PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 312
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics No. 312

Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

Redaktor naukowy
Joanna Dębicka

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Dorota Pitulec

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-315-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp 7

Wojciech Bijak, Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa 9
Joanna Dębicka, Wpływ zmian parametrów tablic trwania życia w krajach Unii Europejskiej na wielkości aktuarialne 29
Kamil Gala, Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula 50
Stanisław Heilpern, Złożony proces Poissona z zależnymi okresami między szkodami i wielkościami szkód 67
Magdalena Homa, Rozkład wypłaty w ubezpieczeniu na życie z funduszem kapitałowym a ryzyko finansowe 78
Helena Jasiulewicz, Uogólnienie klasycznego procesu nadwyżki finansowej w czasie dyskretnym 88
Agnieszka Marciniuk, Długowieczność i instrumenty finansowe związane z długowiecznością 100
Daniel Sobiecki, Dwustopniowe modelowanie składki za ubezpieczenie komunikacyjne OC 116

Summaries

Wojciech Bijak, Non-homogenous Markov chain models for life insurance.. 28
Joanna Dębicka, Varying parameters of life tables in the European Union: influence on actuarial amounts 47
Kamil Gala, Analysis of multiple life insurance using copulas...................... 66
Stanisław Heilpern, Compound Poisson process with dependent interclaim times and claim amounts 77
Magdalena Homa, Distribution of the payments in the unit-linked life insurance and financial risk 87
Helena Jasiulewicz, Generalization of a classical process of a financial surplus process in discrete time 99
Agnieszka Marciniuk, Longevity and financial instrument related to longevity 115
Daniel Sobiecki, Two-stage premium modelling in MTPL 134

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 312 • 2013
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Wojciech Bijak
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

UBEZPIECZENIA NA ŻYCIE JAKO NIEJEDNORODNE ŁAŃCUCHY MARKOWA

Streszczenie: W pracy przedstawiono spójną koncepcję wykorzystania niejednorodnych łańcuchów Markowa do opisu umów ubezpieczenia na życie. Rozpatrywane są ubezpieczenia na życie z czasem mierzonym w sposób dyskretny. Przyjęto założenie, że w przypadku ubezpieczeń wielu osób dalsze czasy trwania ich życia są niezależnymi zmiennymi losowymi. W pracy zaprezentowano sposób wyznaczania składki netto i matematycznej rezerwy netto. Specjalna uwaga została zwrócona na macierze wypłat, które określają rodzaj produktu ubezpieczeniowego. Wprowadzono również działania algebraiczne na ubezpieczeniach, prezentując ich podstawowe własności przydatne w praktyce.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia na życie, ubezpieczenia na życie wielu osób, niejednorodny łańcuch Markowa.

1. Wstęp

W pracy uwaga została skoncentrowana na ubezpieczeniach na życie jednej lub wielu osób. Tematyce tej poświęcona jest bogata literatura aktuarialna. W większości monografii na temat ubezpieczeń na życie można znaleźć stosowne omówienie tego rodzaju umów ubezpieczenia. W rachunkach aktuarialnych stosowane jest zwykle podejście wykorzystujące pojęcie sum symetrycznych oraz operatorów różnicowych (por. np. [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Gerber 1997, Skałba 1999]). W niniejszej pracy zostały wykorzystane modele niejednorodnych łańcuchów Markowa do opisu umów ubezpieczenia na życie wielu osób. Zastosowany aparat matematyczny pozwala w stosunkowo prosty sposób wyznaczać podstawowe charakterystyki ubezpieczeń (składkę netto, matematyczne rezerwy netto) oraz zdefiniować szereg działań na ubezpieczeniach mogących mieć duże znaczenie przy projektowaniu nowych rodzajów umów o bardziej złożonych strukturach oraz przy analizie zyskowności konstruowanych produktów. Wykorzystaniu łańcuchów Markowa w ubezpieczeniach na życie (w tym ubezpieczeniach wielu osób) poświęconych jest wiele prac. Warto w tym miejscu wspomnieć np. o pracach [Hoem 1969; Wolthuis 2003] dających pełen obraz zastosowań łańcuchów Markowa w kalkulacjach aktuarialnych w ubezpieczeniach na życie.

W najbliższym czasie można oczekiwać wzrostu zainteresowań problematyką ubezpieczeń na życie wielu osób w Polsce. Wiązać się to będzie z wypracowaniem i wdrożeniem systemu wypłat emerytur z drugiego filaru systemu emerytalnego, w ramach którego jedną z form emerytur będą zapewne emerytury małżeńskie. Innym potencjalnym obszarem wykorzystania ubezpieczeń wielu osób są ubezpieczenia posagowe, w których zobowiązanie do zapłaty składki można rozłożyć na grupę osób (np. rodziców). Warto również zwrócić uwagę na fakt, że grupa osób jako grupa nie posiada płci, co oznacza, że ubezpieczeń grupy osób nie powinny dotyczyć przepisy zakazujące dyskryminacji ze względu na płeć przy oferowaniu ubezpieczeń na życie.

2. Ubezpieczenie na życie

Zgodnie z przyjętą definicją w Kodeksie Cywilnym (DzU 1964.16.93, art. 829. (335) § 1, p. 1) ubezpieczenie osobowe może w szczególności dotyczyć – przy ubezpieczeniu na życie – śmierci osoby ubezpieczonej lub dożycia przez nią oznaczonego wieku. Oznacza to, że w przypadku ubezpieczeń na życie możemy wyróżnić dwa stany elementarne (zdarzenia) związane z ubezpieczonym: życie i zgon. W ogólnym przypadku ubezpieczeniem może być objęta łącznie grupa osób (np. małżeństwo, rodzina, związek partnerski lub grupa zatrudnionych w jednym przedsiębiorstwie).

Świadczenie ubezpieczyciela (art. 805. § 2. P, 2)) polega w szczególności na zapłacie przy ubezpieczeniu osobowym umówionej sumy pieniężnej, renty lub innego świadczenia w razie zajścia przewidzianego w umowie wypadku w życiu osoby ubezpieczonej.

Ubezpieczenie na życie opisywać dalej będziemy za pomocą pary

$$(\{X_n\}, \{W_n\}), n = 0,1,2, \dots$$

gdzie: n – moment czasu mierzonego od początku ubezpieczenia w ustalonych jednostkach; $\{X_n\}$ – ciąg zmiennych losowych, określający proces życia osoby lub grupy osób, $\{W_n\}$ – proces wypłat związanych ze stanami elementarnymi, w jakich znajdują się ubezpieczeni lub ich zmianami w ustalonym okresie.

W definicji ubezpieczenia dokonujemy oddzielania procesów związanych z ubezpieczonym lub grupą ubezpieczonych od aspektów finansowych dotyczących wypłacanych świadczeń, wskazując, że każdy z tych procesów wymaga opisania w inny sposób. Podobne podejście, na gruncie wielostanowych ubezpieczeń osobowych, zastosowane zostało w pracy [Dębicka 2012]. O naturze produktu ubezpieczeniowego decydować będą warunki, które muszą zajść, aby doszło do wypłaty świadczenia w szczególności elementy ciągu $\{W_n\}$.

3. Umowa ubezpieczenia na życie

Umowa ubezpieczenia została zdefiniowana w art. 805 § 1 k.c. Przez umowę ubezpieczenia ubezpieczyciel zobowiązuje się, w zakresie działalności swego przedsiębiorstwa, spełnić określone świadczenie w razie zajścia przewidzianego w umowie wypadku, a ubezpieczający zobowiązuje się zapłacić składkę.

Umowę ubezpieczenia w związku z tym określamy jako trójkę

$$(\{X_n\}, \{W_n\}, P_0),\ n = 0,1,2,...,$$

gdzie: P_0 – składka należna ubezpieczycielowi w momencie zawierania umowy ubezpieczenia.

Strony umowy mogą określić różne formy płacenia składki. Składka będąca zobowiązaniem ubezpieczającego lub grupy ubezpieczających może przybrać formę swego rodzaju umowy ubezpieczenia na życie, np. renty. W związku z tym ogólnie zobowiązanie do zapłaty składki możemy określić jako trójkę

$$(\{Z_m\}, \{P_m\}, P_0),$$

gdzie: $\{Z_m\}$ – ciąg zmiennych losowych, określający proces życia ubezpieczającego lub grupy ubezpieczających (płacących składkę); $\{P_m\}$ $m = 0,1,2,...$ – ciąg płatności składki dokonywanych w ustalonych w umowie momentach przez ubezpieczonego lub grupę ubezpieczających. Zwykle pierwsza rata składki płacona jest w momencie zawierania umowy, tzn. w momencie 0.

Racjonalne działanie zakładu ubezpieczeń przy zawieraniu umów ubezpieczeń na życie i ich obsłudze wymaga ustalania właściwych relacji między ubezpieczeniem $(\{X_n\}, \{W_n\}, P_0)$, $n = 0,1,2,...$, a składką P_0 (ogólnie zobowiązaniem do zapłaty składki $(\{Z_m\}, \{P_m\}, P_0)$) w każdym momencie trwania umowy ubezpieczenia. W dalszej części pracy przyjęto, że składka będzie ustalana jako jednorazowa składka netto.

4. Niejednorodny łańcuch Markowa

Proces życia osoby lub grupy osób $\{X_n\}$ możemy opisać za pomocą niejednorodnego łańcucha Markowa (por. np. [Iosifescu 1988])[1]. Zakładamy więc z góry, że rozkład zmiennej X_n zależy jedynie od realizacji zmiennej w poprzednim momencie $n - 1$ i nie zależy od realizacji zmiennych $X_{n-2}, X_{n-3}, \dots, X_0$.

Stany

Załóżmy, że interesuje nas proces życia grupy k osób, które w ustalonym momencie, np. momencie zawierania umowy ubezpieczenia (momencie 0), wszystkie żyją

[1] W analogiczny sposób możemy modelować proces życia $\{Z_m\}$ ubezpieczającego lub ubezpieczających (płacących składkę).

i są odpowiednio w wieku $x_1, x_2, \dots, x_k$.[2] Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ oznacza wektor wieku ubezpieczonych. Parametr k dalej będziemy nazywać wymiarem ubezpieczenia.

Powyżej określiliśmy dwa stany elementarne (zdarzenia) związane z ubezpieczonym: życie i zgon. Pierwszy z nich utożsamiać będziemy z osiągniętym wiekiem i oznaczać będziemy ogólnie dla i-tego ubezpieczonego przez y_i, natomiast drugi stan oznaczać będziemy jako 0. Stan grupy osób w dowolnym momencie $n \geq 0$ możemy więc opisać za pomocą wektora k-elementowego złożonego z liczb naturalnych i zer.

Przestrzeń stanów rozpatrywanego łańcucha jest zbiorem 2^k-elementowym postaci

$$S = \{(y_1, y_2, \dots, y_k), (y_1, y_2, \dots, 0), (y_1, y_2, \dots y_{k-2}, 0, y_k), \dots, (0, \dots, 0, y_k), (0, 0, \dots, 0)\}.$$

Stany możemy uporządkować i ponumerować i dalej utożsamiać numer stanu ze stanem. W tab.1 przedstawiono jeden z możliwych sposobów uporządkowania stanów, który pozwala po kolei wyróżnić podzbiory stanów o tej samej liczbie zer (stan bez zer, stany z jednym zerem, dwoma zerami itd.) i w ramach tych podzbiorów porządek ze względu na kolejność występowania zer od ostatniej pozycji do pierwszej. Dalej takie uporządkowanie stanów nazywać będziemy znormalizowanym.

Tabela 1. Numeracja stanów łańcucha $\{X_n\}$

Stan	Numer stanu
$(y_1, y_2, \dots, y_k)$	1
$(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, 0)$	2
$(y_1, y_2, \dots y_{k-2}, 0, y_k)$	3
…	…
$(y_1, y_2, \dots, y_{k-2}, 0, 0)$	$k + 2$
$(y_1, y_2, \dots y_{k-3}, 0, y_{k-1}, 0)$	$k + 3$
…	…
$(y_1, y_2, \dots y_{k-3}, 0, 0, y_k)$	$2k + 1$
…	…
$(0, 0, \dots y_{k-1}, 0)$	2^{k-2}
$(0, 0, \dots, y_k)$	2^{k-1}
(0,0,0,0,…,0)	2^k

Źródło: opracowanie własne.

[2] W pracy przyjęto standardowe założenia przyjmowane przy definiowaniu ubezpieczeń na życie z czasem dyskretnym.

W jednostce czasu możliwe są przejścia między stanami polegające na zwiększeniu wieku o jeden okres w przypadku przeżycia kolejnego okresu przez osoby ubezpieczone lub osiągnięcia stanu 0 w przypadku śmierci. Przejście między stanem i oraz j nie jest możliwe w okresie n, jeżeli istnieje składowa wektora stanu j w momencie n różna od zera, która dla momentu $n-1$ równa się 0. Na przykład nie jest możliwe przejście ze stanu 2 do stanu 3 (zob. tab. 1.). W momencie n osoby żyjące są o n lat starsze niż w momencie 0. Dla stanu 1, np. w momencie 0, mamy $(y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, natomiast w momencie n – $(y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 + n, x_2 + n, \dots, x_k + n)$.

Stan 2^k jest stanem pochłaniającym łańcucha, co nie oznacza, że osiągnięcie go musi automatycznie oznaczać wygaśnięcie umowy ubezpieczenia. W dalszej części pracy pokazane zostanie, w jaki sposób można wprowadzić do ubezpieczeń okresy gwarantowanych wypłat.

Macierz prawdopodobieństw przejść

Macierze prawdopodobieństw przejść łańcucha $\{X_n\}$ w okresie n, tzn. między momentem $n-1$ a momentem n, oznaczmy przez $\mathbf{\Pi}(n) = [\pi_{ij}(n)]$. Przy przyjętym porządku stanów i ich numeracji macierz $\mathbf{\Pi}(n)$ jest macierzą trójkątną górną z zerowymi elementami $\pi_{ij}(n)$ w przypadku gdy przejście między stanami i oraz j nie jest możliwe. Macierz $\mathbf{\Pi}(n)$ jest więc postaci:

$$\mathbf{\Pi}(n) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(n) & \pi_{12}(n) & \pi_{13}(n) & \cdots & \pi_{12^k}(n) \\ 0 & \pi_{22}(n) & \pi_{23}(n) & \cdots & \pi_{22^k}(n) \\ 0 & 0 & \pi_{33}(n) & \cdots & \pi_{32^k}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Przyjmijmy, że znane są prawdopodobieństwa p_{y_h} $(h = 1,2,\dots,k)$ dla momentu $n-1$ przeżycia kolejnego okresu n $(n = 1,2,\dots)$ przez poszczególnych ubezpieczonych oraz prawdopodobieństwa zgonu $q_{y_h} = 1 - p_{y_h}$. Prawdopodobieństwa te mogą być ustalone na podstawie tablic trwania życia lub odpowiednich modeli wymieralności. Przyjmijmy upraszczające założenie, że poszczególni ubezpieczeni niezależnie od siebie pozostają w stanach elementarnych lub je zmieniają. Poczynione założenia pozwalają określić elementy $\pi_{ij}(n)$ macierzy $\mathbf{\Pi}(n)$ jako iloczyny prawdopodobieństw przeżycia kolejnego okresu n $(n = 1,2,\dots)$ przez tych ubezpieczonych, którzy przy przejściu ze stanu i do j pozostają w stanie elementarnym różnym od 0 oraz prawdopodobieństw zgonów tych ubezpieczonych, którym przy przejściu ze stanu i do j zmienia się stan elementarny z różnego od 0 na 0.

Na przykład

$$\pi_{11}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot p_{y_3} \cdot \cdots \cdot p_{y_k}$$
$$\pi_{12}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot p_{y_3} \cdot \cdots \cdot q_{y_k}$$
$$\pi_{13}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot \cdots \cdot q_{y_{k-1}} \cdot p_{y_k}$$
$$\ldots$$
$$\pi_{1k+1}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot \cdots \cdot p_{y_{k-2}} \cdot q_{y_{k-1}} \cdot q_{y_k}$$
$$\ldots$$
$$\pi_{12^k}(n) = q_{y_1} \cdot q_{y_2+n} \cdot \cdots \cdot q_{y_{k-2}} \cdot q_{y_{k-1}} \cdot q_{y_k}$$
$$\ldots$$
$$\pi_{22}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot \cdots \cdot p_{y_{k-2}} \cdot p_{y_{k-1}}$$
$$\ldots$$
$$\pi_{2k+1}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot \cdots \cdot p_{y_{k-2}} \cdot q_{y_{k-1}}$$
$$\ldots$$
$$\pi_{2^{k-1}2^{k-1}}(n) = p_{y_k}$$
$$\pi_{2^{k-1}2^k}(n) = q_{y_k}$$
$$\pi_{2^k2^k}(n) = 1$$

Oznaczmy przez $\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n) = \left[\mathrm{r}_1(n), \mathrm{r}_2(n), \ldots, \mathrm{r}_{2^k}(n),\right]$ transponowany wektor prawdopodobieństw tego, że uprawnieni do świadczeń znajdują się w stanie $i = 1,2, \ldots, 2^k$ w momencie *n*. Przyjmijmy dodatkowo, że $\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(0) = [1,0, \ldots ,0,]$, co oznacza, że w momencie zawierania ubezpieczenia ubezpieczony lub członkowie grupy ubezpieczonych żyją.

Przy przyjętych założeniach zachodzi następująca zależność między rozkładami ubezpieczonych według stanów w kolejnych momentach ($n = 1,2, \ldots$)

$$\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n) = \mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\mathbf{\Pi}(\mathrm{n}).$$

Rozkład według stanów $\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n)$, $(\mathrm{n} = 1,2, \ldots)$ zależy od rozkładu $\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(0)$

$$\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n) = \mathbf{r}^{\mathrm{T}}(0) \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathbf{\Pi}(\mathrm{j}).$$

Świadczenia

Określmy proces wypłat $\{W_n\}$ jako ciąg macierzy

$$\mathbf{W}(\mathrm{n}) = \left[\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}(\mathrm{n})\right]_{2^k \times 2^k}, (n = 1,2, \ldots)$$

o niezerowych elementach równych wysokości świadczenia w momencie *n* w przypadku gdy przejście między stanami *i* oraz *j* w okresie *n* jest możliwe oraz gdy umowa ubezpieczenia przewiduje jego wypłacenie. Świadczenia $\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}(n)$ mogą być stałe, zmienne, zależne od liczby żyjących lub liczby zgonów w okresie, ustalone deterministycznie lub losowe w zależności od charakteru umowy ubezpieczenia. Struktura macierzy $\mathbf{W}(\mathrm{n})$ określa rodzaj ubezpieczenia na życie.

Przyjmijmy, że macierze wypłat są stałe $\mathbf{W}(\mathrm{n}) = \mathbf{W}$ o elementach równych 0 lub 1.

Macierz wypłat $\mathbf{W}_{\mathrm{w}}$ o elementach $\mathrm{w}_{11} = 0, \mathrm{w}_{12} = 1, \ldots, \mathrm{w}_{12^{\mathrm{k}}} = 1$ i pozostałych elementach równych 0 określa ubezpieczenie na życie dla statusu wspólnego życia, tzn. ubezpieczenie, w którym wypłata świadczenia równego 1 następuje w związku z pierwszym zgonem któregokolwiek członka grupy ubezpieczonych.

Macierz wypłat $\mathbf{W}_{\mathrm{o}}$ o elementach $\mathrm{w}_{12^{\mathrm{k}}} = 1\,, \mathrm{w}_{22^{\mathrm{k}}} = 1\,, \ldots, \mathrm{w}_{(2^{\mathrm{k}}-1)2^{\mathrm{k}}} = 1$ i pozostałych elementach równych 0 określa ubezpieczenie na życie dla statusu ostatniego żyjącego, tzn. ubezpieczenie, w którym wypłata świadczenia równego 1 następuje w związku ze zgonem ostatniego żyjącego członka grupy ubezpieczonych.

Macierz wypłat $\mathbf{W}_{\mathrm{rw}}$ o elementach $\mathrm{w}_{11} = 1, \mathrm{w}_{12} = 1, \ldots, \mathrm{w}_{12^{\mathrm{k}}} = 1$ i pozostałych elementach równych 0 określa rentę życiową płatną z dołu dla statusu wspólnego życia, tzn. ubezpieczenie, w którym wypłata świadczenia rentowego równego 1 następuje do momentu pierwszego zgonu któregokolwiek członka grupy ubezpieczonych.

Macierz wypłat $\mathbf{W}_{\mathrm{ro}}$ o elementach $\mathrm{w}_{\mathrm{ij}} = 1$, jeżeli $\pi_{\mathrm{ij}}(\mathrm{n}) > 0$, $\mathrm{w}_{2^{\mathrm{k}}2^{\mathrm{k}}} = 0$ i pozostałych elementach równych 0 określa rentę życiową płatną z dołu dla statusu ostatniego żyjącego, tzn. ubezpieczenie, w którym wypłata świadczenia rentowego równego 1 następuje do momentu zgonu ostatniego żyjącego członka grupy ubezpieczonych.

W podobny sposób można określić ubezpieczenia na życie lub renty dla dowolnych symetrycznych i niesymetrycznych statusów oraz w zależności od postaci ciągu $\{W_n\}$ ubezpieczenia odroczone (jeżeli początkowe macierze związane z okresem odroczenia są macierzami o zerowych elementach) lub ubezpieczenia terminowe (jeżeli macierze, począwszy od ustalonego momentu *n*, są macierzami o zerowych elementach). Warto zwrócić uwagę na to, że zaproponowane podejście pozwala definiować produkty o bardzo skomplikowanych strukturach, np. ubezpieczenie na życie dla statusu wspólnego życia dla okresów nieparzystych i dla statusu ostatniego żyjącego dla okresów parzystych

$$\mathbf{W}(\mathrm{n}) = \begin{cases} \mathbf{W}_w \text{ dla } \mathrm{n} = 2\mathrm{m} - 1 \\ \mathbf{W}_o \text{ dla } \mathrm{n} = 2\mathrm{m} \end{cases}, \mathrm{m} = 1,2, \ldots$$

Wprowadzenie do macierzy $\mathbf{W}(\mathrm{n})$ wartości $\mathrm{w}_{2^{\mathrm{k}}2^{\mathrm{k}}}(\mathrm{n}) > 0$ dla $\mathrm{n}_{\mathrm{d}} \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{n}_{\mathrm{g}}$ oznacza gwarantowanie wypłat w przedziale czasu $< n_{\mathrm{d}}, \mathrm{n}_{\mathrm{g}} >$ w przypadku zgonu wszystkich ubezpieczonych.

Jeżeli dla $\mathrm{n} = 1,2, \ldots$ macierze wypłat $\mathbf{W}(\mathrm{n})$ są macierzami o równych niezerowych elementach, wówczas istnieje możliwość rozpatrywania grupy ubezpieczonych łącznie jako jednego obiektu (statusu) i agregacji ubezpieczenia grupy osób do ubezpieczenia statusu.

Tradycyjnie w oznaczeniach statusu wspólnego życia stosuje się jako indeks dolny symboli aktuarialnych wiek wszystkich ubezpieczonych $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\ldots\mathrm{x}_\mathrm{k}$, natomiast w oznaczeniach statusu ostatniego żyjącego symbol $\overline{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\ldots\mathrm{x}_\mathrm{k}}$.

5. Składka netto i matematyczna rezerwa netto w ubezpieczeniach na życie

Jednorazowa składka netto w ubezpieczeniach na życie

Niech $\boldsymbol{\pi}_i(\mathrm{n})$ oznacza i-ty wiersz macierzy $\mathbf{\Pi}(\mathrm{n})$ i odpowiednio $\mathbf{w}_i(\mathrm{n})$ i-ty wiersz macierzy $\mathbf{W}(\mathrm{n})$, $i = 1,2,\ldots,2^k$. Oznaczmy przez $\langle\boldsymbol{\pi}_\mathrm{i}(\mathrm{n})|\mathbf{w}_\mathrm{i}(\mathrm{n})\rangle$ iloczyn skalarny wektorów $\boldsymbol{\pi}_\mathrm{i}(\mathrm{n})$, $\mathbf{w}_\mathrm{i}(\mathrm{n})$, natomiast przez $\mathbf{\Pi}(\mathrm{n}) *_W \mathbf{W}(\mathrm{n})$ iloczyn wierszowy macierzy zdefiniowany następująco

$$\mathbf{\Pi}(\mathrm{n}) *_\mathrm{W} \mathbf{W}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} \langle\boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{n})|\mathbf{w}_1(\mathrm{n})\rangle \\ \vdots \\ \langle\boldsymbol{\pi}_{2^\mathrm{k}}(\mathrm{n})|\mathbf{w}_{2^\mathrm{k}}(\mathrm{n})\rangle \end{bmatrix}.$$

Wektor $\boldsymbol{\pi}_\mathrm{i}(\mathrm{n})$ określa warunkowy rozkład zmiennej X_n pod warunkiem $X_{n-1} = i$, natomiast wektor $\mathbf{r}^\mathrm{T}(n)$ jej rozkład bezwarunkowy. Wyznaczając wartość oczekiwaną $\mu_1(\mathrm{n})$ wypłat świadczeń w momencie n w rozkładzie zmiennej X_n, możemy skorzystać z własności iteracyjności operatora wartości oczekiwanej $\mu_1(n) = E_{X_{n-1}}\left[E_{X_n|X_{n-1}}[\mathbf{W}(n)]\right]$, otrzymując

$$\mu_1(n) = E_{X_{n-1}}\left[E_{X_n|X_{n-1}}[\mathbf{W}(\mathrm{n})]\right] = \mathbf{r}^\mathrm{T}(n-1)\big(\mathbf{\Pi}(\mathrm{n}) *_W \mathbf{W}(\mathrm{n})\big).$$

Suma zaktualizowanych na moment zawierania umowy ubezpieczenia wartości oczekiwanych wypłat w momentach n określa jednorazową składkę netto. Przyjmijmy do aktualizacji oczekiwanych świadczeń wykładniczy model oprocentowania z techniczną stopą procentową r odniesioną do ustalonej jednostki czasu przy kapitalizacji odsetek co okres. Przy poczynionych założeniach otrzymujemy, że jednorazowa składka netto jest równa[3]:

$$P = A_{\mathbf{xW}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1(n)}{(1+r)^\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathbf{r}^\mathrm{T}(n-1)\big(\mathbf{\Pi}(\mathrm{n}) *_W \mathbf{W}(\mathrm{n})\big)}{(1+r)^\mathrm{n}}.$$

Drugi moment zwykły $\mu_2(n)$ wypłat świadczeń w momencie n w rozkładzie zmiennej X_n dla ubezpieczeń na wypadek śmierci (tzn. takich, dla których w macierzy $\mathbf{W}(\mathrm{n})$ na głównej przekątnej występują jedynie elementy zerowe) możemy wyznaczyć, wykorzystując iloczyn Hadamarda macierzy

[3] W przypadku, gdy będzie potrzeba zaznaczenia, jaka grupa osób została ubezpieczona, w stosowanych symbolach będziemy umieszczać indeks dolny **x**, np. $\mathbf{\Pi}_\mathbf{x}(\mathrm{n}), \mathbf{W}_\mathbf{x}(\mathrm{n}), \mathbf{A}_\mathbf{xW}$.

$$\mu_2(n) = E_{X_{n-1}}\left[E_{X_n|X_{n-1}}[\mathbf{W}(\mathrm{n}) \circ_H \mathbf{W}(\mathrm{n})]\right] =$$
$$= \mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\big[\mathbf{\Pi}(\mathrm{n}) *_W \big(\mathbf{W}(\mathrm{n}) \circ_H \mathbf{W}(\mathrm{n})\big)\big],$$

gdzie iloczyn Hadamarda macierzy (o tych samych wymiarach) jest określony następująco

$$\mathbf{W}(\mathrm{n}) \circ_H \mathbf{W}(\mathrm{n}) = \left[\mathrm{w_{ij}}(\mathrm{n})\mathrm{w_{ij}}(\mathrm{n})\right]_{2^{\mathrm{k}}\times 2^{\mathrm{k}}}.$$

Drugi moment wypłat ciągu drugich momentów wypłat z ubezpieczeń na wypadek śmierci zaktualizowanych na moment 0 jest równy

$${}^2A_{\mathbf{xW}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_2(n)}{[(1+r)^{\mathrm{n}}]^2} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\big[\mathbf{\Pi}(\mathrm{n}) *_W \big(\mathbf{W}(\mathrm{n}) \circ_{\mathrm{H}} \mathbf{W}(\mathrm{n})\big)\big]}{[(1+r)^{\mathrm{n}}]^2}.$$

Wariancja wypłat określana dla momentu 0 jest równa

$$Var_{\mathbf{xW}} = {}^2A_{\mathbf{xW}} - (A_{\mathbf{xW}})^2.$$

Jeżeli macierz wypłat $\mathbf{W}_{\mathbf{ro}}(\mathrm{n})$ jest macierzą o elementach $\mathrm{w_{ij}}(\mathrm{n}) = \alpha_{\mathrm{i}}(\mathrm{n}) \geq 0$, gdy $\pi_{\mathrm{ij}}(\mathrm{n}) > 0$ i pozostałych elementach równych 0, to jednorazowa składka netto za tę rentę życiową dla statusu ostatniego żyjącego (w całej grupie lub wyróżnionych podgrupach) jest równa

$$P = A_{\mathbf{xW}_{\mathbf{ro}}(\mathrm{n})} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\mathbf{\Pi}(\mathrm{n})\mathbf{w}(n)}{(1+r)^{\mathrm{n}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}(n)}{(1+r)^{\mathrm{n}}},$$

gdzie $\mathbf{w}^T(n) = \left[\alpha_1(n), \alpha_2(n), \dots, \alpha_{2^{\mathrm{k}}}(n)\right]$.

Rezerwa matematyczna netto

Wartość rezerwy matematycznej netto po h latach trwania umowy ubezpieczenia zależy od stanu, w jakim znalazł się łańcuch. Przyjmijmy, że składka została opłacona jednorazowo w momencie zawierania umowy. Wówczas rezerwa matematyczna przy założeniu, że łańcuch znalazł się w stanie i (${}_{h_i}V_{XW}$), jest równa

$${}_{h_i}V_{XW} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{r}_{\mathrm{h_i}}^{\mathrm{T}}(j-1)\big(\mathbf{\Pi}(\mathrm{h}+\mathrm{j}) *_W \mathbf{W}(\mathrm{h}+\mathrm{j})\big)}{(1+r)^{\mathrm{j}}},$$

gdzie wektor $\mathrm{r}_{\mathrm{h_i}}^{\mathrm{T}}(0) = e_i^T$ jest wektorem wierszowym o współrzędnych równych 0 z wyjątkiem współrzędnej i równej 1.

Przykład 1

Ubezpieczenie grupy 3 osób w wieku x_1, x_2, x_3. Dla stanu 1, np. w momencie 0, mamy $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3)$. Przestrzeń stanów jest zbiorem postaci

$$S = \{(y_1, y_2, y_3), (y_1, y_2, 0), (y_1, 0, y_3), (0, y_2, y_3), (y_1, 0,0), (0, y_2, 0)(0,0, y_3), (0,0,0)\}$$

$$\mathbf{\Pi}(n) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(n) & \pi_{12}(n) & \pi_{13}(n) & \pi_{14}(n) & \pi_{15}(n) & \pi_{16}(n) & \pi_{17}(n) & \pi_{18}(n) \\ 0 & \pi_{22}(n) & 0 & 0 & \pi_{25}(n) & \pi_{26}(n) & 0 & \pi_{28}(n) \\ 0 & 0 & \pi_{33}(n) & 0 & \pi_{35}(n) & 0 & \pi_{37}(n) & \pi_{38}(n) \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44}(n) & 0 & \pi_{46}(n) & \pi_{47}(n) & \pi_{48}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{55}(n) & 0 & 0 & \pi_{58}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66}(n) & 0 & \pi_{68}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{77}(n) & \pi_{78}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykładowe elementy macierzy $\mathbf{\Pi}(n)$

$\pi_{11}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot p_{y_3}$, $\pi_{12}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot q_{y_3}$, …, $\pi_{17}(n) = q_{y_1} \cdot q_{y_2} \cdot p_{y_3}$, $\pi_{18}(n) = q_{y_1} \cdot q_{y_2} \cdot q_{y_3}$, …, $\pi_{22}(n) = p_{y_1} \cdot p_{y_2}$, …, $\pi_{28}(n) = q_{y_1} \cdot q_{y_2}$, …, $\pi_{77}(n) = p_{y_3}$, $\pi_{78}(n) = q_{y_3}$, $\pi_{88}(n) = 1$.

Macierz wypłat określamy jako

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W} = \\ = \begin{bmatrix} w_{11}(n) & w_{12}(n) & w_{13}(n) & w_{14}(n) & w_{15}(n) & w_{16}(n) & w_{17}(n) & w_{18}(n) \\ 0 & w_{22}(n) & 0 & 0 & w_{25}(n) & w_{26}(n) & 0 & w_{28}(n) \\ 0 & 0 & w_{33}(n) & 0 & w_{35}(n) & 0 & w_{37}(n) & w_{38}(n) \\ 0 & 0 & 0 & w_{44}(n) & 0 & w_{46}(n) & w_{47}(n) & w_{48}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{55}(n) & 0 & 0 & w_{58}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{66}(n) & 0 & w_{68}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{77}(n) & w_{78}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ubezpieczenie na wypadek śmierci (stała jednostkowa suma ubezpieczenia):
status wspólnego życia status ostatni żyjący

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}(n) = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Renta życiowa płatna z dołu (o stałych jednostkowych ratach):

status wspólnego życia status ostatni żyjący

$$\mathbf{W}(\mathrm{n})=\mathbf{W}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{W}(\mathrm{n})=\mathbf{W}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ubezpieczenie na dożycie (świadczenie zależne od liczby żyjących):

status wspólnego życia status ostatni żyjący

$$\mathbf{W}(\mathrm{n})=\mathbf{W}=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{W}(\mathrm{n})=\mathbf{W}=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ubezpieczenie na wypadek śmierci $\mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3$ po śmierci y_1 (wysokość wypłaty zależna od liczby zgonów):

status wspólnego życia status ostatni żyjący

$$\mathbf{W}(\mathrm{n})=\mathbf{W}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{W}(\mathrm{n})=\mathbf{W}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

6. Działania na ubezpieczeniach

Zanim zaprezentowane zostaną przykładowe działania na ubezpieczeniach, wprowadzone zostaną pojęcia umożliwiające ustalenie równości lub równoważności ubezpieczeń.

Definicja 1. Działaniem elementarnym na ubezpieczeniu $(\{X_{\mathrm{x}n}\}, \{W_{\mathrm{x}n}\})$ nazywamy jednoczesną zamianę miejscami dwóch wierszy i dwóch kolumn o tych samych numerach w macierzach $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}}(\mathrm{n})$ i $\mathbf{W}_{\mathbf{x}}(\mathrm{n})$, $\mathrm{n}=1,2,\ldots$

Oznaczmy przez $\mathrm{T}_{\mathrm{ij}}(\mathbf{B})$ przekształcenie elementarne polegające na zamianie miejscami i-tego wiersza z j-tym wierszem macierzy $\mathbf{B}$ oraz i-tej kolumny z j-tą kolumną przekształconej uprzednio macierzy. Ciąg przekształceń elementarnych $\mathrm{T}_{\mathrm{i_l j_l}}\left(\cdots\left(\mathrm{T}_{\mathrm{i_2 j_2}}\left(\mathrm{T}_{\mathrm{i_1 j_1}}(\mathbf{B})\right)\right)\right)$ oznaczać będziemy symbolem T.

Rozpatrzmy dwa ubezpieczenia tego samego wymiaru *k* zawarte przez grupę osób o wektorze wieku odpowiednio $\mathbf{x}_1 = (\mathrm{x}_{11}, \mathrm{x}_{12}, \dots, \mathrm{x}_{1\mathrm{k}})$ i $\mathbf{x}_2 = (\mathrm{x}_{21}, \mathrm{x}_{22}, \dots, \mathrm{x}_{2\mathrm{k}})$.

Definicja 2. Mówimy, że ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\}, \{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\}, \{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right), n = 0,1,2, \dots$ wymiaru *k* są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg przekształceń elementarnych T taki, że dla każdego $n = 1,2, \dots$

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right) \text{ i } \mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right).$$

Przykład 2

Rozpatrzmy ubezpieczenia wymiaru 2 o macierzach dla $n = 1,2, \dots$

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} \pi'_{11}(\mathrm{n}) & \pi'_{12}(\mathrm{n}) & \pi'_{13}(\mathrm{n}) & \pi'_{14}(\mathrm{n}) \\ 0 & \pi'_{22}(\mathrm{n}) & 0 & \pi'_{24}(\mathrm{n}) \\ 0 & 0 & \pi'_{33}(\mathrm{n}) & \pi'_{34}(\mathrm{n}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} \mathrm{w}'_{11}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}'_{12}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}'_{13}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}'_{14}(\mathrm{n}) \\ 0 & \mathrm{w}'_{22}(\mathrm{n}) & 0 & \mathrm{w}'_{24}(\mathrm{n}) \\ 0 & 0 & \mathrm{w}'_{33}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}'_{34}(\mathrm{n}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi''_{21}(\mathrm{n}) & \pi''_{22}(\mathrm{n}) & 0 & 0 \\ \pi''_{31}(\mathrm{n}) & 0 & \pi''_{33}(\mathrm{n}) & 0 \\ \pi''_{41}(\mathrm{n}) & \pi''_{42}(\mathrm{n})0 & \pi''_{43}(\mathrm{n}) & \pi''_{44}(\mathrm{n}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{w}''_{21}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{22}(\mathrm{n}) & 0 & 0 \\ \mathrm{w}''_{31}(\mathrm{n}) & 0 & \mathrm{w}''_{33}(\mathrm{n}) & 0 \\ \mathrm{w}''_{41}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{42}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{43}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{44}(\mathrm{n}) \end{bmatrix}$$

gdzie
$\pi'_{11}(\mathrm{n}) = \pi''_{44}(\mathrm{n}), \pi'_{12}(\mathrm{n}) = \pi''_{42}(\mathrm{n}), \pi'_{13}(\mathrm{n}) = \pi''_{43}(\mathrm{n}), \pi'_{14}(\mathrm{n}) = \pi''_{41}(\mathrm{n})$, $\pi'_{22}(\mathrm{n}) = \pi''_{22}(\mathrm{n}), \pi'_{24}(\mathrm{n}) = \pi''_{21}(\mathrm{n}), \pi'_{33}(\mathrm{n}) = \pi''_{33}(\mathrm{n}), \pi'_{34}(\mathrm{n}) = \pi''_{31}(\mathrm{n})$ i analogicznie dla macierzy wypłat. Wówczas przekształcenie elementarne dowodzące równości ubezpieczeń polega na jednoczesnej zamianie pierwszego wiersza

z czwartym i pierwszej kolumny z czwartą w rozpatrywanych macierzach $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})$, $\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})$.

Definicja 3. Mówimy, że ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right), n = 0,1,2,\ldots$ wymiaru *k* obejmują równoważne grupy ubezpieczonych, gdy istnieje ciąg przekształceń elementarnych T taki, że dla każdego $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$ $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)$ i jeżeli w macierzy $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})$ element $\pi_{\mathrm{ij}}(\mathrm{n}) = 0$, to w macierzy $\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})$ element $\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}(\mathrm{n}) = 0$ oraz w macierzy $\mathrm{T}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)$ element o współrzędnych *ij* jest równy 0.

Definicja 4. Sumą ubezpieczeń $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right), n = 0,1,2,\ldots$ wymiaru *k* obejmujących równoważne grupy ubezpieczonych nazywamy ubezpieczenie $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n} + T(W_{\mathbf{x}_2 n})\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$, gdzie T oznacza ciąg przekształceń elementarnych taki, że dla każdego $n = 0,1,2,\ldots$ $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)$

$$\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right) \oplus \left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right) = \left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n} + T(W_{\mathbf{x}_2 n})\}\right),$$

$$n = 0,1,2,\ldots.$$

Przykład 3

Rozpatrzmy ubezpieczenia wymiaru 2 określone w przykładzie 2. Przyjmijmy, że obejmują równoważne grupy ubezpieczonych. Oznacza to, że $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}_{14}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)$ dla $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$ oraz

$$\mathrm{T}_{14}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{w}''_{44}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{42}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{43}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{41}(\mathrm{n}) \\ 0 & \mathrm{w}''_{22}(\mathrm{n}) & 0 & \mathrm{w}''_{21}(\mathrm{n}) \\ 0 & 0 & \mathrm{w}''_{33}(\mathrm{n}) & \mathrm{w}''_{31}(\mathrm{n}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sumą tych ubezpieczeń obejmujących równoważne grupy ubezpieczonych jest ubezpieczenie o ciągu macierzy prawdopodobieństwa przejścia $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})$ oraz ciągu macierzy wypłat

$$\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(n) + \mathrm{T}_{14}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(n)\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} w'_{11}(n) + w''_{44}(n) & w'_{12}(n) + w''_{42}(n) & w'_{13}(n) + w''_{43}(n) & w'_{14}(n) + w''_{41}(n) \\ 0 & w'_{22}(n) + w''_{22}(n) & 0 & w'_{24}(n) + w''_{21}(n) \\ 0 & 0 & w'_{33}(n) + w''_{33}(n) & w'_{34}(n) + w''_{31}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oprócz dodawania ubezpieczeń możemy zdefiniować mnożenie przez dodatnią liczbę. Działanie takie pozwala np. na zmianę jednostek wartości, w jakich wyrażane są świadczenia lub agregować wiele identycznych umów do jednej umowy o zmodyfikowanej macierzy wypłat.

Definicja 5. Zmultyplikowanym ubezpieczeniem $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ wymiaru k nazywamy ubezpieczenie $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{\alpha W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$, gdzie $\alpha > 0$.

Rozpatrzmy dwa ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ odpowiednio wymiaru k_1 i k_2 zawarte przez grupy osób o wektorach wieku odpowiednio $\mathbf{x}_1 = \left(\mathrm{x}_{11},\mathrm{x}_{12},\ldots,\mathrm{x}_{1\mathrm{k}_1}\right)$ i $\mathbf{x}_2 = \left(\mathrm{x}_{21},\mathrm{x}_{22},\ldots,\mathrm{x}_{2\mathrm{k}_2}\right)$, gdzie ciągi zmiennych losowych $\{X_{\mathbf{x}_1 n}\}$, $\{X_{\mathbf{x}_2 n}\}$ są niejednorodnymi łańcuchami Markowa o ciągach macierzy prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \left[\pi_{\mathrm{i}_1\mathrm{j}_1}(\mathrm{n})\right]$, $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n}) = \left[\pi_{\mathrm{i}_2\mathrm{j}_2}(\mathrm{n})\right]$, $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$ o przestrzeniach stanów odpowiednio $S_{\mathbf{x}_1}$, $S_{\mathbf{x}_2}$. Określmy przestrzeń stanów $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)} = \left\{(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)\colon \mathbf{y}_1 \in \mathrm{S}_{\mathrm{x}_1}, \mathbf{y}_2 \in \mathrm{S}_{\mathrm{x}_2}\right\}$. Przestrzeń stanów $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}$ zawiera $2^{\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2}$ elementów. Przyjmijmy, że przestrzenie stanów $S_{\mathbf{x}_1}$, $S_{\mathbf{x}_2}$ oraz $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}$ zostały uporządkowane zgodnie z porządkiem znormalizowanym. Przyjmijmy, że stanowi o numerze i w przestrzeni $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}$ odpowiadają stany o numerach i_1, i_2 odpowiednio z przestrzeni stanów $S_{\mathbf{x}_1}$, $S_{\mathbf{x}_2}$, które się na niego składają.

Definicja 6. Złączeniem ubezpieczeń $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ nazywamy ubezpieczenie $\left(\{X_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\},\{W_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$

$$\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)\uplus\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right) = \left(\{X_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\},\{W_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\}\right), n = 0,1,2,\ldots.$$

gdzie $(\mathbf{x_1 x_2}) = \left(\mathrm{x}_{11},\ldots,\mathrm{x}_{1\mathrm{k}_1},\mathrm{x}_{21},\ldots,\mathrm{x}_{2\mathrm{k}_2}\right)$ oznacza wektor wieku ubezpieczonych z obu grup, $\{X_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\}$ ciąg zmiennych losowych, określający proces życia grupy k_1+k_2 osób będący niejednorodnym łańcuchem Markowa o ciągu macierzy prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{\Pi}_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}(\mathrm{n}) = \left[\pi_{\mathrm{ij}}(\mathrm{n})\right] = \left[\pi_{\mathrm{i}_1\mathrm{j}_1}(\mathrm{n})\pi_{\mathrm{i}_2\mathrm{j}_2}(\mathrm{n})\right]$, $\{W_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\}$ – ciąg macierzy wypłat $\mathbf{W}_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}(n) = \left[\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}(\mathrm{n})\right] = \left[I_{ij}\left(\mathrm{w}_{\mathrm{i}_1\mathrm{j}_1}(\mathrm{n}) + \mathrm{w}_{\mathrm{i}_2\mathrm{j}_2}(\mathrm{n})\right)\right]$ związanych ze stanami elementarnymi, w jakich znajdują się lub, które zmieniają ubezpieczeni z grupy k_1+k_2 osób, stany o numerach i_1, i_2 oraz j_1, j_2 składają się odpowiednio na stany i oraz j, $I_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \pi_{\mathrm{ij}} > 0 \\ 0 \text{ gdy } \pi_{\mathrm{ij}} = 0 \end{cases}$.

Niech symbol $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera macierzy $\mathbf{A}_{k\times l}$ oraz $\mathbf{B}_{m\times n}$ zdefiniowany następująco

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1l}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}\mathbf{B} & \cdots & a_{kl}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

gdzie macierz $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ma wymiary $km \times ln$.

Można pokazać, że istnieją takie ciągi przekształceń elementarnych T_1, T_2 odpowiednio macierzy $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})$ oraz $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})$, $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$, że

$$\mathbf{\Pi}_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}_1\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right) = \mathrm{T}_2\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})\right).$$

Przykład 4

Rozpatrzmy dwa ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\}, \{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\}, \{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ odpowiednio wymiaru k_1=1 i k_2=1 zawarte przez grupy osób o wektorach wieku odpowiednio $\mathbf{x}_1 = (\mathrm{x}_1)$ i $\mathbf{x}_2 = (\mathrm{x}_2)$, gdzie ciągi zmiennych losowych $\{X_{\mathbf{x}_1 n}\}$, $\{X_{\mathbf{x}_2 n}\}$ są niejednorodnymi łańcuchami Markowa o ciągach macierzy prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$ o wymiarach 2×2 o przestrzeniach stanów odpowiednio $S_{\mathbf{x}_1} = \{(\mathrm{y}_1), (0)\}$, $S_{\mathbf{x}_2} = \{(\mathrm{y}_2), (0)\}$. Przestrzeń stanów $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}$ zawiera $2^2 = 4$ elementy. Przestrzeń stanów $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}$ jest zbiorem postaci $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)} = \{(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2), (\mathrm{y}_1, 0), (0, \mathrm{y}_2), (0,0)\}$. Przestrzenie stanów $S_{\mathbf{x}_1}$, $S_{\mathbf{x}_2}$ oraz $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}$ zostały uporządkowane zgodnie z porządkiem znormalizowanym. Stan o numerze 1 w przestrzeni $S_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}$ składa się ze stanów o numerach 1, 1 odpowiednio z przestrzeni stanów $S_{\mathbf{x}_1}$, $S_{\mathbf{x}_2}$, stan o numerze 2 ze stanów o numerach 1, 2, stan o numerze 3 ze stanów o numerach 2, 1 oraz stan o numerze 4 ze stanów o numerach 2, 2. Przyjmijmy, że macierze wypłat są stałe postaci $\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$.

Złączenie ubezpieczeń $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\}, \{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right) \uplus \left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\}, \{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right) = \left(\{X_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) n}\}, \{W_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ jest łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia

$$\mathbf{\Pi}_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}(n) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & 0 & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 0 & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz wypłat dla złączenia ubezpieczeń jest postaci

$$\mathbf{W}_{(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)}(n) = \begin{bmatrix} 0+2 & 0+3 & 1+2 & 1+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1}\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1}\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1}\mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & 0 & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 0 & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n}) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2}\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2}\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2}\mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2}\mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_2} & 0 & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_2} \\ 0 & 0 & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n})$ jest równa macierzy $\mathbf{\Pi}_{(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)}(\mathrm{n})$, natomiast w macierzy $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n}) \otimes \mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n})$ należy zamienić miejscami drugi i trzeci wiersz oraz drugą i trzecią kolumnę, aby uzyskać macierz $\mathbf{\Pi}_{(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)}(\mathrm{n})$.

Rozpatrzmy ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathrm{x}_1 n}\},\{W_{\mathrm{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathrm{x}_2 n}\},\{W_{\mathrm{x}_2 n}\}\right), n = 0,1,2,\dots$ wymiaru k obejmujące równoważne grupy ubezpieczonych. Niech T oznacza ciąg przekształceń elementarnych taki, że dla każdego $n = 1,2,\dots$ $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n})\right)$, $\mathbf{W}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n}) = [\mathrm{w_{ij}}(\mathrm{n})]$ $\mathbf{V}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n}) = [\mathrm{v_{ij}}(\mathrm{n})] = \mathrm{T}\left(\mathbf{W}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n})\right)$. Jeżeli dla każdego $n = 1,2,\dots$ oraz $i,j = 1,2\dots,2^k$ zachodzi $\mathrm{w_{ij}}(\mathrm{n}) \geq \mathrm{v_{ij}}(\mathrm{n})$, to dla tych ubezpieczeń możemy zdefiniować ich różnicę.

Definicja 7. Różnicą ubezpieczeń $\left(\{X_{\mathrm{x}_1 n}\},\{W_{\mathrm{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathrm{x}_2 n}\},\{W_{\mathrm{x}_2 n}\}\right), n = 0,1,2,\dots$ wymiaru k obejmujących równoważne grupy ubezpieczonych nazywamy ubezpieczenie $\left(\{X_{\mathrm{x}_1 n}\},\{W_{\mathrm{x}_1 n} - T(W_{\mathrm{x}_2 n})\}\right)$, $n = 0,1,2,\dots$, gdzie T oznacza ciąg przekształceń elementarnych taki, że dla każdego $n = 0,1,2,\ldots$ $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n})\right)$

$$\left(\{X_{\mathrm{x}_1 n}\},\{W_{\mathrm{x}_1 n}\}\right) \ominus \left(\{X_{\mathrm{x}_2 n}\},\{W_{\mathrm{x}_2 n}\}\right) = \left(\{X_{\mathrm{x}_1 n}\},\{W_{\mathrm{x}_1 n} - T(W_{\mathrm{x}_2 n})\}\right),$$

$$n = 0,1,2,\ldots.$$

Przykład 5

Rozpatrzmy 2 ubezpieczenia grupy 3 osób w wieku $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ o stałych w czasie macierzach wypłat

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy, że przestrzeń stanów jest uporządkowana w sposób znormalizowany. Ubezpieczenie o macierzy wypłat $\mathbf{W}_1$ jest złączeniem indywidualnych ubezpieczeń na wypadek śmierci osób w wieku $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ na sumy równe 1. Jest więc ubezpieczeniem na wypadek śmierci o wysokości świadczenia zależnej od liczby zgonów w okresie. Ubezpieczenie o macierzy wypłat $\mathbf{W}_2$ jest sumą ubezpieczeń na wypadek śmierci statusu wspólnego życia i ostatniego żyjącego. Ubezpieczenie będące różnicą tych ubezpieczeń jest ubezpieczeniem na wypadek śmierci o macierz wypłat postaci

$$\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozpatrzmy ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathrm{x}_1 n}\},\{W_{\mathrm{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathrm{x}_2 n}\},\{W_{\mathrm{x}_2 n}\}\right), n = 0,1,2,\ldots$ wymiaru k o znormalizowanym uporządkowaniu przestrzeni stanów. Przyjmijmy, że dla każdego $n = 1,2,\ldots$ $\mathbf{W}(\mathrm{n}) = \mathbf{W}_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{n}) = \mathbf{W}_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{n})$.

Definicja 8. Iloczynem ubezpieczeń $(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_n\})$, $(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_n\})$, $n=0,1,2,\dots$ wymiaru k nazywamy ubezpieczenie $(\{X_{\mathbf{x}_1\odot\mathbf{x}_2 n}\},\{W_n\})$, $n=0,1,2,\dots$,

$$(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_n\})\odot(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_n\})=(\{X_{\mathbf{x}_1\odot\mathbf{x}_2 n}\},\{W_n\}),\ n=0,1,2,\dots,$$

gdzie $\{X_{\mathbf{x}_1\odot\mathbf{x}_2 n}\}$ ciąg zmiennych losowych, określający proces życia grupy $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ osób będący niejednorodnym łańcuchem Markowa o ciągu macierzy prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1\odot\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})=\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})$, $\mathrm{n}=1,2,\dots$

Łatwo zauważyć, że iloczyn macierzy $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1\odot\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})$ jest macierzą stochastyczną trójkątną górną.

Przykład 6

Rozpatrzmy dwa ubezpieczenia statusu wspólnego życia trzech osób $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3$ $(\{X_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 n}\},\{W_n\})$ oraz statusu ostatniego żyjącego z grupy dwóch osób $\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}$ $(\{X_{\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}n}\},\{W_n\})$, $n=0,1,2,\dots$ Ze względu na to, że grupy osób ubezpieczonych traktujemy jako pojedyncze obiekty, to ubezpieczenia te są odpowiednio wymiaru $\mathrm{k}_1=1$ i $\mathrm{k}_2=1$. Są one zawarte przez grupy osób o wektorach wieku odpowiednio $\mathbf{x_1}=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$ i $\mathbf{x_2}=(\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5)$ łącznie dla statusu wspólnego życia $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3$ oraz dla statusu ostatniego żyjącego $\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}$. Ciągi zmiennych losowych $\{X_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 n}\}$, $\{X_{\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}n}\}$ są niejednorodnymi łańcuchami Markowa o ciągach macierzy prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3}(\mathrm{n})=\begin{bmatrix}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2\mathrm{y}_3} & \mathrm{q}_{\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2\mathrm{y}_3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{\Pi}_{\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}}(\mathrm{n})=\begin{bmatrix}\mathrm{p}_{\overline{\mathrm{y}_4\mathrm{y}_5}} & \mathrm{q}_{\overline{\mathrm{y}_4\mathrm{y}_5}}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathrm{n}=1,2,\dots$, gdzie $\mathrm{y_i}=\mathrm{x_i}+\mathrm{n}$, $i=1,2,3,4,5$ oraz odpowiednio $\mathrm{p}_{\mathrm{y}_1 y_2\mathrm{y}_3}$, $\mathrm{q}_{\mathrm{y}_1 y_2\mathrm{y}_3}$ i $\mathrm{p}_{\overline{\mathrm{y}_4\mathrm{y}_5}}$, $\mathrm{q}_{\overline{\mathrm{y}_4\mathrm{y}_5}}$ oznaczają prawdopodobieństwa trwania i wygaśnięcia statusu wspólnego życia i ostatniego żyjącego. Przestrzenie stanów są zbiorami dwuelementowymi postaci $S_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3}=\{y_1y_2y_3,0\}$, $S_{\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}}=\{\overline{y_4y_5},0\}$. Przyjmijmy, że macierz wypłat jest stała postaci $\mathbf{W}(\mathrm{n})=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathrm{n}=1,2,\dots.$ Iloczynem ubezpieczeń $(\{X_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\odot\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}n}\},\{W_n\})$ jest ubezpieczenie na wypadek śmierci dla statusu wspólnego życia statusu wspólnego życia trzech osób i statusu ostatniego żyjącego w grupie dwóch osób o macierzy prawdopodobieństw przejścia

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\odot\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}}(\mathrm{n})=\mathbf{\Pi}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3}(\mathrm{n})\mathbf{\Pi}_{\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}}(\mathrm{n})=\begin{bmatrix}\mathrm{p}_{\mathrm{y}_1 y_2\mathrm{y}_3}\mathrm{p}_{\overline{\mathrm{y}_4\mathrm{y}_5}} & \mathrm{p}_{\mathrm{y}_1 y_2\mathrm{y}_3}\mathrm{q}_{\overline{\mathrm{y}_4\mathrm{y}_5}}+\mathrm{q}_{\mathrm{y}_1 y_2\mathrm{y}_3}\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{n}=1,2,\dots$$

Przestrzeń stanów jest zbiorem dwuelementowym postaci $S_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\overline{\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5}}=\{y_1y_2y_3\overline{y_4y_5},0\}$, gdzie stan 0 oznacza stan wygaśnięcia statusu $y_1y_2y_3\overline{y_4y_5}$ w związku z wygaśnięciem któregokolwiek ze statusów $y_1y_2y_3$, $\overline{y_4y_5}$.

7. Działania na ubezpieczeniach a jednorazowa składka netto

Przyjmijmy, że ubezpieczenie $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}+T\left(W_{\mathbf{x}_2 n}\right)\}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$, gdzie T oznacza ciąg przekształceń elementarnych taki, że dla każdego $\mathrm{n}=1,2,\ldots$ $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})=\mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)$ jest sumą ubezpieczeń $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right), n=0,1,2,\ldots$ wymiaru k obejmujących równoważne grupy ubezpieczonych (por. definicja 4)

$$\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)\oplus\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right)=\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}+T\left(W_{\mathbf{x}_2 n}\right)\}\right),$$
$$n=0,1,2,\ldots$$

Wówczas jednorazowa składka netto sumy ubezpieczeń jest równa sumie jednorazowych składek netto ubezpieczeń składowych. Korzystając z własności rozdzielności iloczynu skalarnego wektorów względem dodawania wektorów, mamy

$$P=A_{\mathbf{x}_1\{\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}+\mathrm{T}(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2})\}}=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})*_W\left\{\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})+\mathrm{T}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)\right\}\right)}{(1+r)^{\mathrm{n}}}=$$

$$=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})*_W\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})+\mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)*_W\mathrm{T}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)\right)}{(1+r)^{\mathrm{n}}}=$$

$$=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})*_W\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})\right)}{(1+r)^{\mathrm{n}}}+$$
$$+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}(n-1)\left(\mathrm{T}\left(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)*_W\mathrm{T}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})\right)\right)}{(1+r)^{\mathrm{n}}}=$$
$$=A_{\mathbf{x}_1\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}}+A_{\mathbf{x}_2\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}}.$$

W analogiczny sposób można pokazać, że jednorazowa składka netto dla różnicy ubezpieczeń $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)\ominus\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right)=\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}-T\left(W_{\mathbf{x}_2 n}\right)\}\right)$ $n=0,1,2,\ldots$, (por. definicja 7) jest równa różnicy jednorazowych składek netto za ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right), n=0,1,2,\ldots$ wymiaru k obejmujących równoważne grupy ubezpieczonych

$$P=A_{\mathbf{x}_1\{\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}-\mathrm{T}(\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2})\}}=A_{\mathbf{x}_1\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}}-A_{\mathbf{x}_2\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}}.$$

Podobnie jednorazowa składka netto dla zmultyplikowanego ubezpieczenia $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{\alpha W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$, wymiaru k nazywamy, gdzie $\alpha>0$ (por. definicja 5) jest równa iloczynowi jednorazowej składki za ubezpieczenie $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$. i liczby α

$$P = A_{\mathbf{x}_1\{\alpha\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}\}} = \alpha A_{\mathbf{x}_1\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}}.$$

Własność addytywności składki netto mamy również w przypadku złączenia ubezpieczeń. Jednorazowa składka netto za ubezpieczenie $\left(\{X_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\},\{W_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)n}\}\right) = \left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)\uplus\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ będące złączeniem ubezpieczeń $\left(\{X_{\mathbf{x}_1 n}\},\{W_{\mathbf{x}_1 n}\}\right)$, $\left(\{X_{\mathbf{x}_2 n}\},\{W_{\mathbf{x}_2 n}\}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$. jest równa sumie składek jednorazowych netto za te łączone ubezpieczenia

$$P = A_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)\mathbf{W}_{(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)}} = A_{\mathbf{x}_1\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}} + A_{\mathbf{x}_2\mathbf{W}_{\mathbf{x}_2}}.$$

Równość składek w tym przypadku wynika z własności rozdzielności iloczynu skalarnego wektorów względem dodawania oraz z faktu, że macierze prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_1}(\mathrm{n})$, $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{x}_2}(\mathrm{n})$ są macierzami stochastycznymi, to znaczy sumy elementów w poszczególnych wierszach są równe 1.

Literatura

Błaszczyszyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004.

Dębicka J., *Modelowanie strumieni finansowych w ubezpieczeniach wielostanowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2012.

Gerber H., *Life Insurance Mathematics*, Springer, Berlin 1997.

Hoem J.M., *Markov Chain Models in Life Insurance*, Blätter Deutsche Gesellschaft Vers. und Finanzmath., IX, 1969.

Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.

Skałba M., *Ubezpieczenia na życie*, WNT, Warszawa 1999.

Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny, DzU 1964.16.93.

Wolthuis H., *Life Insurance Mathematics (The Markovian Model)*, Institute for Actuarial Science & Econometrics, Universiteit van Amsterdam, 2003.

NON-HOMOGENOUS MARKOV CHAIN MODELS FOR LIFE INSURANCE

Summary: The paper presents a coherent concept of non-homogenous Markov chains applied to describing life insurance contracts. Life insurance models based on the discrete-time approach are considered. It is assumed that in case of the multiple life insurance the random variables describing the future life time are independent. In the paper the method of premium and reserve calculation are discussed. Special attention is paid to the benefit matrix which defines different types of insurance contracts. The algebraic operations on insurance contracts are also introduced, and their basic properties are demonstrated, together with their practical applications.

Keywords: life insurance, multiple life insurance, non-homogenous Markov chain.