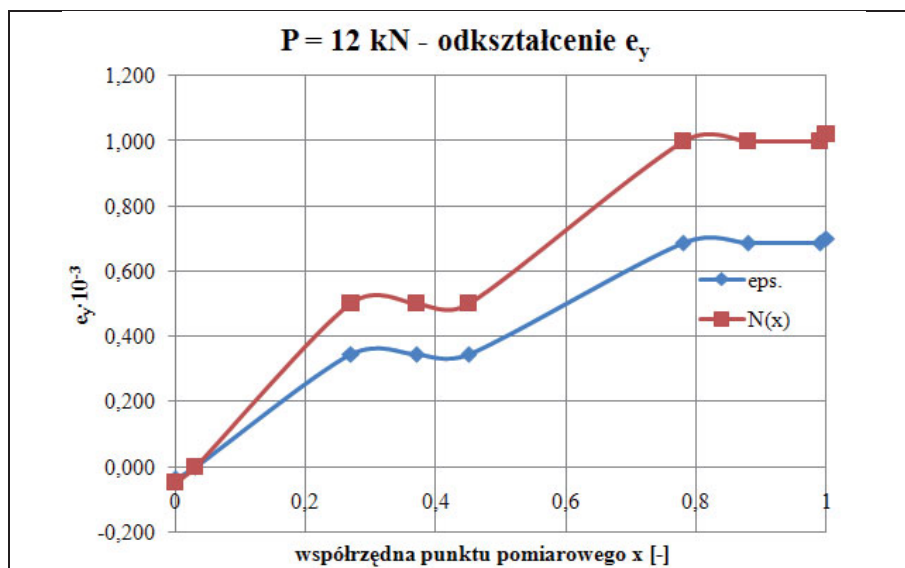


Rys. 4.222. Izochromy całkowite, obc. 12 kN.

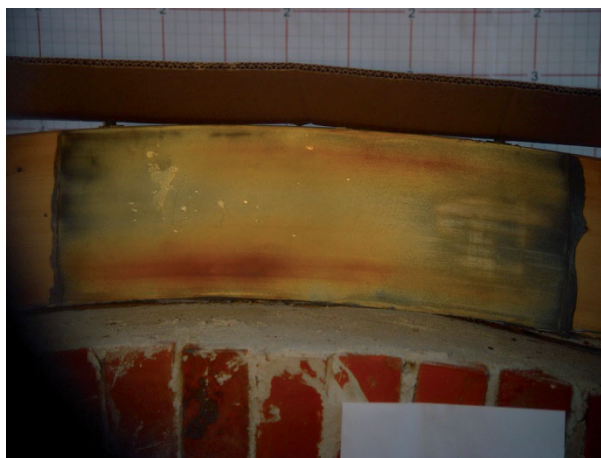


Rys. 4.223. Izochromy połówkowe, obc. 12 kN.

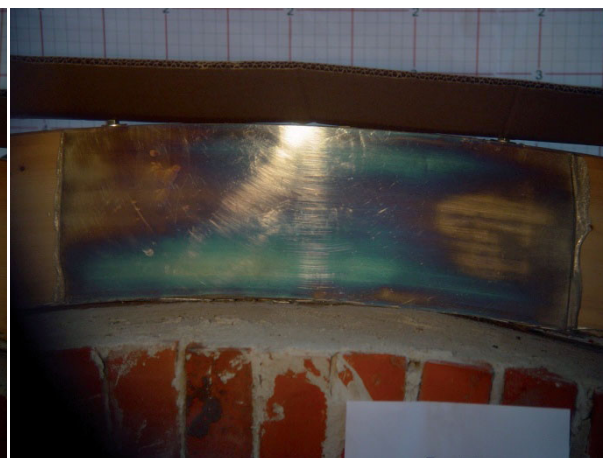
## 4. Badania doświadczalne własne



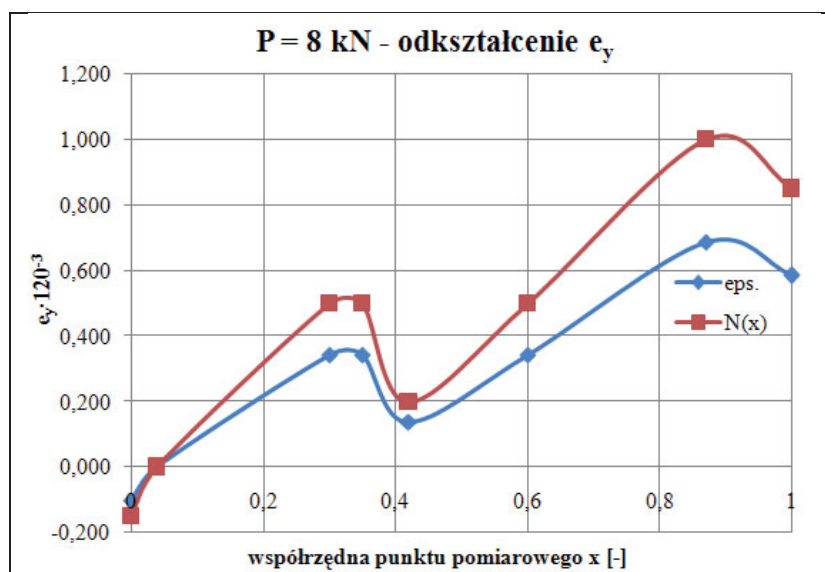
Rys. 4.224. Odkształcenia drewna w badanym przekroju w łuku A7 (siła 12 kN).



Rys. 4.225. Izochromy całkowite, obc. 8 kN.

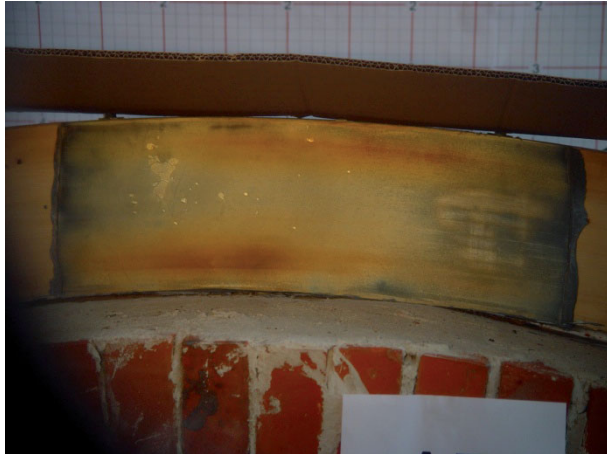


Rys. 4.226. Izochromy połówkowe, obc. 8 kN.

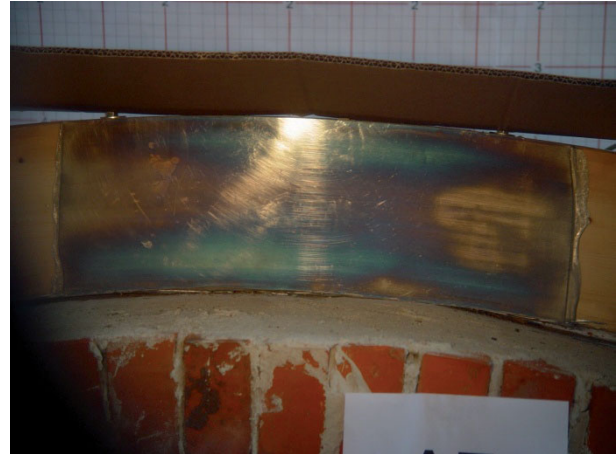


Rys. 4.227. Odkształcenia drewna w badanym przekroju w łuku A7 (siła 8 kN).

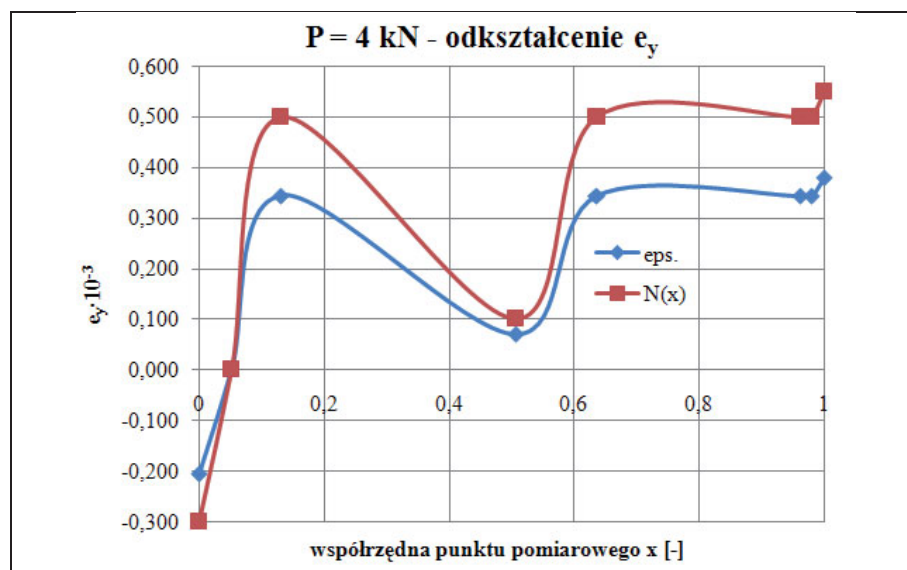
## 4. Badania doświadczalne własne



Rys. 4.228. Izochromy całkowite, obc. 4 kN.



Rys. 4.229. Izochromy połówkowe, obc. 4 kN.



Rys. 4.230. Odształcenia drewna w badanym przekroju w łuku A7 (siła 4 kN).

## 4.5.4. Wnioski

Analiza wyników badań modeli łuków w skali 1:12 oraz analiza obrazów izochrom i wykresów odkształcenia  $e_y$  w łuku A7 (wykonanym w skali technicznej) prowadzi do następujących wniosków:

- 1) małe modele elastoptyczne nie w pełni odwzorowują zachowanie łuków ceglanych poddanych obciążeniom statycznym; obserwowano znaczny wpływ efektów brzegowych,
- 2) rozmiar połączeń (kotw) w łuku A7 (w skali technicznej) znacznie odbiega od rozmiaru zastosowanego w badaniach elastoptycznych co zdecydowanie wpływa na uzyskane wyniki pomiarów,
- 3) przebieg krzywych  $e_y$  jest nieliniowy,
- 4) porównując charakter krzywych z pomiarów: elastoptycznego i tensometrycznego widać, że w pierwszym przypadku krzywe dla kolejnych poziomów obciążenia

## 4. Badania doświadczalne własne

zachowują swój charakter i „odwzorowują” miejsca koncentracji odkształceń związane ze strukturą powierzchni łuku pokrytego warstwą. Świadczą o tym obrazy izochrom, na których np. lamele, są „widoczne” w formie charakterystycznych pasów izochrom o wyższych rzędach.

W zasadzie, w całym zakresie obciążenia zaobserwowano lokalne wpływy pracy lameli na powstające efekty optyczne. Można przyjąć, że miały one również wpływ na wartość odkształceń mierzonych za pomocą tensometrów elektrooporowych.

Przy maksymalnym zarejestrowanym w trakcie badań elastoptycznych obciążeniu  $P = 24 \text{ kN}$ , na krawędzi rozciąganej łuku (dolnej) wartość odkształcenia  $\varepsilon_y$  wyniosła  $1,169 \cdot 10^{-3}$ , a w punkcie odległym od tej krawędzi o 7 mm (położenie tensometru T1 – rys. 4.199) –  $1,11 \cdot 10^{-3}$ . Porównując ten wynik z wynikiem uzyskanym w pomiarach tensometrycznych –  $0,743 \cdot 10^{-3}$  otrzymujemy różnicę względną:

$$\delta = (\varepsilon_{y \text{ elast.}} - \varepsilon_{y \text{ tens.}}) / \varepsilon_{y \text{ elast.}} = 0.384 \quad (4.25)$$

gdzie:

- $\delta$  – różnica względna,
- $\varepsilon_{y \text{ elast}}$  – odkształcenie w kierunku  $y$  z pomiarów elastoptycznych,
- $\varepsilon_{y \text{ tens}}$  – odkształcenie w kierunku  $y$  z pomiarów tensometrycznych,

Różnica ta jest prawdopodobnie związana z pojawiającym się podczas obciążania zwichrowaniem łuku, w więc niesymetrycznym obciążeniem przekroju.

Wartości naprężeń  $\sigma_y$  obliczono ze wzoru:

$$\sigma_y = \varepsilon_y \cdot E_{dr} \quad (4.26)$$

gdzie:

- $\sigma_y$  – naprężenie w kierunku  $y$ ,
- $\varepsilon_y$  – odkształcenie w kierunku  $y$ ,
- $E_{dr}$  – moduł sprężystości Younga dla drewna ( $E_{dr} = 11600 \text{ MPa}$ ),

Na podstawie wyników opisanych badań i sformułowanych powyżej wniosków szczegółowych można stwierdzić, że badanie elastoptyczne pozwala na szczegółową obserwację wpływu struktury drewna (w konkretnym przypadku budowy warstwowej) na procesy odkształceniowe.

#### 4.6. Analiza wyników badań własnych. Wnioski szczegółowe.

Badania zostały przeprowadzone na 7 modelach w skali technicznej. Elementy wzmacniające starano się umieszczać po stronie grzbietowej łuków lub wewnątrz przekrojów. Taki sposób wzmocnienia jest zdecydowanie bardziej przydatny w przypadku łuków i sklepień historycznych, bogato dekorowanych po stronie podniebienia. W literaturze przedmiotu nie opisano dotąd podobnych przekrojowych badań z udziałem tak wielu metod wzmacniania zakrzywionych konstrukcji ceglanych, będących do zaakceptowania ze względów doktrynalnych w konserwacji konstrukcyjnej historycznych sklepień ceglanych. Badania wzmocnień łuków ceglanych przy użyciu FRCM są pierwszymi tego typu badaniami.

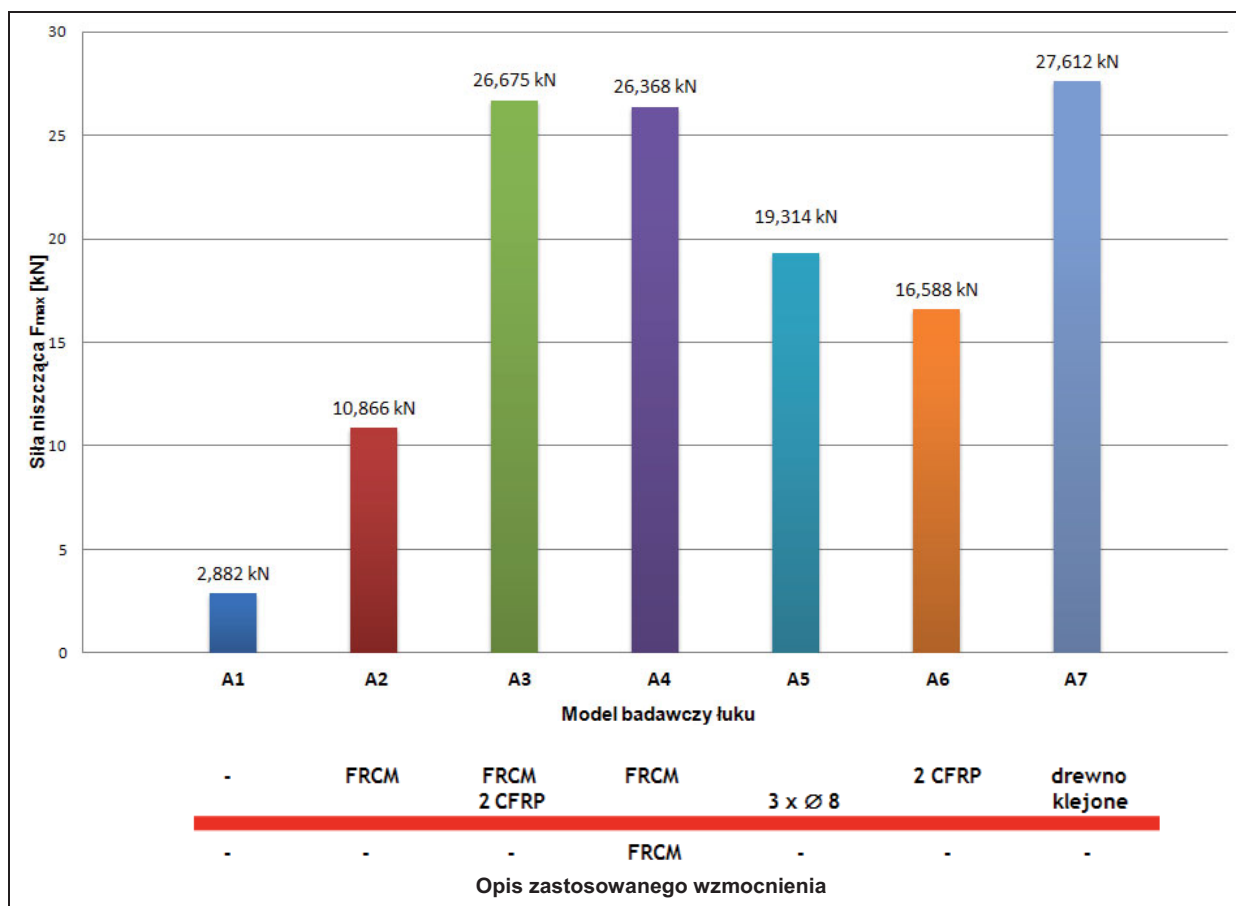
Na podstawie wyników badań można jednoznacznie stwierdzić, iż wszystkie z badanych metod wpływają bardzo korzystnie na nośność i sztywność badanych łuków (rys.

## 4. Badania doświadczalne własne

4.231). Na rys. 4.237 zestawiono ścieżki równowagi statycznej dla wszystkich badanych modeli łuków z podaniem wartości granicznych sił niszczących. Zestawienie wyników maksymalnych wartości sił niszczących  $F_{max}$  przedstawiono na rys. 4.231, a w tab. 4.57 przedstawiono przyrost nośności dla kolejnych modeli łuków w odniesieniu do łuku świadkowego (niewzmocnionego) A1. Wzrost ten jest duży i zawiera się pomiędzy 3,77 (dla łuku A2) a 9,58 (dla łuku A7). W przypadku łuków A3 i A4 wzrost nośności jest ponad dziewięciokrotny (A3 – 9,26, A4 – 9,15) i te właśnie rozwiązania wydają się być najbardziej efektywne biorąc pod uwagę czas wykonania wzmocnienia i stosunkowo proste rozwiązanie technologiczne.

Tab. 4.57. Przyrost nośności w poszczególnych modelach łuków

model łuku nr	siła niszcząca $F_{max}$ [kN]	wzrost nośności	
		%	x
A1	2,882	-	1
A2	10,866	377	3,77
A3	26,675	926	9,26
A4	26,368	915	9,15
A5	19,314	670	6,70
A6	16,588	576	5,76
A7	27,618	958	9,58

Rys. 4.231. Zestawienie maksymalnych wartości sił niszczących  $F_{max}$  dla wszystkich modeli łuków.

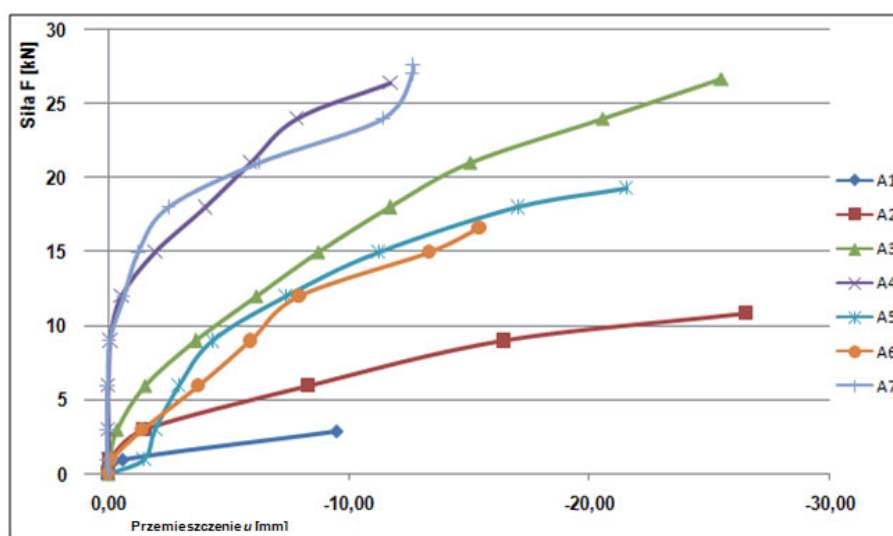
Interesująca jest zależność pomiędzy łukiem A3 (taśmy CFRP + FRCM – po stronie grzbietowej) a łukami A2 (FRCM po stronie grzbietowej) i A6 (taśmy CFRP po stronie

## 4. Badania doświadczalne własne

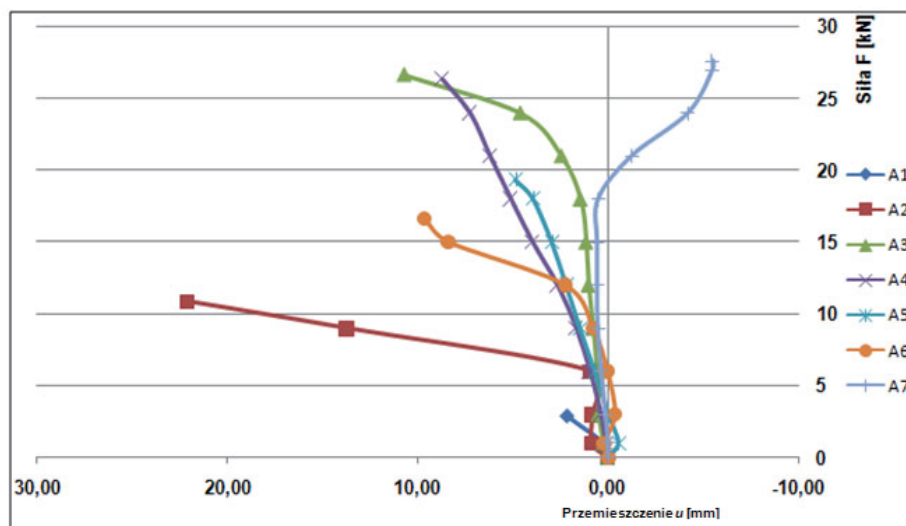
grzbietowej). Wartość siły niszczącej dla łuku A3 jest sumą wartości sił niszczących dla łuków A2 i A6. Świadczy to o poprawności wykonanych badań i o pewnej przewidywalności siły niszczącej w łuku wzmocnionym jednym z tych materiałów oraz ich kombinacją – jak w przypadku łuku A3.

Na rys. 4.232 – 4.236 przedstawiono wyniki pomiarów przemieszczeń  $u$  w zależności od działającej siły  $F$ , mierzonych w pięciu punktach pomiarowych, zestawione dla wszystkich modeli badawczych łuków.

Wynika z nich, że przemieszczenia dla łuków wzmocnionych FRM (łuki A2, A3 i A4), szczególnie w punktach, w których powstawały największe odkształcenia modeli łuków – czyli w punktach 1, 2 i 3 – przy znacznych wartościach siły niszczącej są większe od innych. Świadczy to o zdecydowanie większej zdolności przekroju konstrukcji zespolonej (wzmocnionej opisanymi metodami) do kompensacji globalnych deformacji przy wysokich poziomach wyężenia. Obok wysokiej efektywności (nośność) ma to niewątpliwie znaczenie dla narastania ewentualnych stanów awaryjnych i zachowania konstrukcji w czasie.

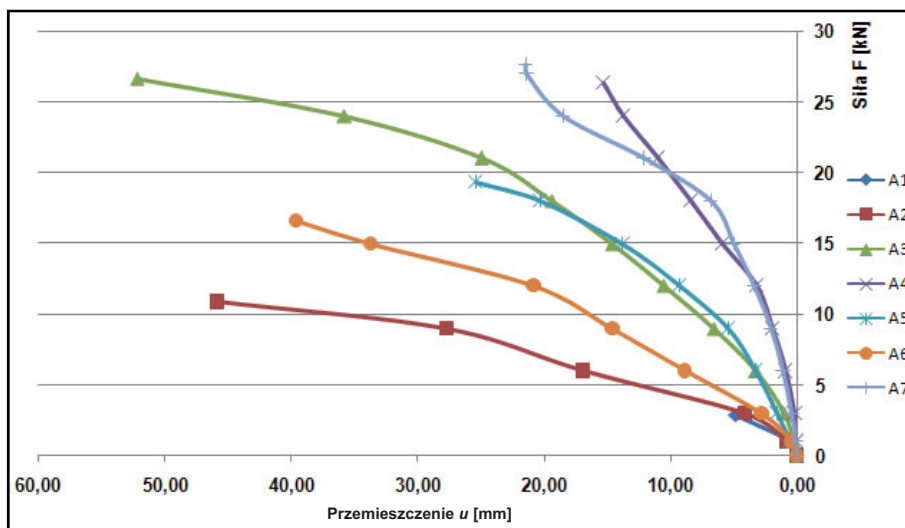


Rys. 4.232. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w punkcie pomiarowym nr 1.

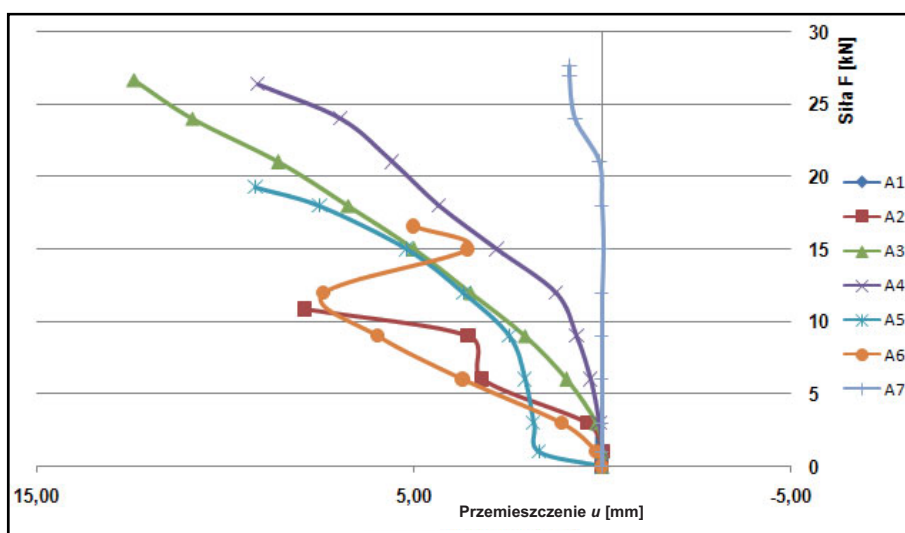


Rys. 4.233. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w punkcie pomiarowym nr 2.

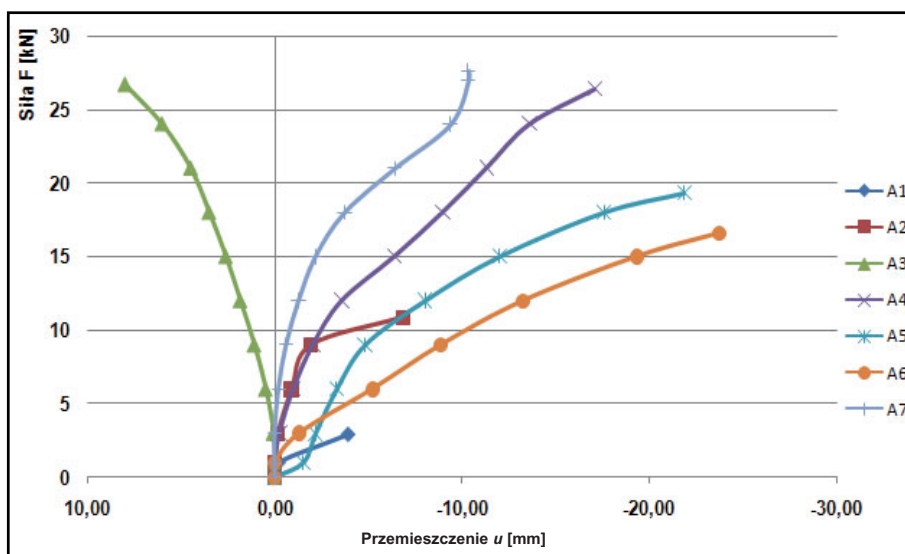
## 4. Badania doświadczalne własne



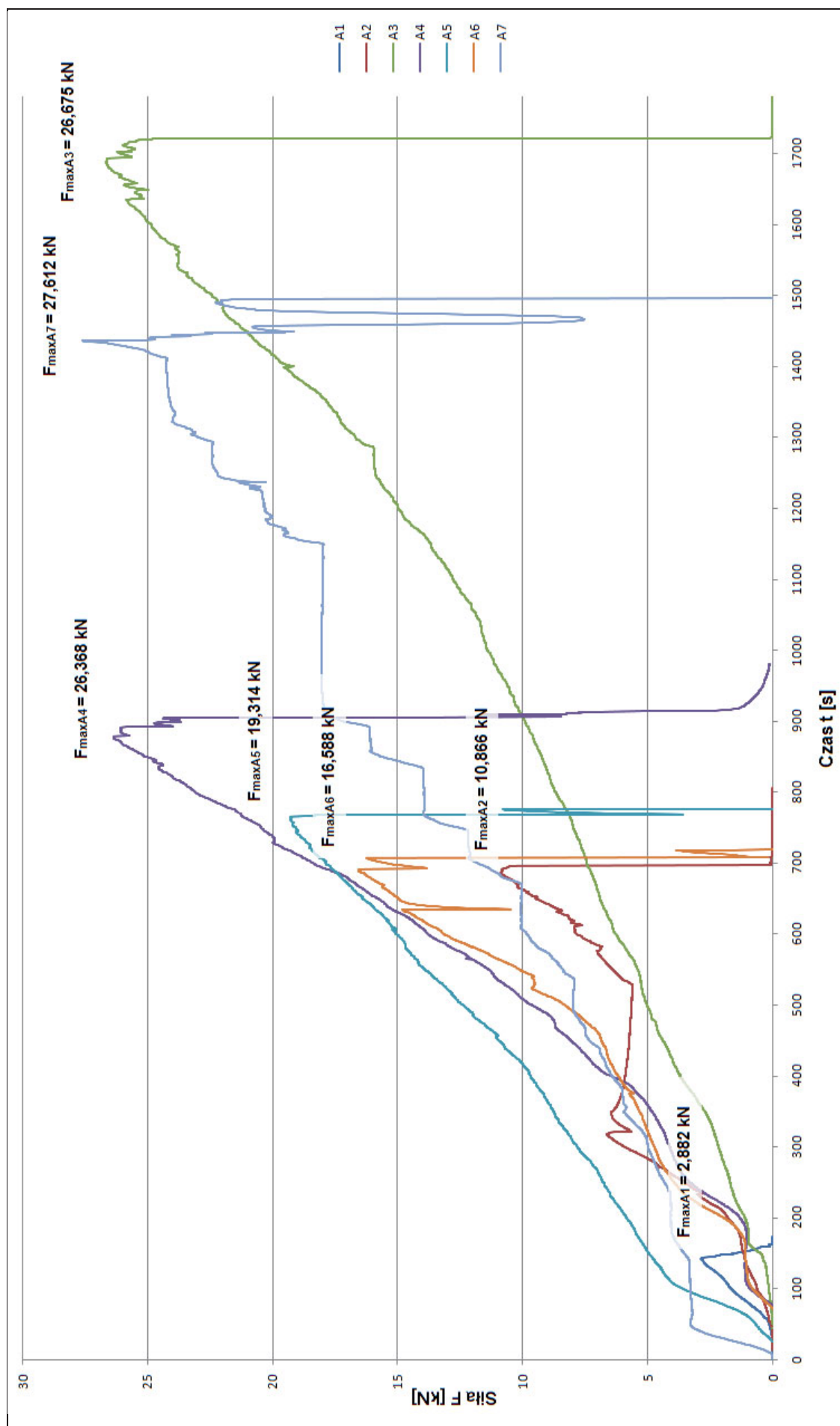
Rys. 4.234. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w punkcie pomiarowym nr 3.



Rys. 4.235. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w punkcie pomiarowym nr 4.



Rys. 4.236. Zależność: siła "F" – przemieszczenie "u" w punkcie pomiarowym nr 5.



Rys. 4.237. Ścieżka równowagi statycznej dla wszystkich badanych tuków.



## 4. Badania doświadczalne własne

W tabeli 4.59 zestawiono wszystkie obserwowane modele zniszczenia badanych łuków. Należy zwrócić uwagę na zmianę charakteru tych modeli. Począwszy od klasycznego, opisanego w literaturze zniszczenia występującego w łuku A1 (model z 4 przegubami), w kolejnych łukach powstające przeguby zmieniają miejsce występowania (tworzą się w obrębie podpór oraz w przekroju przyłożenia siły). Można też zaobserwować ścinanie łuków w obszarach podpór. W rzeczywistych konstrukcjach w miejscach podpór występują bardzo masywne ściany wyższe od łuków, dodatkowo dociążone reakcjami pionowymi i ciężarem własnym, ograniczające możliwość przemieszczeń łuków i przypadek ścięcia na podporze raczej nie występuje, pomijając nawet rozbudowane oparcia poprzez przemurowanie wezglowia. Natomiast opisana postać zniszczenia może wystąpić w przekroju o zmiennej sztywności tuż nad wezglowiem.

W tab. 4.58 i 4.60 zestawiono mierzone w charakterystycznych punktach przemieszczenia w poszczególnych modelach łuków. Na podstawie zawartych w tych tabelach informacji można stwierdzić, że maksymalne przemieszczenia występują w większości przypadków (A2, A3, A5, A6, A7) w punkcie 3 – czyli w miejscu przyłożenia obciążenia. Różnica w ugięciach w punkcie 3 (łuk A3) w porównaniu z łukiem świadkowym A1 jest ponad 10 razy większa, a w punkcie 4 (łuk A3) – prawie 100 razy większa.

W tab. 4.60 podano wpływ rodzaju wzmocnienia na zmianę przebiegu wykresów ugięć w poszczególnych łukach. Można stwierdzić, że modele A7 i A3 charakteryzują się znaczną sztywnością w porównaniu z łukiem świadkowym. Pozostałe wzmocnione modele osiągają znacznie większe ugięcia niż łuk świadkowy, przy wyższych poziomach obciążeń. Szczególnie dotyczy to modeli wzmocnionych przy użyciu siatek z włókien węglowych, w których przypadku odkształcenie i zniszczenie następuje w sposób bardzo płynny i powolny. Brak jest wyraźnego wpływu koncentracji naprężeń i związanego z nim gwałtownego odspojenia materiału wzmacniającego, jak w przypadku modeli wzmocnionych samymi taśmami CFRP lub prętami stalowymi.

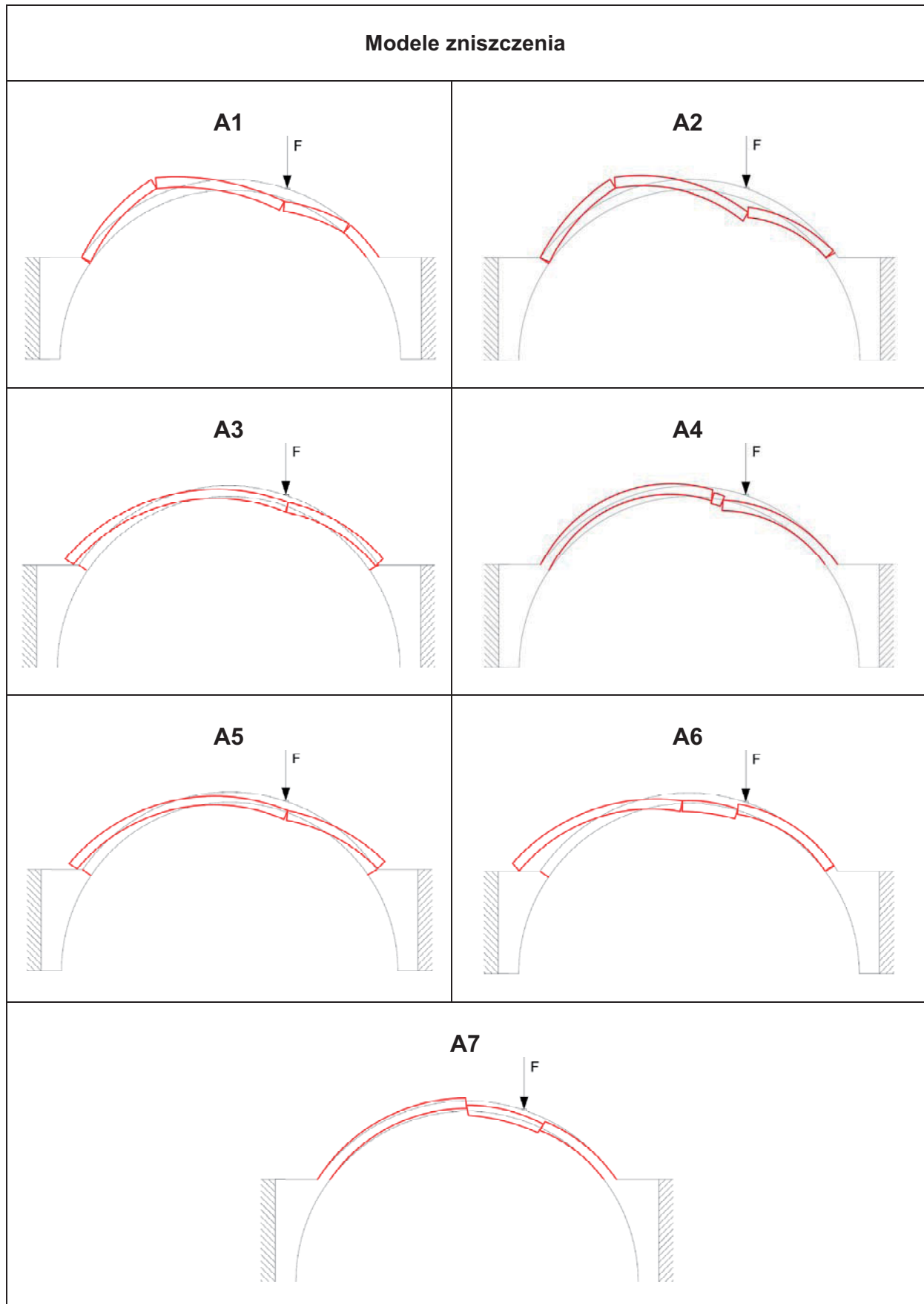
Zmiana postaci zniszczenia i wzrost nośności poszczególnych badanych modeli łuków świadczą o przydatności zastosowanych wzmocnień i poprawności ich wykonania.

Tab. 4.58. Przemieszczenia maksymalne w punktach pomiarowych

Łuk	Siła niszcząca $F_{max}$ [kN]	Punkty pomiarowe				
		1	2	3	4	5
		Przemieszczenia $u$ [mm]				
A1	<b>2,882</b>	<b>-9,4830</b>	2,1300	4,8285	0,1250	-3,8580
A2	<b>10,866</b>	-26,4950	22,0955	<b>45,9005</b>	7,8830	-6,8180
A3	<b>26,675</b>	-25,4865	10,7260	<b>52,2575</b>	12,3935	8,0305
A4	<b>26,368</b>	-11,7440	8,6935	15,3290	9,1215	<b>-17,0540</b>
A5	<b>19,314</b>	-21,5445	4,8475	<b>25,4595</b>	9,1780	-21,8300
A6	<b>16,588</b>	-15,4130	9,6070	<b>39,6290</b>	5,0100	-23,7170
A7	<b>27,618</b>	-12,6620	-5,4800	<b>21,4535</b>	0,8580	-10,3060

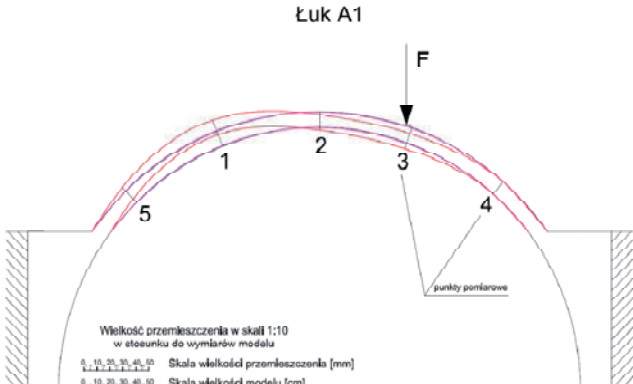
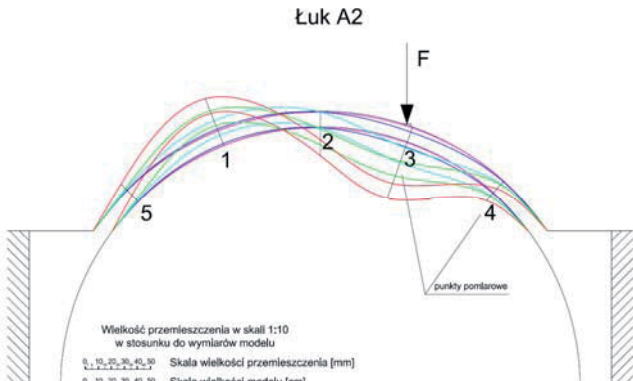
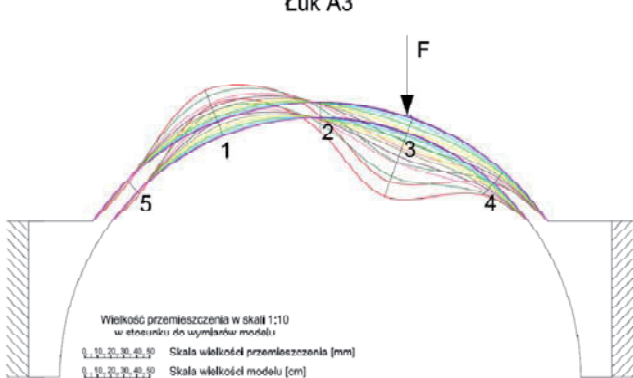
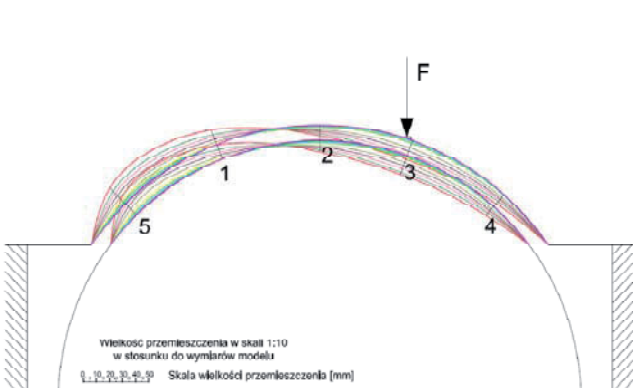
## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.59. Modele zniszczenia w poszczególnych modelach łuków

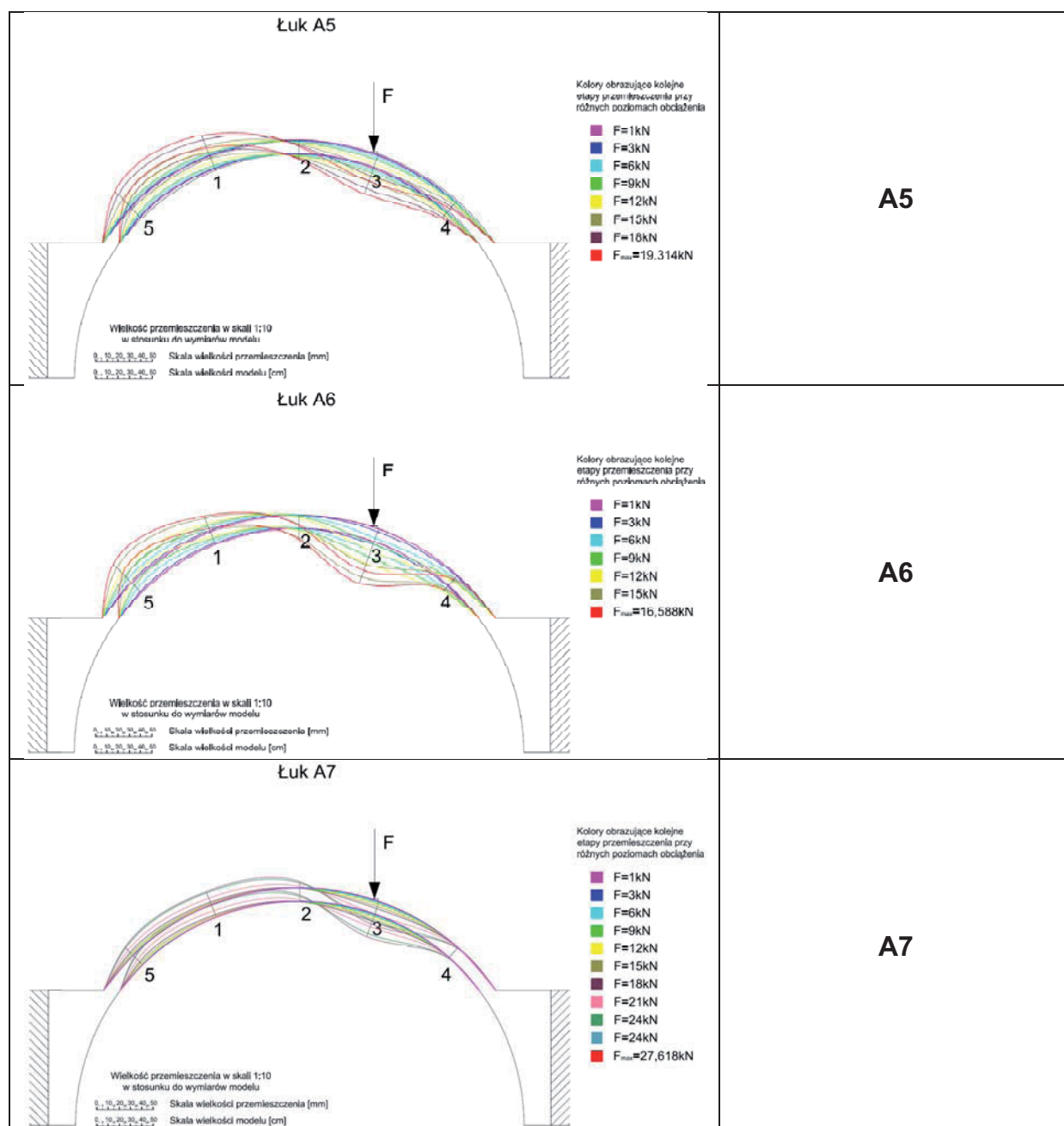


## 4. Badania doświadczalne własne

Tab. 4.60. Ugięcia w poszczególnych modelach łuków

Schematy ugięć	Łuk nr
<p style="text-align: center;"><b>Łuk A1</b></p>  <p style="text-align: right;">Kolorы obrazujące kolejne etapy przemieszczenia przy różnych poziomach obciążenia</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><span style="color: purple;">■</span> F=1kN</li> <li><span style="color: red;">■</span> F<sub>max</sub>=2,882kN</li> </ul> <p style="text-align: center;">Wielkość przemieszczenia w skali 1:10 w stosunku do wymiarów modelu</p> <p style="text-align: center;">Skala wielkości przemieszczenia [mm] Skala wielkości modelu [cm]</p>	<b>A1</b>
<p style="text-align: center;"><b>Łuk A2</b></p>  <p style="text-align: right;">Kolorы obrazujące kolejne etapy przemieszczenia przy różnych poziomach obciążenia</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><span style="color: purple;">■</span> F=1kN</li> <li><span style="color: blue;">■</span> F=3kN</li> <li><span style="color: cyan;">■</span> F=6kN</li> <li><span style="color: green;">■</span> F=9kN</li> <li><span style="color: red;">■</span> F<sub>max</sub>=10,866kN</li> </ul> <p style="text-align: center;">Wielkość przemieszczenia w skali 1:10 w stosunku do wymiarów modelu</p> <p style="text-align: center;">Skala wielkości przemieszczenia [mm] Skala wielkości modelu [cm]</p>	<b>A2</b>
<p style="text-align: center;"><b>Łuk A3</b></p>  <p style="text-align: right;">Kolorы obrazujące kolejne etapy przemieszczenia przy różnych poziomach obciążenia</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><span style="color: purple;">■</span> F=1kN</li> <li><span style="color: blue;">■</span> F=3kN</li> <li><span style="color: cyan;">■</span> F=6kN</li> <li><span style="color: green;">■</span> F=9kN</li> <li><span style="color: yellow;">■</span> F=12kN</li> <li><span style="color: olive;">■</span> F=15kN</li> <li><span style="color: brown;">■</span> F=18kN</li> <li><span style="color: pink;">■</span> F=21kN</li> <li><span style="color: red;">■</span> F=24kN</li> <li><span style="color: darkred;">■</span> F<sub>max</sub>=26,675kN</li> </ul> <p style="text-align: center;">Wielkość przemieszczenia w skali 1:10 w stosunku do wymiarów modelu</p> <p style="text-align: center;">Skala wielkości przemieszczenia [mm] Skala wielkości modelu [cm]</p>	<b>A3</b>
<p style="text-align: center;"><b>Łuk A4</b></p>  <p style="text-align: right;">Kolorы obrazujące kolejne etapy przemieszczenia przy różnych poziomach obciążenia</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><span style="color: purple;">■</span> F=1kN</li> <li><span style="color: blue;">■</span> F=3kN</li> <li><span style="color: cyan;">■</span> F=6kN</li> <li><span style="color: green;">■</span> F=9kN</li> <li><span style="color: yellow;">■</span> F=12kN</li> <li><span style="color: olive;">■</span> F=15kN</li> <li><span style="color: brown;">■</span> F=18kN</li> <li><span style="color: pink;">■</span> F=21kN</li> <li><span style="color: red;">■</span> F=24kN</li> <li><span style="color: darkred;">■</span> F<sub>max</sub>=26,368kN</li> </ul> <p style="text-align: center;">Wielkość przemieszczenia w skali 1:10 w stosunku do wymiarów modelu</p> <p style="text-align: center;">Skala wielkości przemieszczenia [mm] Skala wielkości modelu [cm]</p>	<b>A4</b>

## 4. Badania doświadczalne własne



Biorąc pod uwagę wyniki przeprowadzonych badań można sformułować następujące wnioski szczegółowe:

- 1) Wszystkie modele badawcze przygotowano mając na uwadze praktyczne wykorzystanie badanych technik w konserwacji konstrukcyjnej łuków i sklepień.
- 2) Badania potwierdziły możliwość i przydatność stosowania wzmocnień FRMC, czyli siatek z włókien węglowych zatapiających w zaprawie mineralnej, do wzmacniania zakrzywionych historycznych konstrukcji ceglanych w zakresie wzrostu nośności.
- 3) Potwierdzono również przydatność technologiczną systemów FRMC we wzmacnianiu konstrukcji ceglanych.

## 4. Badania doświadczalne własne

- 4) Badania potwierdziły możliwość i przydatność stosowania łącznego wzmocnienia przy użyciu taśm CFRP oraz systemów FRCM.
- 5) Badania potwierdziły przydatność stosowania we wzmocnieniu technologii prętów wklejanych do wnętrza przekroju konstrukcji ceglanych w zakresie wzrostu nośności i sztywności.
- 6) Badania potwierdziły możliwość i przydatność stosowania elementów z drewna klejonego (łączonych z konstrukcją ceglana za pomocą wklejanych kotew stalowych) do usztywniania powłok łukowych, żeber, wysklepek, sklepień (należy zwrócić jednak uwagę na trudności związane z dopasowaniem krzywizn elementów wzmocniających z drewna klejonego do krzywizn konstrukcji łuków i sklepień).
- 7) Przekroje taśm CFRP oraz prętów stalowych zostają wykorzystane w niewielkim stopniu; najwłaściwszym rozwiązaniem wydaje się być wstępne ich sprężenie, co pozwala na znaczne wykorzystanie ich wytrzymałości, a co za tym idzie na zwiększenie efektywności wzmocnienia; rozwiązanie takie jest jednak trudne do zrealizowania w konstrukcjach łuków i sklepień z uwagi na trudności w umieszczeniu i zakotwieniu bloków sprężających.
- 8) Stopień wykorzystania wklejanych prętów stalowych w łuku A5 (ok. 45 %) jest znacznie wyższy od stopnia wykorzystania naklejanych taśm węglowych CFRP (ok. 13% – łuk A3) i (ok. 6% – łuk A6).
- 9) Wpływ poszczególnych badanych metod wzmocnienia łuków ceglanych jest bardzo różny, ale w każdym przypadku korzystny – wzrost nośności i sztywności oraz zachowania statycznego konstrukcji po wzmocnieniu (znacząca eliminacja wpływu koncentracji naprężeń w przekrojach rozciąganych).
- 10) Wzrost nośności badanych łuków wzmocnionych wyniósł od 377% dla łuku A2 do 958% dla łuku A7.
- 11) Różnice ugięć w 5 punktach pomiarowych zmierzone w fazie tuż przed zniszczeniem konstrukcji wzmocnionej wahają się od 0,125 mm (punkt 4 – łuk A1) do 52,26 mm (punkt 3 – łuk A3).
- 12) Badania potwierdziły zmianę modeli zniszczenia łuków po wzmocnieniu w porównaniu z łukiem niewzmocnionym; w odróżnieniu od modelu z czterema przegubami (łuk A1) we wzmocnionych łukach (A2 – A7) powstające przeguby tworzyły się w obrębie podpór oraz w przekroju przyłożenia siły, obserwowano również ścinanie łuków w obrębie podpór.

## 5. ANALIZA NUMERYCZNA

### 5.1. Wprowadzenie

Do dokładnego opisu zachowania i postaci zniszczenia konstrukcji murowych potrzebne jest zastosowanie modeli obliczeniowych uwzględniających nieliniowość i kruchą strukturę muru. Jednakże w przypadku analizy pracy statycznej zakrzywionych konstrukcji ceglanych zdecydowano się na zastosowanie skomplikowanych modeli liniowo – sprężystych. W dużej mierze wynikało to z faktu umożliwienia analizy efektywności wzmocnień w prostych opracowaniach inżynierskich, a także chciano jednoznacznie ocenić przydatność tych metod w analizie pracy tego typu konstrukcji. Prace nad uwzględnieniem nieliniowych charakterystyk w analizie pracy badanych konstrukcji są kontynuowane.

Obliczenia numeryczne, za pomocą metody elementów skończonych (MES), wykonano w środowisku I-DEAS. Jest to nowej generacji system przeznaczony do komputerowego wspomagania prac inżynierskich umożliwiający trójwymiarowe modelowanie w oparciu o bryły i powierzchnie. Na wykonanym modelu możliwe jest przeprowadzenie analiz wytrzymałościowych i analiz kinematycznych, w każdym ze znanych zakresów (np. liniowym, liniowo – sprężystym, plastycznym, itd.)

Parametry materiałowe muru, siatek, taśm, stali, drewna i kompozycji klejowej w badaniach numerycznych przyjęte zostały na podstawie badań własnych oraz danych literaturowych.

### 5.2. Model materiału murowego

W analizie numerycznej przyjęto, że mur jest materiałem homogenicznym, sprężystym, ortotropowym o liniowej charakterystyce.

Korzystając z prezentowanych w rozdz. 2.7 znanych z literatury modeli materiału murowego wyznaczono opisujące go parametry:

- współczynnik sprężystości (moduł Younga)  $E$ ,
- współczynnik Poissona  $\nu$ ,
- współczynnik sprężystości postaciowej (moduł Kirchhoffa)  $G$ .

Rozpatrywane zagadnienie dotyczy numerycznego sposobu homogenizacji muru ceglano w zakresie sprężystym. Problem homogenizacji przedstawiono w płaskim stanie naprężenia. Odpowiednie zagadnienie brzegowe na reprezentacyjnej komórce (rys. 5.1) dyskretyzowano metodą elementów skończonych. Zastosowana metoda homogenizacji pozwoliła wyznaczyć dla muru, który jest niejednorodnym dwuskładnikowym materiałem kompozytowym, wartości pięciu efektywnych parametrów materiałowych dla jednorodnego materiału ortotropowego.

Parametry materiałowe zhomogenizowanego muru wyznaczono na podstawie formuł [137]:

$$\bar{\nu}_y = \bar{\sigma}_x^{(2)} / \bar{\sigma}_y^{(2)} \quad (5.1)$$

$$\bar{\nu}_x = \bar{\sigma}_y^{(1)} / \bar{\sigma}_x^{(1)} \quad (5.2)$$

$$\bar{E}_x = \bar{\sigma}_x^{(1)} (1 - \bar{\nu}_x \bar{\nu}_y) / \bar{\epsilon}_x^{(1)} \quad (5.3)$$

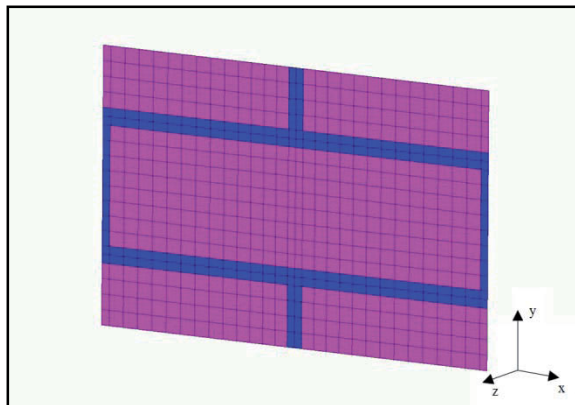
$$\bar{E}_y = \bar{\sigma}_y^{(2)} (1 - \bar{\nu}_x \bar{\nu}_y) / \bar{\epsilon}_y^{(2)} \quad (5.4)$$

$$\bar{G} = \bar{\tau}_{xy}^{(3)} / \bar{\gamma}_{xy}^{(3)} \quad (5.5)$$

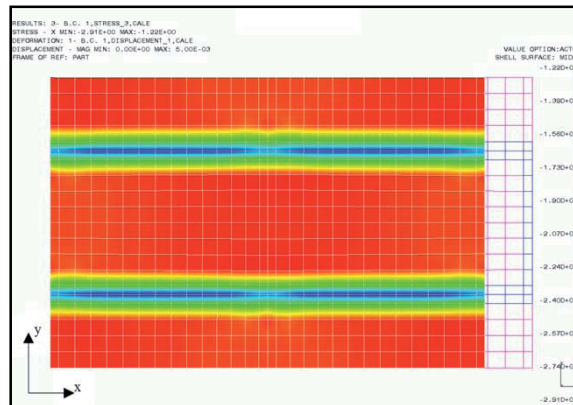
## 5. Analiza numeryczna

gdzie:

- (i) – identyfikuje rozpatrywany przypadek przemieszczenia:
- (1) – ściskanie – rozciąganie w kierunku x (rys. 5.2),
- (2) – ściskanie – rozciąganie w kierunku y,
- (3) – ścinanie w płaszczyźnie xy.



Rys. 5.1. Modelowa komórka murowa (widoczny podział na cegły i zaprawę).



Rys. 5.2. Komórka murowa w przypadku przemieszczenia :ściskanie – rozciąganie w kier. x.

W obliczeniach wykorzystano następujące wartości materiałów składowych muru:

- dla cegły  $E = 9000$  MPa,  $\nu = 0,167$ ,
- dla zaprawy  $E = 800$  MPa,  $\nu = 0,167$ .

Wyniki przeprowadzonych obliczeń wartości parametrów materiałowych opisujących zhomogenizowany ośrodek murowy oraz wartości przyjęte dla pozostałych materiałów wykorzystanych w analizie numerycznej zestawiono w tab. 5.1.

Tab. 5.1. Parametry materiałowe muru oraz materiałów użytych do wzmocnień

materiał	Moduł sprężystości podłużnej $E$ [MPa]		Współczynnik Poisson'a $\nu$ [-]		Moduł sprężystości poprzecznej $G$ [MPa]
	$E_x$	$E_y$	$\nu_x$	$\nu_y$	
<i>mur</i>	6500		0,167		4300
<i>taśma FRP</i>	168000	10000	0,3		5000
<i>materiał FRCM</i>	240000		0,4		5000
<i>stal</i>	210000		0,3		80000
<i>drewno klejone</i>	11600	9000	0,37	0,42	720
<i>kompozycja klejowa</i>	2500		0,3		-

Otrzymane wyniki porównano z propozycjami spotykanymi w literaturze. Wyznaczone parametry użyto następnie w obliczeniach zakrzywionych konstrukcji murowych.

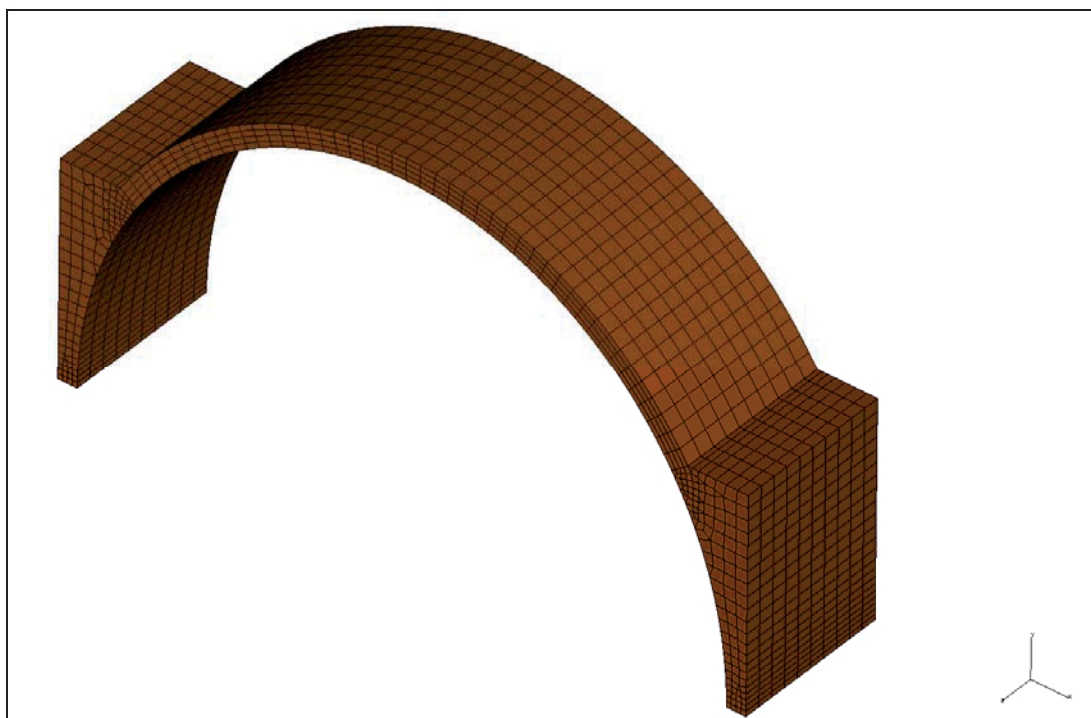
### 5.3. Modele numeryczne niewzmocnionych konstrukcji ceglanych

Konstrukcja nośna łuku, jak każdy obiekt rzeczywisty, posiada nieskończoną liczbę stopni swobody. Do celów obliczeniowych konieczna jest jego dyskretyzacja, tzn. zbudowanie modelu dysponującego skończoną liczbą stopni swobody, a jednocześnie odzwierciedlającego w sposób możliwie wierny fizyczne właściwości obiektu rzeczywistego. Dla konstrukcji opracowano przestrzenny model geometryczny i dyskretny (rys. 5.3).

## 5. Analiza numeryczna

Model numeryczny do obliczeń metodą elementów skończonych składał się z powłokowych elementów typu SHELL oraz przestrzennych typu SOLID. Opracowano model obliczeniowy łuku niewzmocnionego a wyniki porównano z wynikami z badań doświadczalnych. Istotnym elementem modelu obliczeniowego jest określenie niezbędnych własności materiałów zastosowanych w modelu. W tym przypadku przyjęto własności przedstawione w tab. 5.1.

Na zbudowanym modelu dyskretnym zdefiniowano warunki brzegowe w postaci dodatkowego obciążenia siłami oraz masą własną dla analizy wytrzymałościowej (analizy stanu deformacji i wyężenia). Zewnętrzne obciążenie w postaci siły o zadanej wartości znajdowało się w odległości 1/3 rozpiętości łuku od podpory.



Rys. 5.3. Model dyskretny łuku A1.

#### 5.4. Wyniki obliczeń numerycznych konstrukcji niewzmocnionej – łuk A1

W oparciu o zbudowane modele numeryczne łuku przeprowadzono szereg wytrzymałościowych obliczeń numerycznych w zakresie sprężystym. W ich wyniku otrzymano warstwicę deformacji oraz stanu naprężeń dla poszczególnych modeli obliczeniowych łuku niewzmocnionego. Na kolejnych rysunkach przedstawiono deformację dla łuku niewzmocnionego wraz z wartościami porównanymi z wynikami z badań doświadczalnych. Równocześnie przedstawiono mapy naprężeń obwodowych analizowanego modelu łuku.

Tab. 5.2. Wyniki pomiarów przemieszczeń – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A1

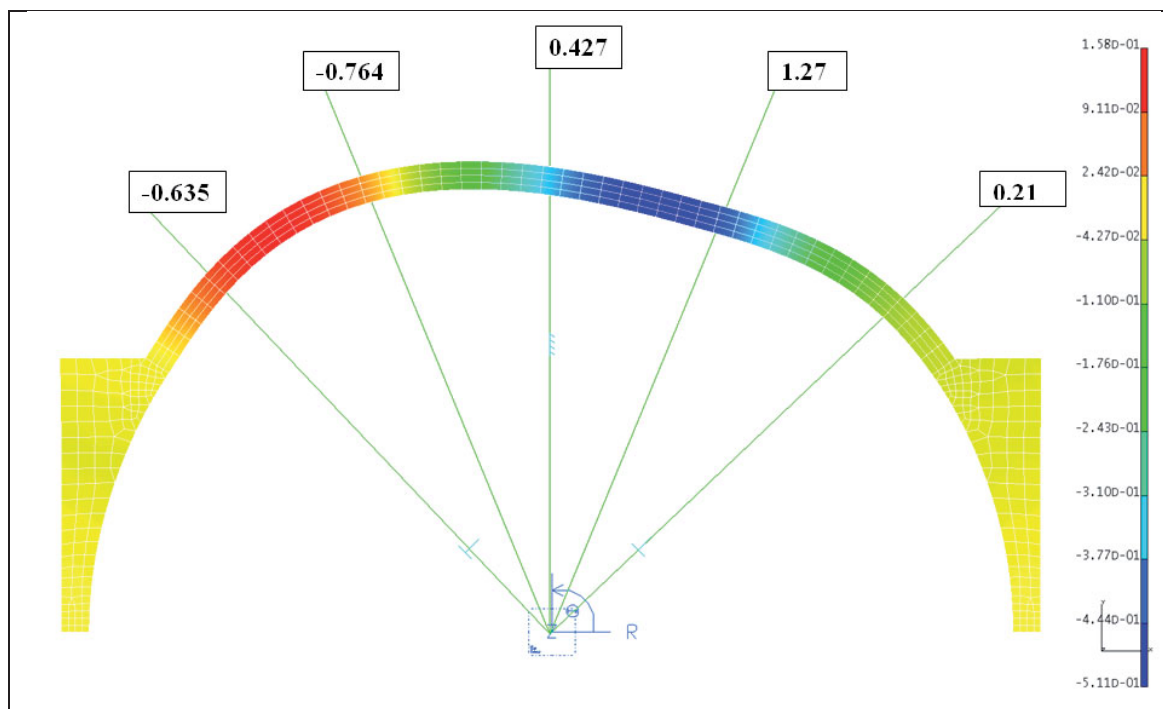
punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła $F$ [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
1	-0,598	0,238	0,558	0,120	-0,188
	<b>-0,764**</b>	<b>0,427</b>	<b>1,270</b>	<b>0,210</b>	<b>-0,635</b>
2,882	-9,483	2,130	4,829	0,125	-3,858
	<b>-2,202</b>	<b>1,231</b>	<b>3,660</b>	<b>0,605</b>	<b>-1,830</b>

\* wartości ujemne obrazują wypiętrzenie modelu łuku

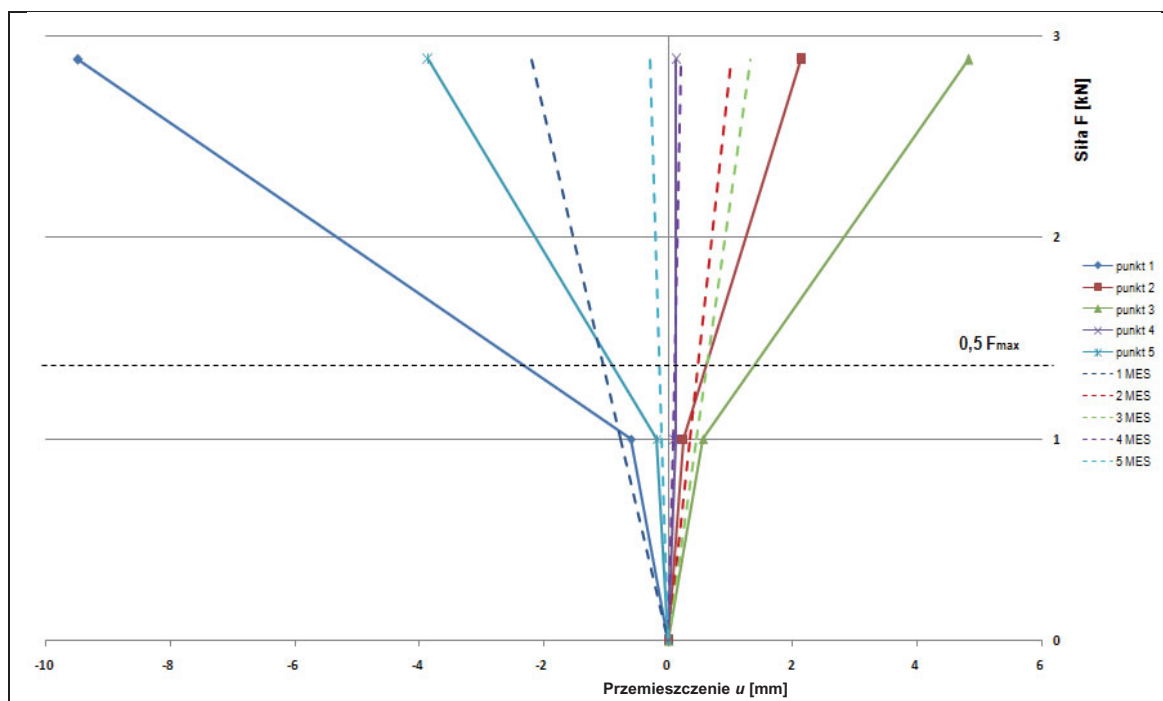
\*\* pogrubione wartości z obliczeń MES



## 5. Analiza numeryczna

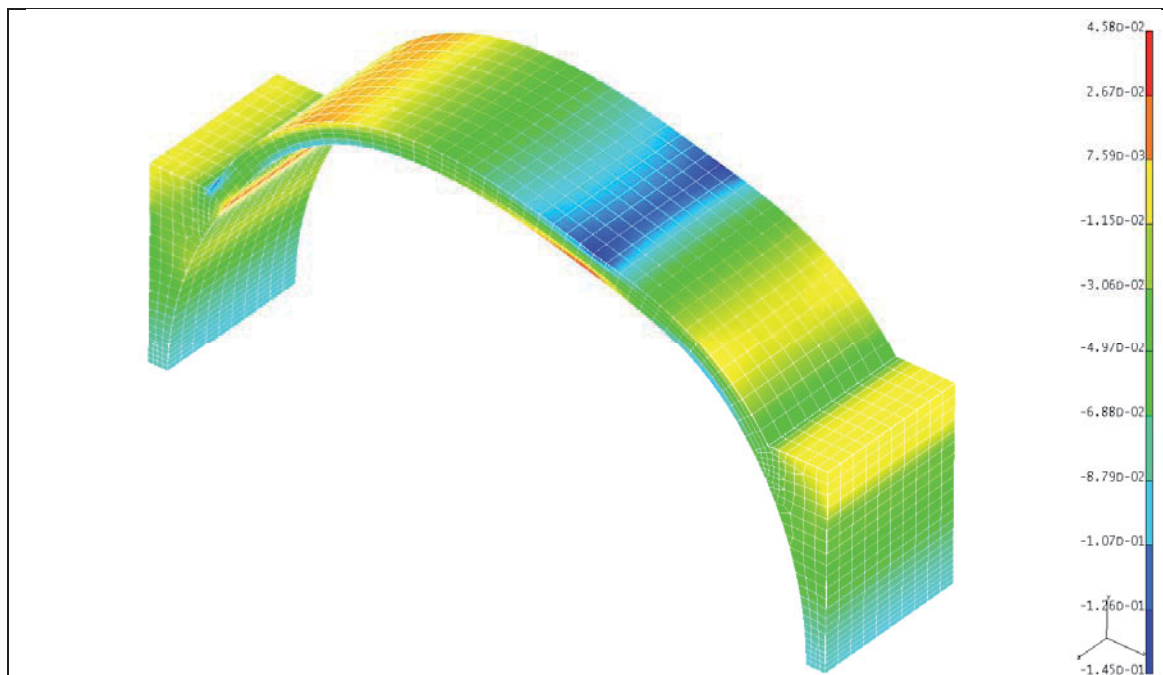


Rys. 5.4. Deformacje (wartości przemieszczeń) w łuku A1 – poziom obciążenia 1kN.

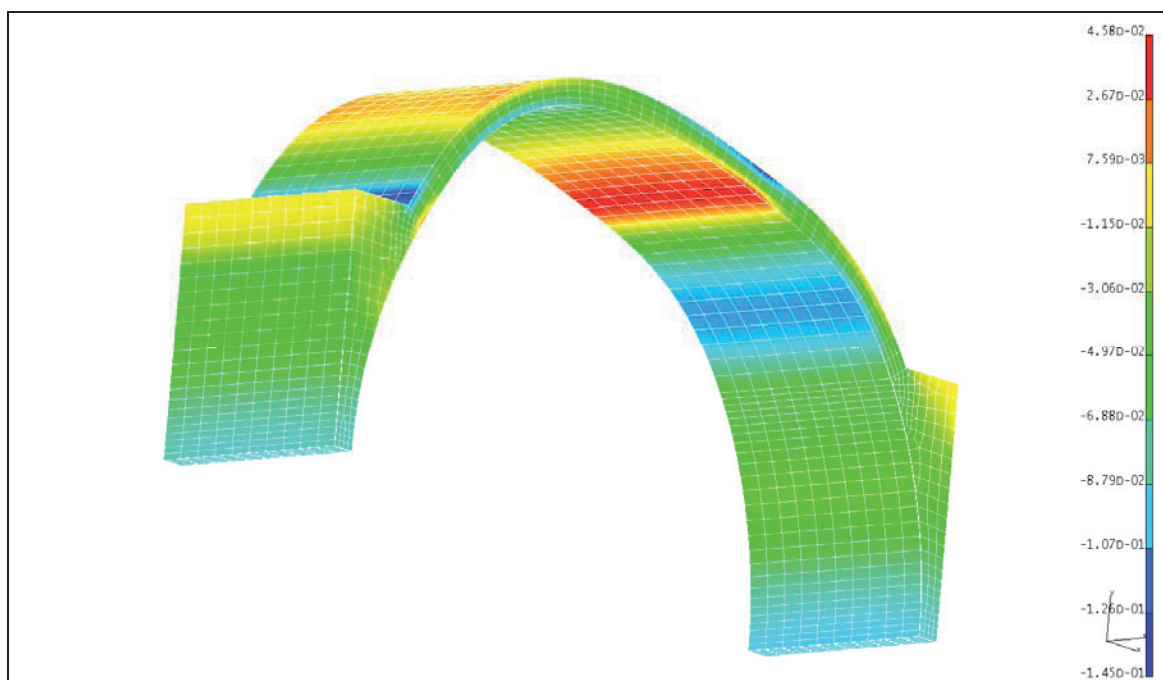


Rys. 5.5. Porównanie wyników przemieszczeń "u" z badań laboratoryjnych z wynikami MES – łuk A1.

## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.6. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w całym łuku A2 – poziom obciążenia – 1kN – widok od góry.



Rys. 5.7. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w całym łuku A2 – poziom obciążenia – 1kN – widok od dołu.

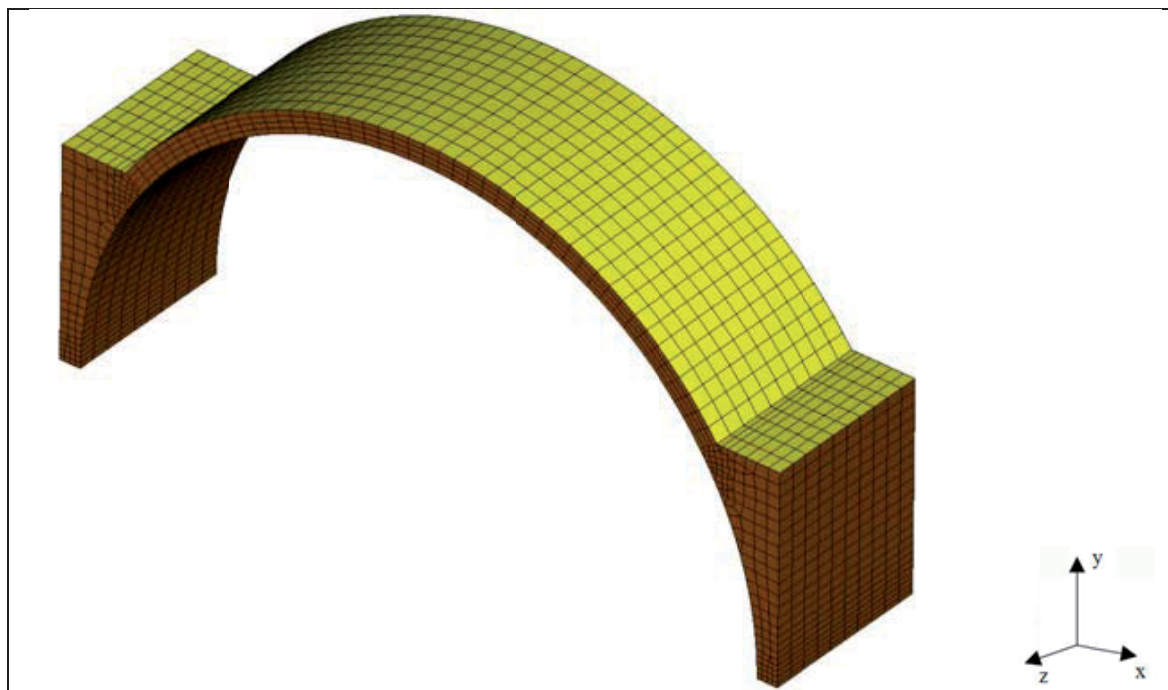
### 5.5. Modele numeryczne wzmocnionych konstrukcji łuków ceglanych

Model numeryczny do obliczeń metodą elementów skończonych konstrukcji łuków wzmocnionych składał się z powłokowych elementów typu SHELL, przestrzennych typu SOLID oraz prętowych. Opracowano wszystkie modele obliczeniowe i porównano je z wynikami z badań doświadczalnych. Istotnym elementem modelu obliczeniowego było określenie niezbędnych własności materiałów zastosowanych w modelu. W tym przypadku przyjęto własności przedstawione w tab. 5.1.

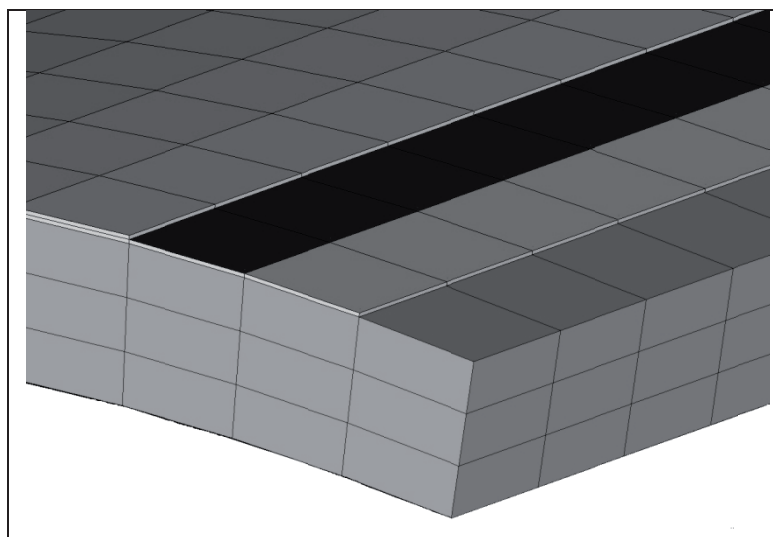
## 5. Analiza numeryczna

**5.5.1. Model numeryczny łuku A2**

Model łuku A2 zbudowano w ten sam sposób, co model numeryczny łuku A1. Dodano po stronie grzbietowej łuku wzmocnienie FRCM jak na rys. 5.8 i 5.9.



*Rys. 5.8. Model dyskretny łuku A2.*

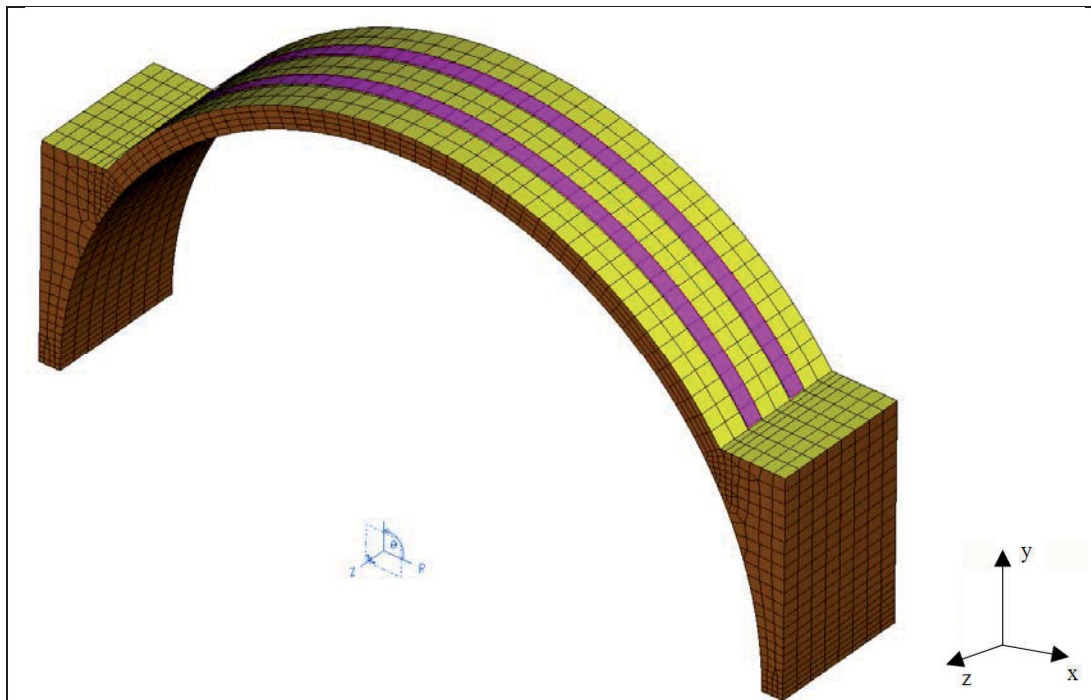


*Rys. 5.9. Szczegół modelu dyskretnego wzmocnienia FRCM – siatki z włókien węglowych (kolor czarny) zatopionej w zaprawie w łuku A2.*

**5.5.2. Model numeryczny łuku A3**

Model numeryczny łuku A3 (rys. 5.10) zbudowano w ten sam sposób, co model łuku A1. Dodano po stronie grzbietowej łuku wzmocnienie w postaci dwóch taśm CFRP oraz wzmocnienie FRCM w postaci siatki z włókna węglowego, tak samo jak w badaniu doświadczalnym.

## 5. Analiza numeryczna

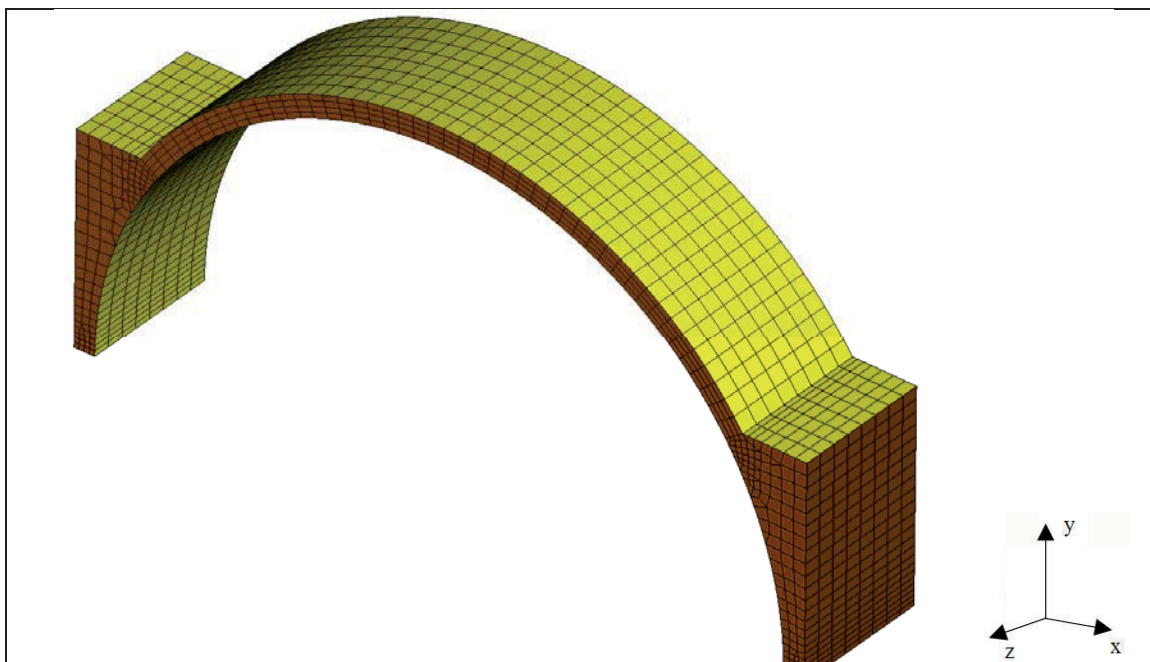


Rys. 5.10. Model dyskretny łuku A3.

Pomimo, że w modelu doświadczalnym taśmy CFRP znajdowały się pod wzmocnieniem FRCM, to dla lepszego przedstawienia tego przypadku na rys. 5.10 pokazano taśmy CFRP na wzmocnieniu FRCM. Należy jednak podkreślić, że uczyniono tak tylko dla zobrazowania tego przypadku a w obliczeniach numerycznych taśmy umieszczono jak w badaniu laboratoryjnym czyli pod FRCM.

### 5.5.3. Model numeryczny łuku A4

Model łuku A3 (rys. 5.11) zbudowano podobnie, co model numeryczny łuku A1. Dodano po stronie grzbietowej i stronie podniebienia łuku wzmocnienie FRCM.

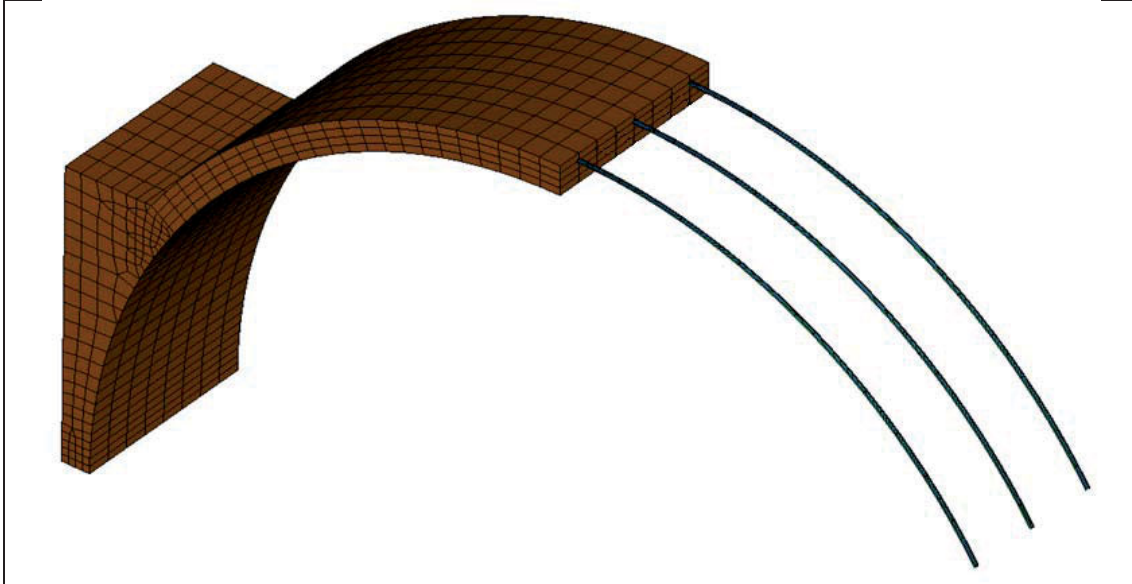


Rys. 5.11. Model dyskretny łuku A4.

## 5. Analiza numeryczna

**5.5.4. Model numeryczny łuku A5**

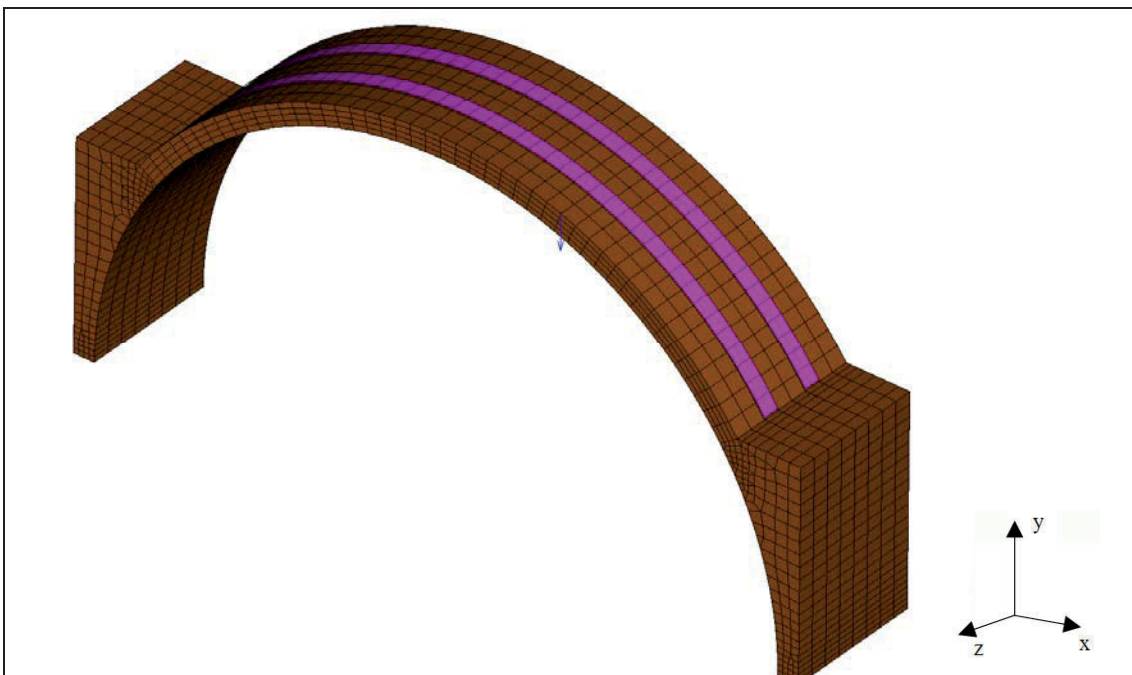
Model łuku A5 zbudowano w ten sam sposób, co model numeryczny łuku A1. Dodano wewnątrz łuku wzmocnienie w postaci 3 prętów stalowych  $\varnothing 8$  jako elementy belkowe.



Rys. 5.12. Model dyskretny łuku A5 – widoczna połowa łuku ceglanoego oraz wzmacniające wklejone 3 pręty stalowe  $\varnothing 8$ .

**5.5.5. Model numeryczny łuku A6**

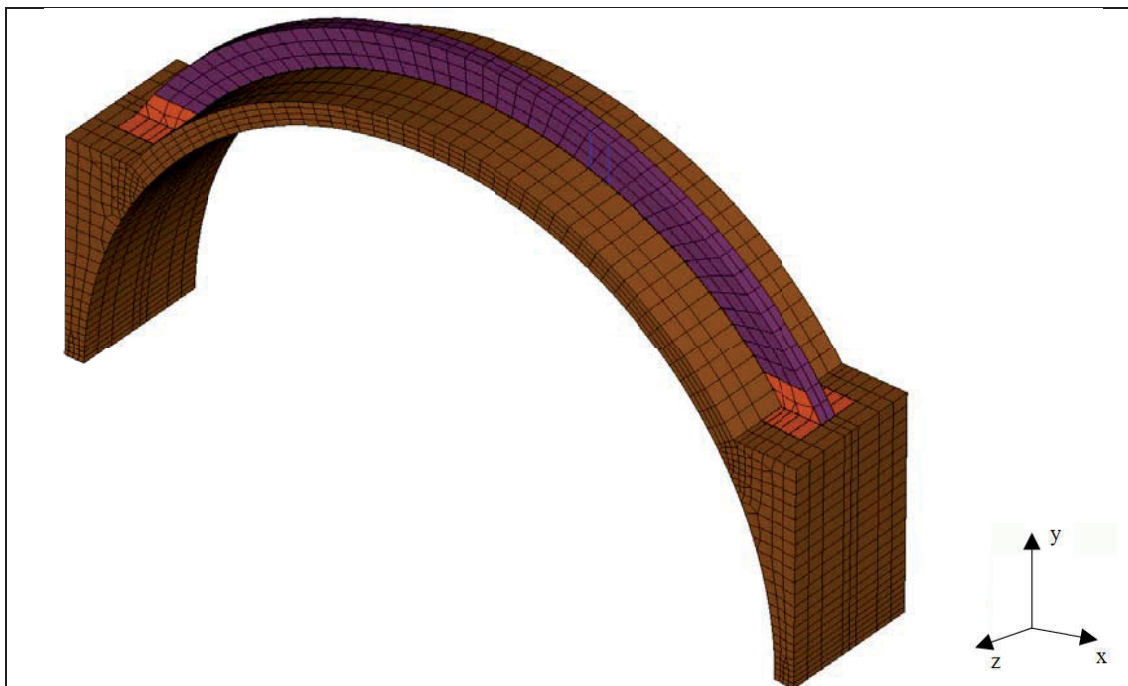
Model numeryczny łuku A6 (rys. 5.13) zbudowano w ten sam sposób, co model łuku A1. Dodano po stronie grzbietowej łuku wzmocnienie w postaci dwóch taśm CFRP o rozstawie takim jak w badaniu doświadczalnym.



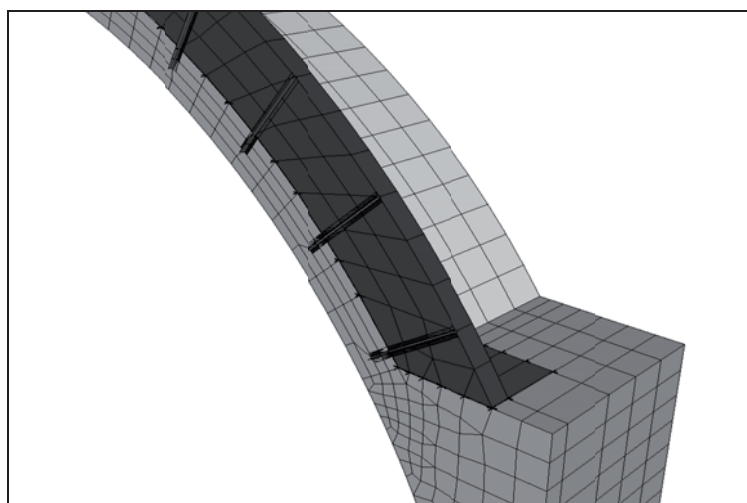
Rys. 5.13. Model dyskretny łuku A6.

### 5.5.6. Model numeryczny łuku A7

Model numeryczny łuku A7 (rys. 5.14) zbudowano w ten sam sposób, co model łuku A1. Po stronie grzbietowej łuku dodano wzmocnienie w postaci dźwigara z drewna klejonego połączonego z łukiem ceglany m stalowymi kotwami  $\varnothing 8$  (rys. 5.15) o wymiarach zgodnych z modelem z badań doświadczalnych.



Rys. 5.14. Model dyskretny łuku A7.



Rys. 5.15. Szczegół kotwienia dźwigara z drewna klejonego w modelu dyskretnym łuku A7(przekrój).

## 5.6. Wyniki analiz numerycznych konstrukcji łuków ceglanych wzmocnionych

W oparciu o zbudowane modele numeryczne łuków przeprowadzono szereg wytrzymałościowych obliczeń numerycznych w zakresie sprężystym. W ich wyniku otrzymano warstwicę deformacji oraz stanu naprężeń dla poszczególnych modeli obliczeniowych. Na kolejnych rysunkach przedstawiono deformacje (wraz z zestawionymi w tabelach i wykresach wartościami porównanymi z wynikami z badań doświadczalnych) dla

## 5. Analiza numeryczna

wszystkich łuków wzmocnionych. Równocześnie przedstawiono warstwicę naprężeń obwodowych łuków jak i poszczególnych elementów wzmocniających.

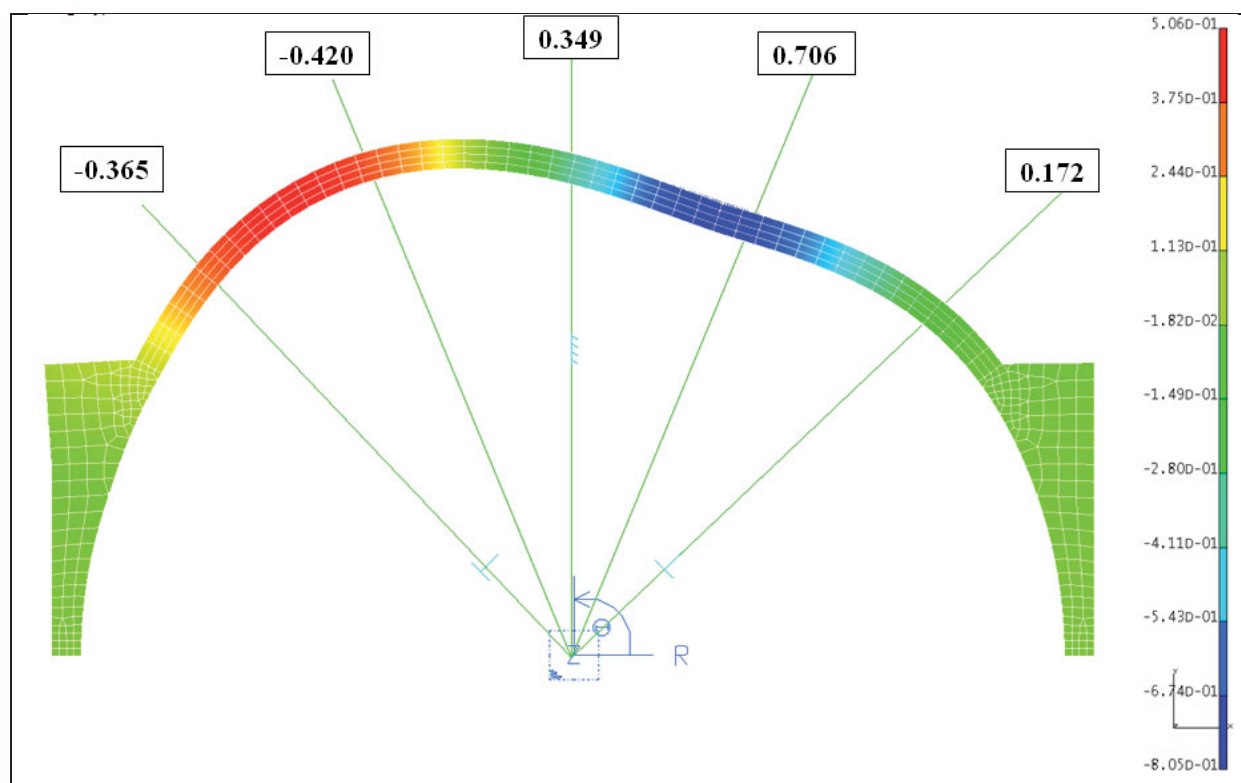
## 5.6.1. Łuk A2

Tab. 5.3. Wyniki pomiarów przemieszczeń – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A2

punkty pomiarowe siła $F$ [kN]	1	2	3	4	5
	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
1	-0,081	0,847	0,751	-0,008	-0,003
	<b>-0,420**</b>	<b>0,349</b>	<b>0,706</b>	<b>0,172</b>	<b>-0,365</b>
3	-1,490	0,808	4,129	0,400	-0,123
	<b>-1,260</b>	<b>1,047</b>	<b>2,118</b>	<b>0,516</b>	<b>-1,095</b>
6	-8,307	0,880	16,949	3,191	-0,861
	<b>-2,520</b>	<b>2,094</b>	<b>4,236</b>	<b>1,032</b>	<b>-2,190</b>
9	-16,449	13,731	27,695	3,550	-1,902
	<b>-3,780</b>	<b>3,141</b>	<b>6,354</b>	<b>1,548</b>	<b>-3,285</b>
10,866	-26,495	22,096	45,901	7,883	-6,818
	<b>-4,564</b>	<b>3,792</b>	<b>7,671</b>	<b>1,869</b>	<b>-3,966</b>

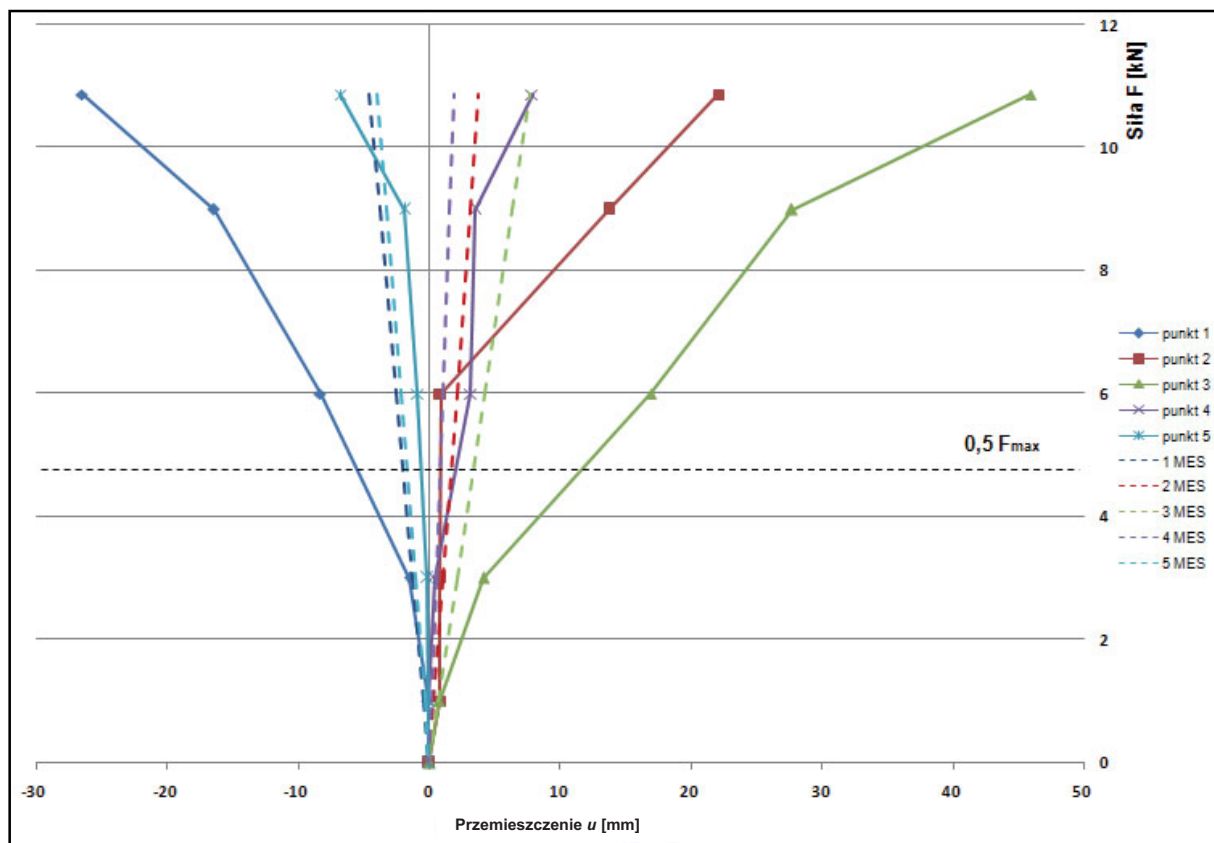
\* wartości ujemne obrazują wypiętrzenie modelu łuku

\*\* pogrubione wartości z obliczeń MES

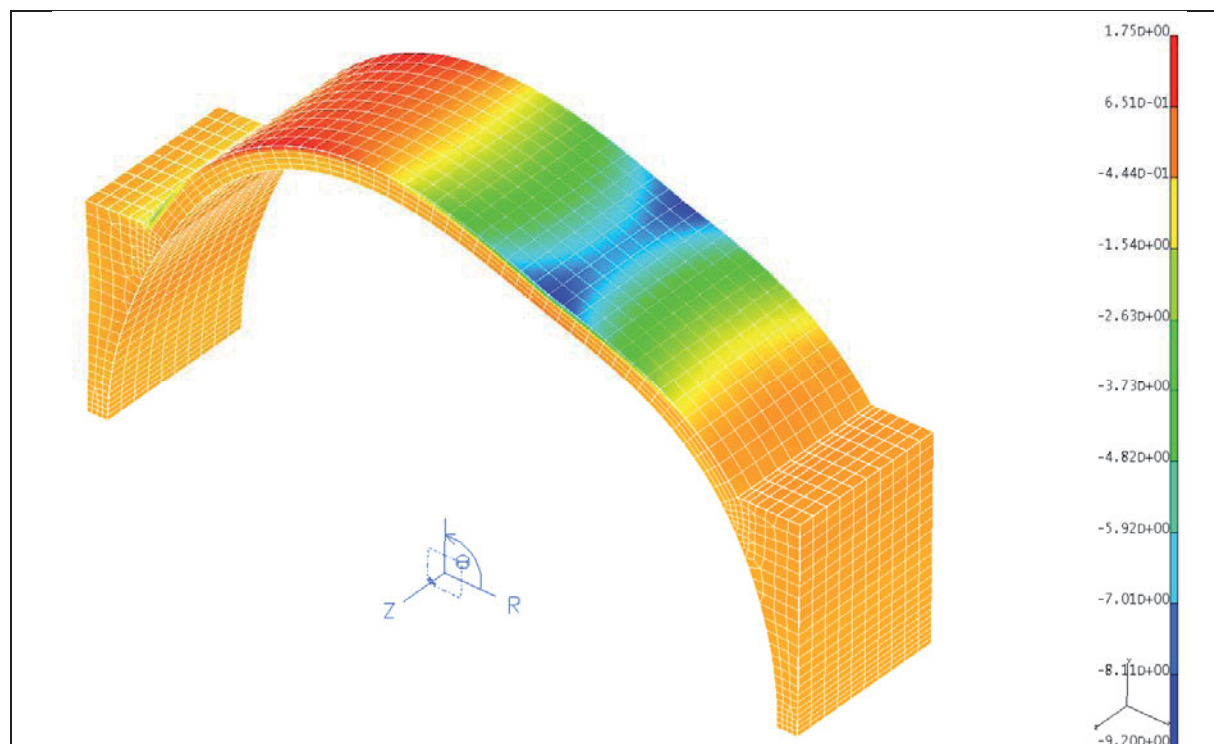


Rys. 5.16. Deformacje (wartości przemieszczeń) w łuku A2 – poziom obciążenia 1kN.

## 5. Analiza numeryczna



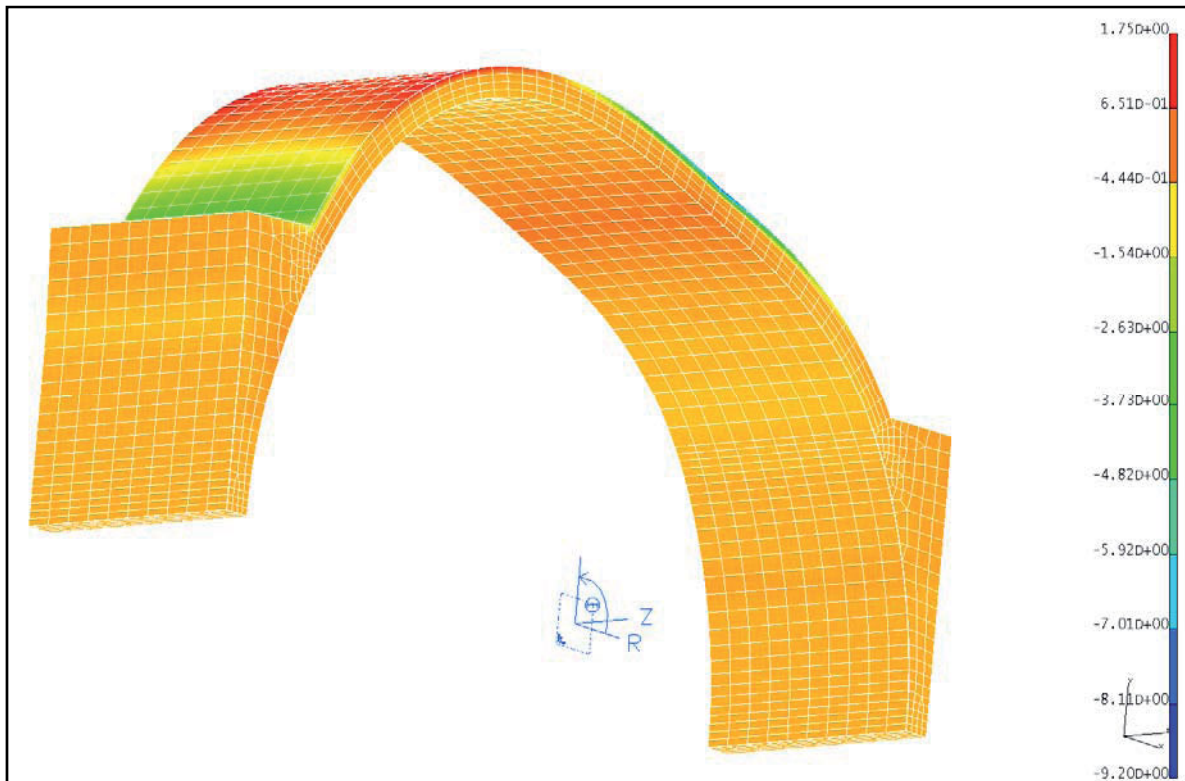
Rys. 5.17. Porównanie wyników przemieszczeń "u" z badań laboratoryjnych z wynikami MES – luk A2.



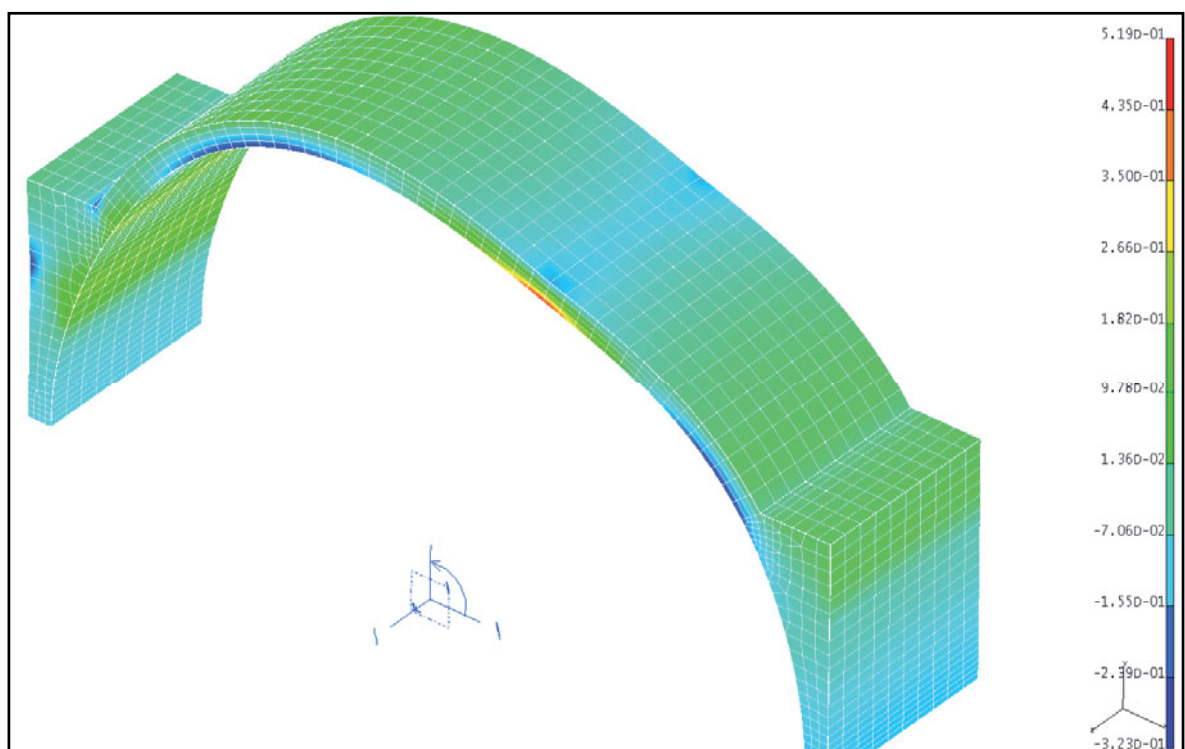
Rys. 5.18. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w luku A2 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.



## 5. Analiza numeryczna

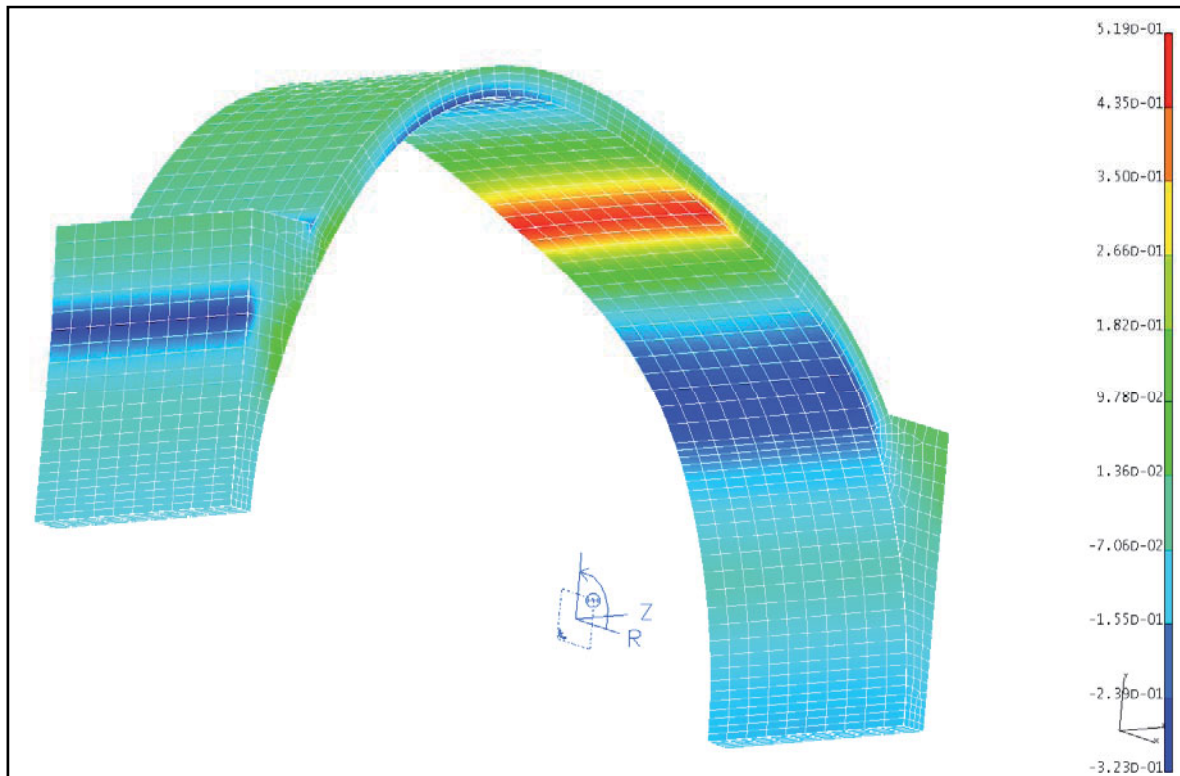


Rys. 5.19. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w łuku A2 – poziom obciążenia – 1kN – widok z dołu.

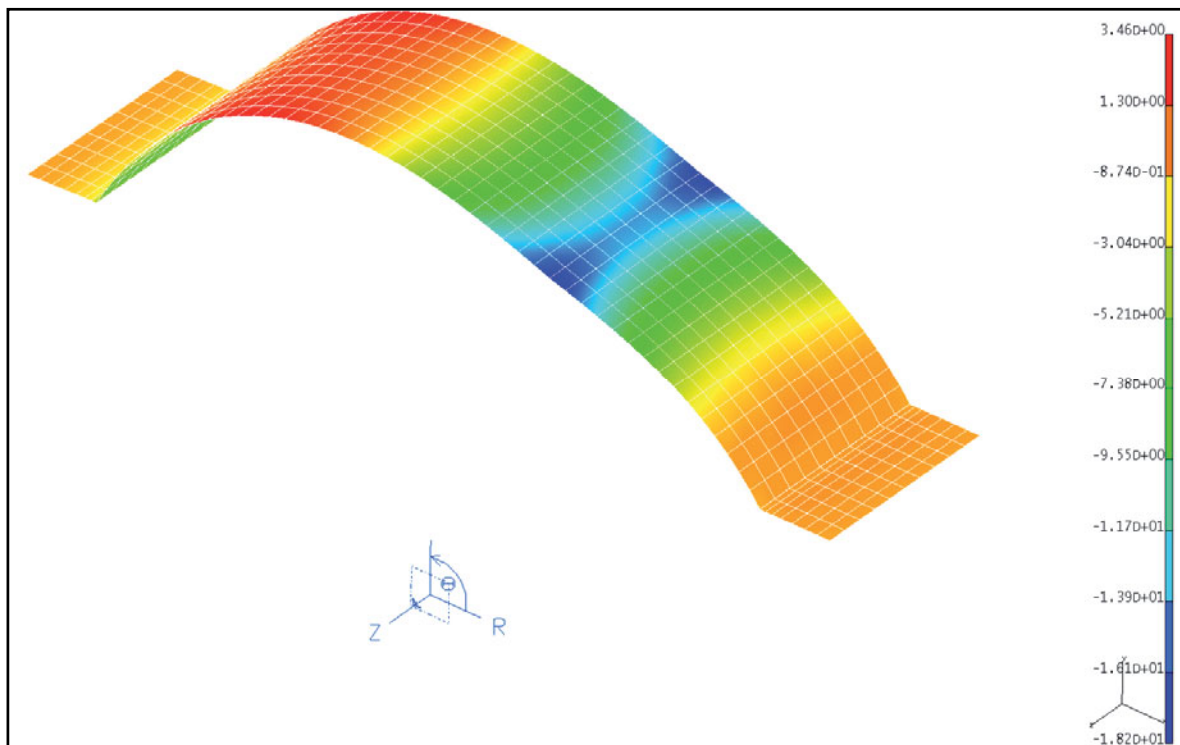


Rys. 5.20. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym łuku A2 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.

## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.21. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym łuku A2 – poziom obciążenia – 1kN – widok z dołu.



Rys. 5.22. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w taśmach CFRP w łuku A2 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.

## 5. Analiza numeryczna

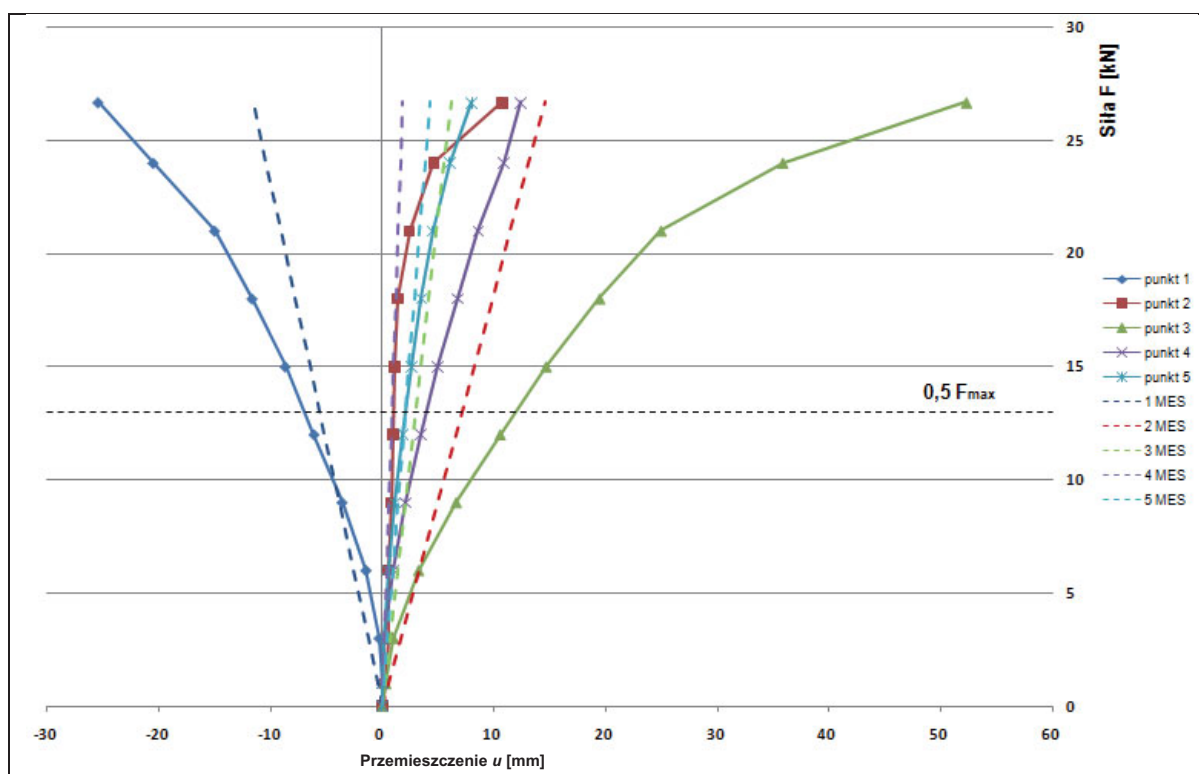
## 5.6.2. Łuk A3

Tab. 5.4. Wyniki pomiarów przemieszczeń – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A3

punkty pomiarowe	przemieszczenie $u^*$				
	1	2	3	4	5
siła $F$ [kN]					
1	-0,064	0,228	0,332	0,007	0,000
	<b>-0,433**</b>	<b>0,547</b>	<b>0,232</b>	<b>0,066</b>	<b>0,161</b>
3	-0,338	0,497	1,010	0,167	0,077
	<b>-1,299</b>	<b>1,641</b>	<b>0,696</b>	<b>0,198</b>	<b>0,483</b>
6	-1,509	0,584	3,267	0,963	0,495
	<b>-2,598</b>	<b>3,282</b>	<b>1,392</b>	<b>0,396</b>	<b>0,966</b>
9	-3,645	0,778	6,625	2,061	1,104
	<b>-3,897</b>	<b>4,923</b>	<b>2,088</b>	<b>0,594</b>	<b>1,449</b>
12	-6,155	1,014	10,562	3,488	1,856
	<b>-5,196</b>	<b>6,564</b>	<b>2,784</b>	<b>0,792</b>	<b>1,932</b>
15	-8,736	1,137	14,670	4,996	2,629
	<b>-6,495</b>	<b>8,205</b>	<b>3,480</b>	<b>0,990</b>	<b>2,415</b>
18	-11,708	1,432	19,453	6,726	3,522
	<b>-7,794</b>	<b>1,728</b>	<b>11,178</b>	<b>4,014</b>	<b>3,204</b>
21	-15,051	2,436	24,958	8,592	4,510
	<b>-9,093</b>	<b>2,016</b>	<b>13,041</b>	<b>4,683</b>	<b>3,738</b>
24	-20,557	4,598	35,832	10,861	6,043
	<b>-10,392</b>	<b>2,304</b>	<b>14,904</b>	<b>5,352</b>	<b>4,272</b>
26,675	-25,487	10,726	52,258	12,394	8,031
	<b>-11,550</b>	<b>2,561</b>	<b>16,565</b>	<b>5,949</b>	<b>4,748</b>

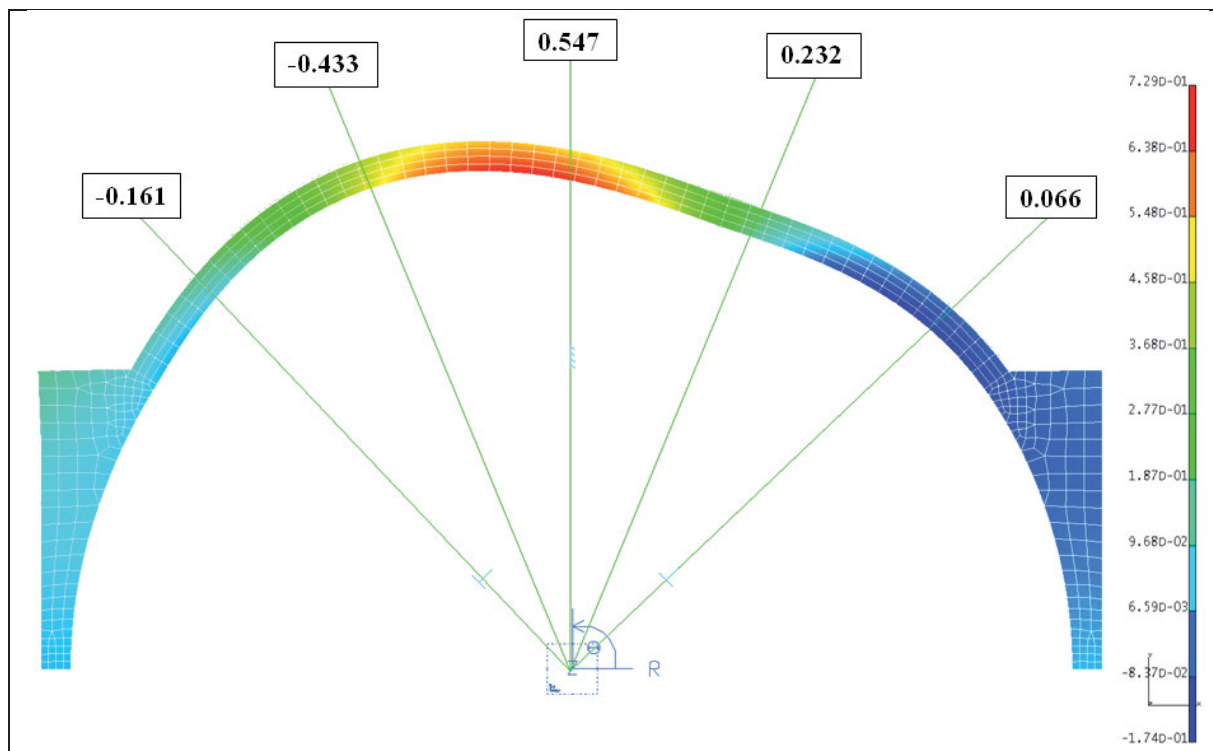
\* wartości ujemne obrazują wypiętrzenie modelu łuku

\*\* pogrubione wartości z obliczeń MES

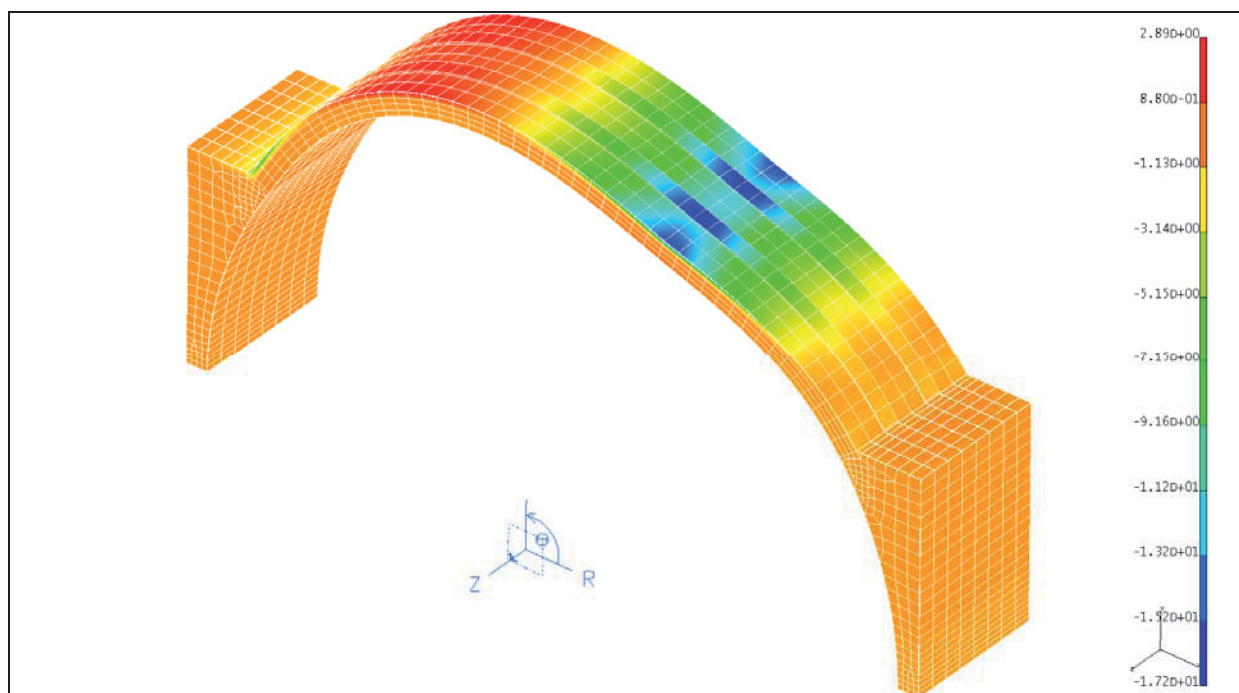


Rys. 5.23. Porównanie wyników przemieszczeń "u" z badań laboratoryjnych z wynikami MES – łuk A3.

## 5. Analiza numeryczna

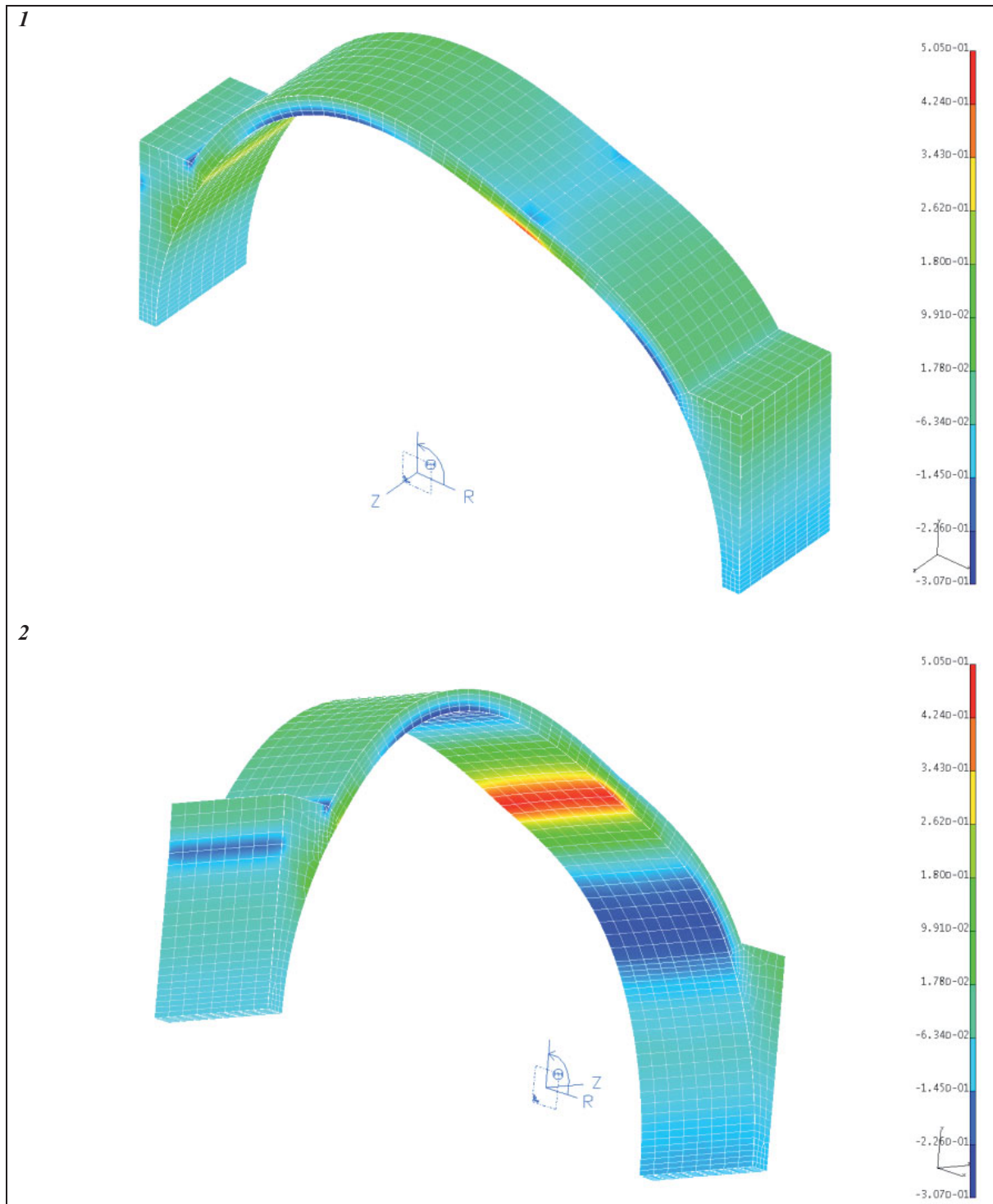


Rys. 5.24. Deformacje (wartości przemieszczeń) w łuku A3 – poziom obciążenia 1kN.



Rys. 5.25. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w całym łuku A3 – poziom obciążenia – 1kN.

## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.26. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym w łuku A3 – poziom obciążenia – 1kN (1 – widok od góry, 2 – widok od dołu).

## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.27. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w taśmach CFRP w łuku A3 – poziom obciążenia – 1kN.

## 5.6.3. Łuk A4

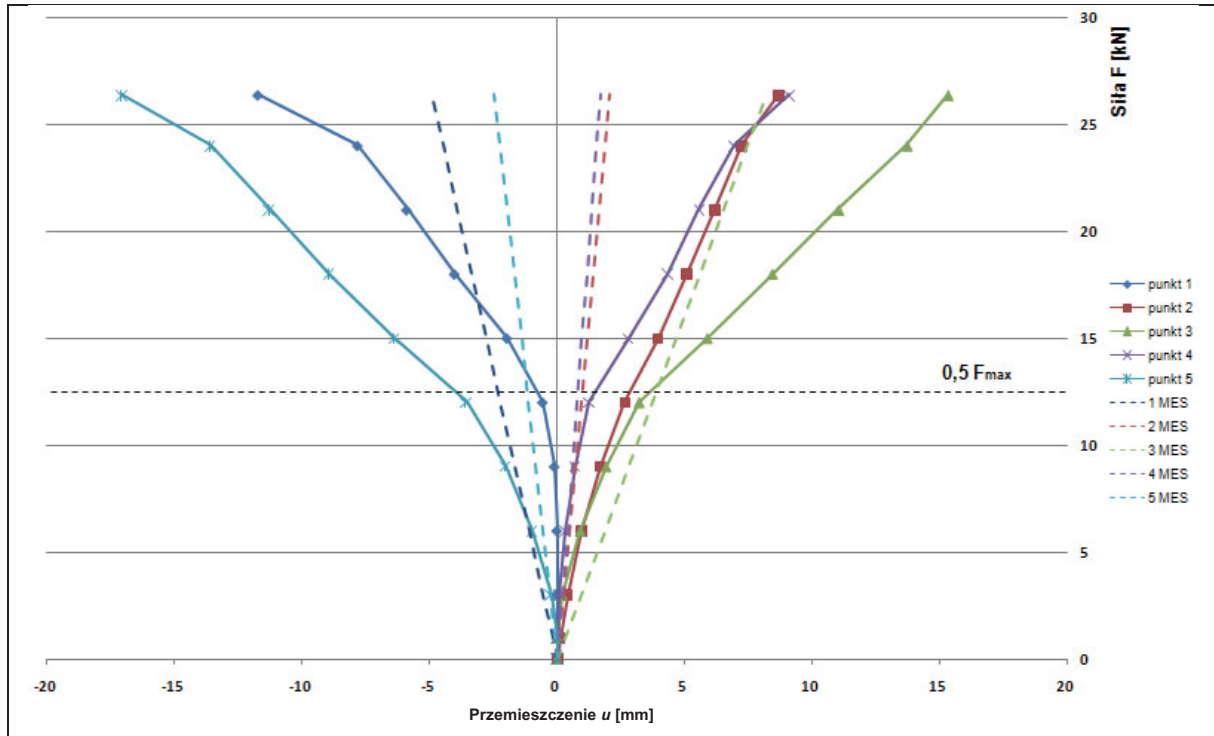
Tab. 5.5. Wyniki pomiarów przemieszczeń – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A4

punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła $F$ [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
1	-0,005	0,110	0,005	0,000	0,002
	<b>-0,186**</b>	<b>0,078</b>	<b>0,311</b>	<b>0,064</b>	<b>-0,094</b>
3	-0,002	0,384	0,184	0,069	-0,241
	<b>-0,558</b>	<b>0,234</b>	<b>0,933</b>	<b>0,192</b>	<b>-0,282</b>
6	0,004	0,947	0,902	0,317	-0,976
	<b>-1,116</b>	<b>0,468</b>	<b>1,866</b>	<b>0,384</b>	<b>-0,564</b>
9	-0,091	1,671	1,911	0,675	-2,023
	<b>-1,674</b>	<b>0,702</b>	<b>2,799</b>	<b>0,576</b>	<b>-0,846</b>
12	-0,557	2,648	3,208	1,234	-3,561
	<b>-2,232</b>	<b>0,936</b>	<b>3,732</b>	<b>0,768</b>	<b>-1,128</b>
15	-1,963	3,953	5,877	2,793	-6,370
	<b>-2,790</b>	<b>1,170</b>	<b>4,665</b>	<b>0,960</b>	<b>-1,410</b>
18	-4,023	5,089	8,436	4,330	-8,941
	<b>-3,348</b>	<b>1,404</b>	<b>5,598</b>	<b>1,152</b>	<b>-1,692</b>
21	-5,899	6,191	11,035	5,581	-11,273
	<b>-3,906</b>	<b>1,638</b>	<b>6,531</b>	<b>1,344</b>	<b>-1,974</b>
24	-7,825	7,229	13,723	6,940	-13,578
	<b>-4,464</b>	<b>1,872</b>	<b>7,464</b>	<b>1,536</b>	<b>-2,256</b>
26,365	-11,744	8,694	15,329	9,122	-17,054
	<b>-4,904</b>	<b>2,056</b>	<b>8,200</b>	<b>1,687</b>	<b>-2,478</b>

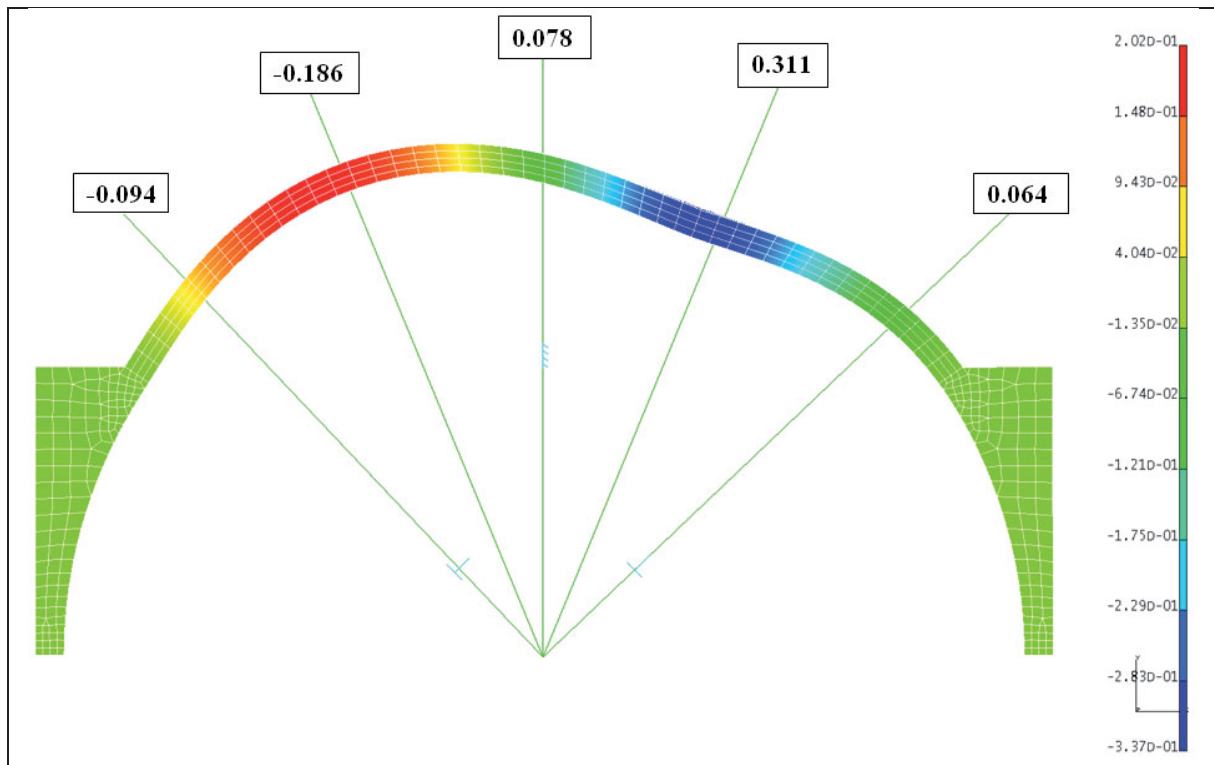
\* wartości ujemne obrazują wypiętrzenie modelu łuku

\*\* pogrubione wartości z obliczeń MES

## 5. Analiza numeryczna

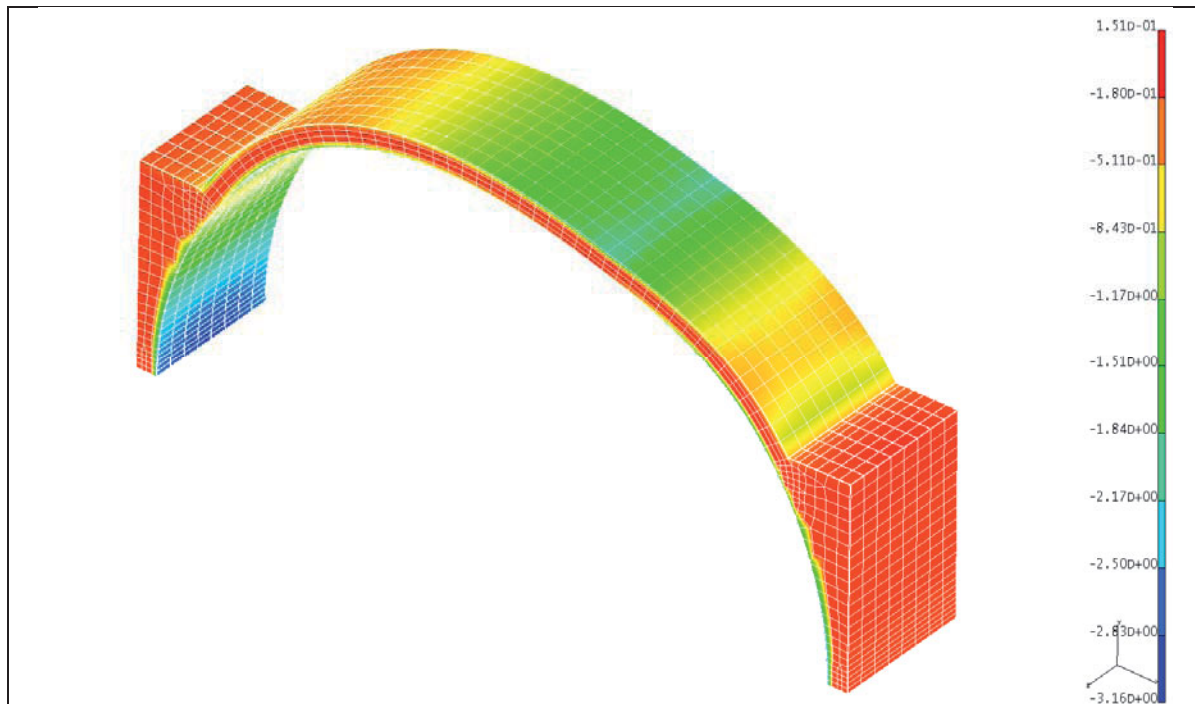


Rys. 5.28. Porównanie wyników przemieszczeń "u" z badań laboratoryjnych z wynikami MES – łuk A4.

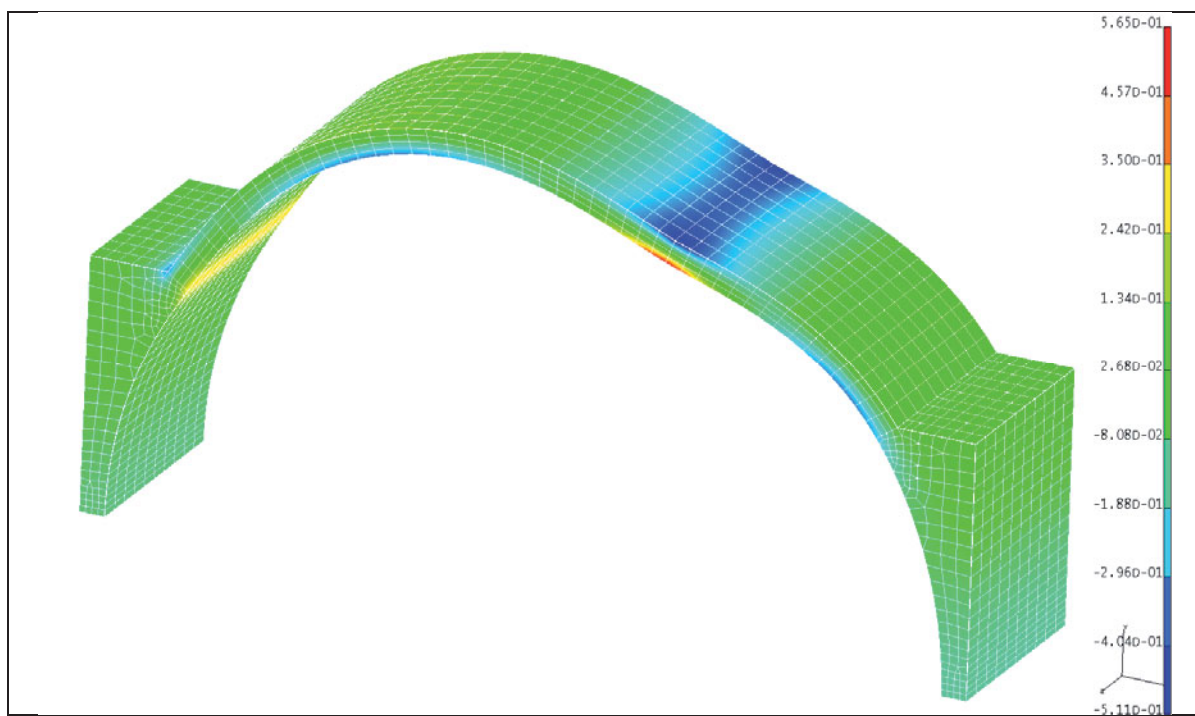


Rys. 5.29. Deformacje (wartości przemieszczeń) w łuku A4 – poziom obciążenia 1kN.

## 5. Analiza numeryczna



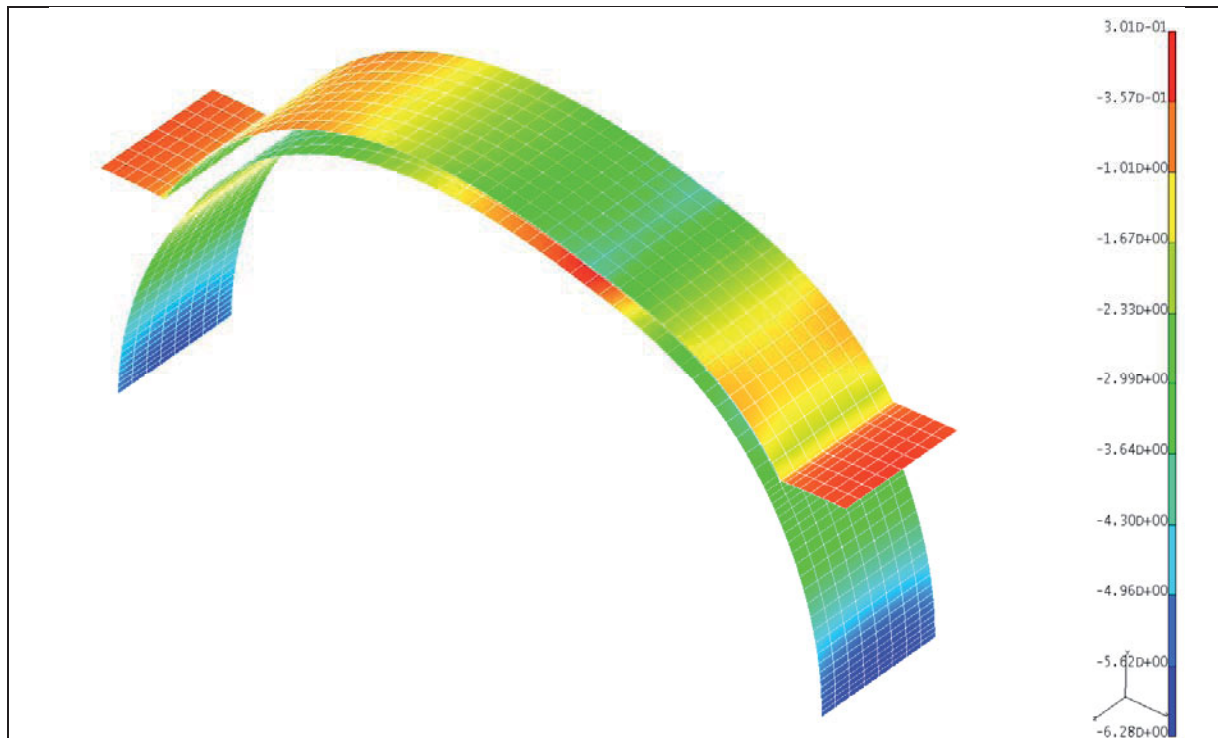
Rys. 5.30. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w całym łuku A4 – poziom obciążenia – 1kN.



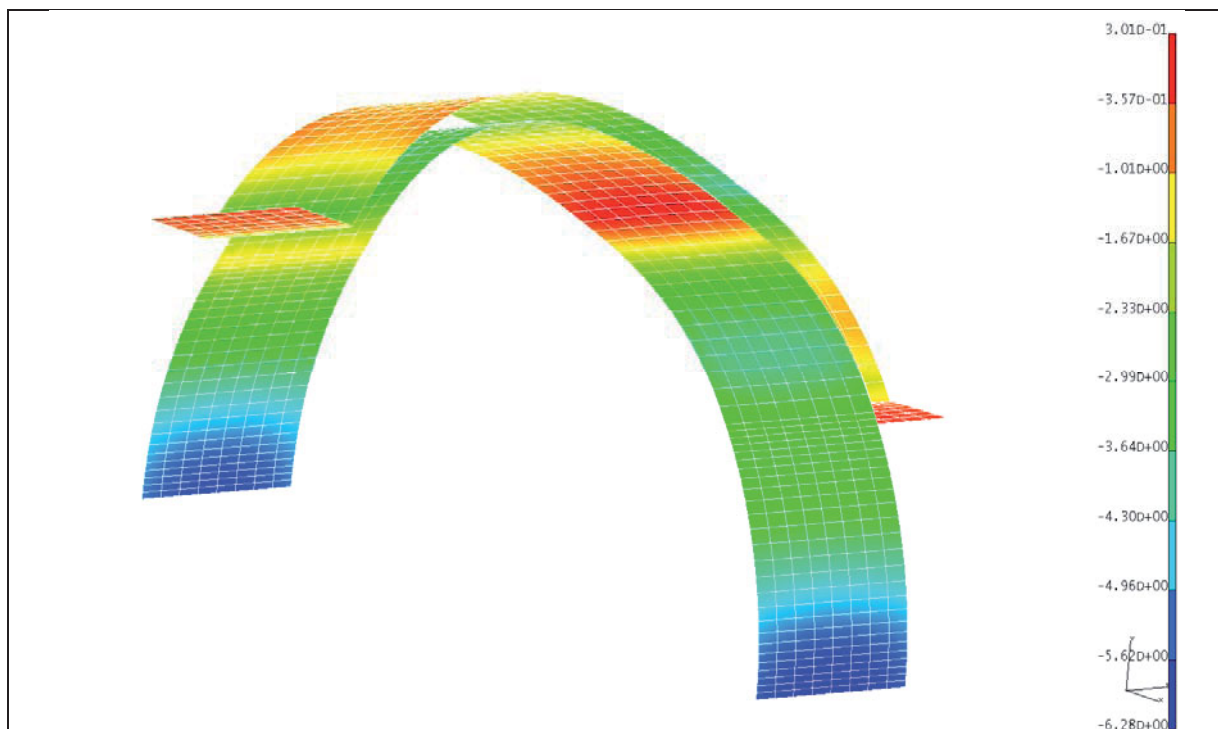
Rys. 5.31. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym w łuku A4 – poziom obciążenia – 1kN.



## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.32. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w siatkach z włókien węglowych w łuku A4 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.



Rys. 5.33. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w siatkach z włókien węglowych w łuku A4 – poziom obciążenia – 1kN – widok z dołu.

## 5. Analiza numeryczna

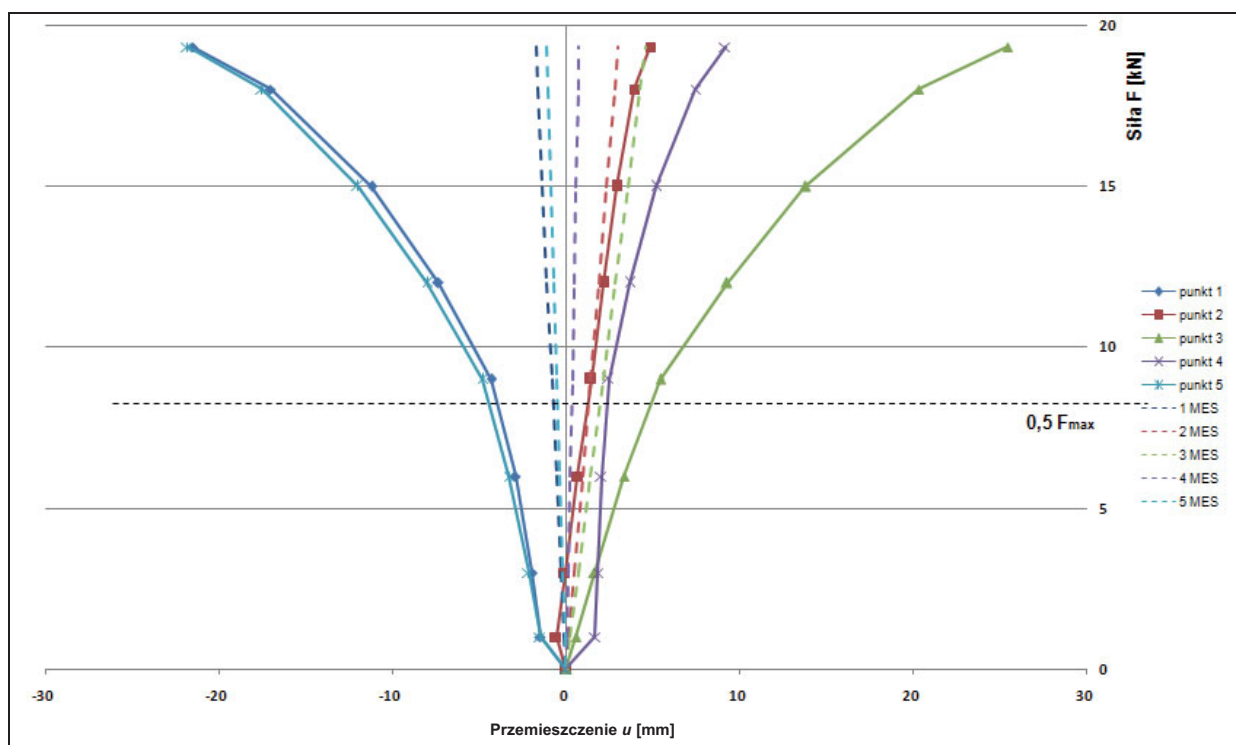
## 5.6.4. Łuk A5

Tab. 5.6. Wyniki pomiarów przemieszczeń – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A5

punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła $F$ [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
1	-1,500 <b>-0,091**</b>	-0,579 <b>0,156</b>	0,584 <b>0,237</b>	1,682 <b>0,039</b>	-1,509 <b>-0,060</b>
3	-1,959 <b>-0,273</b>	-0,052 <b>0,468</b>	1,620 <b>0,711</b>	1,822 <b>0,117</b>	-2,165 <b>-0,180</b>
6	-2,935 <b>-0,546</b>	0,673 <b>0,936</b>	3,325 <b>1,422</b>	2,046 <b>0,234</b>	-3,291 <b>-0,360</b>
9	-4,321 <b>-0,819</b>	1,448 <b>1,404</b>	5,435 <b>2,133</b>	2,456 <b>0,351</b>	-4,809 <b>-0,540</b>
12	-7,376 <b>-1,092</b>	2,178 <b>1,872</b>	9,286 <b>2,844</b>	3,663 <b>0,468</b>	-8,006 <b>-0,720</b>
15	-11,220 <b>-1,365</b>	2,936 <b>2,340</b>	13,788 <b>3,555</b>	5,197 <b>0,585</b>	-11,990 <b>-0,900</b>
18	-17,041 <b>-1,638</b>	3,922 <b>2,808</b>	20,336 <b>4,266</b>	7,480 <b>0,702</b>	-17,555 <b>-1,080</b>
19,314	-21,545 <b>-1,758</b>	4,848 <b>3,013</b>	25,460 <b>4,577</b>	9,178 <b>0,753</b>	-21,830 <b>-1,159</b>

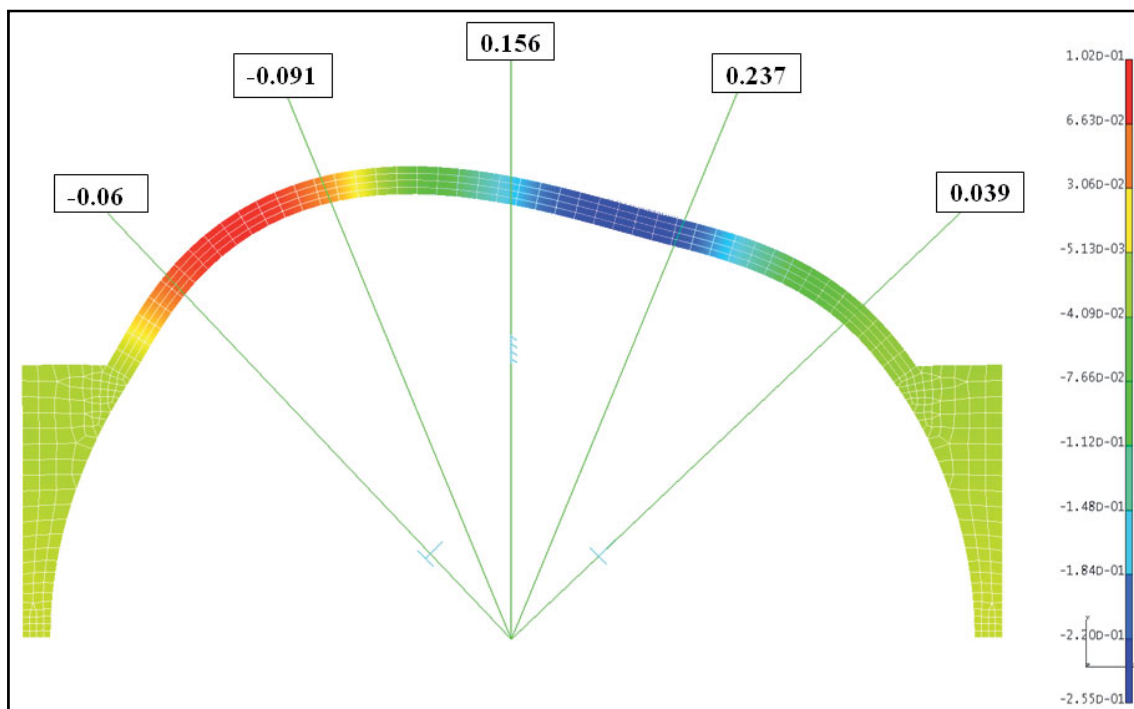
\* wartości ujemne obrazują wypiętrzenie modelu łuku

\*\* pogrubione wartości z obliczeń MES

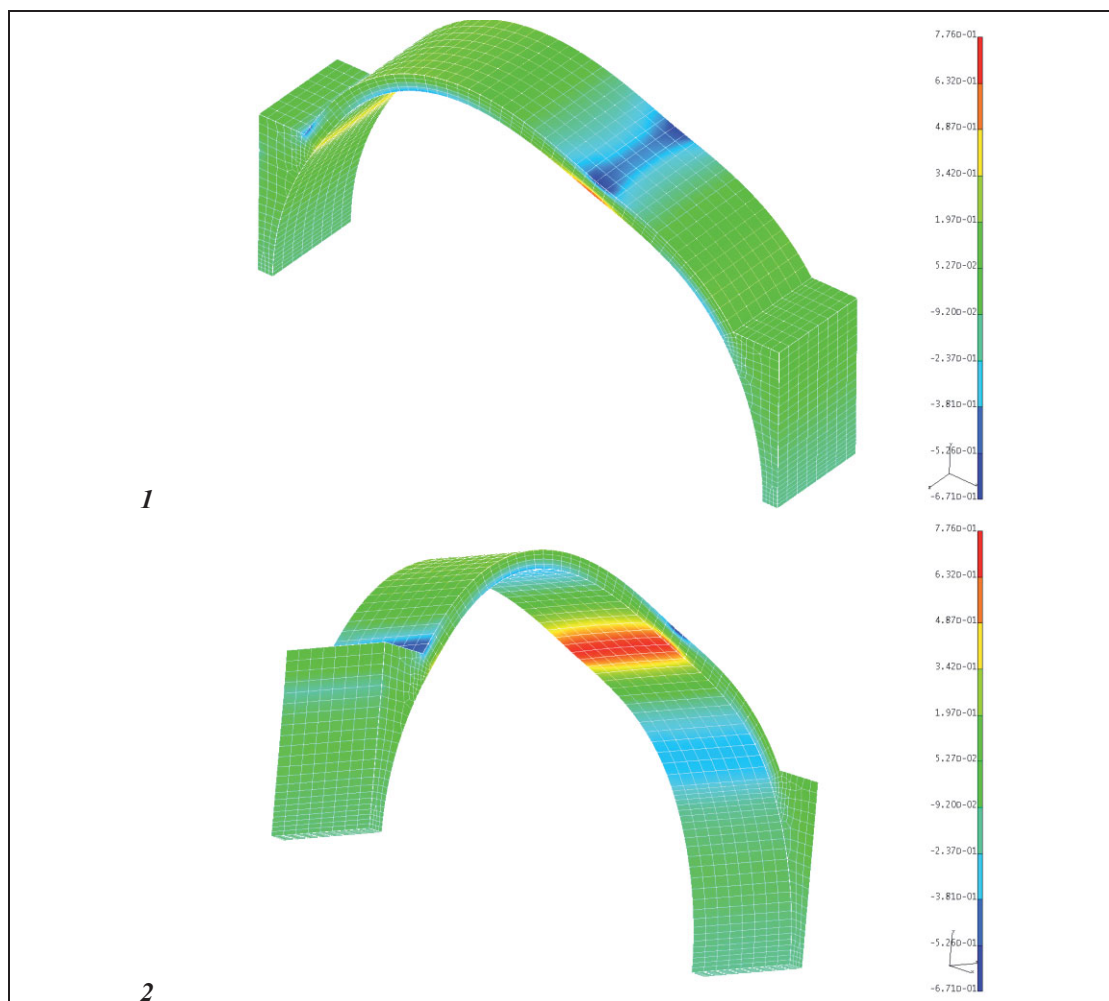


Rys. 5.34. Porównanie wyników przemieszczeń "u" z badań laboratoryjnych z wynikami MES – łuk A5.

## 5. Analiza numeryczna

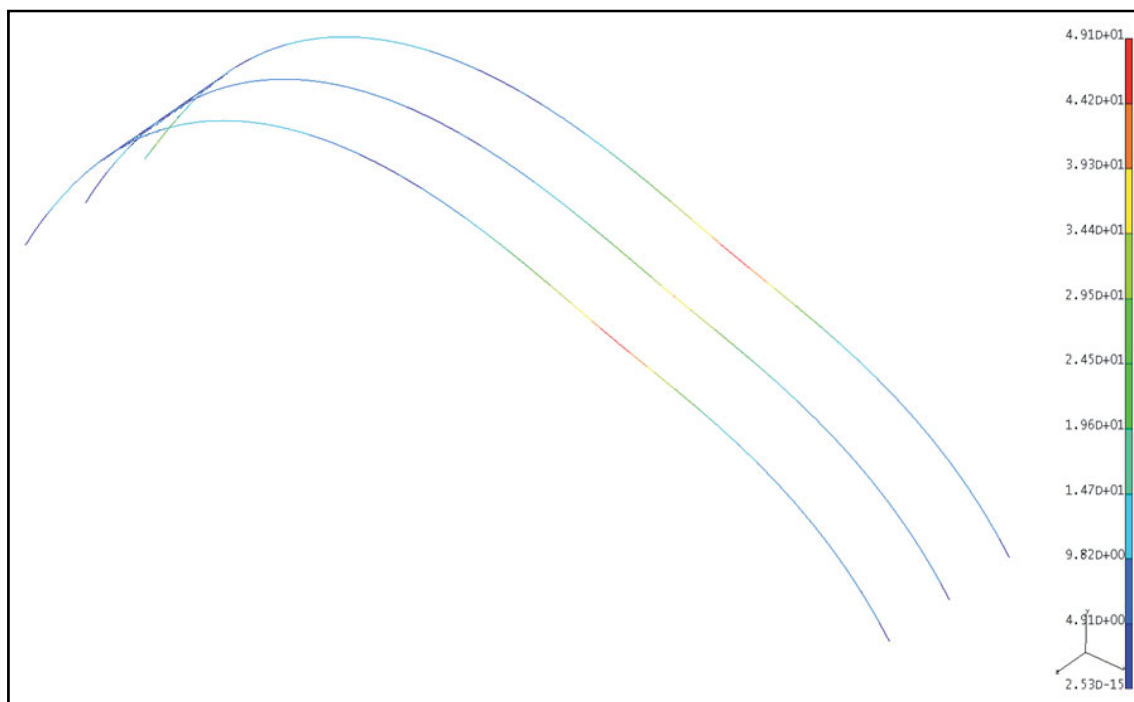


Rys. 5.35. Deformacje (wartości przemieszczeń) w łuku A5 – poziom obciążenia 1kN.



Rys. 5.36. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym w łuku A5 – poziom obciążenia – 1kN (1 – widok od góry, 2 – widok od dołu).

## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.37. Rozkład naprężeń (wartości naprężeń wg hipotezy Hubera)  $\sigma$  [MPa] w prętach stalowych łuku A5 – poziom obciążenia – 1kN.

## 5.6.5. Łuk A6

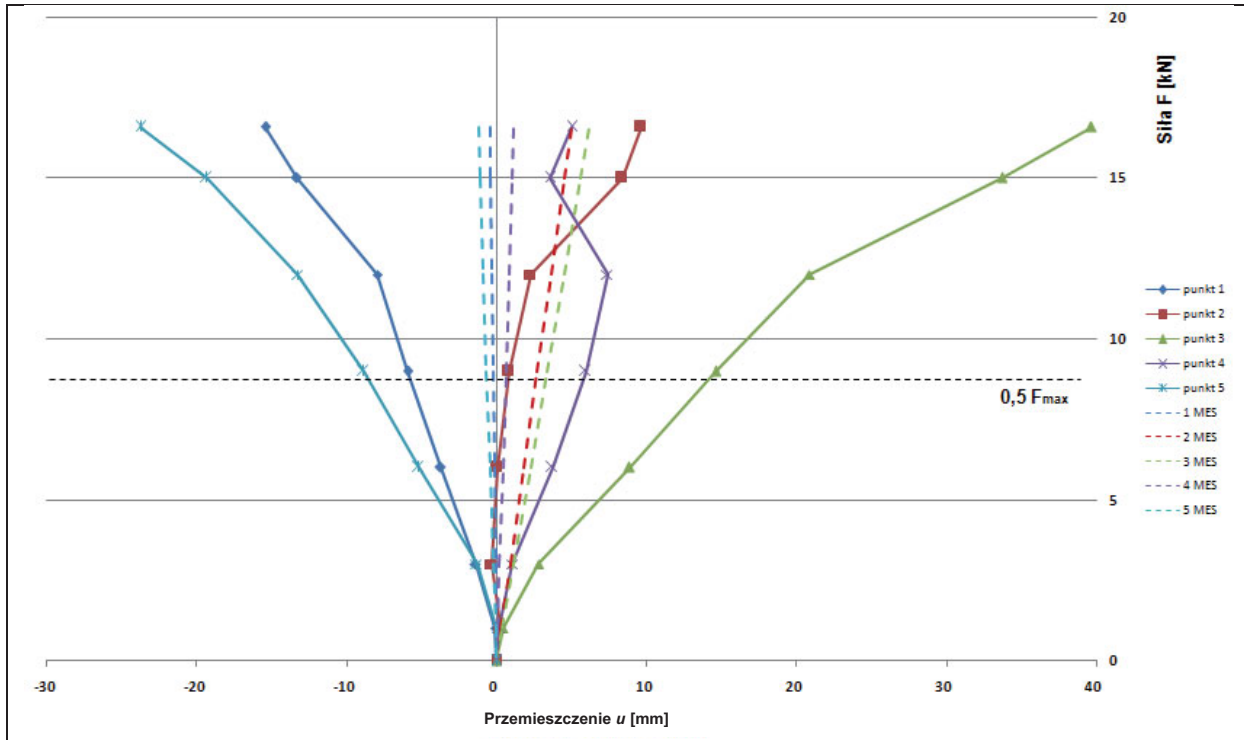
Tab. 5.7. Wyniki pomiarów przemieszczeń – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A6

punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła $F$ [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
1	-0,129 <b>-0,026**</b>	0,212 <b>0,300</b>	0,449 <b>0,374</b>	0,161 <b>0,068</b>	0,005 <b>-0,074</b>
3	-1,416 <b>-0,078</b>	-0,341 <b>0,900</b>	2,802 <b>1,122</b>	1,077 <b>0,204</b>	-1,307 <b>-0,222</b>
6	-3,733 <b>-0,156</b>	0,055 <b>1,800</b>	8,844 <b>2,244</b>	3,698 <b>0,408</b>	-5,206 <b>-0,444</b>
9	-5,920 <b>-0,234</b>	0,807 <b>2,700</b>	14,604 <b>3,366</b>	5,957 <b>0,612</b>	-8,857 <b>-0,666</b>
12	-7,933 <b>-0,312</b>	2,255 <b>3,600</b>	20,851 <b>4,488</b>	7,389 <b>0,816</b>	-13,254 <b>-0,888</b>
15	-13,342 <b>-0,390</b>	8,362 <b>4,500</b>	33,708 <b>5,610</b>	3,563 <b>1,020</b>	-19,310 <b>-1,110</b>
16,588	-15,413 <b>-0,431</b>	9,607 <b>4,976</b>	39,629 <b>6,204</b>	5,010 <b>1,128</b>	-23,717 <b>-1,228</b>

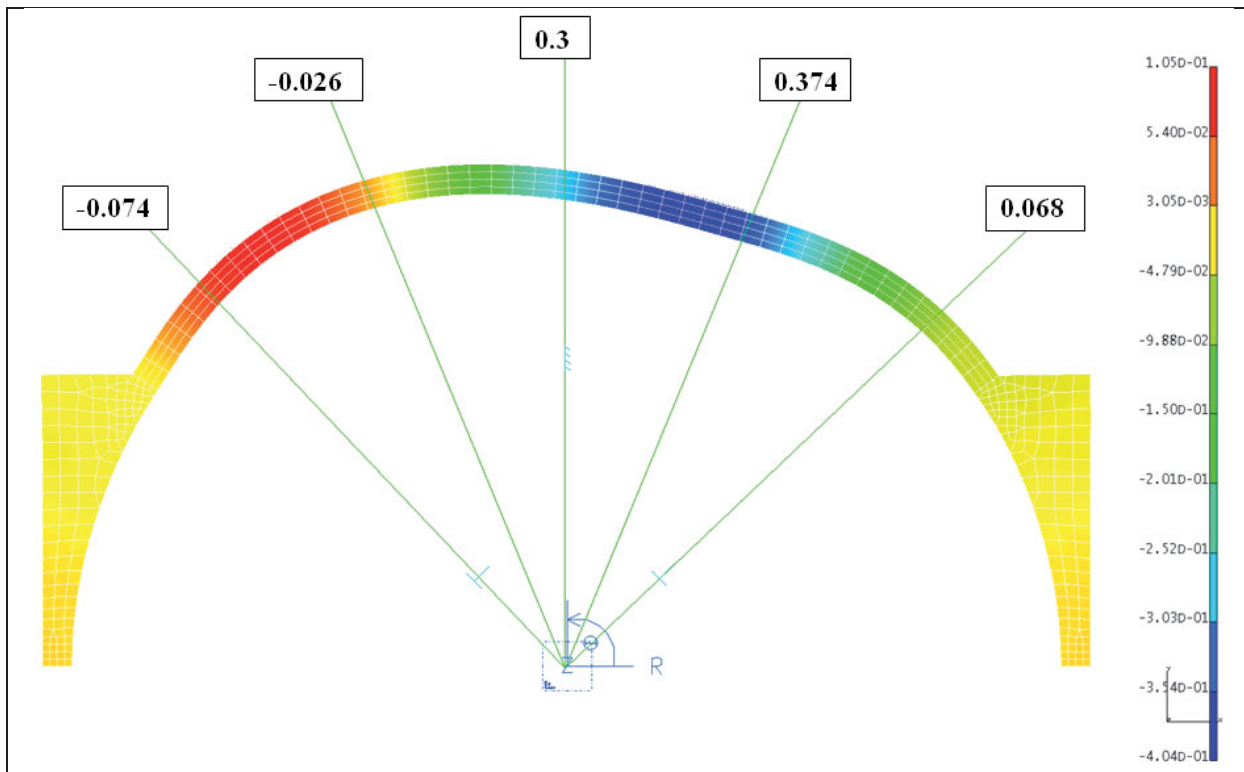
\* wartości ujemne obrazują wypiętrzenie modelu łuku

\*\* pogrubione wartości z obliczeń MES

## 5. Analiza numeryczna

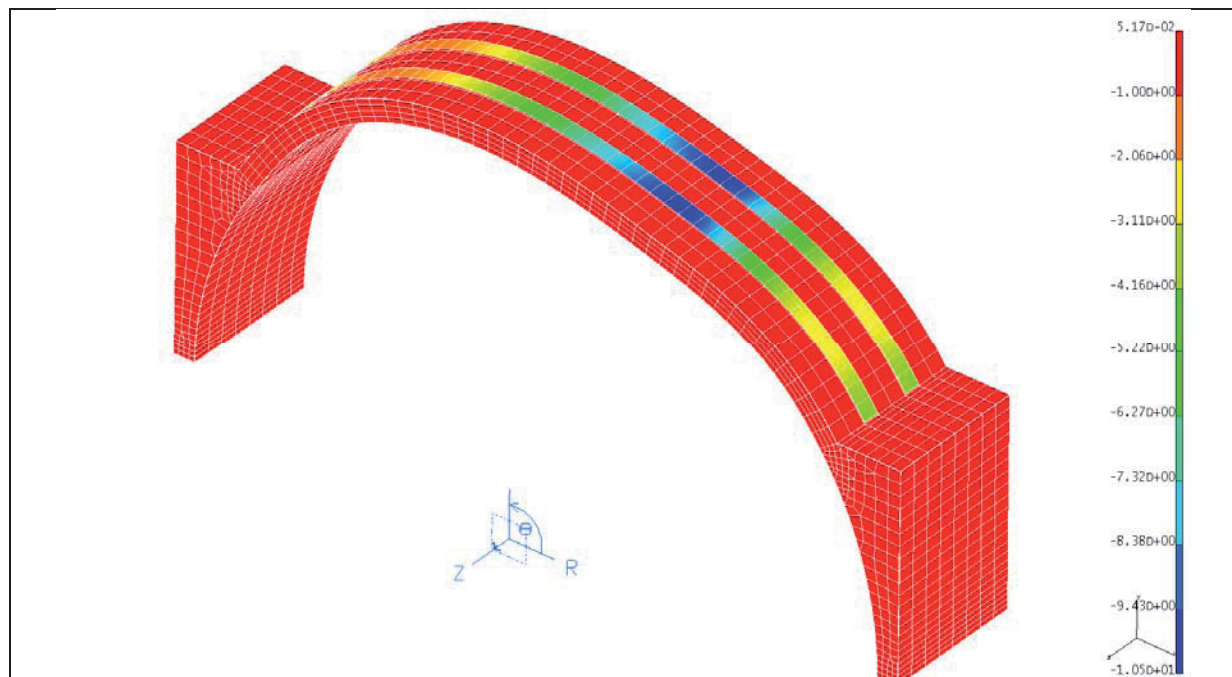


Rys. 5.38. Porównanie wyników przemieszczeń "u" z badań laboratoryjnych z wynikami MES – łuk A6.

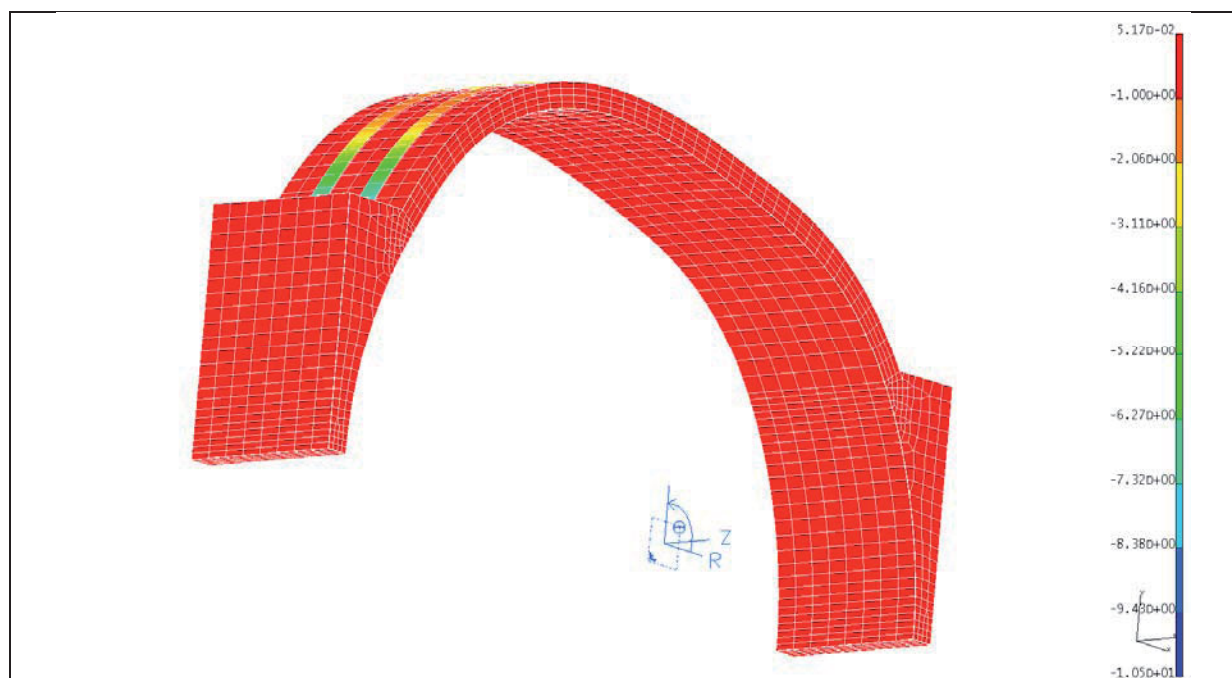


Rys. 5.39. Deformacje (wartości przemieszczeń) w łuku A6 – poziom obciążenia 1kN.

## 5. Analiza numeryczna

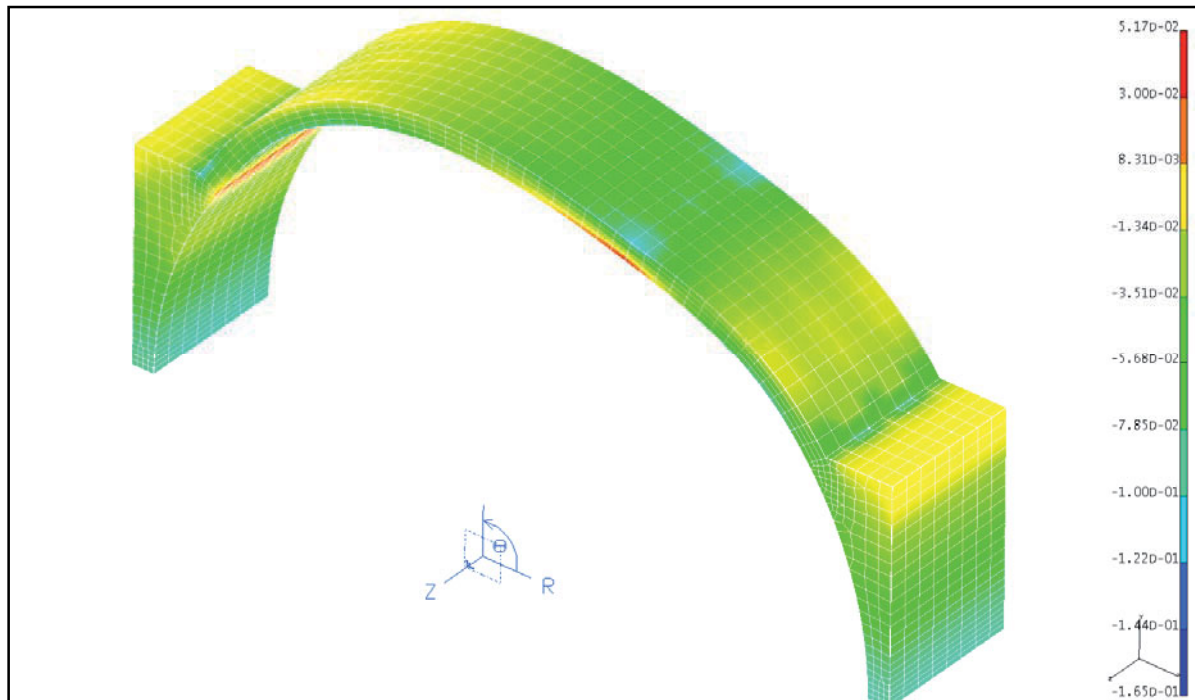


Rys. 5.40. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w całym łuku A6 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.

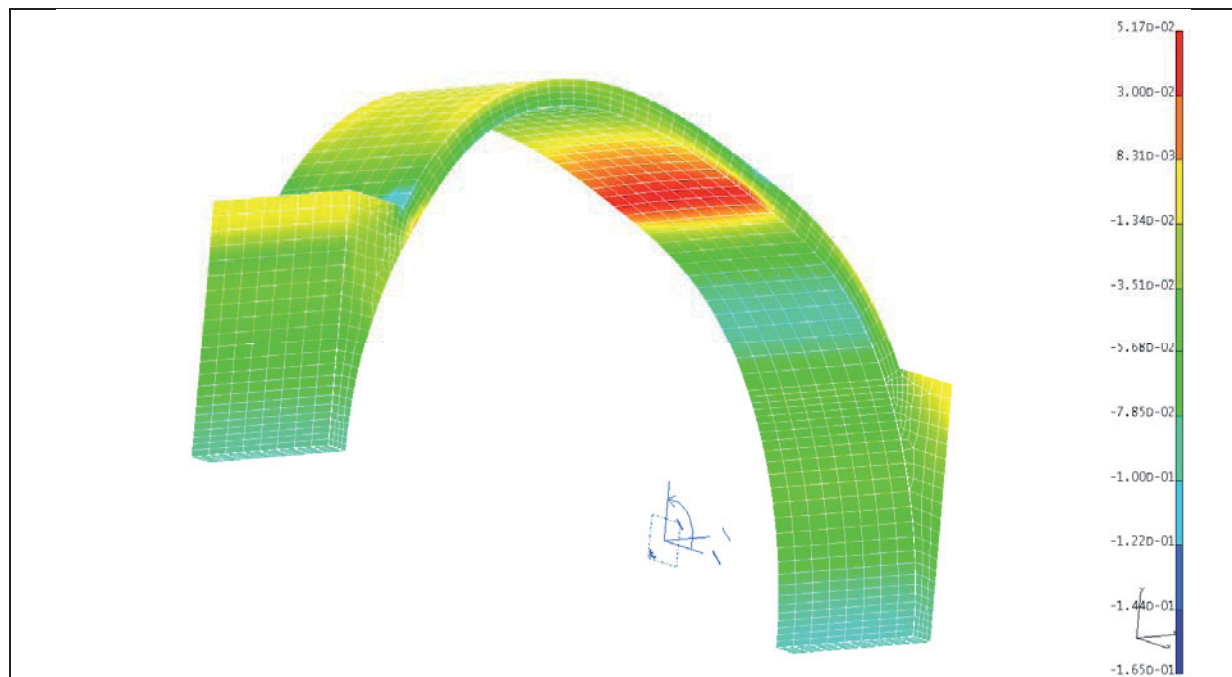


Rys. 5.41. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w całym łuku A6 – poziom obciążenia – 1kN – widok z dołu.

## 5. Analiza numeryczna

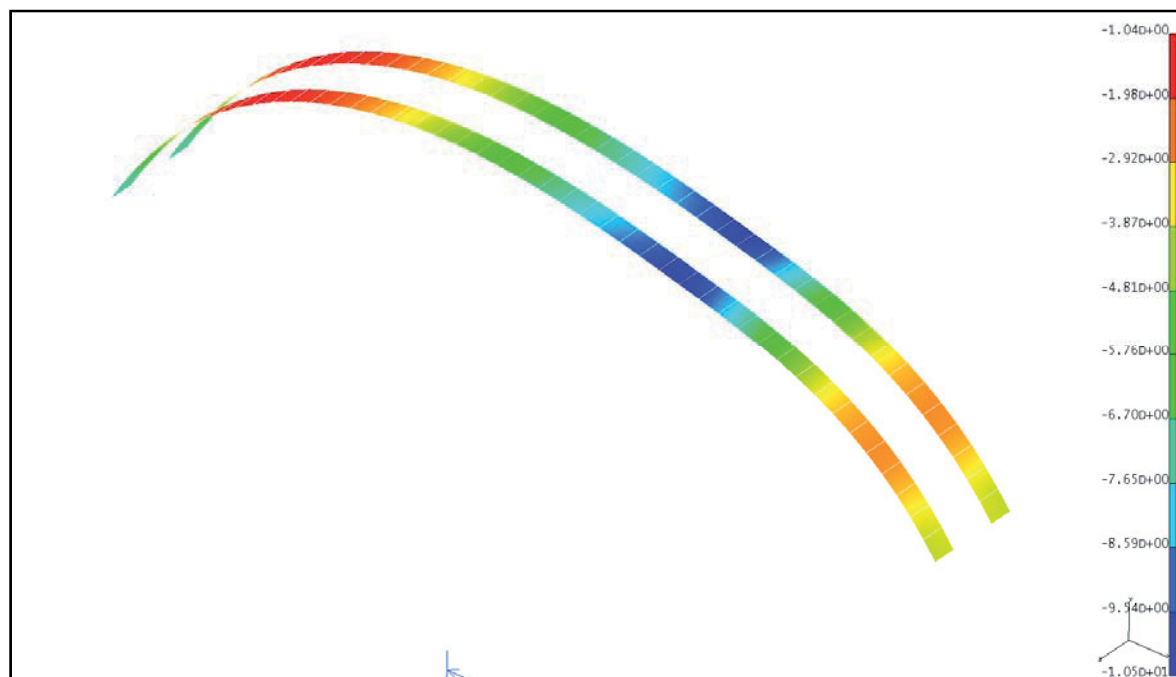


Rys. 5.42. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym łuku A6 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.



Rys. 5.43. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym łuku A6 – poziom obciążenia – 1kN – widok z dołu.

## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.44. Rozkład naprężeń obwodowych  $\sigma_r$  [MPa] w taśmach CFRP w łuku A6 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.

## 5.6.6. Łuk A7

Tab. 5.8. Wyniki pomiarów przemieszczeń – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A7

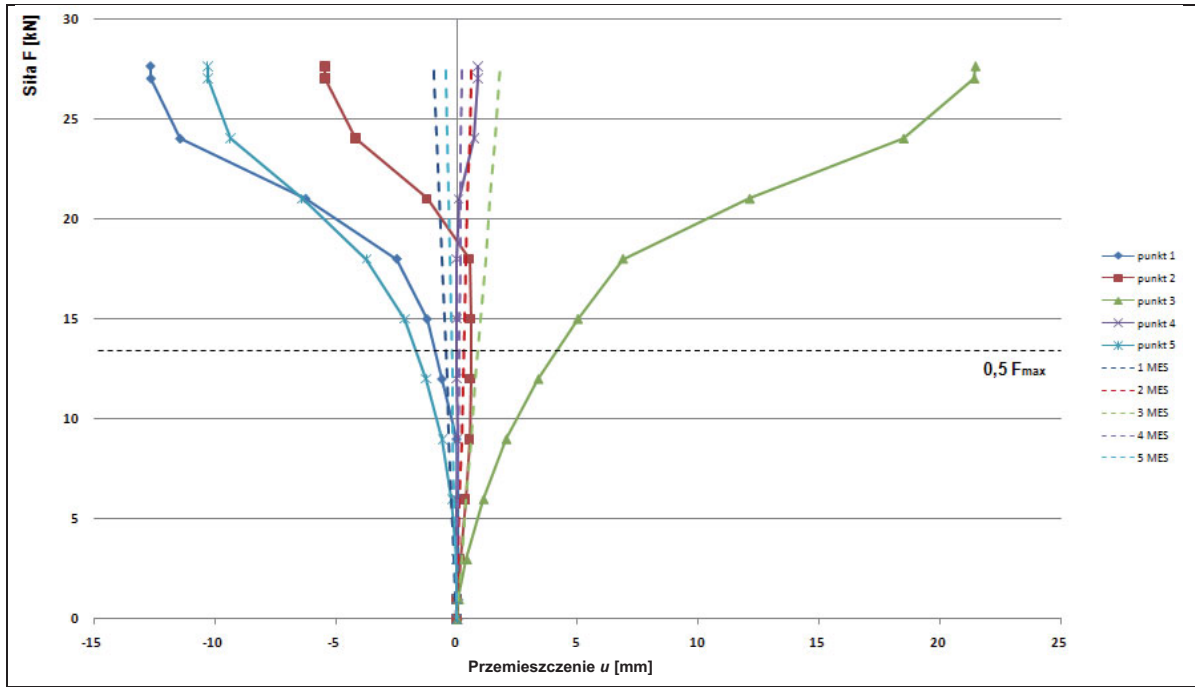
punkty pomiarowe	1	2	3	4	5
siła $F$ [kN]	przemieszczenie $u^*$ [mm]				
1	0,021 <b>-0,034**</b>	0,005 <b>0,022</b>	0,052 <b>0,065</b>	0,004 <b>0,007</b>	-0,001 <b>-0,017</b>
3	0,024 <b>-0,102</b>	0,129 <b>0,066</b>	0,393 <b>0,195</b>	0,005 <b>0,021</b>	-0,002 <b>-0,051</b>
6	0,027 <b>-0,204</b>	0,347 <b>0,132</b>	1,084 <b>0,390</b>	0,005 <b>0,042</b>	-0,198 <b>-0,102</b>
9	-0,047 <b>-0,918</b>	0,541 <b>0,594</b>	2,026 <b>0,585</b>	0,008 <b>0,063</b>	-0,601 <b>-0,153</b>
12	-0,648 <b>-0,408</b>	0,571 <b>0,264</b>	3,351 <b>0,780</b>	-0,001 <b>0,084</b>	-1,270 <b>-0,204</b>
15	-1,263 <b>-0,510</b>	0,569 <b>0,330</b>	4,980 <b>0,975</b>	-0,020 <b>0,105</b>	-2,168 <b>-0,255</b>
18	-2,502 <b>-0,612</b>	0,515 <b>0,396</b>	6,849 <b>1,170</b>	0,005 <b>0,126</b>	-3,721 <b>-0,306</b>
21	-6,265 <b>-0,714</b>	-1,250 <b>0,462</b>	12,098 <b>1,365</b>	0,070 <b>0,147</b>	-6,396 <b>-0,357</b>
24	-11,438 <b>-0,816</b>	-4,203 <b>0,528</b>	18,479 <b>1,560</b>	0,715 <b>0,168</b>	-9,365 <b>-0,408</b>
27	-12,644 <b>-0,918</b>	-5,464 <b>0,594</b>	21,405 <b>1,755</b>	0,857 <b>0,189</b>	-10,306 <b>-0,459</b>
27,618	-12,662 <b>-0,939</b>	-5,480 <b>0,608</b>	21,454 <b>1,795</b>	0,858 <b>0,193</b>	-10,306 <b>-0,470</b>

\* wartości ujemne obrazują wypiętrzenie modelu łuku

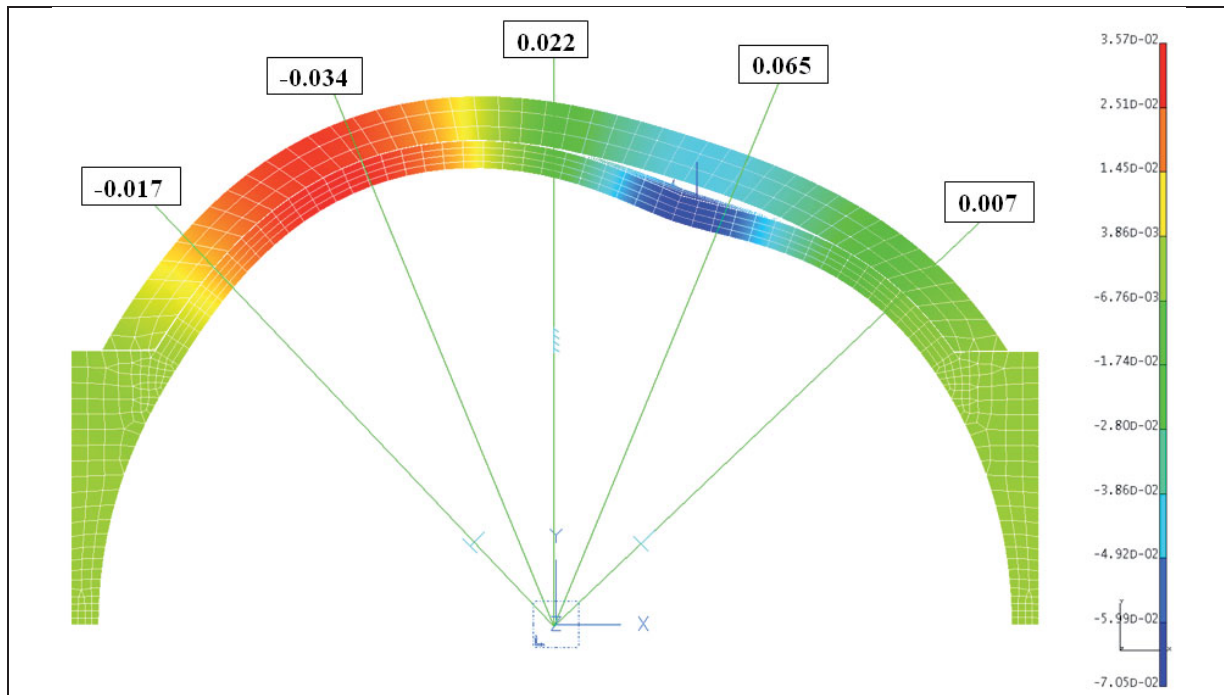
\*\* pogrubione wartości z obliczeń MES



## 5. Analiza numeryczna

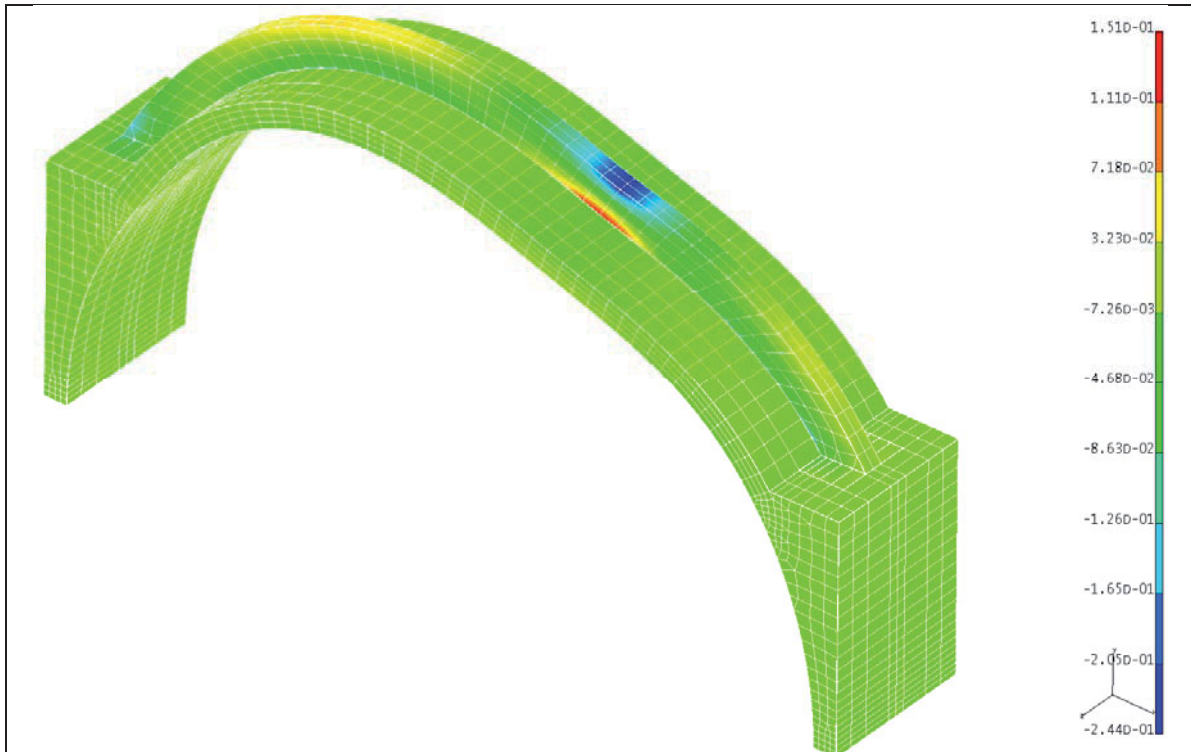


Rys. 5.45. Porównanie wyników przemieszczeń "u" z badań laboratoryjnych z wynikami MES – łuk A7.

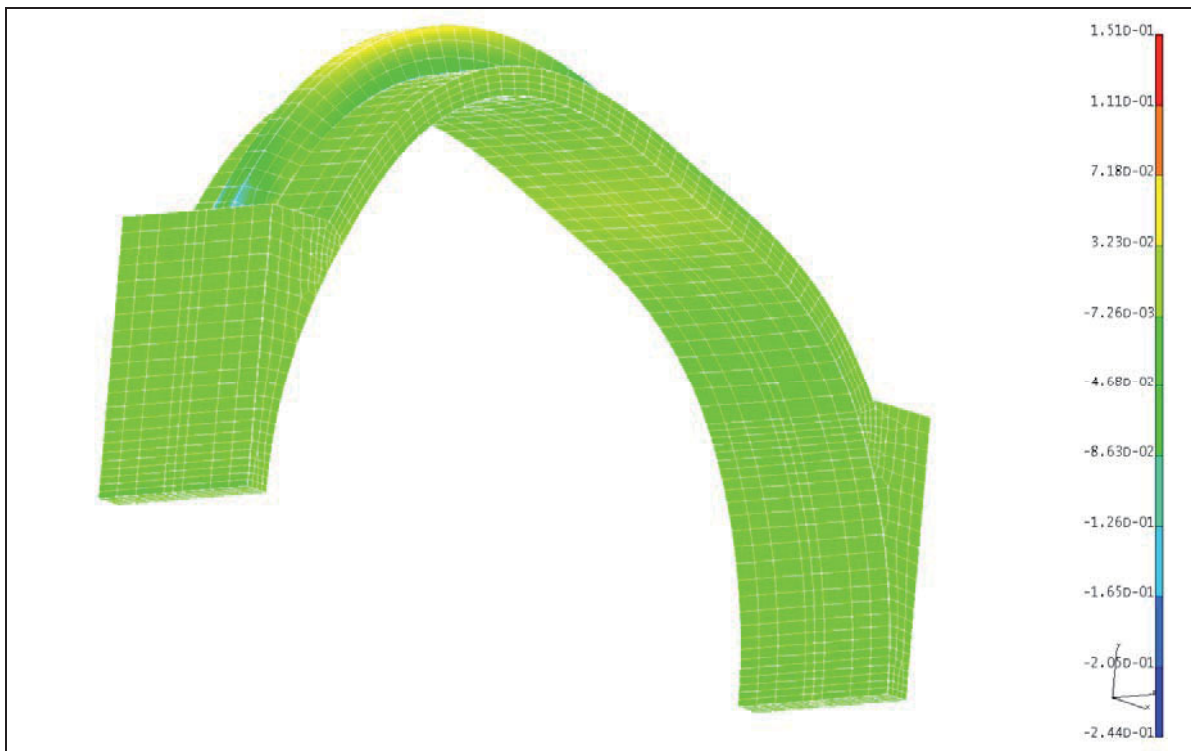


Rys. 5.46. Deformacje (wartości przemieszczeń) w łuku A7 – poziom obciążenia 1kN.

## 5. Analiza numeryczna

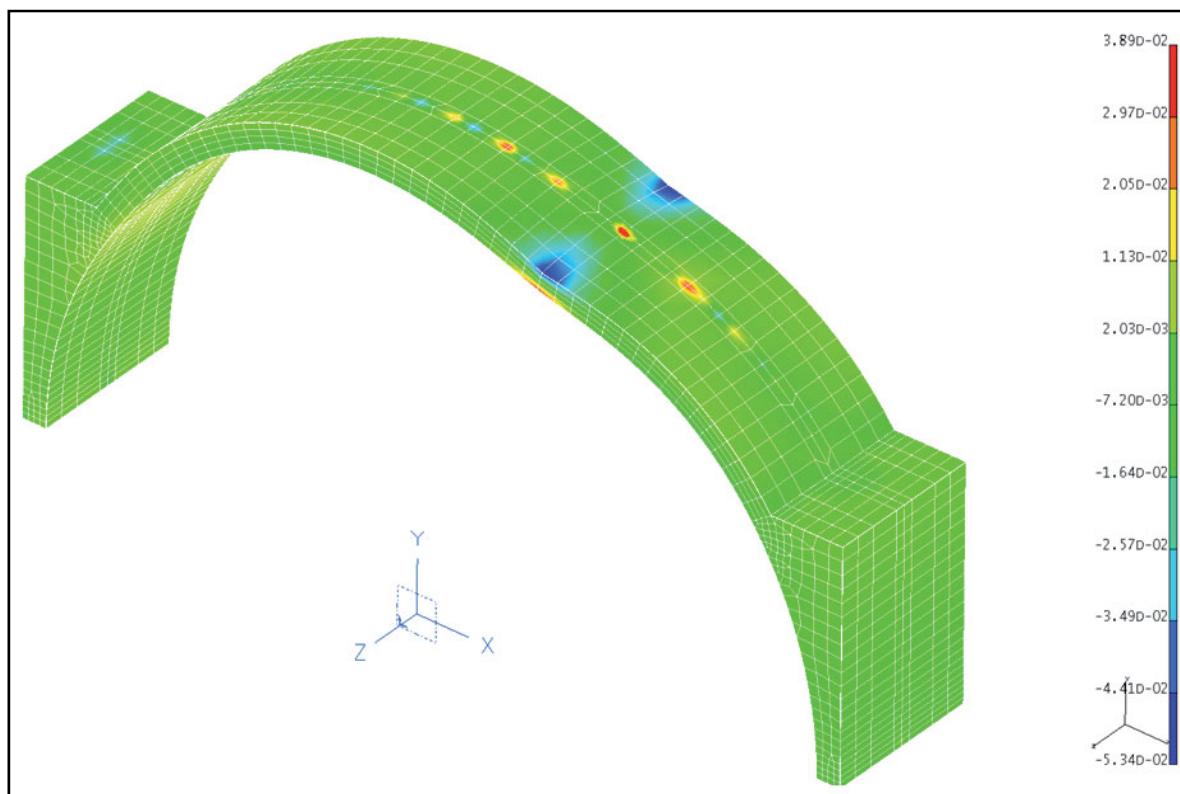


Rys. 5.47. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w łuku A7 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.

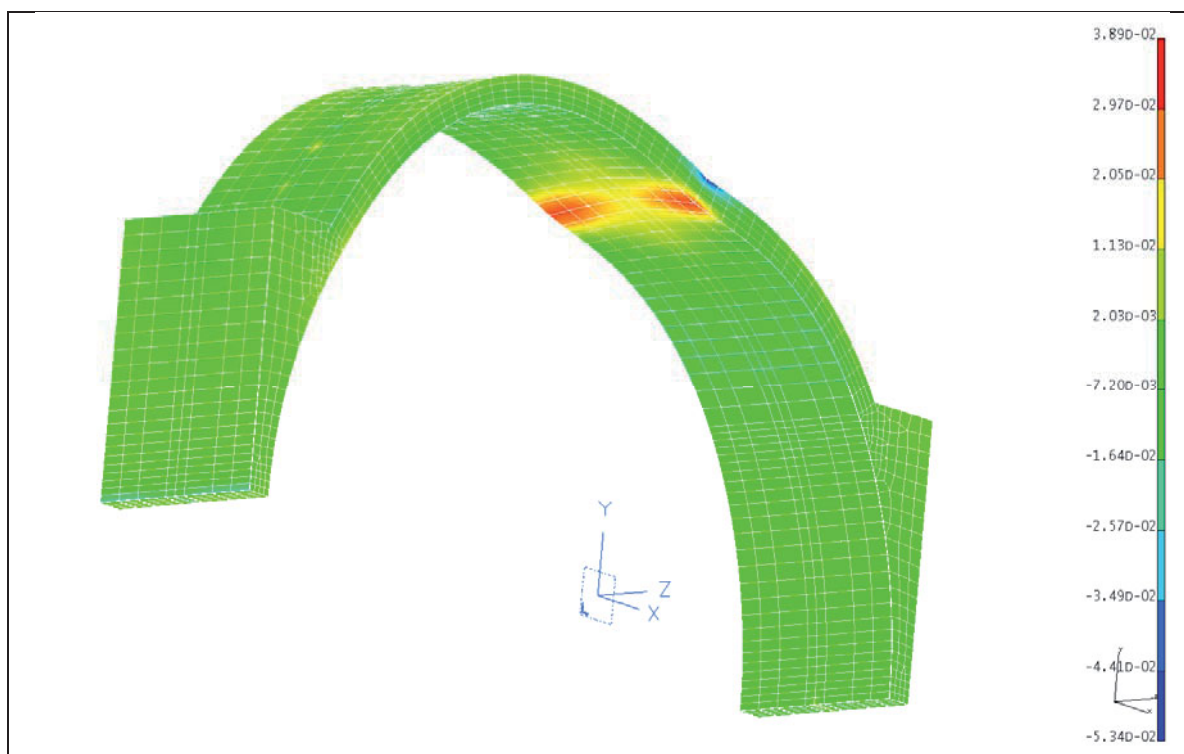


Rys. 5.48. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w łuku A7 – poziom obciążenia – 1kN – widok z dołu.

## 5. Analiza numeryczna

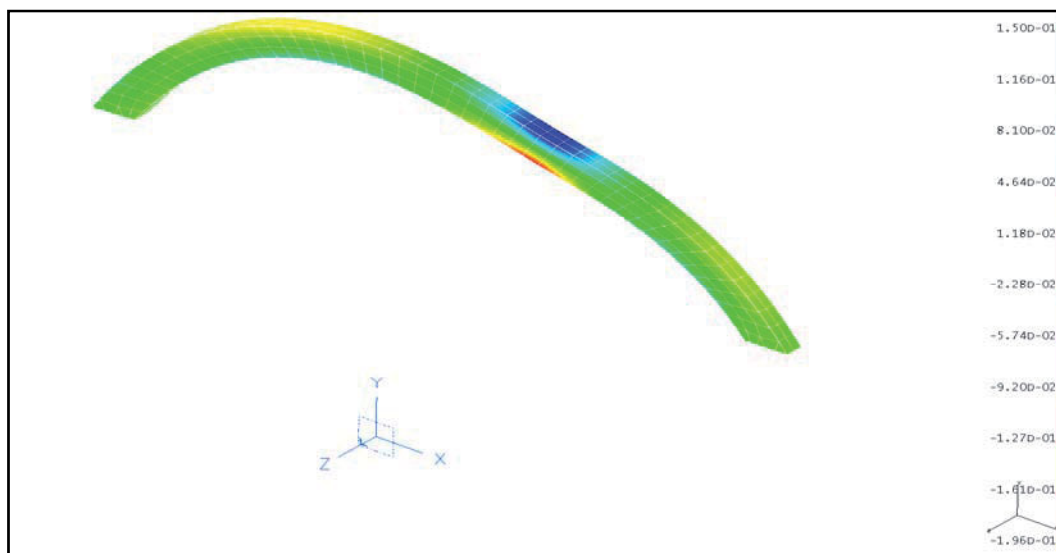


Rys. 5.49. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym łuku A7 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.



Rys. 5.50. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w materiale murowym łuku A7 – poziom obciążenia – 1kN – widok z dołu.

## 5. Analiza numeryczna



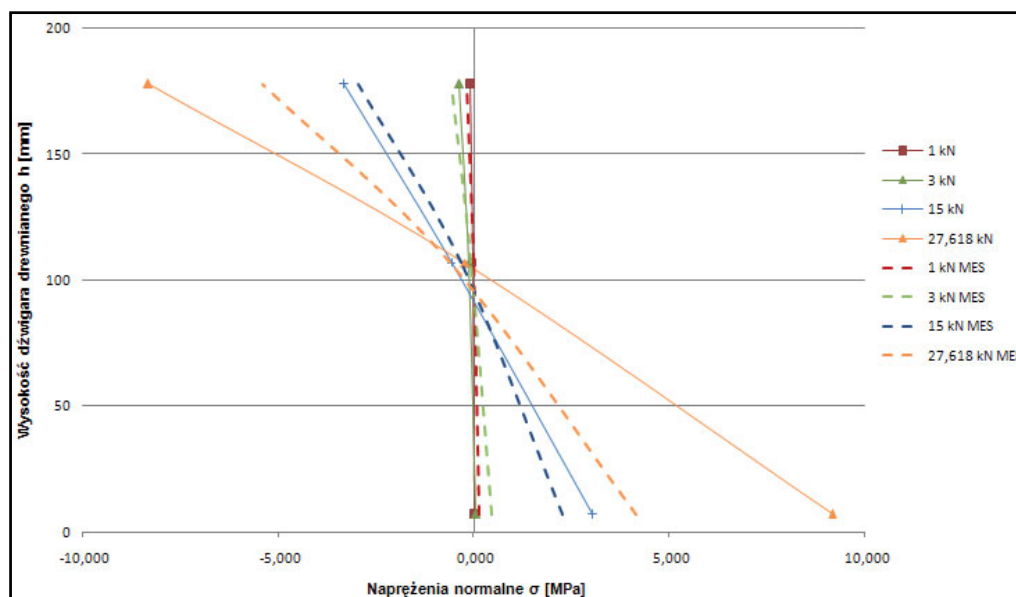
Rys. 5.51. Rozkład naprężeń obwodowych " $\sigma_r$ " [MPa] w dźwigarze z drewna klejonego w łuku A7 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.

Tab. 5.9. Naprężenia normalne " $\sigma$ " w drewnie klejonym w łuku A7 – porównanie z wynikami z MES (tylko dla wybranych wartości)

kotew nr	1	2	3
siła $F$ [kN]	naprężenie normalne $\sigma^*$ [MPa]		
1	0 <b>0,150**</b>	-0,035 <b>-0,023</b>	-0,093 <b>-0,196</b>
3	0,058 <b>0,450</b>	-0,151 <b>-0,068</b>	-0,371 <b>-0,588</b>
15	3,039 <b>2,250</b>	-0,568 <b>-0,342</b>	-3,318 <b>-2,940</b>
27,618	9,152 <b>4,143</b>	-0,232 <b>-0,630</b>	-8,317 <b>-5,413</b>

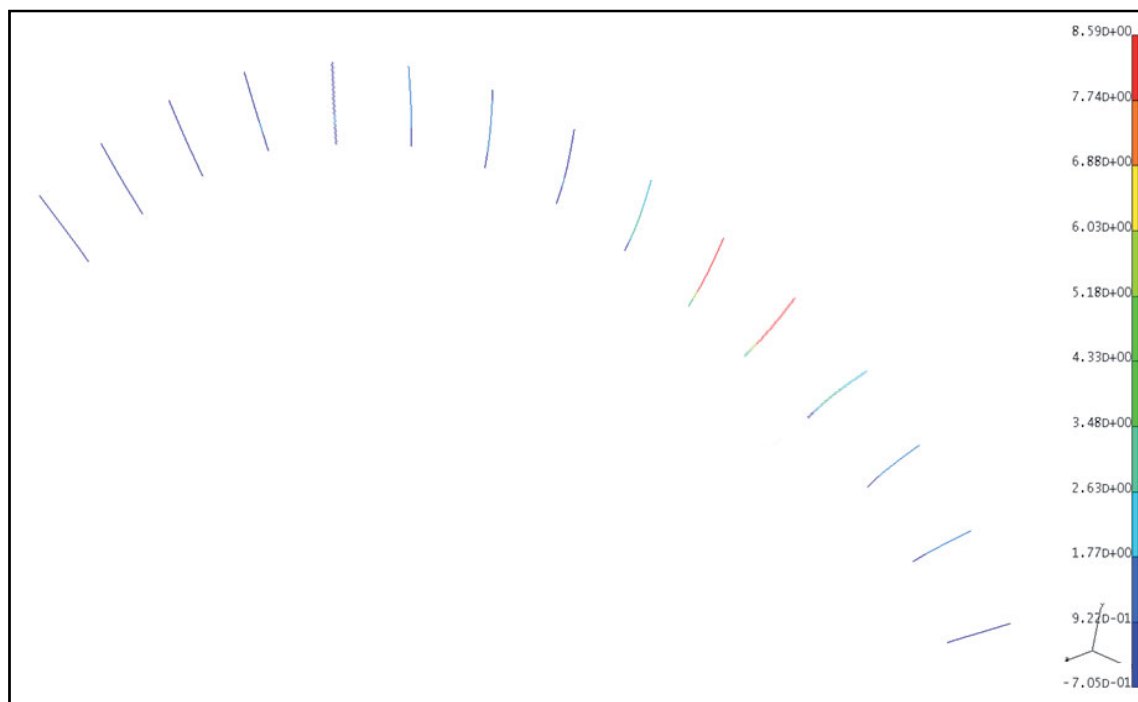
\* wartości ujemne przedstawiają naprężenia ściskające

\*\*wartości pogrubione pochodzą z obliczeń MES



Rys. 5.52. Naprężenia normalne " $\sigma$ " w drewnie klejonym w punktach od 1 do 3 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą " $F$ " w łuku A7 – porównanie z wynikami z MES.

## 5. Analiza numeryczna



Rys. 5.53. Rozkład naprężeń zredukowanych wg. hipotezy Hubera " $\sigma^*$ " [MPa] w kotwach stalowych w łuku A7 – poziom obciążenia – 1kN – widok z góry.

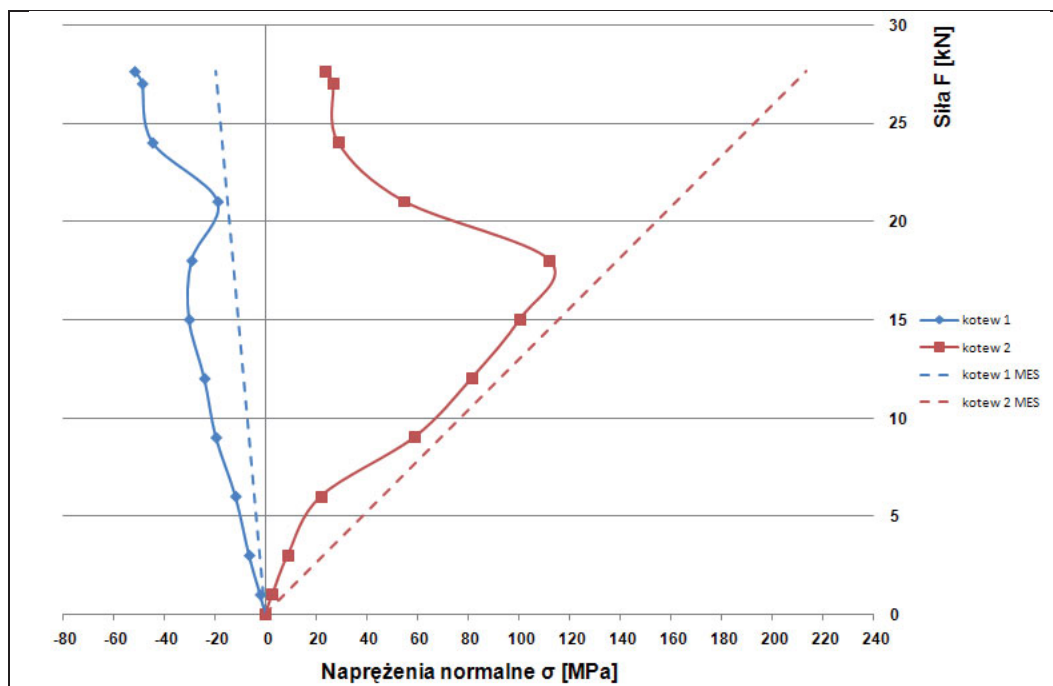
Tab. 5.10. Naprężenia normalne " $\sigma^*$ " – wyniki z badań laboratoryjnych oraz obliczeń MES – łuk A7

punkty pomiarowe siła $F$ [kN]	naprężenie normalne $\sigma^*$ [MPa]	
	1	2
1	-2,016	2,856
	<b>-0,705**</b>	<b>7,740</b>
3	-6,384	8,904
	<b>-2,115</b>	<b>23,220</b>
6	-11,760	22,008
	<b>-4,230</b>	<b>46,440</b>
9	-19,488	58,800
	<b>-6,345</b>	<b>69,660</b>
12	-24,024	81,312
	<b>-8,460</b>	<b>92,880</b>
15	-30,072	100,296
	<b>-10,575</b>	<b>116,100</b>
18	-29,064	112,056
	<b>-12,690</b>	<b>139,320</b>
21	-18,816	54,768
	<b>-14,805</b>	<b>162,540</b>
24	-44,520	28,728
	<b>-16,920</b>	<b>185,760</b>
27	-48,552	26,712
	<b>-19,035</b>	<b>208,980</b>
27,618	-51,576	23,520
	<b>-19,471</b>	<b>213,763</b>

\* wartości ujemne przedstawiają naprężenia ściskające

\*\*wartości pogrubione pochodzą z obliczeń MES

## 5. Analiza numeryczna



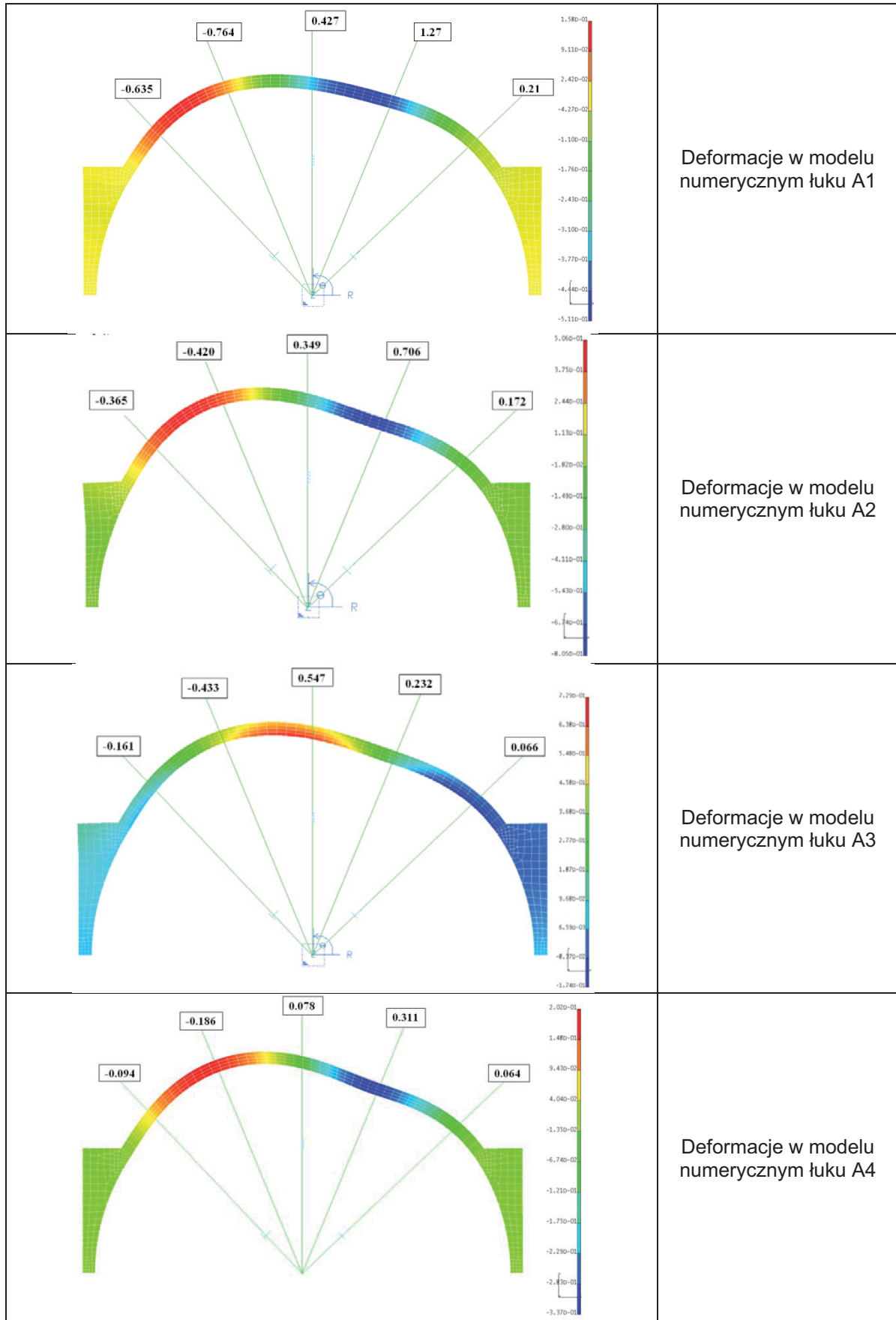
Rys. 5.54. Naprężenia normalne " $\sigma$ " w kotwach stalowych nr 1 i 2 przy kolejnych wartościach obciążenia siłą "F" w łuku A7 – porównanie wyników z badań z wynikami MES.

## 5.7. Wnioski

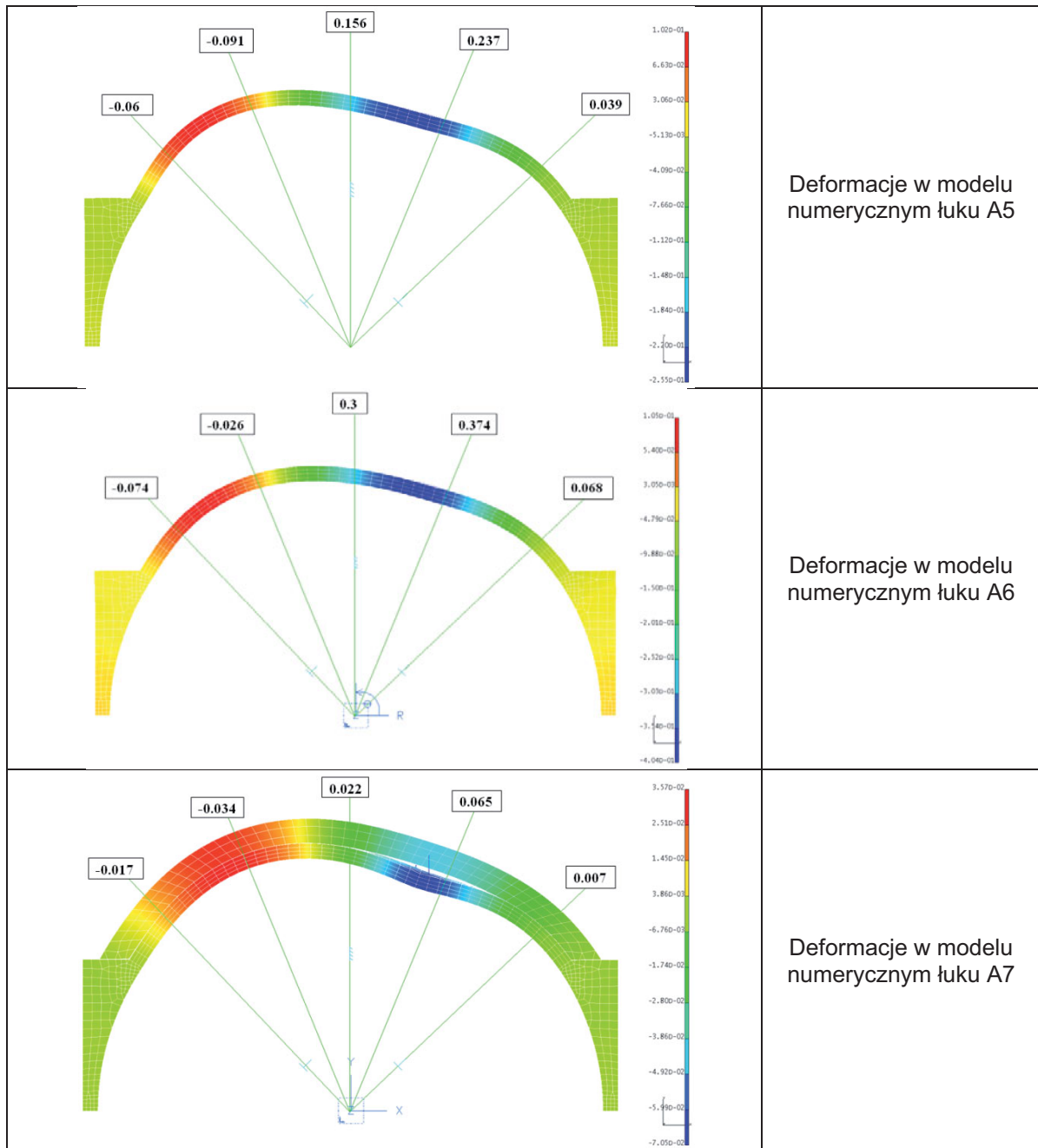
- 1) Stosowany w analizie zachowania badanych konstrukcji ceglanych model numeryczny (MES), makroelementowy, bazujący na założeniu, że mur jest materiałem jednorodnym, zhomogenizowanym jest znacznym uproszczeniem. Uproszczenie to można jednak uznać za dostatecznie wiarygodne w analizie prostych konstrukcji.
- 2) Otrzymane wyniki przemieszczeń wyznaczone na podstawie analizy liniowej w porównaniu z wynikami z badań doświadczalnych (rozdz. 4), wyznaczone w tych samych badanych punktach, dość jednoznacznie świadczą o dużej rozbieżności wyników przy granicznych wartościach siły niszczącej. Rozbieżność ta powstała na skutek przyjęcia w modelu numerycznym muru jako materiału plastycznego. Założenie to dość znacznie odbiega od rzeczywistości – mur jest ośrodkiem kruchym. Jednakże analizując badane przypadki można dojść do wniosku, że obliczenia numeryczne (takie jak powyższe) mogą z powodzeniem służyć do wyznaczenia stref miejscowego zmiężdżenia materiału, występowania przegubów, itd. stąd mają charakter jakościowy. Można też posługując się tą metodą ocenić słuszność zaproponowanych metod napraw i wzmocnień. Na potwierdzenie, zestawiono mapy przemieszczeń w tab. 5.11.
- 3) Należy stwierdzić, że wyniki analizy numerycznej potwierdzają wnioski z badań doświadczalnych o stosunkowo niskim stopniu wykorzystania przekrojów materiałów wzmocniających, głównie taśm CFRP, naklejonych na grzbietową powierzchnię łuków. Przekroje taśm i prętów zostają wykorzystane w większym stopniu dopiero w fazie powstawania przegubów.
- 4) Prace nad zbudowaniem modelu numerycznego w pełni przydatnego do oceny ilościowej efektywności badanych sposobów wzmocnień są kontynuowane.

## 5. Analiza numeryczna

Tab. 5.11. Zestawienie deformacji w poszczególnych modelach numerycznych łuków – wartość siły obciążającej model 1 kN



## 5. Analiza numeryczna





## 6. Model teoretyczny

## 6. MODEL TEORETYCZNY

## 6.1. Model oparty na analizie powstawania mechanizmów zniszczenia łuków

W trakcie badań doświadczalnych na modelach w skali technicznej zaobserwowano, że w łukach występują różne modele zniszczenia (rys. 6.1 – 6.4). Analizując te modele można myślowo wyznaczyć trzy wiązania pomiędzy poszczególnymi sekcjami przekroju (rys. 6.5).



Rys. 6.1. Powstanie przegubu o środku obrotu w części górnej połączenia.



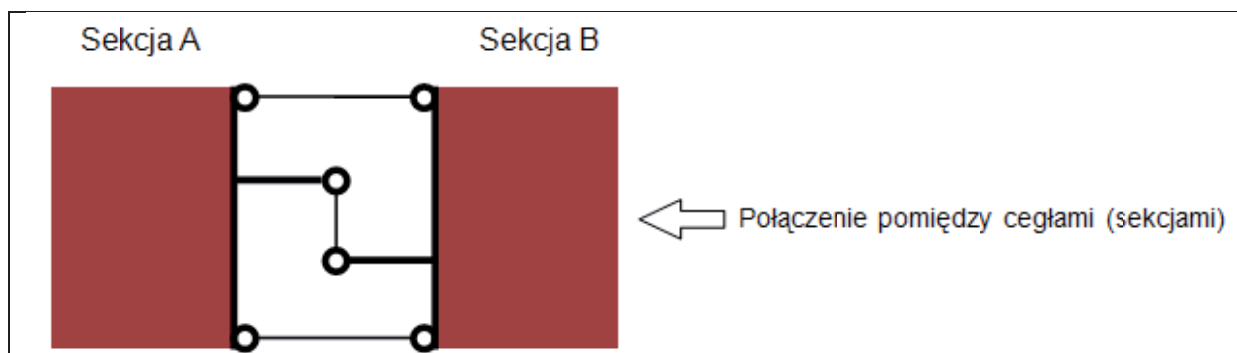
Rys. 6.2. Powstanie przegubu o środku obrotu w części dolnej połączenia.



Rys. 6.3. Ścięcie połączenia między ceglami.



Rys. 6.4. Ścięcie połączenia między ceglami połączone z obrotem.



Rys. 6.5. Wiazania pomiędzy poszczególnymi ceglami (sekcjami).

Różne kombinacje zniszczenia wiązań prowadzą do powstawania różnych modeli zniszczenia. I tak, jeśli dochodzi do zerwania jednego z tych wiązań, na przykład w trakcie tworzenia się przegubu, zmniejsza się liczba wiązań – stąd ( $z = -1$ ) pomiędzy ceglami. Można w takim przypadku zapisać następującą zależność, pozwalającą określić stabilność łuku:

## 6. Model teoretyczny

$$\text{zniszczenie łuku} \quad - \quad p - z < 0 \quad (6.1)$$

$$\text{konstrukcja łuku pozostaje stabilna} \quad - \quad p - z \geq 0 \quad (6.2)$$

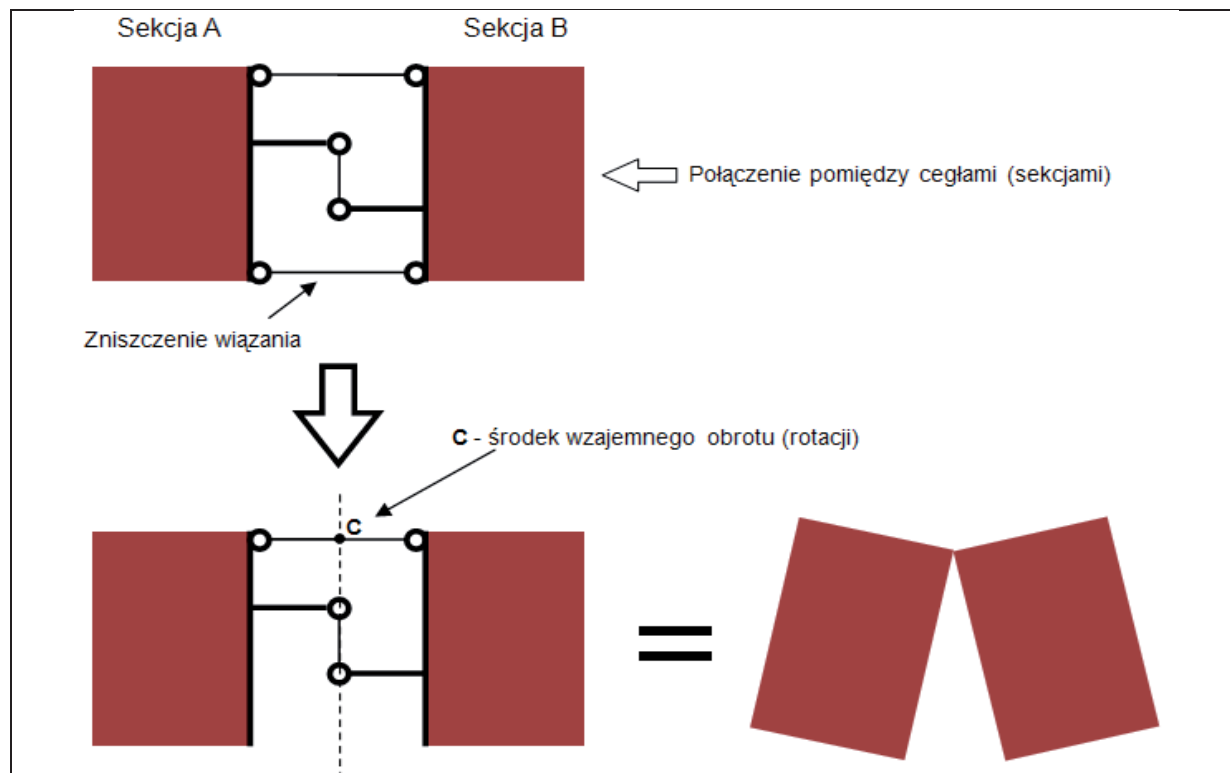
$p$  – liczba wiązań pierwotnych pomiędzy poszczególnymi cegłami (sekcjami),

$z$  – liczba wiązań zniszczonych pomiędzy poszczególnymi cegłami (sekcjami) w całym łuku.

Do zniszczenia łuku dochodzi dopiero w przypadku, gdy liczba wiązań zniszczonych  $z$  przewyższa lub jest równa liczbie wiązań pierwotnych  $p$  (zgodnie z modelem – pierwotne  $p=3$ ).

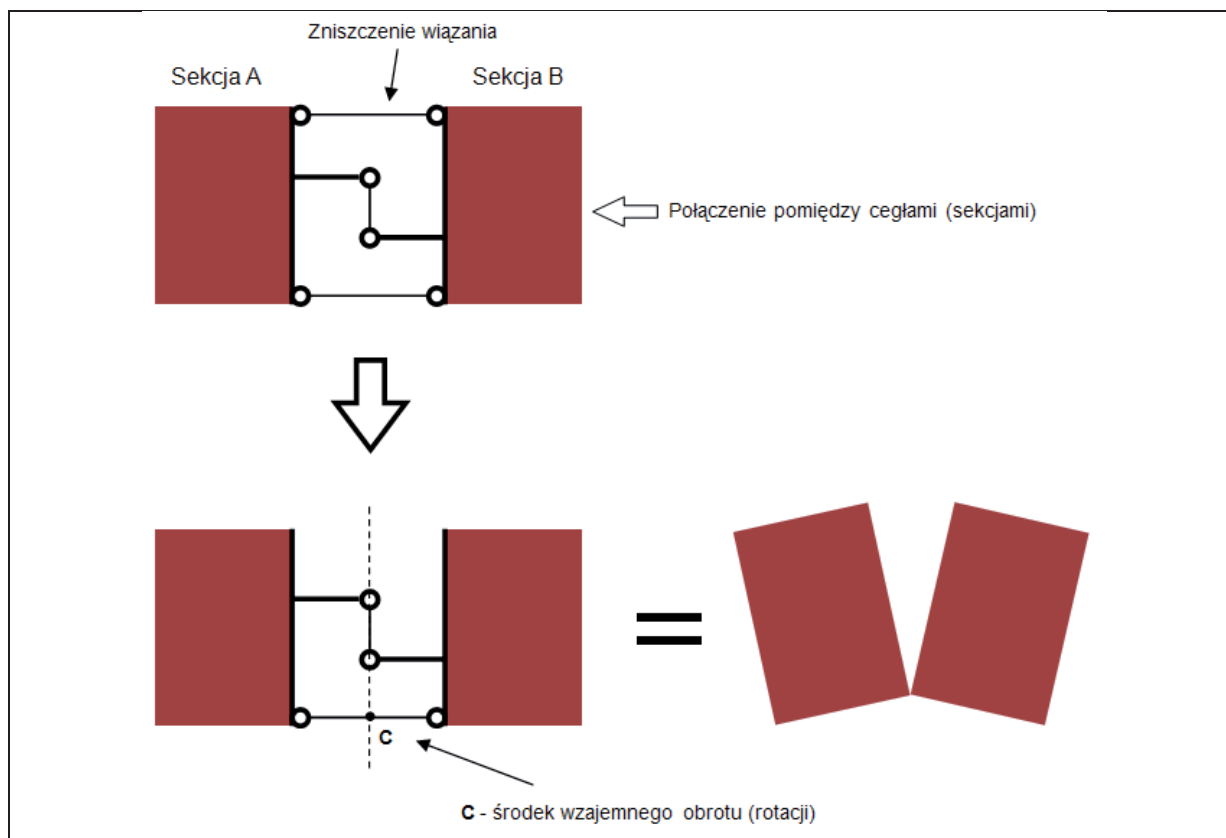
W trakcie badań obserwowano różne modele niszczenia połączeń między cegłami. Można podzielić je na 5 grup:

- powstanie przegubu zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 1 ( $z=1$ ) i środka wzajemnego obrotu (rotacji) w części górnej połączenia – rys. 6.6,
- powstanie przegubu zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 1 ( $z=1$ ) i środka wzajemnego obrotu (rotacji) w części dolnej połączenia – rys. 6.7,
- powstanie ścięcia w płaszczyźnie pomiędzy sekcjami zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 1 ( $z=1$ ) – rys. 6.8,
- powstanie ścięcia w płaszczyźnie pomiędzy sekcjami oraz przegubu o środku wzajemnego obrotu (rotacji) w części górnej połączenia zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 2 ( $z=2$ ) – rys. 6.9,
- powstanie ścięcia w płaszczyźnie pomiędzy sekcjami oraz przegubu o środku wzajemnego obrotu (rotacji) w części dolnej połączenia zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 2 ( $z=2$ ) – rys. 6.10.

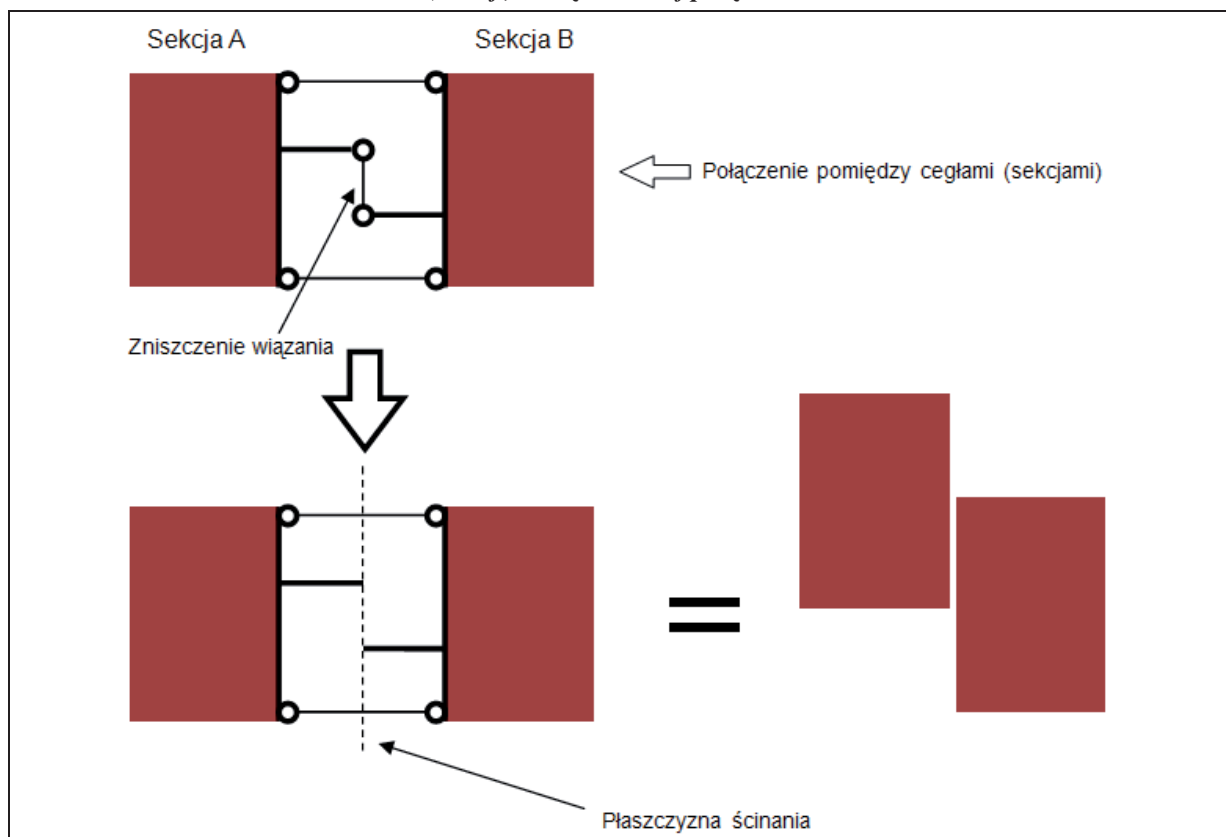


Rys. 6.6. Model powstania przegubu zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 1 ( $z=1$ ) i środka wzajemnego obrotu (rotacji) w części górnej połączenia.

## 6. Model teoretyczny

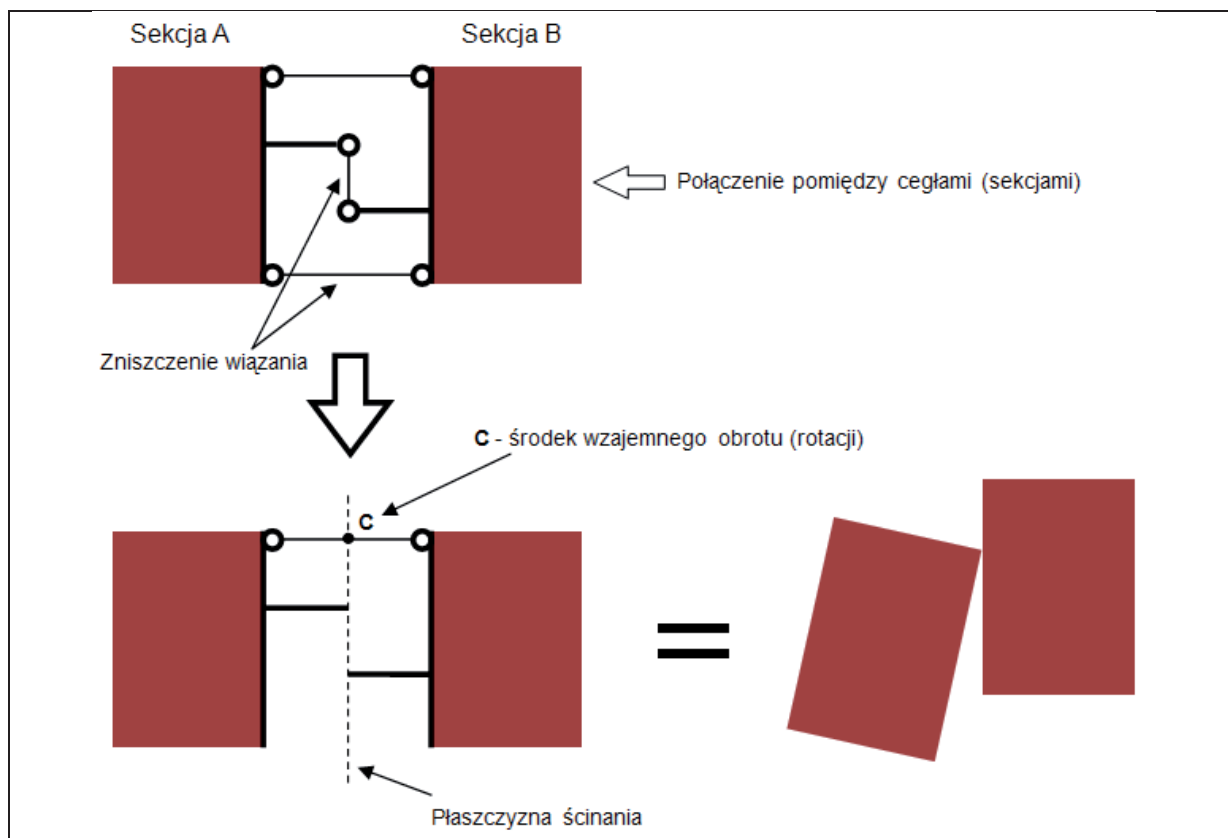


Rys. 6.7. Model powstania przegubu zmniejszającego liczbę wiązań z o 1 ( $z=1$ ) i środka wzajemnego obrotu (rotacji) w części dolnej połączenia.

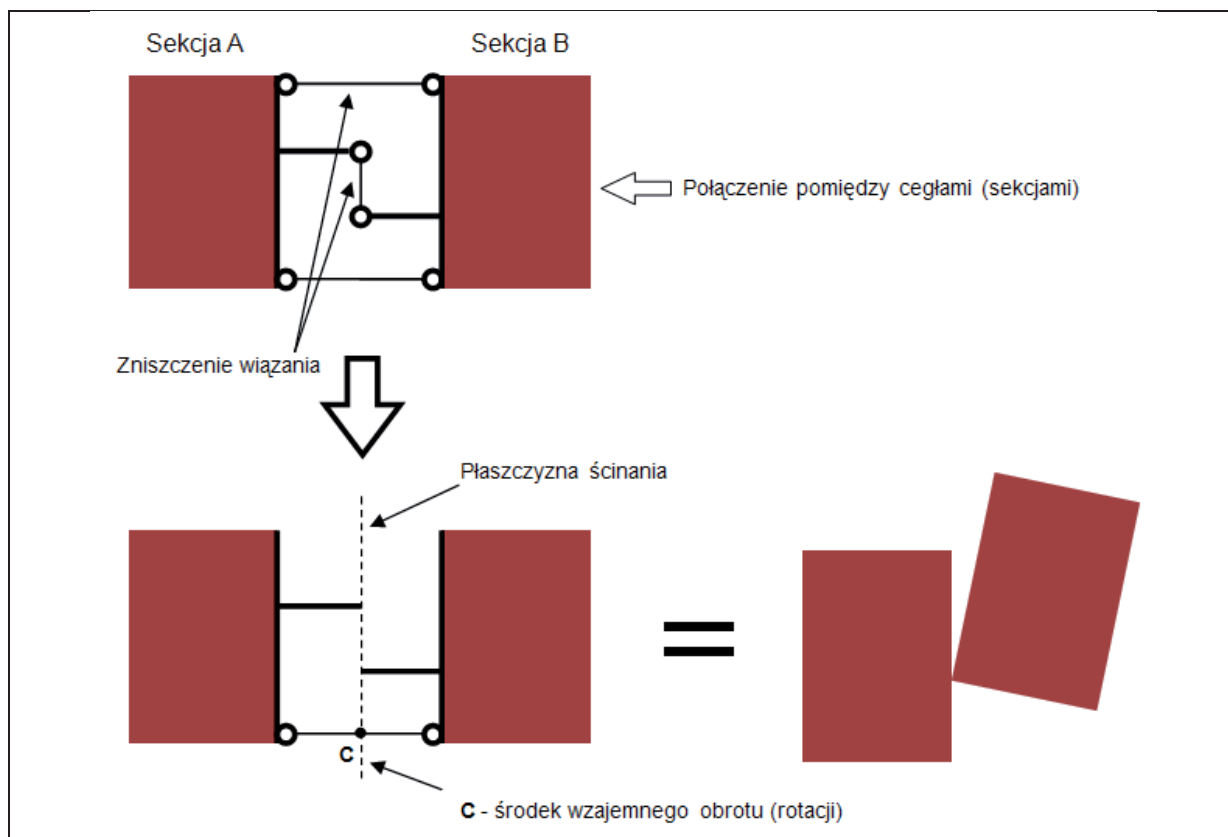


Rys. 6.8. Model powstania ścicia w płaszczyźnie pomiędzy sekcjami zmniejszającego liczbę wiązań z o 1 ( $z=1$ ).

## 6. Model teoretyczny



Rys. 6.9. Model powstania ściecia w płaszczyźnie pomiędzy sekcjami oraz przegubu o środku wzajemnego obrotu (rotacji) w części górnej połączenia zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 2 ( $z=2$ ).



Rys. 6.10. Model powstania ściecia w płaszczyźnie pomiędzy sekcjami oraz przegubu o środku wzajemnego obrotu (rotacji) w części dolnej połączenia zmniejszającego liczbę wiązań  $z$  o 2 ( $z=2$ ).

## 6. Model teoretyczny

Analizując powyższe modele zniszczenia można stwierdzić, że zniszczenie łuku dokonuje się nie tylko wtedy, gdy powstaje zniszczenie pomiędzy sekcjami (cegłami) aż w czterech miejscach (typu pochodzącego z grup 1 do 3) (np. 3-1-1-1-1 = -1) ale również w przypadku, gdy powstają zniszczenia pomiędzy sekcjami tylko w dwóch miejscach (typu pochodzącego z grup 4 i 5) (np. 3-2-2 = -1). Można też obserwować zniszczenie łuku powstałe na skutek zniszczenia jednego z połączeń pomiędzy sekcjami w trzech miejscach, będące połączeniem wymienionych przypadków (np. 3-2-1-1 = -1).

Z przedstawionej analizy wynika, że powstanie określonego typu zniszczenia jest powiązane z rodzajem wzmocnienia oraz jego umiejscowieniem (strona grzbietowa lub podniebienie łuku). Opisana analiza odnosi się jedynie do elementów badanych, może jednak stanowić podstawę w ocenie efektów wzmocnień stosowanych w innych przypadkach.

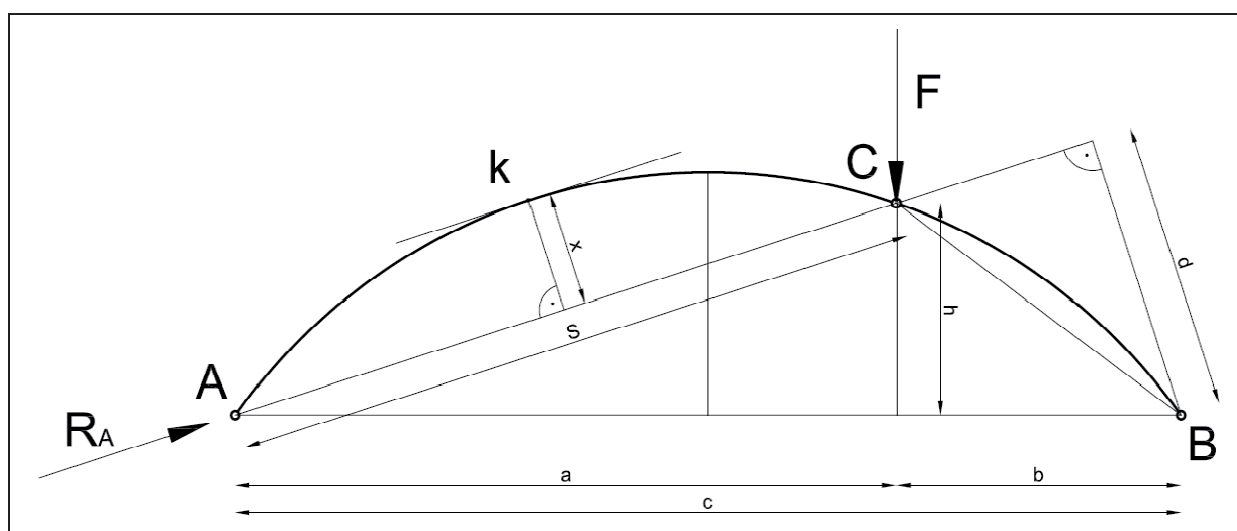
## 6.2. Model analityczny

Wykorzystując obserwowane w badaniach modele zniszczenia, bazując na ogólnych zasadach statyki, pracy [144] oraz korzystając z norm do obliczania konstrukcji murowych [187] i [188], można wyznaczyć siły przekrojowe w najbardziej wyężonym przekroju konstrukcji. Dla badanego przypadku łuku przyjętego jako trójprzegubowy, najbardziej wyężony przekrój oznaczono jak na rys. 6.11 jako  $k$ . Zaproponowany model analityczny weryfikowano na łukach A2 oraz A5.

Zakładając wg. [187], że  $M_{Sd}$  (moment zginający w przekroju) wywołany obciążeniem  $F$  jest mniejszy lub równy  $M_{Rd}$  (nośność obliczeniowa przekroju na zginanie), można zapisać równanie:

$$M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad (6.3)$$

Moment zginający  $M_{Sd}$  jest maksymalnym momentem w całej konstrukcji łuku. Korzystając z obserwacji i wyników badań doświadczalnych można stwierdzić, że miejscem, w którym tworzy się pierwszy przegub jest punkt  $k$ .

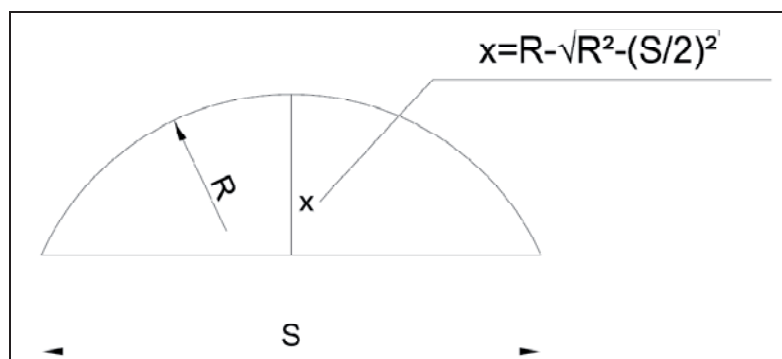


Rys. 6.11. Przyjęty model geometryczny łuku trójprzegubowego.

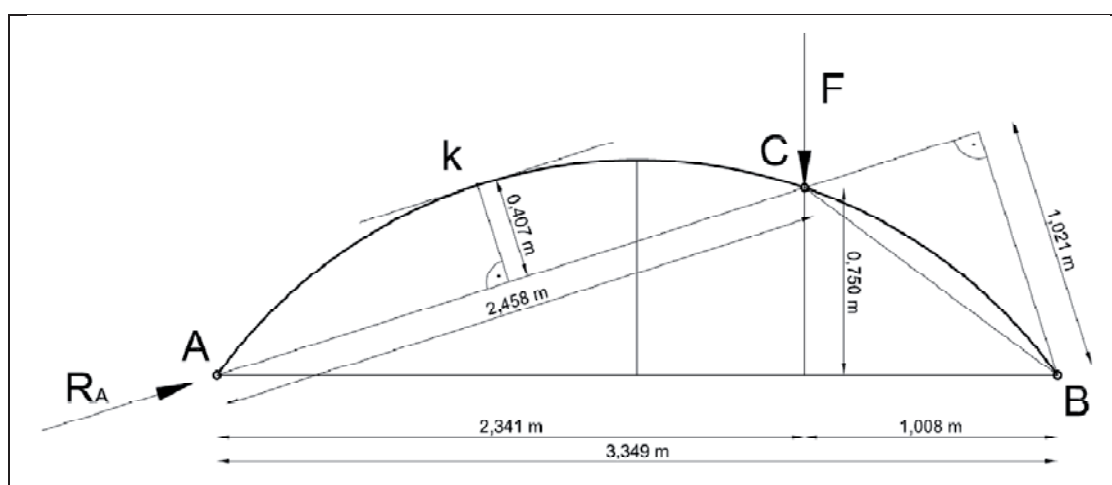
Wartość momentów przekrojowych w punkcie  $k$  można wyznaczyć z zależności geometrycznych, (rys. 6.11 – 6.12).

## 6. Model teoretyczny

W analizie przypadku badanego podczas badań laboratoryjnych przyjęto dane geometryczne (rys. 6.13) wyznaczone względem środkowej osi przekroju.



Rys. 6.12. Wyznaczenie długości odcinka  $x$ .



Rys. 6.13. Obliczeniowy model łuku bazujący na modelu z badań doświadczalnych.

Przyjmując za prawidłowe powyższe rozumowanie można stwierdzić, że:

$$M_{Sd} = M_k. \quad (6.4)$$

Zakładając, że:

$$\sum M_C = 0, \quad (6.5)$$

można wyznaczyć moment zginający  $M_k$  w punkcie  $k$  korzystając ze wzoru:

$$M_k = R_A \cdot x, \quad (6.6)$$

gdzie:

$$R_A \cdot d = F \cdot b. \quad (6.7)$$

Z tego:

$$R_A = \frac{F \cdot b}{d} \quad (6.8)$$

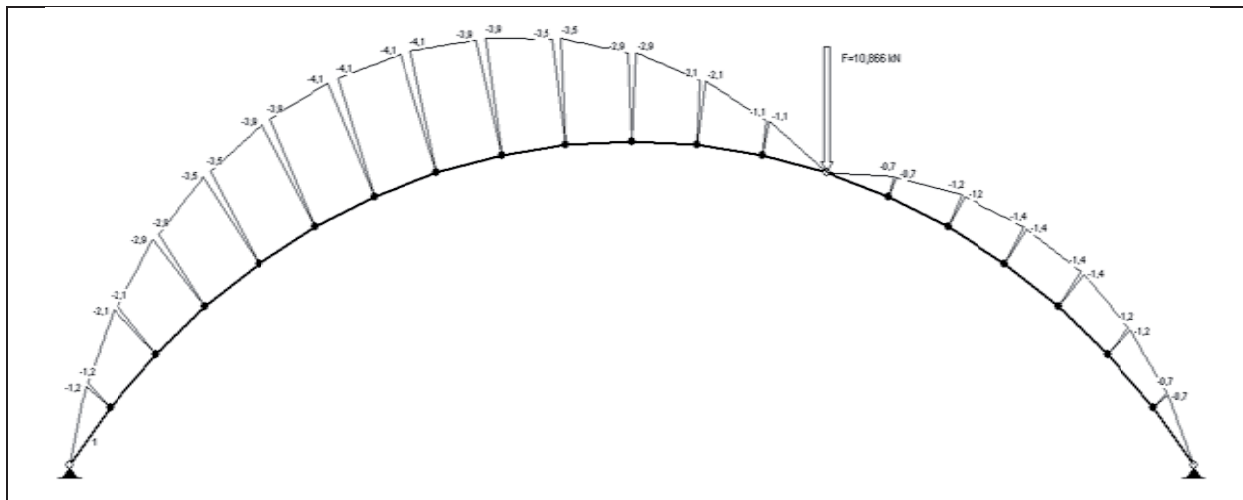
## 6. Model teoretyczny

$$x = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2}, \quad (6.9)$$

Z tego:

$$M_k = \frac{F \cdot b}{a} \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2}\right). \quad (6.10)$$

Do wyznaczenia sił przekrojowych można również wykorzystać oprogramowanie komputerowe do analizy statycznej. Po zadaniu odpowiednich warunków podparcia i obciążeniu siłą uzyskaną z badań własnych można wyznaczyć maksymalne wartości momentów  $M$  (rys. 6.14), sił osiowych  $N$  i tnących  $T$ , a następnie wykorzystać je w dalszych obliczeniach.



Rys. 6.14. Wykres momentów zginających  $M$  w łuku A2.

Wykorzystanie takiego sposobu wyznaczania sił przekrojowych wydaje się słuszne ze względu na szybkość obliczeń i możliwość dokładniejszego wyznaczenia miejsc w których występują maksymalne siły przekrojowe – punkt  $k$ .

Przyjmując dane geometryczne jak na rys. 6.13, z równania momentów względem punktu B, dla siły  $F = 10,866 \text{ kN}$  (wg rys. 6.14), otrzymuje się  $R_A = 10,728 \text{ kN}$ . Stąd moment w punkcie  $k$  jest równy  $M = 10,728 \times 0,407 = 4,366 \text{ kNm}$ . Wartość ta różni się od wartości  $M = 4,1 \text{ kNm}$  podanej na rys. 6.14. Różnica w wartościach powstała prawdopodobnie z niedokładności budowy modelu geometrycznego przyjętego dla obliczeń komputerowych. Jednak ze względu na niewielką różnicę w wartościach i szybkość obliczeń przyjęcie wartości momentu  $M = 4,1 \text{ kNm}$  wydaje się dopuszczalne.

Aby obliczyć prawa stronę równania (6.3), skorzystano ze wzorów (6.11) i (6.12) przytoczonych w [187].

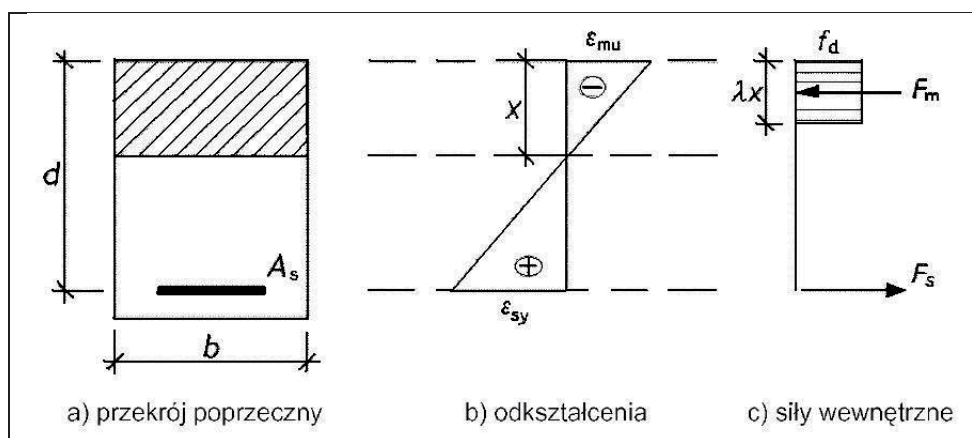
$$M_{Ra} = A_s \cdot f_{yd} \cdot z, \quad (6.11)$$

gdzie:

$$z = d \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_d}\right) \leq 0,95 \cdot d. \quad (6.12)$$

## 6. Model teoretyczny

Poszczególne wartości wykorzystywane we wzorach (6.11) i (6.12) przyjmuje się zgodnie ze schematem podanym na rys. 6.15. Wartości wytrzymałości poszczególnych materiałów pochodzą z innych źródeł (własnych badań bądź tablic i danych producentów).



Rys. 6.15. Rozkład naprężeń i odkształceń w przekroju wg. [187].

Na podstawie powyższych wzorów oraz założenia (6.13) można wyznaczyć (dla danej geometrii i przy danych parametrach materiałowych) taką wartość siły  $F$ , dla której przekrój łuku wzmocnionego wykorzystuje całkowicie swoją nośność.

$$M_{Sd} = M_{Rd} = M_k \quad (6.13)$$

Korzystając z zależności (6.13) można ją tak modyfikować, aby sterować wielkością przekroju dobieranego wzmocnienia, wystarczającą do przeniesienia przewidywanych obciążeń.

Korzystając z geometrii przedstawionej na rys. 6.13 oraz wyznaczonych (na podstawie badań zawartych w rozdz. 4) parametrów materiałowych, określono nośności przekrojów wzmocnionych we wszystkich analizowanych podczas badań doświadczalnych przypadkach.

Poniżej przedstawiono przyjęty sposób analizy obliczeniowej:

Dla łuku A2 przyjęto:

$$\begin{aligned} F &= 10,866 \text{ kN} \\ f_s &= 4800 \text{ MPa} \\ f_d &= 3,0 \text{ MPa} \\ A_s &= 0,4136 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ b_p &= 0,77 \text{ m} \\ d_p &= 0,12 \text{ m} \end{aligned}$$

Otrzymano następujące wartości:

$M_k = 4,1 \text{ kNm}$  – przyjęto z obliczeń komputerowych,

$$z = 0,12 \cdot \left( 1 - 0,5 \cdot \frac{0,4136 \cdot 10^{-4} \cdot 4800}{0,77 \cdot 0,12 \cdot 3} \right) = 0,077 \text{ m}$$

$$M_{Rd} = 0,4136 \cdot 10^{-4} \cdot 4800 \cdot 0,077 = 15,29 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



## 6. Model teoretyczny

Tab. 6.1. Porównanie wyników z badań z wynikami analitycznymi (wybrane modele)

model łuku	siła niszcząca $F_{max}$ [kN]	maksymalny moment zginający (obliczenia komputerowe) $M_{max}$ [kNm]	nośność obliczeniowa przekroju na zginanie $M_{Rd}$ [kNm]
A2	10,866	4,1	15,29
A5	19,314	7,3	6,60

Uzyskane wartości momentów dla łuku A2 znacznie się od siebie różnią. Jedynie obliczenia przeprowadzone dla łuku A5 dały wyniki zbliżone:

$$M_k = 7,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd} = 6,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

gdzie:

- $M_k$  – moment zginający w przekroju  $k$ ,
- $M_{Rd}$  – nośność obliczeniowa przekroju na zginanie.

Stwierdzono, że w przypadku wzmocnień wykorzystujących materiały FRP lub FRCM naklejane na wzmacnianą powierzchnię, nie są spełnione warunki normowe dotyczące przemieszczeń. Wynika z tego, że przyjęte podejście bazujące na [187] jest nie w pełni słuszne.

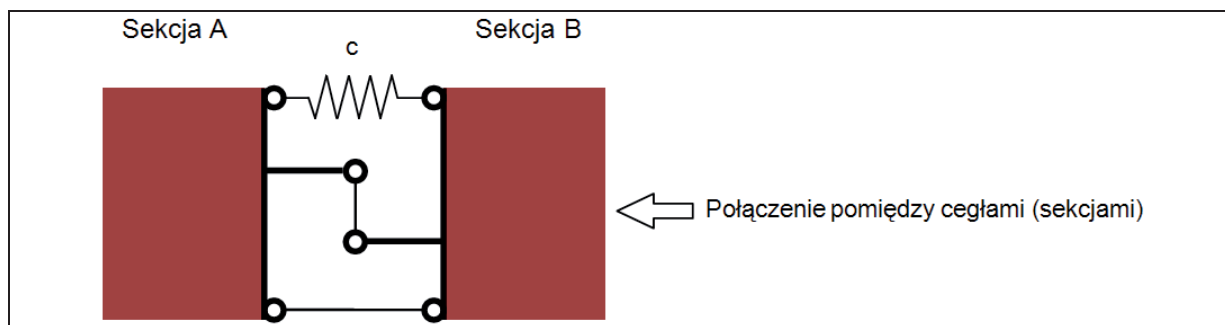
Pewną poprawę wyników analizy mogłoby przynieść wprowadzenie częściowych współczynników bezpieczeństwa dla muru i „zbrojenia” określonych w starszych wydaniach normy [187]. Można by zastosować też odpowiednio dobrany współczynnik korygujący, odpowiadający współpracy zbrojenia kompozytowego z murem.

Z uwagi na rozbieżność wyników analizę należałoby przeprowadzić na dużej serii prób. Wyniki badań teoretycznych uzyskane na podstawie badań pojedynczych modeli nie pozwalają na jednoznaczną weryfikację proponowanego modelu. Prace w tym zakresie będą kontynuowane.

### 6.3. Propozycja rozbudowy modelu analitycznego

Różniące się od siebie w sposób znaczny wyniki obliczeniowe oraz postaci zniszczenia wskazują, że w wyniku odspojenia wzmocnienia (w analizowanym przypadku materiału FRCM – siatki) od powłoki ceglanej, przed zniszczeniem przekroju, powstaje inny od zaproponowanego w rozdz. 6.1 mechanizm tworzenia się przegubu.

Można zatem zaproponować w płaszczyźnie wzmocnionej wytworzenie przegubu sprężystego na styku dwóch cegieł (sekcji) – jak na rys. 6.16 – umożliwiającego obrót lewej i prawej części modelu.



Rys. 6.16. Proponowany model połączenia (wiązania) pomiędzy poszczególnymi cegłami (sekcjami).

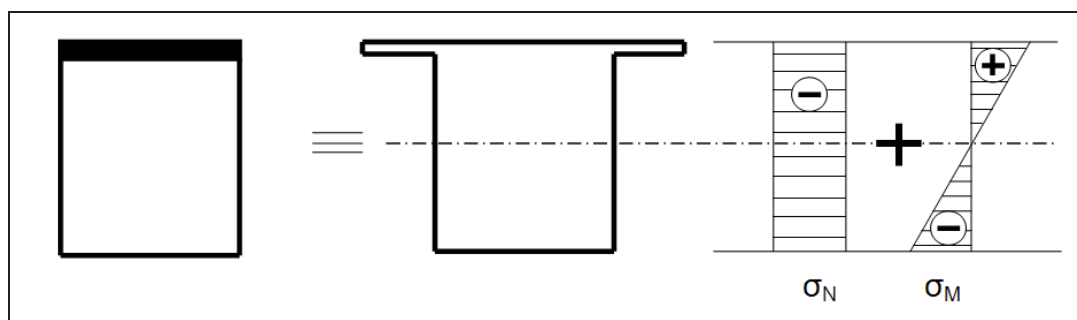
## 6. Model teoretyczny

Proponowany model połączenia, uwzględniający w miejscu wzmocnienia powstanie przegubu sprężystego o podatności  $c$ , umożliwi powstanie obrotu. Powstanie obrotu powoduje natomiast sytuację, w której w innych częściach modelu konstrukcji łuku zaczną powstawać przeguby (o schemacie sztywnym lub sprężystym) zmieniające całą konstrukcję w „mechanizm”, a co za tym idzie – powodujące zniszczenie łuku.

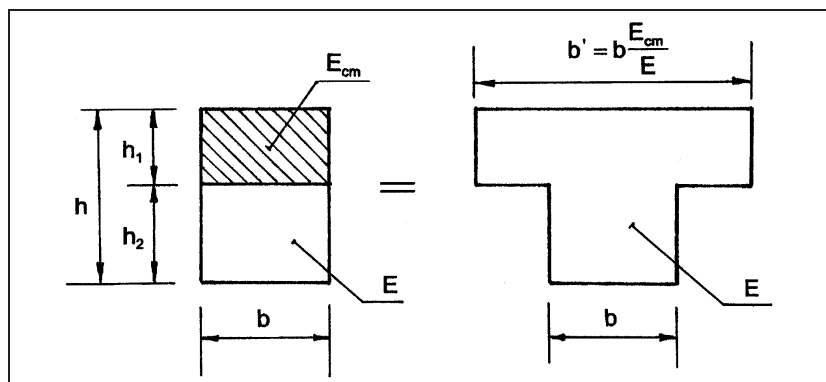
Rozwijając ten tok postępowania można stwierdzić, że wzmocniony element murowy pracuje w trzech fazach.

**Faza I**

Przed zarysowaniem przekroju ceglanego można przyjąć, że w całym przekroju występują liniowe naprężenia ściskające i rozciągające wywołane siłą normalną  $N$  i momentem zginającym  $M$ . Można tu rozpatrywać zastępczy przekrój, po zmianie zbrojenia na ekwiwalentny przekrój zhomogenizowanego muru (rys. 6.16) korzystając z zawartego w [188] sposobu określania zastępczego przekroju sprowadzonego, (rys. 6.17).



Rys. 6.17. Zastępczy przekrój muru wzmocnionego.



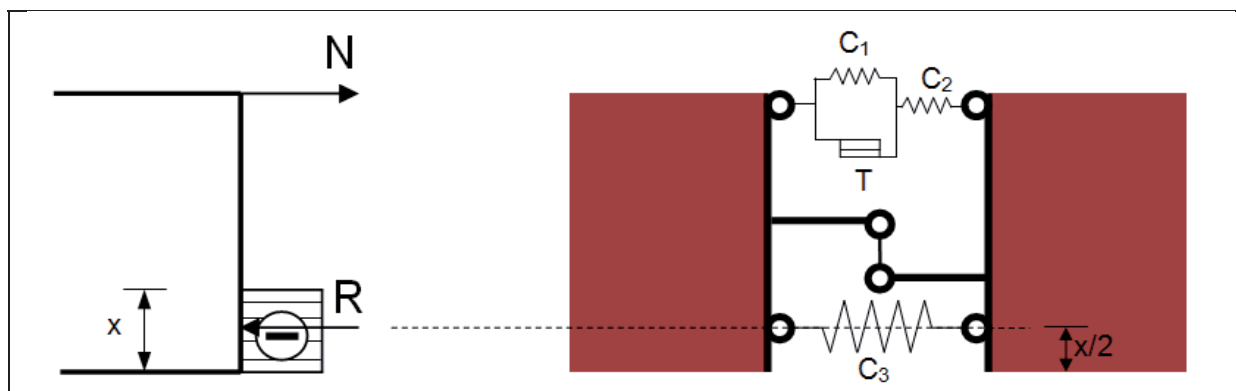
Rys. 6.18. Sposób określania zastępczego przekroju sprowadzonego, [188].

**Faza II**

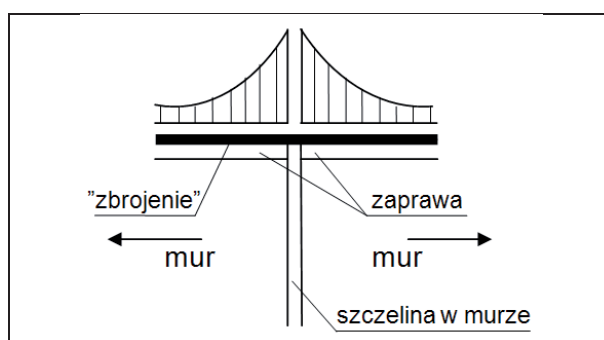
Po zarysowaniu przekroju murowego w strefie rozciąganej naprężenia rozciągające przenosi „zbrojenie”, które poza zarysowanym przekrojem nie jest odspojone od muru i pracuje w zakresie sprężystym. Strefa ściskana ma zmienną wysokość  $x$ . Model przekroju pracującego w fazie II przedstawiono na rys. 6.19.

W fazie II pracuje sprężyna  $C_2$ . Siła tarcia  $T$  na suwaku w modelu oznacza wytrzymałość spoiny z zaprawy na ścięcie w sąsiedztwie zarysowanego przekroju w murze, (rys. 6.19). Sprężyna  $C_3$  reprezentuje sprężystość muru.

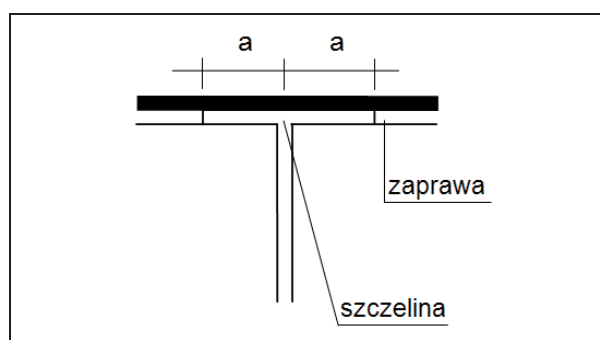
## 6. Model teoretyczny



Rys. 6.19. Model przekroju pracującego w fazie II.



Rys. 6.20. Szczegół połączenia elementów. Wykres naprężeń w zbrojeniu.

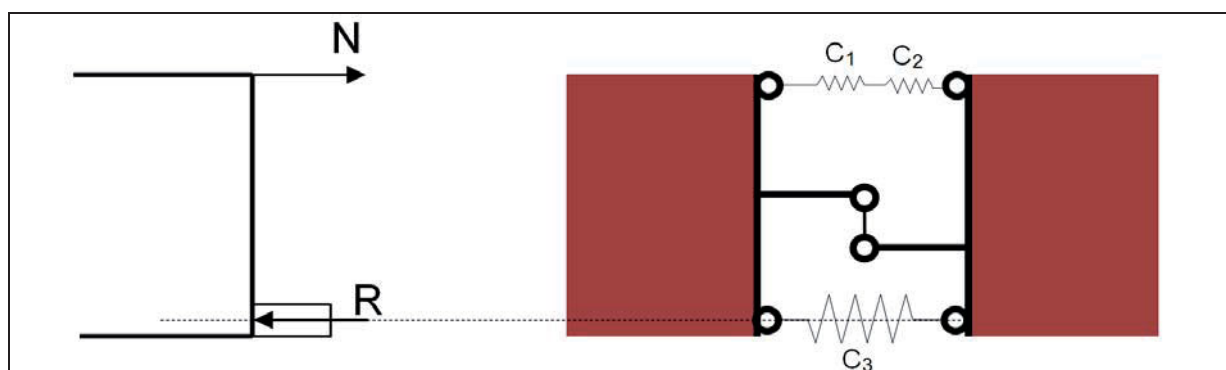


Rys. 6.21. Zniszczona spoina na odcinku „2a”.

W chwili, gdy wytrzymałość zaprawy między zbrojeniem i murem w sąsiedztwie szczeliny w murze (zarysowanym przekroju – rys. 6.20) zostanie przekroczona, czyli zostanie przekroczona nośność  $T$  suwaka w modelu (rys. 6.19) nastąpi ścięcie spoiny na odcinku  $a$  w lewo i w prawo od zarysowanego przekroju muru.

**Faza III**

W momencie ścięcia spoiny nastąpi poślizg na suwaku. Jednocześnie nastąpi duży obrót względny przekroju i dolne wiązanie przesunie się skokowo w dół (do krawędzi przekroju – rys. 6.22).



Rys. 6.22. Model przekroju pracującego w fazie III.

W chwili poślizgu w zaprawie suwak nie pracuje, lecz pracują szeregowo połączone sprężyny  $C_1$  i  $C_2$ .

## 6. Model teoretyczny

Jeżeli zgodnie z rys. 6.23:

$$F = C \cdot x, \quad (6.14)$$

gdzie:

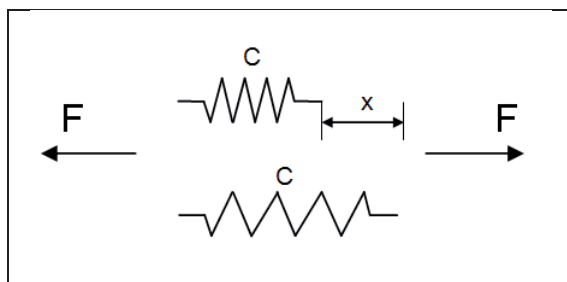
- $F$  – siła,
- $C$  – podatność sprężyny  $C$ ,
- $x$  – wydłużenie sprężyny  $C$ ,

to dwie sprężyny szeregowe  $C_1$  i  $C_2$  można zastąpić jedną sprężyną  $C$  (rys. 6.24), gdzie:

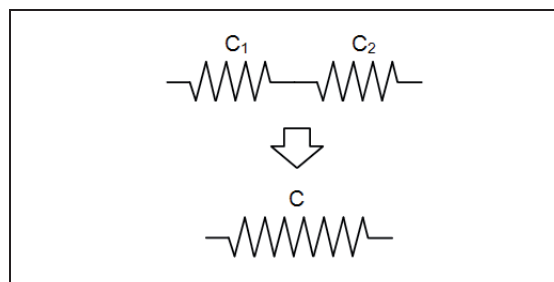
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (6.15)$$

gdzie:

- $C$  – podatność sprężyny  $C$ ,
- $C_1$  – podatność sprężyny  $C_1$ ,
- $C_2$  – podatność sprężyny  $C_2$ ,



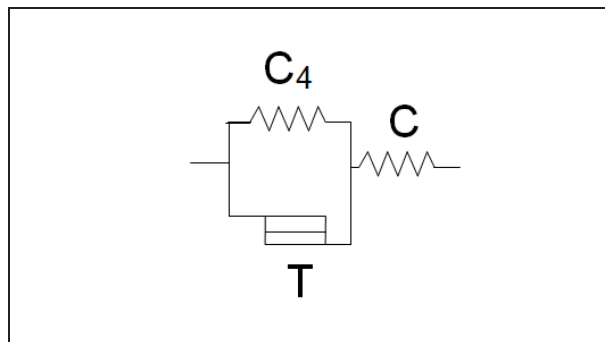
Rys. 6.23. Praca sprężyny  $C$ .



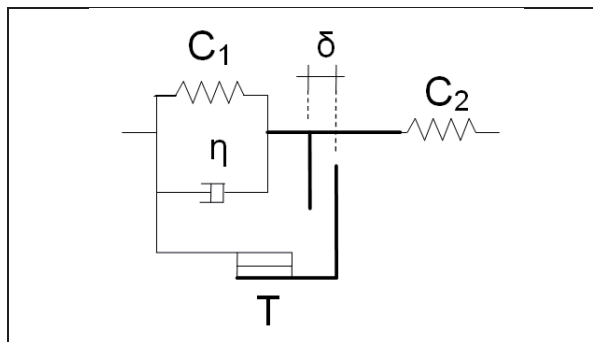
Rys. 6.24. Szereg sprężyn zastąpiony jedną sprężyną.

Jeżeli w fazie III konstrukcja nie zostanie zniszczona, to może nastąpić dalszy poślizg w zaprawie o kolejny odcinek. Wtedy w modelu trzeba przyjąć układ jak na rys. 6.25.

Do modelu można również wprowadzić efekt pełzania. Może bowiem wystąpić przypadek, że w fazie III nie nastąpi przyrost obciążenia. Na skutek pełzania zbrojenia może jednak nastąpić zniszczenie zaprawy w spoinie między zbrojeniem a murem. Wtedy można przyjąć, że strefa rozciągania jest modelowana układem jak na rys. 6.26, w którym wbudowany jest tłumik  $\eta$ . Przy wzroście pełzania do pewnej wartości  $\delta$  nastąpi włączenie suwaka. Jeśli siła  $F$  jest odpowiednio duża, lub gdy nastąpi jej wzrost, suwak zareaguje i nastąpi ścięcie zaprawy między zbrojeniem a murem.



Rys. 6.25. Układ sprężyn w ewentualnym modelu w fazie III.



Rys. 6.26. Model strefy rozciągania.

## 6. Model teoretyczny

Takie właśnie zachowanie łuków ceglanych obserwowano w trakcie badań doświadczalnych.

W dalszych rozważaniach należy skoncentrować się na wyznaczeniu długości stref zakotwienia oraz sprężystej podatności poszczególnych materiałów kompozytowych stosowanych jako wzmocnienie oraz na budowaniu adekwatnego modelu obliczeniowego.

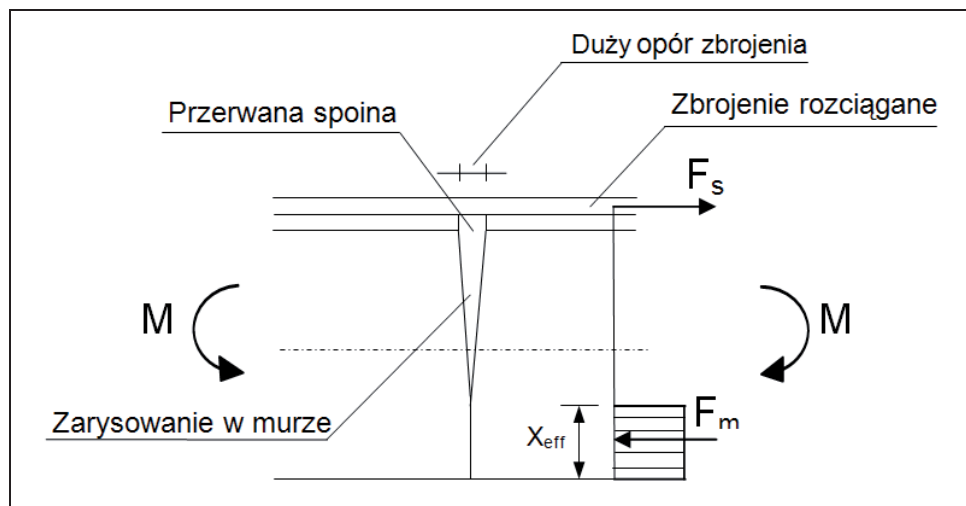
Na podstawie modeli pracy połączenia starano się wyznaczyć ogólne równania i przykładowe obliczenia dla modelu A2 przekroju murowego zbrojonego siatkami z włókien węglowych dla mimośrodowego ściskania.

Należy zauważyć, że jest istotna różnica między modelami zniszczenia przekroju ze zbrojeniem stalowym oraz zbrojeniem z włókien węglowych, które mają wielokrotnie wyższą wytrzymałość. W równaniach dla przekrojów żelbetowych lub murowych zbrojonych stałą zakłada się, że w chwili zniszczenia nie występuje poślizg między betonem (murem) i zbrojeniem. Stąd, w przypadkach, w których zniszczenie przekroju następuje przez zerwanie zbrojenia, w równaniach i wzorach występuje wytrzymałość stali przy uplastycznieniu. Jeśli zbrojenie ma tak dużą wytrzymałość, że naprężenia w zbrojeniu będą zawsze znacznie mniejsze od jego wytrzymałości, i jednocześnie wytrzymałość strefy ściskanej jest również duża, to zniszczenie przekroju może nastąpić przez ścięcie warstwy między zbrojeniem i betonem (murem), jak ma to miejsce dla modelu A2 łuku ceglano. W takich przypadkach w równaniach i wzorach, zamiast wytrzymałości zbrojenia na zerwanie, należy stosować naprężenie przy którym następuje ścięcie (poślizg) między zbrojeniem i murem. Naprężenia te mogą być znacznie mniejsze od wytrzymałości zbrojenia na zerwanie.

Stąd wynika duża różnica między momentem niszczącym łuk w modelu A2 równym  $M_k = 4,1 \text{ kNm}$ , w którym nastąpiło ścięcie między zbrojeniem i murem oraz nośnością obliczeniową na zginanie  $M_{Rd} = 15,29 \text{ kNm}$  przy założeniu, że ścięcie nie wystąpi i przy przyjęciu we wzorach wytrzymałości zbrojenia na zerwanie.

Na podstawie wykonanych badań można oszacować wielkości naprężeń w zbrojeniu, przy których nastąpiło ścięcie między zbrojeniem i murem. Do stworzenia algorytmu obliczania wzmocnień należałoby wykonać celowe badania, określić wytrzymałości na ścięcie między zbrojeniem i murem dla różnych materiałów zbrojenia, zaprawy klejowej, muru itp. Zaletą tego podejścia byłaby możliwość stosowania tych samych wzorów obliczeniowych, co w przypadku zbrojenia stałą.

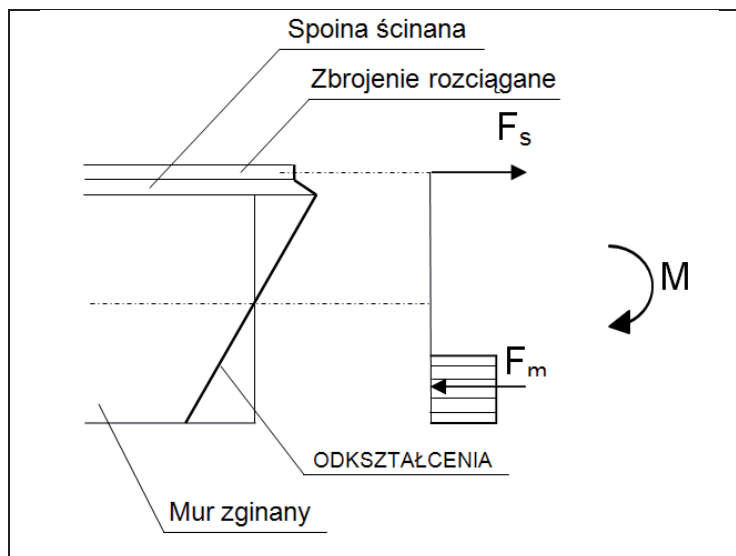
W ogólnym przypadku model zniszczenia przekroju należy rozszerzyć, dopuszczając możliwość ścięcia między zbrojeniem i murem. Do wzorów należy wprowadzić wartość mniejszą z wytrzymałości na ścinanie i wytrzymałości na zerwanie zbrojenia.



Rys. 6.27. Stan poprzedzający ścięcie w murze.

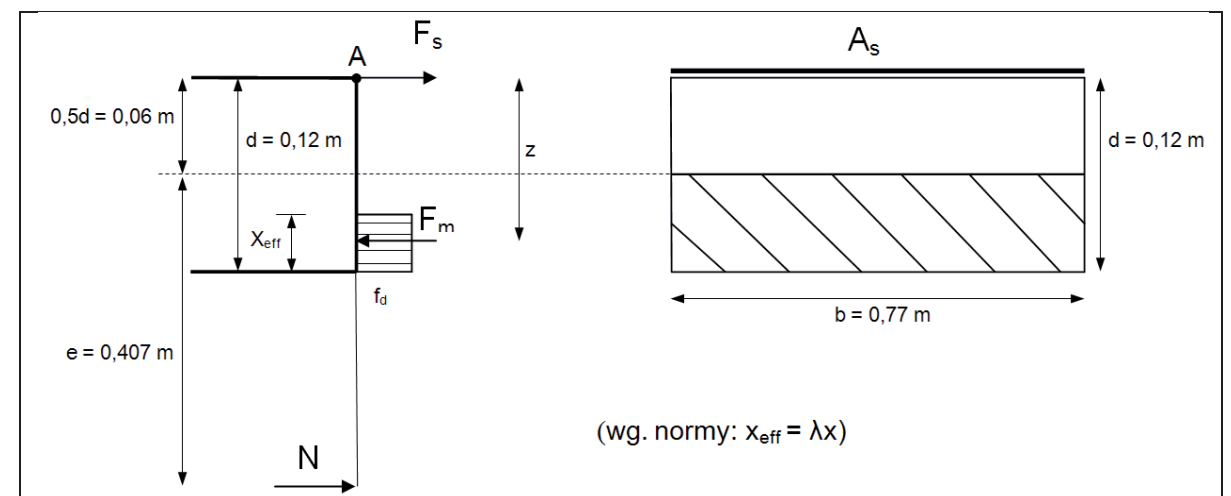
## 6. Model teoretyczny

Należy zauważyć, że dla modelu A2 w sąsiedztwie zarysowanego przekroju, przy którym nastąpiło ścięcie spoiny między zbrojeniem i murem, nie obowiązuje zasada płaskich przekrojów. Łuk z naklejonym zbrojeniem zachowuje się jak konstrukcja trójwarstwowa, w której zaprawa klejowa jest warstwą ścinaną (rys. 6.28). Stąd, nie obowiązuje tu wykres odkształceń – rys. 6.15.



Rys. 6.28. Łuk z naklejonym zbrojeniem pracujący jako konstrukcja trójwarstwowa.

## Przekrój mimośrodowo ściskany (model łuku A2)



Rys. 6.29. Przekrój mimośrodowo ściskany – łuk A2.

Warunki równowagi przekroju (momenty względem punktu A):

$$\begin{cases} N(e + 0,5d) = f_d \cdot b \cdot x_{eff} \cdot (d - 0,5x_{eff}) \\ N = f_d \cdot b \cdot x_{eff} - F_s \end{cases} \quad (\text{w normie [187] oznaczono } x_{eff} = \lambda \cdot x)$$

Oznaczając za rys. 6.29  $N \cdot e = M$  mamy:

## 6. Model teoretyczny

$$\begin{cases} M + 0,5 \cdot d \cdot M = f_d \cdot b \cdot x_{eff} \cdot (d - 0,5x_{eff}) & (6.16) \\ N = f_d \cdot b \cdot x_{eff} - F_s & (6.17) \end{cases}$$

Rozpatrując model łuku A2 przyjęto następujące dane:

$$N = R_A = 10,73 \text{ kN} \quad (\text{wg. rys. 6.13})$$

$$M = 4,1 \text{ kNm}$$

$$b = 0,77 \text{ m}$$

$$d = 0,12 \text{ m}$$

$$f_d = 3 \text{ MPa} = 3 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$$

**Oznaczenie mimośrod**

Napężenia od ściskania w murze:

$$\sigma_N = \frac{N}{b \cdot d} \quad (6.18)$$

$$\sigma_N = \frac{10,73}{0,77 \cdot 0,12} = 116,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 0,116 \text{ MPa}.$$

Napężenia od ściskania są zbyt małe, zatem dominuje zginanie  $\Rightarrow$  mimośród duży  $\Rightarrow x_{eff} < d$ .

Dla przyjętych danych wyznacza się  $x_{eff}$  z (6.16). Jest to równanie kwadratowe względem  $x_{eff}$ , które po podstawieniu danych sprowadza się do postaci:

$$x_{eff}^2 - 0,24 \cdot x_{eff} + 4,1072 \cdot 10^{-3} = 0$$

stąd:

$$x_{eff} = \begin{cases} 0,22145 \text{ m} \\ 0,01855 \text{ m} \end{cases}$$

Właściwym jest rozwiązanie  $x_{eff} = 0,01855 \text{ m}$ . Stąd i z (6.17) wyznacza się siłę w zbrojeniu:

$$F_s = f_d \cdot b \cdot x_{eff} - N \quad (6.19)$$

$$F_s = 3 \cdot 10^3 \cdot 0,77 \cdot 0,01855 - 10,73 = 32,12 \text{ kN}$$

Napężenia w zbrojeniu:

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_s} \quad (6.20)$$

$$\sigma_s = \frac{32,12}{0,4136 \cdot 10^{-4}} = 77,66 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 776,6 \text{ MPa}$$

W rozważanym przypadku udział ściskania jest bardzo mały. Jeśli, zatem przyjąć, że  $N = 0$ , to równania (6.16) i (6.17) mają postać:

## 6. Model teoretyczny

$$\begin{cases} M = f_d \cdot b \cdot x_{eff} \cdot (d - 0,5x_{eff}) & (6.21) \\ f_d \cdot b \cdot x_{eff} = F_s & (6.22) \end{cases}$$

Równania te pokrywają się z normowymi.

Jeśli:

$$x_{eff} = \frac{F_s}{f_d \cdot b} \quad (6.23)$$

oraz

$$z = d - 0,5 \cdot x_{eff} = d - 0,5 \cdot \frac{F_s}{f_d \cdot b} = d \left(1 - 0,5 \cdot \frac{A_s \cdot f_s}{f_d \cdot d \cdot b}\right)$$

to (6.21) ma postać:

$$M = F_s \cdot z$$

lub

$$M = A_s \cdot f_s \cdot z \quad (\text{jak w normie [187]})$$

Uwzględniając (6.22) i (6.23) z (6.21) mamy:

$$M = F_s \left(d - 0,5 \cdot \frac{F_s}{f_d \cdot b}\right) \quad (6.24)$$

Z tego równania można wyznaczyć  $F_s$ :

$$4,1 = F_s \left(0,12 - 0,5 \cdot \frac{F_s}{3 \cdot 10^3 \cdot 0,77}\right)$$

⇓

$$F_s^2 - 0,5544 \cdot 10^3 \cdot F_s + 18,942 \cdot 10^3 = 0$$

$$F_s = \begin{cases} 517,82 \text{ kN} \\ 36,58 \text{ kN} \end{cases}$$

Rozwiązanie  $F_s = 517,82 \text{ kN}$  należy odrzucić, gdyż z (6.22) otrzymano by:

$$x_{eff} = \frac{F_s}{f_d \cdot b} = \frac{517,82}{3 \cdot 10^3 \cdot 0,77} = 0,224 \text{ m} > d \quad (6.25)$$

Przyjmuje się:

$$F_s = 36,58 \text{ kN} \quad (x_{eff} = 0,0158 \text{ m}) \quad (6.26)$$

Stąd naprężenia w zbrojeniu:



## 6. Model teoretyczny

$$\sigma_s = \frac{36,58}{0,4136 \cdot 10^{-4}} = 88,44 \cdot 10^4 \frac{kN}{m^2} = 884,4 \text{ MPa} \quad (6.27)$$

Wyniki (6.26) i (6.27) są zbliżone do (6.19) i (6.20).

#### 6.4. Wnioski

- 1) Do określenia nośności obliczeniowej na zginanie przekroju zbrojonego materiałami kompozytowymi (np. z włókien węglowych) nie można stosować wzorów normowych (63) i (64) (oznaczenia wg. PN [187]), w których przyjęto  $f_{yd}$  jako wytrzymałość na zerwanie zbrojenia z włókien. Wytrzymałość ta, przyjęta w pracy jako  $f_s = 4800 \text{ MPa}$  nie może być osiągnięta, gdyż jest zbyt duża.
- 2) Przyjęcie  $f_{yd}$  jako wytrzymałości doraźnej wymaga założenia, że zbrojenie nie odspoi się od muru (nawet jeśli nie zostanie zerwane), jak w przypadku elementów żelbetowych.
- 3) W rozpatrywanym przypadku (łuk A2) zniszczenie przekroju następuje przez ścięcie spoiny między zbrojeniem i murem na odcinkach a po obu stronach (rys. 6.20, 6.21 i 6.27). Stąd, przy rozpatrywanym sposobie zniszczenia należy przyjąć  $F_s = A_s \cdot \sigma_s$  jako siłę, przy której następuje ścięcie spoiny między zbrojeniem i murem. Ścięcie to następuje przy naprężeniach  $\sigma_s$  w zbrojeniu dużo mniejszych niż wytrzymałość  $f_s = 4800 \text{ MPa}$  (do porównania wyniki obliczeń wg. równań (6.20) i (6.27)). Stąd, wynika zawyżona wartość  $M_{Rd} = 15,29 \text{ kNm}$  zawarta w tab. 6.1. Została ona obliczona dla innego modelu zniszczenia, przy przyjęciu, że  $f_s = 4800 \text{ MPa}$  zamiast np.  $\sigma_s = 775,6 \text{ MPa}$  (lub  $884,4 \text{ MPa}$ ).
- 4) Wzory (63) i (64) [187] mogą być stosowane przy zginaniu, jeśli zamiast  $f_{yd}$  przyjmie się naprężenie  $\sigma_s$  w „zbrojeniu”, przy którym nastąpi ścięcie w spoinie między „zbrojeniem” i murem (przy bardzo dużych wytrzymałościach „zbrojenia”). W tym celu dla danego „zbrojenia”, zaprawy itp. należałoby wyznaczyć  $F_s$  i  $\sigma_s$  w trakcie badań doświadczalnych (gdzie  $\sigma_s = F_s / A_s$ ). Zamiast  $\sigma_s$  we wzorach można używać  $F_s$ . Przy tych badaniach można by oznaczyć również długość odcinka a przy pierwszym poślizgu.
- 5) Podane modele „sprężynowe” są modelami fenomenologicznymi i nie służą do obliczeń jedynie do zobrazowania zachowania konstrukcji, pracy modelu. Parametry tych modeli można wyznaczyć znając  $F_s$ , a, cechy sprężyste oraz  $f_d$ , N, M.
- 6) W ogólnym przypadku właściwe jest stosowanie równań (6.16) i (6.17) dla mimośrodowego ściskania.
- 7) Po wyznaczeniu wytrzymałości na ścięcie między zbrojeniem i murem dla różnych materiałów zbrojenia (siatki FRCCM, taśmy CFRP i inne), zaprawy klejowej, muru itp. wydaje się, że proponowany model analityczny byłby możliwy do stosowania przy wykorzystaniu tych samych wzorów obliczeniowych, co w przypadku zbrojenia stałą.

## 7. Uwagi końcowe. Wnioski ogólne

**7. UWAGI KOŃCOWE. WNIOSKI OGÓLNE****7.1. Podsumowanie**

Rozprawa ma charakter badawczy z elementami teoretycznymi, opartymi o modelowanie numeryczne i analityczne, weryfikującymi wyniki uzyskane w badaniach laboratoryjnych. Głównym zagadnieniem podjętym w pracy jest analiza deformacji łuków ceglanych poddanych zabiegom wzmacniania przy użyciu materiałów tradycyjnych (pręty stalowe), jak i nowoczesnych (taśmy CFRP i siatki FRCM). Zajęto się opisem modelu zniszczenia oraz nośnością przekrojów wzmocnionych opisanymi wyżej metodami, również z zastosowaniem spoiny klejowej jako łącznika pomiędzy ośrodkiem murowym a elementem wzmacniającym.

Badania przeprowadzone zostały na modelach w skali technicznej. Wzmocnienie w postaci siatek FRCM, taśm CFRP, prętów stalowych oraz dźwigara z drewna klejonego umieszczano w większości przypadków po grzbietowej stronie przekroju łuków. Technologię taką przyjęto ze względu na założenie, że po stronie podniebienia łuków i sklepień w obiektach rzeczywistych występują często różnego rodzaju dekoracje (polichromie). Jedynie łuk A4 został wzmocniony po stronie grzbietowej i stronie podniebienia – wykonano ten rodzaj wzmocnienia w celach porównawczych.

Zastosowanie materiałów kompozytowych (taśmy CFRP – łuk A6, siatki FRCM – łuki A2 i A4, oraz taśmy CFRP i siatki FRCM – łuk A3) stanowi o oryginalności badań. Szczególnie jeśli chodzi tu o siatki FRCM – są to jedne z pierwszych badań tego typu na świecie. Równocześnie zaproponowane rozwiązania wydają się być przydatne w konserwacji konstrukcyjnej ceglanych historycznych łuków, sklepień i kopuł. Potwierdzono, że wzmacnianie materiałami kompozytowymi wpływa korzystnie na nośność. Wpływa też dość znacząco na sztywność badanych elementów i na rozkład naprężeń i odkształceń w badanych modelach łuków. Zastosowanie siatek FRCM dało bardzo pozytywne wyniki, w zakresie efektu wzmocnienia. Potwierdziła się też przydatność technologiczna tego typu wzmocnienia.

W rozprawie, obok wyników badań laboratoryjnych i sformułowanych na ich podstawie wniosków, starano się zbudować oryginalny model analityczny opisujący postać zniszczenia konstrukcji wzmocnionych – tworzenia się przegubów. Zaproponowano też sposób podejścia do obliczania wzmocnień z zastosowaniem materiałów kompozytowych, a w szczególności FRCM. Badania doświadczalne porównane z wynikami numerycznymi potwierdziły nieliniowy charakter pracy materiału murowego praktycznie w całym zakresie obciążeń, aż do wyczerpania nośności. Wydaje się, że zaproponowane podejście do tworzenia modelu analitycznego, przy weryfikacji licznějšíą próbą badanych elementów, może stanowić podstawę do stworzenia algorytmu szacowania nośności łuków ceglanych wzmocnionych przy użyciu materiałów CFRP i FRCM.

Obok tradycyjnych metod pomiarowych (czujniki elektrooporowe i indukcyjne) do pomiaru odkształceń przekrojów wzmocnionych (zespolonych), podjęto próbę zastosowania metody elastooptycznej, w tym metody elastooptycznej warstwy powierzchniowej. Badania przeprowadzono na modelach w skali technicznej, jak i na modelach w skali laboratoryjnej.

Przedstawiona analiza pracy statycznej łuków wzmocnionych różnymi metodami, przeprowadzona w oparciu o liniowe modelowanie numeryczne bazujące na metodzie elementów skończonych z wykorzystaniem homogenizacji materiału, dała zadawalające wyniki jednak o charakterze jakościowym – jeśli chodzi o wyznaczenie stref miejscowego miażdżenia materiału etc., a co za tym idzie – występowania przegubów. Wykonywanie analiz komputerowych z wykorzystaniem MES łukowych konstrukcji ceglanych przed- i po wzmocnieniu pozwala dokładniej poznać rozkłady naprężeń wewnątrz rozpatrywanych przekrojów i szacować strefy wymagające ingerencji – wzmocnienia. Trzeba pamiętać jednak

### 7. Uwagi końcowe. Wnioski ogólne

o tym, że wykorzystanie MES dla konstrukcji murowych jest obarczone znacznymi uproszczeniami wynikającymi z budowy muru, jak i jego zachowania w różnych stanach odkształceń i naprężeń.

#### 7.2. Wnioski ogólne

Na podstawie dokonanego przeglądu literatury, przeprowadzonych studiów oraz badań własnych sformułowano ogólne wnioski końcowe wskazujące na prawidłowość postawionych w rozprawie tez.

- 1) Przeprowadzone badania doświadczalne na modelach w skali technicznej wykazały, że we wszystkich przypadkach zastosowanie badanych typów wzmocnień znacznie poprawia nośność łuków ceglanych. W zależności od typu wzmocnienia uzyskano wzrost nośności konstrukcji wynoszący od 377% do 958 %.
- 2) Szczególnie przydatne wydaje się zastosowanie materiałów FRCM (łuki A2, A3, A4) z uwagi na łatwość wykonania wzmocnienia, ciężar wzmocnienia oraz na zastosowanie w tej technologii materiałów na bazie mineralnej jako łącznika wzmocnienia ze wzmacnianą konstrukcją. Materiały na bazie mineralnej wydają się być korzystniejsze jeśli chodzi o zastosowanie w szeroko pojętej konserwacji konstrukcji zabytkowych. Dotyczy to szczególnie zjawisk związanych z migracją wilgoci w postaci pary wodnej przez przegrody typu łuki, sklepienia i kopuły dekorowane polichromiami po stronie podniebienia.
- 3) Zastosowanie i połączenie w tej samej konstrukcji łuku (łuk A3) wzmocnienia liniowego z materiałów FRP (w tym przypadku taśm CFRP) klejonego do konstrukcji za pomocą kleju na bazie żywic epoksydowych oraz wzmocnienia powierzchniowego FRCM (siatka Ruredil Xmesh C10 wtapiana w zaprawę mineralną) daje bardzo dobry efekt wzmocnienia. Wzrost nośności w porównaniu z łukiem niewzmocnionym A1 jest tu ponad dziewięciokrotny.
- 4) Wzmocnienie za pomocą wklejanych w przekrój wzmacnianego łuku stalowych prętów daje również pożądane efekty wzmocnienia. Uzyskano tu prawie siedmiokrotny wzrost nośności.
- 5) Stosowanie wzmacniających dźwigarów z drewna klejonego jako konstrukcji, do których możliwe jest podwieszanie powłok pierwotnych jest rozwiązaniem interesującym i daje wysoki wzrost nośności (9,58 razy). Ważne jest tu prawidłowe wykonanie połączeń kotwiących powłokę lub żebro ceglane do wzmacniającego dźwigara oraz wykształcenie krzywizny dźwigara z drewna klejonego dopasowanej do krzywizny wzmacnianej powłoki. Potrzebna jest ponadto przestrzeń do umieszczenia dźwigarów i strefy potrzebne dla ich oparcia i zakotwienia.
- 6) Opisane w rozprawie proste, liniowe modele numeryczne MES mogą pomóc w analizie jakościowej badanej konstrukcji wymagającej wzmocnienia, jak również w doborze jakościowym rodzaju wzmocnienia.
- 7) Przeprowadzone w rozprawie badania i analizy wykazały jednoznacznie, że zastosowanie innowacyjnych technik wzmacniania z wykorzystaniem, między innymi, materiałów kompozytowych oraz drewna klejonego znacznie poprawia

*7. Uwagi końcowe. Wnioski ogólne*

bezpieczeństwo pracy konstrukcji, co ma istotne znaczenie dla często trudno przewidywalnych zachowań konstrukcji historycznych, zwłaszcza tych zagrożonych awarią (łuki czy sklepienia ceglane).

- 8) Wydaje się, że przeprowadzone badania i uzyskane wyniki tworzą właściwą podstawę do ich kontynuacji, zwłaszcza w zakresie:
- badań modeli skomplikowanych sklepień ceglanych przed- i po wzmocnieniu proponowanymi metodami (skala techniczna),
  - zbudowania pełnego modelu obliczeniowego w formie modelu analitycznego i numerycznego z uwzględnieniem charakterystyk nieliniowych oraz postaci zniszczenia opisanych w rozprawie.

## Literatura

## LITERATURA

- [1] Aboudi J., *Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach*, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [2] Abruzzese D., Como M., Lanni G., *Reinforcement Analysis in the restoration of masonry monuments*. IABSE SYMPOSIUM – Rome, 1993.
- [3] Abruzzese D., Como M., Lanni G., *Some results on the strength evaluation of vaulted masonry structures*, Structures in Architectural Studies, Materials and Analysis (STREMA 1995), Computational Mechanics Publications, Boston, 1995.
- [4] Abruzzese D., Lanni G., *The seismic behaviour of the historical masonry building with openings and horizontal reinforcing connections*, II International Conference on Earthquake Resistant Construction and Design. Berlin, June 15th-17th. Savidis Eds., 1994.
- [5] Adams R.D., Wake W.C., *Structural Adhesive Joints in Engineering*, Applied Science Publishers, London – New York, 1984.
- [6] Albert I.M., Elwi E.A., Cheng, J.J.R., *Strengthening of Unreinforced Masonry Walls Using FRPs*, J. Comp. For Constr., ASCE, Vol. 5, No. 2, pp. 76-84, 2001.
- [7] Aleksandrov A.J., Achmetzianov M.N., *Polarizacionno-optičeskie metody mechaniki deformirujemogo tiela*, Izd. Nauka, Moskva, 1973.
- [8] Althof W., *Neue Möglichkeiten zur Berechnung der Belastbarkeit von Klebverbindungen*, Klebverfahren und Konstruktionshinweis, TA, Esslingen, 1978.
- [9] Anthoine A., *Derivation of the in - plane elastic characteristic of masonry through homogenization theory*, Int. J. Solids Structures, 32 (2), p. 137 – 163, 1995.
- [10] Aprobata techniczna IBDiM Nr AT/2005-03-0822, *CFK-Lamellen – Taśmy kompozytowe na bazie żywic epoksydowych z włóknami węglowymi*, S&P Clever Reinforcement Company AG.
- [11] Arduini M., Nanni A., Di Tommaso A., Focacci, F., *Shear Response of Continuous RC Beams Strengthened with Carbon FRP Sheets*, Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures, Proceedings of the Third Symposium, Japan, Vol. 1, pp. 459-466, 1997.
- [12] ASTM D 3039/D 30339M-95a, *Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials*, Annual Book of Standards, vol. 14.02, 1995.
- [13] Barbieri A., DiTommaso A., *Prove dinamiche su volte in muratura rinforzate con materiali compositi*, Ingegneri Architetti Costruttori, n.636, pp. 15-21, 2003.
- [14] Barbieri A., Focacci F., *Impiego di materiale composito FRCM per il rinforzo ed il ripristino strutturale*, Proc. of the 2th National Conference Mechanics of masonry structures strengthened with frp-materials: modeling, testing, design, control, 6-8 dicembre, Venezia, Italia, 2004.
- [15] Barbieri A., Mantegazza G., Gatti A., *Wzmacnianie ścian murowanych za pomocą laminatów z włókna węglowego z matrycą cementową FRCM*, Materiały Budowlane, 2/2006.
- [16] Basilio I., Oliveira D., Lourenço P., *Optimal FRP Strengthening of Masonry Arches*, Proceedings of the 13th International Brick and Block Masonry Conference, Amsterdam Netherlands, 2004.

## Literatura

- [17] Bati S.B., Rovero L., *Experimental validation of a proposed numerical model for the FRP consolidation of masonry arches*, Historical Constructions, Possibilities of numerical and experimental techniques, Proc. of the 3rd International Seminar, University of Minho, Guimarães, Portugal, 2001.
- [18] Beall Ch., *Masonry design and detailing*, Prentice – Hall, New Jersey, 1984.
- [19] Becker S., Rippin T., *Entwicklung eines Bemessungsverfahrens für Verbundquerschnitte aus Brettschichtholz und faserverstärkten Kunststoffen*, Diplomarbeit, FH Wiesbaden, 1999.
- [20] Beckett D.E., *On the mathematical theory of domes*, Memoirs of the Royal Institute of British Architects, 1871.
- [21] Bednarz Ł., *Metody wzmacniania zabytkowych, zakrzywionych konstrukcji ceglanych*, Wiadomości konserwatorskie 14/2003, s. 34 – 42, 2003.
- [22] Będziński R., Gomoliński P., Jankowski L., Szlagowski J., *Analiza doświadczalna metodami optycznymi elementów konstrukcji kształtowania kryterium nośności granicznej*. Wydawnictwo MET, Warszawa, 1996.
- [23] Belina P., *Zastosowanie tworzyw sztucznych z włóknem węglowym (taśmy CFK) do wzmacniania elementów konstrukcji żelbetowych*, Praca Magisterska Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1996.
- [24] Bergmeister K., Luggin W., *Innovative strengthening of timber structures using carbon fibers*, Innovative Wooden Structures and Bridges Lahti, Finland, August 29 – 31, 2001.
- [25] Billington D.P., *Thin Shell Concrete Structures*, New York: McGraw-Hill Book Co, 1982.
- [26] Birkeman J.J., *The science of adhesive joints*, Academic Press, New York, 1968.
- [27] Blass H.J., Romani M., *Tragfähigkeitsuntersuchungen an Verbundträgern aus BS – Holz und Faserverbundkunststoff-Lamellen*. In: Holz als Roh – und Werkstoff 59, 2001.
- [28] Borchardt J.K., *Reinforced plastics help preserve historic buildings*. Reinforced Plastics Volume: 47, December 2003, s. 30-32.
- [29] Borri A., Castori G., Casadei P., Ebaugh S., *Rinforzo di archi in muratura con materiali compositi innovativi*, XII Convegno ANIDIS l'ingegneria sismica in italia, Pisa, 10 - 14 Giugno 2007.
- [30] Borri A., Corradi M., Barbieri A., Di Tommaso A., *Dynamic behaviour of masonry vaults repaired with FRP: experimental analysis*, Proc. of the Sixth International Masonry Conference of the British Masonry Society, (9): 7-16, 2002.
- [31] Borusiewicz W., *Budownictwo murowe w Polsce*, PWN, Warszawa – Kraków, 1985.
- [32] Borusiewicz W., *Konserwacja zabytków budownictwa murowanego*, Arkady, Warszawa, 1985.
- [33] Braig W., *Festigkeit von Metallklebern und Metallklebverbindungen*, Diss., TH, Stuttgart, 1964.

## Literatura

- [34] Brencich A., De Francesco U., Gambarotta L., *Elastic no tensile resistant-plastic analysis of masonry arch bridges as an extension of Castigliano's method*, 9th C.M.S., Fredericton, Canada, 3-6 June, 2001.
- [35] Brencich A., Gambarotta L., Ghia A., *Structural models for the assessment of the masonry dome of the basilica of S. Maria of Carignano in Genoa*, III Int. Seminar Structural Analysis of Historical Constructions, Guimaraes, Portugal, 2001.
- [36] Bresson J., *Nouvelle recherches et application concernant l'utilisation des collages dans les structures*, Annales IT BTP, No. 278, 1971.
- [37] Breymann G.A., *Allgemeine Bau-Konstruktions-Lehre*, tom 1, Gebhardt, Leipzig, 1905.
- [38] Briccoli Bati S., Marilli F., Rovero L., Tonietti U., *Prove di trazione su placcaggi in GFRCM e confronto con rinforzi in CFRCM, Tensile Tests on GFRCM Claddings and Comparison with CFRCM Claddings*, Proc. of the 2th National Conference Mechanics of masonry structures strengthened with frp-materials: modeling, testing, design, control, 6-8 dicembre, Venezia, Italia, 2004.
- [39] Brol J., *Wzmacnianie elementów drewnianych taśmami lub matami z włókien węglowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Budownictwo, z. 93, Gliwice, 2001.
- [40] Brol J., *Wzmacnianie zespolonych stropów drewniano-żelbetowych polimerami zbrojonymi włóknami węglowymi*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Budownictwo, z. 95, Gliwice, 2002.
- [41] Broniewski T., *Architektura dla wszystkich*, Wydanie III, Wyd. Zakł. Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław, 1990.
- [42] Brzeski E., *Torkret - stan techniki i zastosowania*, Przegląd Budowlany 2/1989.
- [43] Cecchi A, Di Marco R., *Homogenization of masonry walls with a computational oriented procedure. rigid or elastic block*, Eur. J. Mech. A/Solids, 19:535 -546, 2000.
- [44] Cecchi A., Sab K., *A comparison between a 3D discrete model and two homogenised plate models for periodic elastic brickwork*, Int. J. Solids and Structures , 41(9-10), p. 2259-2276, 2004.
- [45] Chajes M.J., Januska T.F., Mertz D.R., Thomson T.A., Finch, W.W., *Shear Strengthening of Reinforced Concrete Beams Using Externally Applied Composite Fabrics*. ACI Structural Journal, Vol. 92, No. 3, pp. 295-303, 1995.
- [46] Charytymow E., *Zarys historii architektury*, WSiP, Warszawa, 1979.
- [47] Christov Ch.T., Barakov T.K., Petkov Z.B., Partov D.N., *State of Art of Technologies for Safeguarding Historic Structures in Bulgaria*, ARCCHIP, Ariadne workshops, June 1-7, 2002.
- [48] Ciabach J., *Żywice i tworzywa sztuczne stosowane w konserwacji zabytków*, Wydawnictwo Uniwersytetu M. Kopernika, Toruń, 1998.
- [49] Ciesielski R., *O dynamicznych modułach sprężystości murów z cegły*, XLV Konferencja Naukowa, Wrocław-Krynica, 1999.
- [50] Clemente P., Occhiuzzi A., Raithel A., *Discrete Model for Non-Linear Analysis of Masonry Arches*, C. Abdunur (editor), "Arch'01", Presses ENPC, France, 2001.

## Literatura

- [51] CNR DT 201/2005, *Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Existing Structures - Materials, RC and PC structures, masonry structures*, 2005.
- [52] Cole R., Brookes C., *Strengthening Deformed Masonry Arches - Two Case Studies*, Proceedings of the Twelfth International Conference of Structural Faults & Repairs UK, London, 2001.
- [53] Como M., Grimaldi A., *An Unilateral Model for Limit Analysis of Masonry Walls*, Internat. Congr. on Unilateral Problems in Struc. Analysis, Ravello, CISM, Springer Verlag, 1983.
- [54] Como M., Ianniruberto U., Imbimbo M., *La resistenza degli archi murari rinforzati con fogli in FRP*, Proc. of Mechanics of masonry structures strengthened with FRP – materials, Venezia, Italy, 2000.
- [55] Como M., Lanni G., Sacco E., *Sul calcolo delle catene di rinforzo negli edifici in muratura soggetti ad azione sismica*. 5th Convegno Nazionale L'Ingegneria Sismica in Italia – Palermo, 29th Sept. – 2nd Oct., 1991.
- [56] Coulomb C., *Essai sur une Application des Règles de Maximis et Minimis a Queleques Problèmes de Statique Relatifs a l'Architecture*, 1773, (Trans. and ed. J. Heyman, *Coulmb's memoir on statics: An essay in the history of civil engineering*. Cambridge University Press, UK, 1997).
- [57] Creazza G., Saetta A.V., Matteazzi R., Vitaliani R.V., *Analysis of masonry structures reinforced by FRP*, III Int. Seminar Structural Analysis of Historical Constructions, Guimarães, Portugal, 2001.
- [58] Crews K., Greenland A, Bakkos S., *Application of advanced Fibre Reinforcement Plastic composites to structural timber*, 5-th World Conference on Timber Engineering, Montreux, Switzerland, 1998.
- [59] Croci G., D'Ayala D., Asdia P., Palombini F., *Analysis on shear walls reinforced with fibres*, IABSE Symp. on Safety and Quality Assurance of Civil Engineering Structures, Tokyo, Japan, 1987.
- [60] Croci G., Viskovic A., *L'uso degli FRP di fibra aramidica per il rinforzo della Basilica di San Francesco di Assisi*, Proc. of Mechanics of masonry structures strengthened with FRP — materials, Venezia, Italy, 2000.
- [61] Csonka P., *Powłoki cienkie :stan błonowy*, Arkady, Warszawa, 1969.
- [62] Cur J.G., *Structural masonry: An experimental/numerical basis for practical design rules*, Balkema, Rotterdam, 1997.
- [63] Curtin W.G., Shaw G., Beck J.K., Bray W.A., *Structural Masonry Designers' Manual*, Granada Publishing, London, 1982.
- [64] Dally J.W., Riley W.F., *Experimental Stress Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [65] D'Ayala D., Speranza E., *Definition of collapse mechanism and seismic vulnerability of historic masonry buildings*, Earthquake Spectra: 19 n.3 pp.749-509, EERI, 2003.
- [66] De Luca A., Giordano A., Mele E., *Numerical modelling of masonry structures through different approaches*, Atti del Workshop Conclusivo del Progetto di Ricerca di Interesse



## Literatura

- Nazionale - PRIN '97 - su: "Protezione Sismica dell'Edilizia Esistente e di Nuova Edificazione Attraverso Sistemi Innovativi", Napoli, 12-13 maggio, 2000.
- [67] Di Tommaso A., Focacci F., Mantegazza G., *Rinforzo a flessione di travi in calcestruzzo armato con rete di carbonio e matrice cementizia*, Atti Convegno AICAP, 2004.
- [68] Dischinger F., *Die Theorie der Vieleckkupeln und die Zusammenhänge mit den eisbeschriebenen Rotationsschalen*, Beton und Eisen, 28, 1929.
- [69] Domasłowski W., Kęsy-Lewandowska M., Łukaszewicz J.W., *Badania nad konserwacją murów ceglanych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 1998.
- [70] Drucker D., Prager W., Greenberg H., *Extended limit design theorems for continuous media*, Quarterly of Applied Mathematics (v9), p381, 1952.
- [71] Dyląg Z., Krzemińska – Niemiec E., Filip F., *Mechanika budowli*, Tom I, PWN, Warszawa, 1974.
- [72] Eddy H.T., *A new general method in graphical statics*, Van Nostrand's Engineering Magazine, vol. 18, New York 1878.
- [73] Ehsani M.R., *Strengthening of earthquake-damaged masonry structures with composite materials*, In Non-metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures. Ed. L. Taerwe, 680 – 687, 1995.
- [74] *Encyklopedia Powszechna PWN*, tom III, Warszawa, 1973.
- [75] Eusebio M., Palumbo P., Lozza F., Manfredi G., *Numerical Modelling of Masonry Panels Strengthened using FRPs*, Finite Elements in Civil Engineering Applications, Swets & Zeitlinger, Lisse, Hendriks & Rots (Ed.), pp. 295-303, 2002.
- [76] Faccio P., Foraboschi P., *Analisi Limite Ultima di Strutture in Muratura con Materiali Compositi Incollati al Contorno*, Atti del Convegno Nazionale Meccanica delle strutture in muratura rinforzate con FRP – materials, Venezia, 7 – 8 Dec., 2000.
- [77] Falconer R.F., Boughton B.W., Sumon S.K., *Analysis and Design of Masonry Arch Reinforcement*, Proceedings of the Third International Conference on Bridge Management UK. Guildford, 1996.
- [78] Flugge W., *Powłoki. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa, 1972.
- [79] Foraboschi P., *Strength Assessment of Masonry Arch Retrofitted using Composite Reinforcements*, 15, no. 1 Masonry International, 2001.
- [80] Frangi A., Fontana M., *Elasto – plastic model for timber – concrete composite beams with ductile connection*, Structural Engineering International, No. 1, pp. 47 – 57, 2003.
- [81] Frunzio G., Monaco M., *An approach to the structural model for masonry arch bridges. Pont Saint Martin as a case study*, Proceedings of the Second International Arch Bridge Conference, Venice, Italy, 1998.
- [82] Gabora A., Bennania A., Jacqueline E., Lebon F., *Modelling approaches of the in-plane shear behaviour of unreinforced and FRP strengthened masonry panels*, Composite Structures, Vol. 74, Issue 3, pp. 277-288, 2006.

## Literatura

- [83] Gago M.A.S., Lamas A.R.G., *Structural analysis of the vault of the Church of S. Francisco in Évora*, Historical Constructions, P.B. Lourenço, P. Roca (Eds.), Guimarães, 2001.
- [84] German J., *Materiały kompozytowe w budownictwie*, Kalejdoskop Budowlany, PWB, Warszawa, Nr 6, pp. 14-17, 2000.
- [85] German J., *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków, 1996.
- [86] Gilstrap J.M., Dolan C.W., *Out-of-plane bending of FRP-reinforced masonry walls*, Composites Science and Technology, 58, 8, pp. 1277-1284, 1998.
- [87] Godycki – Ćwirko T., Pawlica J., *Renowacja starych stropów drewnianych*, Przegląd Budowlany, Nr 2, pp. 12 – 14, 1997.
- [88] Goland W., Reissner E., *The stress in cemented joints*, Journal of Applied Mechanics, 1944.
- [89] Grabiec K., Bogucka J., Grabiec – Mizera T., *Obliczanie przekrojów w elementach betonowych i żelbetowych według PN-B-03264:1999*, Arkady, Warszawa, 2002.
- [90] Greenland A., Crews K., Bakkos S., *Enhancing timber structures with advanced Fibre Reinforced Plastic composite reinforcements*, 5-th World Conference on Timber Engineering, Montreux, Switzerland, 1998.
- [91] Gvozdev A.A., *The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic formulation*, Proceedings of the Conference on Plastic Deformations Moscow, Akademia Nauk S.S.S.R., p. 19-33, 1938.
- [92] Hamilton H.R., Dolan, C.W., *Flexural Capacity of Glass FRP Strengthened Concrete Masonry Walls*, J. Comp. For Constr., ASCE, Vol. 5, No. 3, pp. 170-178, 2001.
- [93] Hamoush A.S., McGinley W.M., Mlakar P., Scott D., Murray K., *Out-of-Plane Strengthening of Masonry Walls with Reinforced Composites*, J. Comp. For Constr., ASCE, Vol. 5, No. 3, pp. 1392-145, 2001.
- [94] Hanulanka D., *Sklepienia późnogotyckie na Śląsku*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Rozprawy Komisji Historii Sztuki, tom 7, Wrocław, 1971.
- [95] Hart – Smith L.J., *Adhesive bonded single – lap joints*, Tech. Rep. CR 112236, NASA, 1973.
- [96] Hartley A., Mullins G., Sen R., *Repair of Concrete Masonry Block Walls using Carbon Fiber*, Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, Montreal, Quebec, pp. 795-802, 1996.
- [97] Hendry A.W., Davies S.R., Sinha B.P., *Design of Masonry Structures*, E&FN SPON, London, 1997.
- [98] Hesin G.L., *Metod fotouprugosti*. Strojizdat, Moskva, 1975.
- [99] Heyman J., *Arches, Vaults and Buttress*, Hampshire, Great Britain, Variorum, 1996.
- [100] Heyman J., *Equilibrium of Shell Structures*, Oxford University Press, 1991.
- [101] Heyman J., *The masonry arch*, Chichester, Ellis Horwood Series in Engineering Science, 1982.

## Literatura

- [102] Heyman J., *The safety of masonry arches*, International Journal of Solids and Structures, 11: 363-385, Pergamon Press, Wielka Brytania, 1969.
- [103] Heyman J., *The Stone Skeleton*, Cambridge University Press, Wielka Brytania, 1995.
- [104] Heyman J., *The stone skeleton*, International Journal of Solids and Structures, vol. 2, pp. 249-279, Pergamon Press, Wielka Brytania, 1966.
- [105] Heyman, J., *On shell solutions for masonry domes*, International Journal of Solids and Structures, vol. 3, 1967.
- [106] Heyman, J., *The Gothic structure*, Interdisciplinary science review, vol. 2, pp. 151-164, 1977.
- [107] Hooke R., *A description of helioscopes, and some other instruments*, John & Martin Printer to the Royal Society, London, 1675.
- [108] Hoskin C.B., Baker, A.A., *Composite Materials for Aircraft Structures*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautic and Astronautic Inc., New York, 1986.
- [109] Hult J., Bjarnehed H., *Styved och Styrka*, Studentlitteratur, Lund, 1993.
- [110] ICOMOS - Międzynarodowa Rada ds. Pomników i Miast, *Zalecenia odnośnie do analizy, konserwacji i renowacji konstrukcyjnej dziedzictwa architektonicznego*. XI Konferencja Naukowo-Techniczna. Problemy remontowe w budownictwie ogólnym i obiektach zabytkowych, Wrocław-Zamek Kliczków, 9-11 grudnia 2004, s. 449-463.
- [111] Janas M., *Nośność graniczna łuków i sklepień*, Warszawa, Arkady, 1967.
- [112] Jankowski L.J., Styś D., *Strefa mikrozarzysowania w otoczeniu szczeliny w elementach betonowych badanych metodą elastooptycznej warstwy powierzchniowej*. Arch. Inż. Łądowej, XXXII t., z.2/1986.
- [113] Janowski Z., Amin Z., *Badania nad metodami wzmacniania ścian murowych w budowlach zabytkowych*, Materiały I Krajowej Konferencji Naukowo - Technicznej PAN i PZITB, Kraków, s. 99 – 110, 1986.
- [114] Janowski Z., Hojdys Ł., Krajewski P., *Sklepienia zabytkowe - klasyfikacja, ocena stanu technicznego i nośności, naprawy i wzmocnienia*, XXII Ogólnopolska Konferencja Warsztat Pracy Projektanta Konstrukcji, Szczyrk, 7÷10 marzec 2007.
- [115] Janowski Z., *Wiarygodność metod badawczych w ocenie obiektów zabytkowych*, VII Konferencja Naukowo – Techniczna „Problemy rzeczoznawstwa budowlanego”, Cezdyna koło Kielc, 13 – 15 maja, 2002.
- [116] Jasieńko J., Kleszcz W., *Analityczne ujęcie szczególnych przypadków destrukcji sklepień ceglanych – przesłanki do wyboru sposobu ich wzmacniania*, Problemy Remontowe Substancji Mieszkaniowej, IV Wrocławska Konferencja Naukowo –Techniczna, Polanica Zdrój, 1–3 grudnia, Wrocław, PZITB, 1988.
- [117] Jasieńko J., Łodygowski T., Rapp P., *Naprawa, konserwacja i wzmacnianie wybranych, zabytkowych konstrukcji ceglanych*, Wydawnictwo DWE, Wrocław, 2006.
- [118] Jasieńko J., Majchrzak W., Rapp P., Słowek G., *Wzmocnienie konstrukcji sklepienia nad nawą kościoła Przemienienia Pańskiego w Poznaniu, cz. II*, Wiadomości Konserwatorskie, 16/2004.

## Literatura

- [119] Jasieńko J., *Naprawa i wzmacnianie zginanych belek drewnianych*. Materiały budowlane, 5/2000.
- [120] Jasieńko J., Olejnik A., *Analiza pracy zginanych konstrukcji żelbetowych wzmocnionych zbrojeniem doklejonym*, Praca doktorska w Instytucie Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1985.
- [121] Jasieńko J., *Opracowanie metod wzmacniania konstrukcji drewnianych przy zastosowaniu żywic syntetycznych*. Raport Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1988.
- [122] Jasieńko J., *Połączenia klejowe w rehabilitacji i wzmacnianiu zginanych belek drewnianych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2002.
- [123] Jasieńko J., *Praca połączenia klejonego: mur ceglany – pręt stalowy w świetle zastosowań od usztywnienia układów ścian konstrukcyjnych budynków murowanych z cegły*, Raport Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1997.
- [124] Jasieńko J., Rapp P., *Wzmocnienie konstrukcji sklepienia nad nawą kościoła Przemienienia Pańskiego w Poznaniu, cz. I*, Wiadomości Konserwatorskie, 13/2003.
- [125] Kapkowski J., Słowikowska I., Stupnicki J., *Badanie naprężeń metodą elastoptycznej warstwy powierzchniowej*. PWN, Warszawa, 1987.
- [126] Karta techniczna – *Tynk czystowapienny RK 39 (Reinkalkputz RK 39)*, BayosanBaumit.
- [127] Karta techniczna – *Ruredil X Mesh C10 M25 – System wzmacniania konstrukcji murowej przy pomocy siatki z włókna węglowego osadzonej w zaprawie cementowej (FRCM)*, RUREDIL - VISBUD, 2007.
- [128] *Karta Wenecka*, Ochrona zabytków, 3(74), 1966.
- [129] Kleiber M., *Wprowadzenie do metody elementów skończonych*, PWN, Warszawa 1989.
- [130] Kleszcz W., *Wzmacnianie stropów drewnianych oraz sklepień ceglanych budowli zabytkowych – analiza metod projektowania i technologii*, praca dyplomowa pod kierunkiem dr inż. J. Jasieńko, Wrocław, 1988.
- [131] Kobiak J., Stachurski W., *Konstrukcje żelbetowe*, tom 4, wydanie piąte, Arkady, 1991.
- [132] Kolendowicz T., *Mechanika budowli dla architektów*, wydanie 3, Arkady, 1996.
- [133] Kowal E.A., *Kopuła kościoła w Gostyniu*, Wydział Architektury Politechniki Wrocławskiej (Rozprawa Doktorska), Wrocław, 2000.
- [134] Kozaczewska – Golasz H., Kowal E.A., Mirski J.Z., *Remontowe struktury kratownicowe dla sklepień P. Ferrariego w Wielkopolsce*, X Konferencja Naukowo – Techniczna „Problemy remontowe w budownictwie ogólnym i obiektach zabytkowych”, Wrocław – Zamek Kliczków, grudzień 2002 - REMO 2002.
- [135] Krzyślak B., *Problemy konserwatorskie romańskiego kościoła pw. św. Mikołaja i Wniebowzięcia NMP w Gieczu*, Wielkopolski Biuletyn Konserwatorski, Poznań, t. I, s. 182–196, 2002.

## Literatura

- [136] Kubica J., Drobiec Ł., Jasiński R., *Badania siecznego modułu sprężystości murów z cegły*, XLV Konferencja Naukowa, Wrocław-Krynica, 1999.
- [137] Kuczma M., Wybranowska K., *Numerical homogenization of elastic brick masonry*, Civil and Environmental Engineering Reports, vol. 1, p. 135-152, 2005.
- [138] Kumar P., Bhandari N. M., *Non-linear Finite Element Analysis of Masonry Arches for Prediction of Collapse Load*, SEI Vol. 15, N. 3, p. 166-174, 2005.
- [139] Lau, W.W., *A Historical and Structural Study of the Main Dome*, Cambridge, Massachusetts, USA, 2004.
- [140] Laursen P.T., Seible F., Hegemier G.A., Innamorato D., *Seismic retrofit and repair of masonry walls with carbon overlays*, In Non-metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures. Ed. L. Taerwe, 616-623, 1995.
- [141] Lee J.S, Pande G.N, Middleton J., *Numerical modelling of cracking in masonry structures*, in Pande, G.N, Middleton, J. (Eds), *Proceedings of the 2nd Int. Symp. on Comp. Meth. Struc. Masonry 2*, Swansea, 1993.
- [142] Lenza P., Rossi P.P., *Non linear analysis of masonry buildings*, Computer Methods in Structural Masonry, Lisbon, April 19-21, 1995.
- [143] Lis Z., Rapp P., *Odtworzenie nośności osłabionej strefy rozciąganej w zginanych belkach drewnianych za taśm z włókien węglowych*. Konferencja Naukowa, Drewno i materiały drewnopochodne w konstrukcjach budowlanych, Szczecin, 2002.
- [144] Litewka A., Litewka P., *Mechanika budowli w architekturze historycznej*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2006.
- [145] Lopez, J., Oller, S., Onate, E., Lubliner, J., *A homogeneous constitutive model for masonry*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, 1999
- [146] Lourenço P., Martins J.P.P., *Strengthening of the architectural heritage with composite materials*, Proc. Composites in Constructions, Figueiras et al (eds), Swets and Zeitlinger, 571-576, 2001.
- [147] Lourenço P.B., *Computational strategies for masonry structures*, PhD, Delft University of Technology, 1996.
- [148] Lourenço P.B., *Experimental and numerical issues in the modeling of the mechanical behavior of masonry*, Structural Analysis of Historical Constructions II, CIMNE, Barcelona, pp. 57 – 91, 1998.
- [149] Lourenço P.B., *Guidelines for the analysis of historical masonry structures*, Finite Elements in Engineering and Science, Eds. M.A.N. Hendriks et al, A.A. Balkema, Rotterdam, The Netherlands, p. 241-247, 2002.
- [150] Luciano R., Sacco E., *Damage of masonry panels reinforced by FRP sheets*, Int. J. Solids Structures vol. 35, no. 15, Elsevier Science Ltd., 1998.
- [151] Luciano R., Sacco E., *Homogenization technique and damage model for old masonry material*, International Journal of Solids and Structures 34, 3191-3208, 1997.

## Literatura

- [152] Łodygowski T., Kąkol W., *Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich*, Poznań, 1994.
- [153] Łukaszewicz J.W., *Badania i zastosowanie związków krzemoorganicznych w konserwacji zabytków kamiennych*, rozprawa habilitacyjna, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 2002.
- [154] Małyшко L., Orłowicz R., *Konstrukcje murowe. Zarysowania i naprawy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko – Mazurskiego, Olsztyn, 2000.
- [155] Małyшко L., Orłowicz R., *Wzmocnienia konstrukcji murowych, w tym zasady obliczania wzmocnień*, XXII Ogólnopolska Konferencja Warsztat Pracy Projektanta Konstrukcji, Szczyrk, 7÷10 marzec 2007.
- [156] Mantegazza G., Gatti A., Barbieri A., *Fiber reinforced cementitious matrix (FRCM) – advanced composite material and emerging technology for retrofitting concrete and masonry buildings*, IABMAS'06 The 3rd Inter. Conf. on Bridge Maintenance, Safety and Management, 16-19 July, Porto, Portugal, 2006.
- [157] Mantegazza G., *Retrofitting concrete and masonry building: FRCM (fiber reinforced cementitious matrix) a new emerging technology*, XII Konferencja Naukowo-Techniczna Problemy Remontowe W Budownictwie Ogólnym i Obiektach Zabytkowych REMO 2006, Wrocław - Zamek Kliczków, 6-8 grudzień 2006.
- [158] Marek A., *Połączenia klejowe we wzmacnianiu struktur obiektów zabytkowych – analiza optymalnych ekonomicznych rozwiązań*, praca magisterska Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej wykonana pod kierunkiem dr. hab. inż. J. Jasięki, PWr, Wrocław, 1997.
- [159] Mark R. *Experiments in Gothic Structure*, Princeton University, 1984.
- [160] Marshall J., Sweeney S. C., Trovillion J. C., *Seismic Rehabilitation of Unreinforced Masonry Walls*, ACI, SP 188-26, 287-295, 1999.
- [161] Masłowski E., Spizewska D., *Wzmacnianie konstrukcji budowlanych*, Arkady, Warszawa, 2002.
- [162] Maurenbrecher A.H.P., Saïd M.N.A., Ibrahim K., Cornick S.M., *Monitoring The Performance Of Masonry Building Envelopes*, Proceedings of the 12th International Brick/Block Masonry Conference, Madrid, Spain, June 25-28, Vol. 2, pp. 1221-1233, 2000.
- [163] Mazurkiewicz Z.E., *Cienkie powłoki sprężyste. Teoria liniowa*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2004.
- [164] Mączyński Z., *Poradnik budowlany dla architektów*, Budownictwo i Architektura, Warszawa, 1954.
- [165] Meier U., *Materials by Combination: Materials of the Future in the Building Industry*, Swiss Materials, Vol. 1, No.2, pp. 19-23, 1989.
- [166] Menzel C.A., *Der praktische Maurer*, Knapp, Halle, 1870.
- [167] Méry E., *Sur l'équilibre des voûtes en berceau*, Annales des Ponts et Chaussées, 1840.
- [168] *Metody wzmacniania posadowienia budynków remontowanych i modernizowanych*, Miejskie Biuro Projektów „Warcent”, Centrum Techniki Komunalnej, Warszawa, 1983.

## Literatura

- [169] Midnicki S., *Ustroje budowlane*, Spółdzielnia Wydawnicza „Meta”, wydanie III, Katowice, 1947.
- [170] Minch M., Trochanowski A., *Wybrane zagadnienia wzmocnienia zabytkowego pałacu w Dobrzycy*, VII Konferencja Naukowo Techniczna Problemy remontowe w budownictwie, Wrocław – Szklarska Poręba, 1996.
- [171] Mitzel A., Stachurski W., Suwalski J., *Awarie konstrukcji betonowych i murowych*, Arkady, Warszawa, 1973.
- [172] Nanni A., Tumialan G., *Fiber Reinforced Composites for the Strengthening of Masonry Structures*, Structural Engineering International, IABSE, Zurich, Switzerland, SEI Vol. 13, No. 4, pp. 271-278, 2003.
- [173] Nappi A., *State of the Art on New Technologies for Safeguarding Cultural Heritage: A Short Report and Some Personal Points of View from Italy*, ARCCCHIP, Ariadne workshops, June 1-7, 2002.
- [174] Nuttgens P., *Dzieje Architektury*, Arkady, Warszawa, 1998.
- [175] Ochelski S., *Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych*, WNT, Warszawa 2004.
- [176] Oliveira D.V., Basílio I., Lourenço, P.B., *FRP strengthening of masonry arches towards an enhanced behaviour*, IABMAS'06 - Third International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management, CD-ROM, 9 pp, Porto, 2006.
- [177] Oller S., Botello S., Miquel Canet J., Onate E., *An anisotropic elasto – plastic model based on an isotropic formulation*, International Journal for Computer – Engineering Computation, 12(3), pp. 245 – 262, 1995.
- [178] Orduna A., Lourenco P.B., *Limit analysis as a tool for the simplified assessment of ancient masonry structures. III Structural Analysis of Historical Constructions (III SAHC) – Guimares*, 2001.
- [179] Orłoś Z., *Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń*, PWN, Warszawa, 1977.
- [180] Owen D.R., Peric D., Petrinic N., Brookes C., James P.J., *Finite/ Discrete Element Models for Assessment and Repair of Masonry Structures*, Proceedings of the Second International Conference on Arch Bridges Italy, Venice, 1998.
- [181] Parys Van L., Lamblin D., Descamps T., *Limit analysis of masonry arches compared with numerical and experimental approaches*, 7th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Mons - Belgium, May 29-30, 2006.
- [182] Parzniewski Z., *Uszkodzenia i wzmocnienia sklepień w budynkach rewaloryzowanych*, Materiały I Krajowej Konferencji Naukowo – Technicznej PAN i PZiTb, Kraków, str. 15 – 32, 1986.
- [183] Penkala B., Zasuń H., Zielińska E., *Zagadnienia technologiczne zapraw do celów konserwatorskich*, Materiały I Krajowej Konferencji Naukowo - Technicznej PAN i PZiTb, Kraków, s. 71 – 79, 1986.
- [184] Pieper K., *Sicherung historischer Bauten*, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, 1983.

## Literatura

- [185] PN-88/H-84028 *Stal niestopowa konstrukcyjna ogólnego przeznaczenia.*
- [186] PN-90/B-03200 *Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.*
- [187] PN-B-03002:2007 *Konstrukcje murowe - Projektowanie i obliczanie.*
- [188] PN-B-03340: 1999 *Konstrukcje murowe zbrojone. Projektowanie i obliczanie.*
- [189] PN-EN 1052-1:2000 *Metody badań murów - Określenie wytrzymałości na ściskanie.*
- [190] PN-EN 1052-3:2004/A1:2007 *Metody badań murów - Część 3: Określenie początkowej wytrzymałości muru na ścinanie.*
- [191] PN-EN 12190:2000 *Wyroby i systemy do ochrony i napraw konstrukcji betonowych. Metody badań. Oznaczanie wytrzymałości na ściskanie zaprawy naprawczej.*
- [192] PN-EN 1542:2000 *Wyroby i systemy do ochrony i napraw konstrukcji betonowych. Metody badań. Pomiar przyczepności przez odrywanie.*
- [193] PN-EN 196-1:2005 *Metody badania cementu. Część 1: Oznaczanie wytrzymałości.*
- [194] PN-EN 1194:2000 *Konstrukcje drewniane - Drewno klejone warstwowo - Klasy wytrzymałości i określenie wartości charakterystycznych.*
- [195] PN-EN ISO 527-5:2000 *Tworzywa sztuczne - Oznaczanie właściwości mechanicznych przy statycznym rozciąganiu - Warunki badań kompozytów tworzywowych wzmocnionych włóknami jednokierunkowo.*
- [196] Rakowski G., Kacprzyk Z., *Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 1993.
- [197] Rapp P., Lis Z., *Odtworzenie nośności osłabionej strefy rozciąganej w zginanych belkach drewnianych za pomocą zbrojenia rozproszonego z włókien węglowych*. Konferencja Naukowo – Techniczna, Remo 2002, Wrocław – Zamek Kliczków, 2002.
- [198] Ratajczyk F., *Dwójłomność i polaryzacja optyczna*, Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław, 2000.
- [199] Reda Taha M.M., *Design of Masonry Arches*, ENCI 595.05 – Masonry Arches, 2005.
- [200] Roca P., Gonzalez J.L., Onate E., Lourenco P.B., *Structural Analysis of Historical Constructions*, Possibilities of Numerical and Experimental Techniques, Spain. Barcelona, 1998.
- [201] Roca P., Pellegrini L., Onate E., *Analysis of the structure of gothic cathedrals application to Barcelona cathedral*, II Structural Analysis of Historical Constructions (IISAHC) – Barcelona, 1998.
- [202] Roland W., Reissner E., *The stresses in cemented joints*, Journal of Applied Mechanics, 1944.
- [203] Royles R., Hendry A.W., *Model Tests on Masonry Arches*, Proc. Inst. Civil Engineering, United Kingdom, 1991.
- [204] Rudziński L., *Konstrukcje murowe, remonty i wzmocnienia*, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2006.



## Literatura

- [205] Rusiński E., Czmochoński J., Smolnicki T., *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*, Oficyna Wydawnicza PWR, Wrocław, 2000.
- [206] Rusiński E., *Metoda elementów skończonych. System COSMOS/M*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1994.
- [207] Rusiński E., *Zasady projektowania konstrukcji nośnych pojazdów samochodowych*, Oficyna Wydawnicza PWR, Wrocław, 2002.
- [208] Saadatmanesh H., *Fiber composites for new and existing structures*, ACI Structural Journal, 91, 346-354, 1994.
- [209] Schwedler J.W., *Die Stabilität des Tonnenförmigen Kappengewölbes*, Deutsche Bauzeitung, pp. 153-155, 1868.
- [210] Schwegler G., Kelterborn P., *Earthquake Resistance of Masonry Structures strengthened with Fiber Composites*, 11th World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico, Paper No. 1460, 1996.
- [211] Schwegler G., *Masonry construction strengthened with fiber composites in seismically endangered zones*, Proceedings of 10th European Conference on Earthquake Engineering, Vienna, Austria, 1994.
- [212] Schwegler G., *Seismic strengthening of unreinforced masonry buildings with carbon fibers*. Publication of Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, 1995.
- [213] Siebler A., Vafakish Homae A., *Trag – und Verformungsverhalten von Verbundträgern aus Brettschichtholz und Carbonfaserverstärkten Kunststoffen*. Forschungsarbeit FH, Wiesbaden, 1999.
- [214] Sieczkowski J.M., Szołomicki J.P., *Metody obliczeń statyczno – wytrzymałościowych sklepień w budowlach gotyckich*, Oficyna Wydawnicza PWR, Wrocław, 1999.
- [215] Sieczkowski J., Szołomicki J., *Właściwości wytrzymałościowe muru ceglanoego uwzględnione w analizie komputerowej*, Warstwy, R. 6, nr 4, s. 1107-112, 2000.
- [216] SIKA, *System Sika CarboDur: podstawowe informacje o systemach wzmacniania konstrukcji budowlanych i inżynierskich za pomocą materiałów kompozytowych*, Sika Poland.
- [217] SIKA, *Wzmocnienia konstrukcji materiałami kompozytowymi Systemu Sika CarboDur*, Sika Poland, wrzesień 2000.
- [218] SIKA, *Wzmocnienia konstrukcji mostów przez przyklejanie kompozytowych elementów zewnętrznych*, Sika Poland, czerwiec 2001.
- [219] Słówek G., Majchrzak W., *Naprawy konstrukcji żelbetowych metodą torkretowania*, XIII Ogólnopolska Konferencja: Warsztat Pracy Projektanta Konstrukcji, Ustroń, 26-28 luty 1998 r., t. I, str. 213-231.
- [220] Smólski J., Stępień P., *Kryteria konserwatorskie doboru rozwiązań inżynierskich w zabytkach architektury – w świetle doktryny i praktyki konserwacji*. IV Konferencja Naukowo-Techniczna. Inżynierskie problemy odnowy staromiejskich zespołów zabytkowych, Kraków, 21-23 maja 1998, s. 63-71.

## Literatura

- [221] Sofronie R., Feodorov V., *Method of antiseismic reinforcement of masonry works*, Patent Application No. C/573/23.03.95, Bucharest, Romania, 1995.
- [222] Stachowicz A., *Ocena stanu materiałów i konstrukcji stropów i przekryć ceramicznych*, Materiały XIII Ogólnopolskiej Konferencji Warsztaty Pracy Projektanta Konstrukcji, T. 1, cz. 2, Ustroń, 1999.
- [223] Szczepiński W., *Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa, 1984.
- [224] Szołomicki J., *Różne metody komputerowego modelowania historycznych konstrukcji murowanych*, Problemy remontowe w budownictwie ogólnym i obiektach zabytkowych, Praca zbiorowa pod red. J. Jasiński [i in.], DWE, Wrocław, 2006.
- [225] Šimunić-Buršić M., Žagar Z., *Finite elements in the analysis of masonry structures*, In Proc. of the Third DIANA World Conference: Finite Elements in Civil Engineering Applications (Ed M.A.N. Hendrix & J.G. Rots), Tokyo, Japan, pp. 265-273, 2002.
- [226] Thierry J., Zalewski S., *Remonty budynków i wzmacnianie konstrukcji*, Wydanie II rozszerzone, Arkady, Warszawa, 1975.
- [227] Toumbakari E.E., Van Gemert D., Tassios T.P., Vintzileou E., *Experimental investigation and analytical modeling of the affect of injection grouts on the structural behaviour of three – leaf masonry walls*, Proceedings of IV Sem. on Structural Analysis of Historical Constructions. Padwa, Włochy. A. A. Balkema Publishers, 2004.
- [228] Triantafillou T.C., *Shear Strengthening of Reinforced Concrete Beams Using Epoxy Bonded FRP Composites*. ACI Structural Journal, Vol. 95 No. 2, pp. 107-115, 1998.
- [229] Triantafillou T.C., Thanasis W., *Strengthening of Masonry Structures Using Epoxy-Bonded FRP Laminates*, J. Comp. For Constr., ASCE, Vol. 2, No. 2, pp. 96-104, 1998.
- [230] Triantafillou T.C., Deskovic N., *Prestressed FRP Sheets as External Reinforcement of Wood Members*. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 118(5), 1992.
- [231] Triantafillou T.C., Fardis M. N., *Strengthening of historic masonry structures with composite materials*, Materials and Structures, 30, 486-496, 1997.
- [232] Triantafillou T.C., Fardis M.N., *Strengthening of historic masonry structures with fibre reinforced plastic composites*, Dynamics, Repairs and Restoration – Vol. 2, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, pp. 129-136, 1995.
- [233] Triantafillou T.C., *Innovative strengthening of masonry monuments with composites*, Proceedings of 2nd International Conference Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, Montreal, Quebec, Canada, 1996.
- [234] Tumialan G., Myers J.J., A. Nanni A., *Field Evaluation of Unreinforced Masonry Walls Strengthened with FRP Composites Subjected to Out of Plane Loading*, ASCE Structures Congress 2000, Philadelphia, M. Elgaaly, Ed., CD version, 8 pp, 2000.
- [235] Tumialan J.G., Galati N., Namboorimadathil S.M., Nanni A., *Strengthening of Masonry with FRP Bars*, ICCI, San Francisco, 2002.
- [236] Valluzzi M.R., Modena C., *Experimental analysis and modelling of masonry vaults strengthened by FRP*, Guimarães, 2001.

## Literatura

- [237] Valluzzi M., Valdemarca M., Modena C., *Behaviour of bricks masonry vaults strengthened by FRP laminates*, Int. J. Composites for Construction 5(3), 163-169, 2001.
- [238] Valluzzi M.R., Cardani G., Binda L., *Seismic vulnerability methods for masonry buildings in historical centers: validation and application for prediction analyses*. XIII World Conference on Engineering Structures (XIII WCEE) – August 1st-6th Vancouver, 2004.
- [239] Velazquez – Dimas J.I., Ehsani M.R., *Modeling Out-of-Plane Behavior of URM Walls Upgraded with Fiber Composites*, J. Comp. For Constr., ASCE, Vol. 4, No. 4, pp. 172-181, 2000.
- [240] Wierszycki M., *Analiza numeryczna ceglanej kopuły kościoła pocysterskiego p.w. św. Jana Chrzciciela w Owińskach koło Poznania*, praca magisterska, Politechnika Poznańska, Poznań, 2001.
- [241] Wilczyński R., *Nośność graniczna belek zespolonych stalowo – betonowych*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 9, pp. 325 – 329, 1984.
- [242] Zając E., *Analiza statyczna sklepień walcowych z uwzględnieniem ich współpracy z zasypką*, Inżynieria i Budownictwo, nr 1/1989.
- [243] *Zasady stosowania kompozytów włóknistych (FRP)*, S&P Clever Reinforcement Company AG.
- [244] *Zestaw przykładowych rozwiązań elementów budynków remontowanych i modernizowanych*. Zeszyt 3 – Stropy, Centrum Techniki Budownictwa Komunalnego, Warszawa, 1987.
- [245] Zienkiewicz, O.C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
- [246] Żenczykowski W., *Budownictwo Ogólne*, tom II, Arkady, Warszawa, 1965.
- [247] Žarnić R., *State of the Art on New Technologies for Safeguarding Cultural Heritage: Technologies for Safeguarding of Heritage Buildings in Slovenia*, ARCCHIP, Ariadne workshops, June 1-7, 2002.
- [248] Žarnić R., *Strengthening of Masonry Vaults by Foam Concrete Application*, Proc. of the 1st International Seminar on Modern Principles in Conservation and Restoration of Urban and Rural Cultural Heritage in Seismic-Prone Regions, Skopje, pp. 375-381, 1988.