

PRACE NAUKOWE  
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 312

RESEARCH PAPERS  
of Wrocław University of Economics No. 312

# Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

Redaktor naukowy  
**Joanna Dębicka**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Dorota Pitulec

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

[www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl), [www.ebscohost.com](http://www.ebscohost.com),

The Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com),

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

[http://kangur.uek.krakow.pl/bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa

[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2013

**ISSN 1899-3192**

**ISBN 978-83-7695-315-1**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	7
<b>Wojciech Bijak</b> , Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa.....	9
<b>Joanna Dębicka</b> , Wpływ zmian parametrów tablic trwania życia w krajach Unii Europejskiej na wielkości aktuarialne .....	29
<b>Kamil Gala</b> , Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula.....	50
<b>Stanisław Heilpern</b> , Złożony proces Poissona z zależnymi okresami między szkodami i wielkościami szkód .....	67
<b>Magdalena Homa</b> , Rozkład wypłaty w ubezpieczeniu na życie z funduszem kapitałowym a ryzyko finansowe .....	78
<b>Helena Jasiulewicz</b> , Uogólnienie klasycznego procesu nadwyżki finansowej w czasie dyskretnym.....	88
<b>Agnieszka Marciniuk</b> , Długowieczność i instrumenty finansowe związane z długowiecznością .....	100
<b>Daniel Sobiecki</b> , Dwustopniowe modelowanie składki za ubezpieczenie komunikacyjne OC .....	116

## Summaries

<b>Wojciech Bijak</b> , Non-homogenous Markov chain models for life insurance..	28
<b>Joanna Dębicka</b> , Varying parameters of life tables in the European Union: influence on actuarial amounts .....	47
<b>Kamil Gala</b> , Analysis of multiple life insurance using copulas.....	66
<b>Stanisław Heilpern</b> , Compound Poisson process with dependent interclaim times and claim amounts .....	77
<b>Magdalena Homa</b> , Distribution of the payments in the unit-linked life insurance and financial risk .....	87
<b>Helena Jasiulewicz</b> , Generalization of a classical process of a financial surplus process in discrete time .....	99
<b>Agnieszka Marciniuk</b> , Longevity and financial instrument related to longevity .....	115
<b>Daniel Sobiecki</b> , Two-stage premium modelling in MTPL .....	134

**Magdalena Homa**

Uniwersytet Wrocławski

---

## ROZKŁAD WYPŁATY W UBEZPIECZENIU NA ŻYCIE Z FUNDUSZEM KAPITAŁOWYM A RYZYKO FINANSOWE

---

**Streszczenie:** W Polsce coraz większą popularnością cieszą się ubezpieczenia na życie połączone z funduszem inwestycyjnym, czyli tzw. ubezpieczenia z funduszem kapitałowym (UFK). Ta kombinacja sprawia, że pojawia się problem, jak prawidłowo dokonać wyceny, uwzględniając oba ryzyka: ubezpieczeniowe i finansowe. Istotnym elementem UFK jest to, że to właśnie ubezpieczony podejmuje decyzję, w jakie aktywa inwestować składkę i jaką jej część przeznaczyć na inwestycje. Stanowiło to przesłankę do przeprowadzenia analizy rozkładu wartości portfela i nadwyżki, jaką wypłaca ubezpieczyciel ponad sumę gwarantowaną. Aby wskazać sposób ich kontrolowania, zbadano, czy przyjęta przez ubezpieczonego strategia dotycząca awersji do ryzyka i wysokości premii inwestycyjnej determinuje zmiany rozkładu wartości portfela ubezpieczeniowego.

**Słowa kluczowe:** ubezpieczenie unit-linked, opcja europejska, wartość ubezpieczenia, metoda Monte Carlo.

### 1. Istota ubezpieczenia z funduszem kapitałowym UFK

Idea ubezpieczenia typu UFK wiąże się z jego oszczędnościowo-inwestycyjnym charakterem. W uproszczeniu pozwala ono inwestować część wpłacanych składek w oferowane przez towarzystwa ubezpieczeniowe fundusze o różnym poziomie ryzyka i czerpać z tego zyski. Ubezpieczenie z funduszem kapitałowym UFK przynależy do grupy tzw. ubezpieczeń Universal Life, czyli „na całe życie”, różniąc się jednak zasadniczo od tzw. klasycznych ubezpieczeń życiowych. Łączą one bowiem element ubezpieczenia i element oszczędzania w sposób niezwykle elastyczny, tworząc wiele możliwości w zakresie dysponowania zaoszczędzonym kapitałem.

W przeciwieństwie do klasycznego ubezpieczenia na życie, w którym koszt ubezpieczenia (wyrażony w opłacanej składce) jest jednakowy przez cały okres ubezpieczenia i nie wynika z wielkości ryzyka w danym roku, ale z uśrednionego ryzyka całego okresu ubezpieczenia, w ubezpieczeniach UFK koszt ten zależy od wieku ubezpieczonego i zmienia się w zależności od wpłat, oprocentowania, kosz-

tów administracyjnych i obciążenia związanego z ryzykiem śmierci, wypadku itp. Istotną cechą ubezpieczenia na życie z funduszem kapitałowym, określanego mianem unit-linked, jest powiązanie go z wydzielonym funduszem lub funduszami, w które inwestowane są środki pochodzące ze składek, przy czym klienci sami dokonują wyboru funduszu. W związku z tym to właśnie ubezpieczony ponosi ryzyko inwestycyjne, a tym samym ponosi odpowiedzialność za ewentualne negatywne skutki swoich decyzji.

W Polsce kontrakty tego typu umożliwiają ubezpieczonemu gromadzenie oszczędności w indywidualnie utworzonym przez niego portfelu inwestycyjnym, składającym się z różnych funduszy inwestycyjnych prowadzonych przez niezależne od ubezpieczyciela zewnętrzne towarzystwa funduszy inwestycyjnych. Istotne jest również to, że ponieważ polisy UFK mają otwartą strukturę i są transparentne, dają możliwość ubezpieczonym dostosowywania na bieżąco składu portfela w zależności od zmieniającej się sytuacji rynkowej. Jest to bardzo istotny element w sytuacji niestabilnej gospodarki rynkowej.

## 2. Portfel inwestycyjny i wypłata w ubezpieczeniu z funduszem kapitałowym

Ze względu na charakter ochronno-oszczędnościowy ubezpieczenia UFK zakład ubezpieczeń zobowiązuje się do wypłaty świadczenia zarówno w przypadku śmierci w okresie trwania ubezpieczenia, jak również w terminie zapadalności, czyli dożycia ubezpieczonego do końca trwania ubezpieczenia. W przeciwieństwie do tradycyjnych ubezpieczeń na życie w ubezpieczeniach UFK losowy jest nie tylko moment wypłaty, ale także wielkość wypłacanego świadczenia zależna od wartości portfela ubezpieczeniowego. Pojawia się zatem konieczność uwzględniania przy wycenie i kalkulacjach związanych z UFK nie tylko ryzyka ubezpieczeniowego (np. ryzyka śmierci), ale również ryzyka finansowego portfela związanego z tym ubezpieczeniem. Wypłata z UFK jest więc odpowiednią funkcją zakumulowanej inwestycji, czyli wartości portfela ubezpieczeniowego:

$$B_t = f(FV_t),$$

gdzie:  $FV_t$  – wartość portfela ubezpieczeniowego (referencyjnego) w chwili  $t$ .

Najczęściej w praktyce ubezpieczeń UFK funkcja  $f$  ma jedną z następujących postaci [Moller 2007]:

$$f(FV_t) = FV_t \quad \text{lub} \quad f(FV_t) = \max\{G_{II}, FV_t\},$$

gdzie:  $G_{II}$  – suma gwarantowana zależna od opłacanej składki ubezpieczeniowej.

W pierwszym przypadku wypłata zależy jedynie od wartości portfela referencyjnego, natomiast w przypadku drugim ubezpieczyciel gwarantuje minimalną sumę ubezpieczenia. Wówczas bowiem ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu w mo-

mencie zajścia zdarzenia objętego umową większą z wartości, tzn. minimalnej gwarantowanej sumy ubezpieczenia (traktowana często jako część ochronna) oraz wartości rynkowej portfela ubezpieczeniowego. Zgodnie z taką konstrukcją ubezpieczenia wypłata z tytułu UFK jest równa:

$$B_t = G_{II} + \max \{0, FV_t - G_{II}\}.$$

Zatem wartość portfela otrzymujemy poprzez zainwestowanie części składki ubezpieczeniowej płaconej w momentach  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , aż do momentu wygaśnięcia polisy  $t_n = T$ . Inwestowana w momencie  $t_i$  część składki oznaczona jest  $\Pi_i$  i nazywa się premią inwestycyjną. Struktura ubezpieczenia UFK sprawia, że ubezpieczony narażony jest nie tylko na ryzyko wystąpienia zdarzenia objętego umową, ale dodatkowo na ryzyko finansowe. Dlatego też powinien on kontrolować to dodatkowe ryzyko wynikające z części składki, która buduje wartość portfela inwestycyjnego. Wysoki jej poziom prowadzi do zwiększenia wartości portfela inwestycyjnego, a ubezpieczony otrzymuje rekompensatę wynikającą z nadwyżki powstałej z wartości portfela inwestycyjnego. Tak więc ubezpieczony, inwestując w wybrane aktywa (fundusze inwestycyjne lub akcje) z ceną określoną jako proces  $S_t$ , buduje wartość portfela referencyjnego. Bilans wartości w chwili  $t_i$  (tzn. na koniec roku  $i$ ) wyraża się wzorem:

$$FV_{t_i} = \underbrace{FV_{t_{i-1}}}_{\text{wartość portfela w chwili } t_{i-1}} + \underbrace{FV_{t_{i-1}} \cdot \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}}}_{\text{zyski z inwestycji w i-tym roku}} + \underbrace{\Pi_i}_{\text{zmiany na rachunku w i-tym roku}}.$$

Zatem wartość portfela jest sumą wartości portfela w okresie poprzedzającym powiększoną o zyski z inwestycji oraz zmiany na rachunku. Ubezpieczony w każdej chwili  $t_i$  za kwotę  $\Pi_i$  zakupuje odpowiednio  $\Pi_i \cdot (S_{t_i})^{-1}$  jednostek aktywów.

W chwili  $t_j$  portfel składa się z  $\sum_{i=1}^{j-1} S_{t_i}^{-1} \Pi_i$  jednostek, a każda z nich ma wartość  $S_{t_j}$ .

Zatem wartość portfela referencyjnego w chwili  $t_j$  wynosi:

$$FV_{t_j} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{S_{t_i}}{S_{t_j}} \Pi_i.$$

Równoważnie w momencie wygaśnięcia polisy wartość portfela jest równa:

$$FV_T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{S_T}{S_{t_i}} \Pi_i,$$

co oznacza, że zdyskontowana (względem  $S$ ) wartość portfela jest równa zdyskontowanej wartości wszystkich inwestycji. W związku z tym wartość portfela referencyjnego w dowolnej chwili  $t$  określa wzór:

$$FV_t = \sum_{i=0}^{\min\{t/t_i>t\}-1} \frac{S_t}{S(t_i)} \cdot \Pi_i.$$

Zatem wypłatę w momencie wygaśnięcia ubezpieczenia można określić następująco:

$$\max\{FV_T, G_{\Pi}\} = G_{\Pi} + \max\{0, FV_T - G_{\Pi}\} = G_{\Pi} + \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_T}{S_{t_i}} \Pi_i - G_{\Pi} \right)^+$$

Stąd pierwszy wniosek, że kontrakt typu UFK może być interpretowany jako tradycyjne ubezpieczenie z sumą ubezpieczenia  $G_{\Pi}$  z potencjalną nadwyżką zależną od ceny aktywów. Uwzględniając zmianę wartości pieniądza w czasie, mamy wartość rynkową w chwili  $t$  wypłaconego świadczenia równą:

$$V(B_T, t) = \frac{v(T)}{v(t)} G_{\Pi} + \frac{v(T)}{v(t)} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_T}{S_{t_i}} \Pi_i - G_{\Pi} \right)^+$$

Jest to funkcja wypłaty europejskiej opcji kupna o terminie wygaśnięcia  $T$  oraz cenie wykonania równej sumie gwarantowanej [Ballotta 2006]. Ze względu na to, że wypłata może nastąpić z tytułu zajścia zdarzenia objętego umową również w okresie jej trwania, np.  $[t_{j-1}, t_j)$ , analogiczny wzór przybierze postać:

$$V(B_{t_j}, t) = \frac{v(t_j)}{v(t)} G_{\Pi} + \frac{v(t_j)}{v(t)} \left( \sum_{i=0}^{t_j-1} \frac{S_{t_j}}{S_{t_i}} \Pi_i - G_{\Pi} \right)^+$$

Tym razem jest to funkcja wypłaty amerykańskiej opcji kupna z ceną wykonania równą sumie gwarantowanej, która może być wykonana w dowolnym momencie do chwili  $T$ . Zatem wypłata z tytułu ubezpieczenia UFK jest sumą dwóch składników:

- zaktualizowanej sumy gwarantowanej,
- opcji kupna z ceną wykonania  $G_{\Pi}$ .

W związku z powyższym osoba ubezpieczona może oczekiwać nadwyżki nad gwarantowaną sumę ubezpieczenia tylko wtedy, gdy opcja kupna jest w cenie („in the money”), co oznacza, że wartość portfela ubezpieczeniowego przewyższa wartość gwarantowaną. Poprawna wycena opcji pozwoli nie tylko na osiągnięcie przewagi konkurencyjnej, ale również na skuteczne zarządzanie ryzykiem. Dokonując wyceny, należy uwzględnić nie tylko cenę rynkową, ale również ryzyko związane z przedmiotem ubezpieczenia. W przypadku ubezpieczenia na życie i dożycie jest to ryzyko umieralności. Przy założeniu niezależności obu tych ryzyk wyceny wypłaty na koniec trwania ubezpieczenia dokonuje się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} E[V(B_T, t)] &= \frac{v(T)}{v(t)} E\left[ g(\Pi) \mid \mathbf{I}_{[K_x > T]} \right] + \frac{v(T)}{v(t_0)} E\left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_T}{S_{t_i}} \Pi_i - G_{\Pi} \right)^+ \mid \mathbf{I}_{[K_x > T]} \right] \\ &= {}_{T-t}P_{x+t} \frac{v(T)}{v(t)} g(\Pi) + {}_{T-t}P_{x+t} \frac{v(T)}{v(t_0)} E\left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_T}{S_{t_i}} \Pi_i - G_{\Pi} \right)^+ \right]. \end{aligned}$$

Gdy należy wycenić wypłatę z tytułu śmierci ubezpieczonego w okresie  $[t_{j-1}, t_j)$ , uwzględnia się odpowiednio prawdopodobieństwo śmierci równe  ${}_{t_{j-1}-t}P_{x+t} \cdot {}_{t_j-t_{j-1}}q_{x+t_{j-1}}$ . Jeszcze pełniejszą informację uzyskamy, analizując nie tylko możliwą wielkość wypłaty z ubezpieczenia UFK, ale również prawdopodobieństwo, z jaką może ona wystąpić, czyli rozkład wypłaty w ubezpieczeniu UFK oraz nadwyżki nad sumę gwarantowaną.

## 2.1. Metoda Monte Carlo

Zatem w przypadku wyceny kontraktów ubezpieczeniowych UFK i ustalenia wielkości wypłaty istotna staje się kwestia poprawnej wyceny instrumentu finansowego, jakim jest opcja. W zależności od wariantu ubezpieczenia jest to odpowiednio europejska lub amerykańska opcja kupna [Glasserman 2004]. Opcja europejska może być wykonana jedynie w momencie wygaśnięcia  $T$ , natomiast opcja amerykańska w dowolnym czasie, dlatego też w pracy skoncentrowano się na metodach symulacyjnych i wykorzystano metodę Monte Carlo (MC) do wyznaczania ich ceny. W klasycznym podejściu, czyli modelu Blacka–Scholesa, cena opcji europejskiej wyraża się analitycznym wzorem, natomiast wycena opcji amerykańskiej nie jest już taka prosta, dlatego też ostatecznie użyto metody MC.

W metodzie tej rozkład wartości instrumentu bazowego w dniu wygaśnięcia opcji jest zdeterminowany przez pewien proces stochastyczny. W pracy przyjęto najprostszy model ewolucji cen, jakim jest geometryczny ruch Browna, zatem cenę jednostki funduszu akcji  $S_t$  opisuje się geometrycznym ruchem Browna, z odpowiednim współczynnikiem dryfu, co można zrobić, korzystając ze schematu Eulera [Weron 1998]. Przy zastosowaniu takiego aparatu matematycznego otrzymuje się wzór symulujący przyszłą wartość instrumentu bazowego (cenę opcji):

$$S_{t_k}^i = S_{t_{k-1}}^i \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_k - t_{k-1}) + \sigma \sqrt{t_k - t_{k-1}} \varepsilon_k^i \right],$$

gdzie  $\varepsilon_k^i$  to niezależne wartości wygenerowane z rozkładu normalnego,  $r$  to wolna od ryzyka stopa procentowa, natomiast  $\sigma$  określa zmienność cen instrumentu. Proces cen akcji symulujemy w skończonej liczbie punktów czasu:  $t_k$ . Przyjmujemy też, że funkcja wypłaty zależy tylko od cen akcji w tych punktach. Dla pojedynczej trajektorii cen akcji zdyskontowana cena dowolnej opcji wynosi:

$$C_0 = \frac{\nu(T)}{\nu(t_0)} (S_0, S_{t_1}, \dots, S_{t_1})$$

natomiast dla  $N$  trajektorii:

$$C_0 = \frac{\nu(T)}{\nu(t_0)} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(S_0^i, S_{t_1}^i, \dots, S_{t_n}^i) \right].$$

Zatem cenę opcji można wyznaczyć, symulując zdyskontowaną wartość profilu wypłaty, a następnie średnią po wszystkich realizacjach.

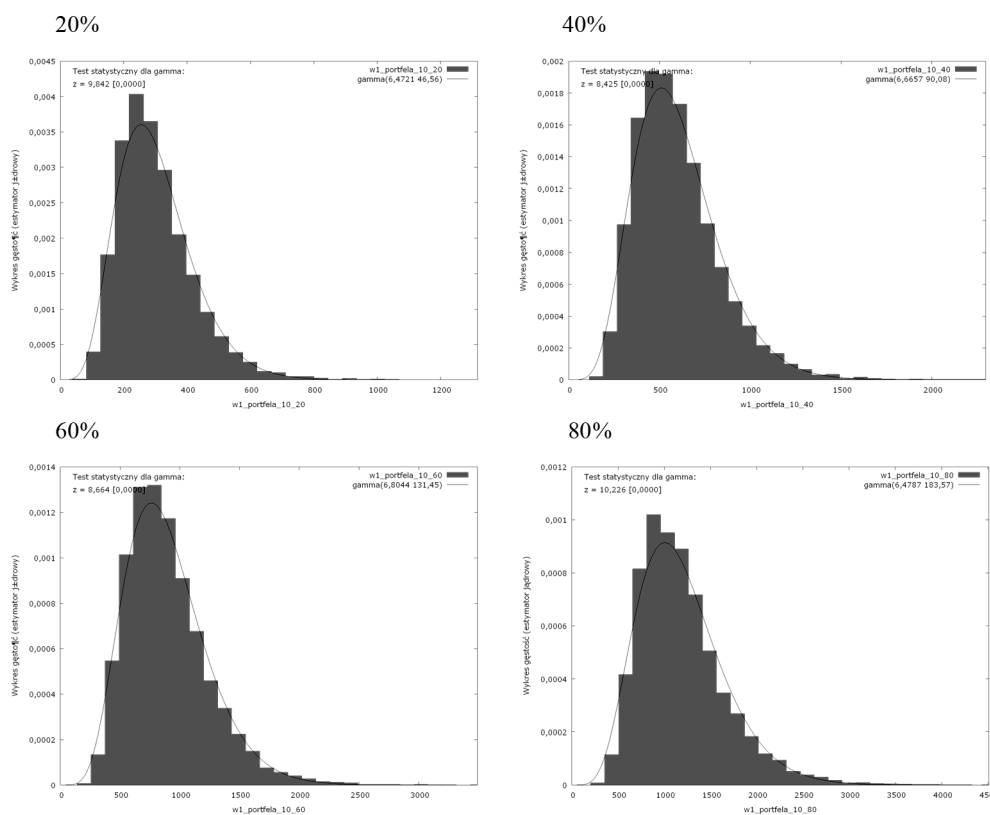


## 2.2. Przykład ubezpieczenia UFK

Jako przykład przeanalizowano kontrakt terminowy UFK na życie, zgodnie z którym jeśli ubezpieczony umrze w momencie  $t_i \in \Theta / \{t_0\}$ , ubezpieczyciel wypłaci mu gwarantowaną sumę ubezpieczenia plus nadwyżkę wynikającą z zaktualizowanej wartości wypłaty. Zatem jego wypłata w momencie  $t$  wyraża się wzorem:

$$V(B_{t_j}, t) = \frac{v(t_j)}{v(t)} G_{\Pi} + \frac{v(t_j)}{v(t)} \left( \Pi \sum_{i=0}^{t_j-1} S_{t_j} - 1 \right)^+.$$

Przyjęto, że ubezpieczony płaci składki stałej wysokości w momentach  $t_i \in \tilde{T}$ , gdzie  $\tilde{T} = \{0 = t_0 < \dots < t_n = T\}$  i z każdej z nich część inwestycyjna jest równa  $\Pi$ , co



Rys. 1. Rozkład wartości portfela ubezpieczenia UFK w z okresem  $n = 10$  i zmienną premią inwestycyjną

Źródło: opracowanie własne.

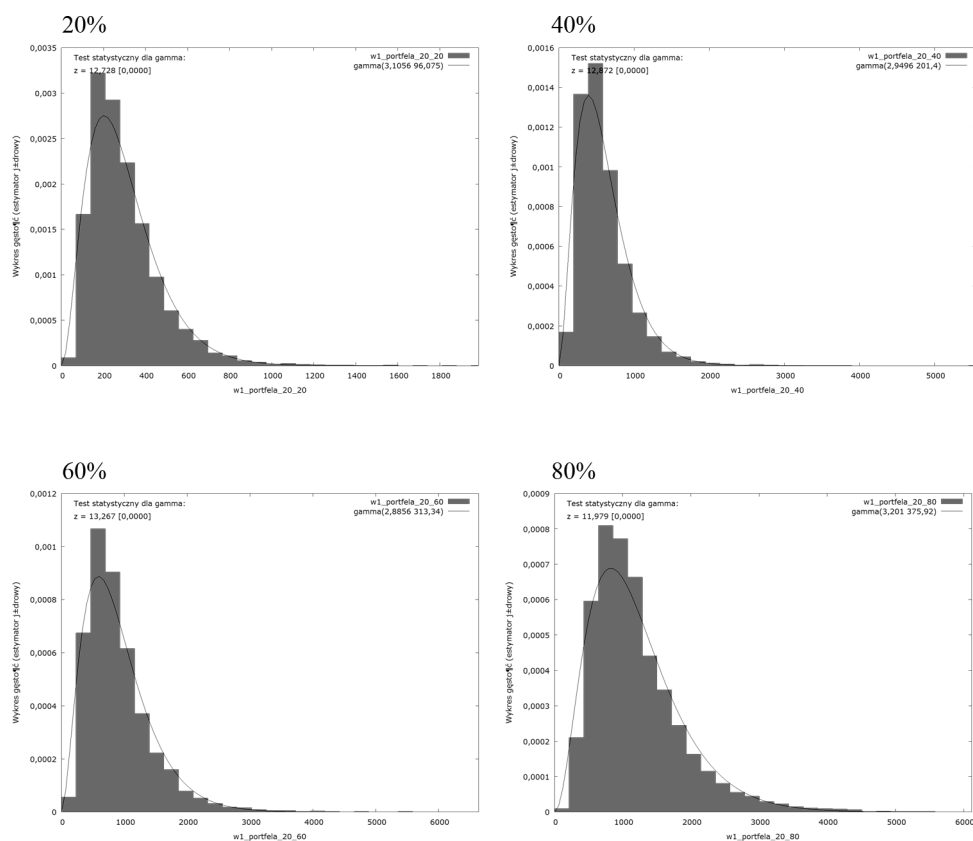
stanowi odpowiedni procent całkowitej składki brutto. Ponadto uwzględniono kapitalizację ciągłą zgodną ze scenariuszem:

$$\frac{v(t)}{v(t_0)} = e^{-t \ln(1,06)}.$$

Natomiast do wyznaczenia prawdopodobieństwa przeżycia i śmierci wykorzystano tablice umieralności oparte na prawie Makehama, zgodnie z którym:

$$l_x = 1000401,71 \cdot 0,99949255^x \cdot 0,99959845^{1,10291509^2}.$$

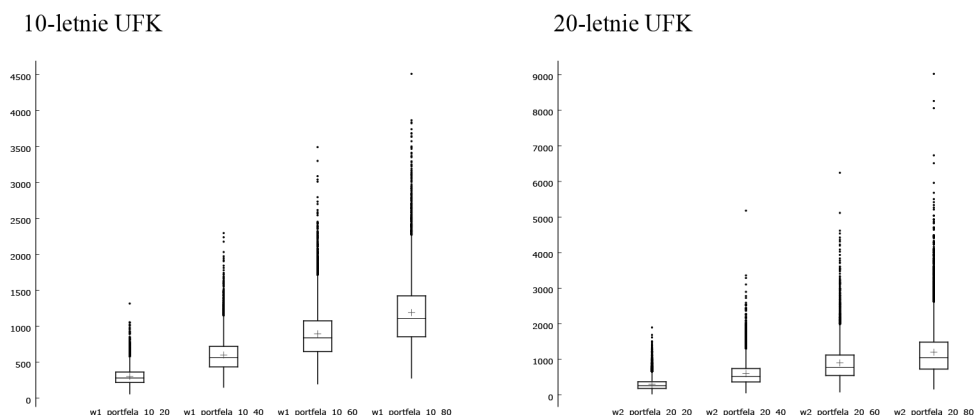
Wykorzystując metodę MC, wyznaczono wartość wypłaty dla ubezpieczenia UFK (z portfelem ubezpieczeniowym opartym na indeksie WIG 20) z kapitalizacją zgodną z przyjętym scenariuszem przy liczbie iteracji równej  $10^4$ . Zbadano więc rozkład wartości portfela referencyjnego dla 10- i 20-letniego kontraktu UFK w zależności od wysokości premii inwestycyjnej, czyli części inwestowanej składki. Wyniki z terminem wykonania  $T = n$  przedstawiono na rys. 1 i 2.



Rys. 2. Rozkład wartości portfela ubezpieczenia UFK w z okresie  $n = 20$  i zmienną premią inwestycyjną

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe histogramy wskazują, że procent inwestowanej składki, czyli premia inwestycyjna, w istotny sposób determinuje wartość portfela ubezpieczeniowego. Zarówno w 10-, jak i 20-letnim ubezpieczeniu UFK średnia wartość portfela wzrosła trzykrotnie, natomiast asymetria rozkładu jest coraz mniejsza. Kurtoza we wszystkich przypadkach przyjmuje wartość dodatnią, co oznacza, że rozkład jest bardziej smukły niż normalny, niemniej jednak wartość ta wraz ze wzrostem premii inwestycyjnej maleje. Przedstawione wyniki wskazują, że w przypadku ubezpieczeń na życie z funduszem kapitałowym zdecydowanie większego znaczenia nabiera okres ubezpieczenia wpływający na wartość portfela. W związku z tym o ubezpieczeniach tego typu należy myśleć w perspektywie długoterminowej. Własności te potwierdzają wykresy pudełkowe przedstawione na rys. 3.

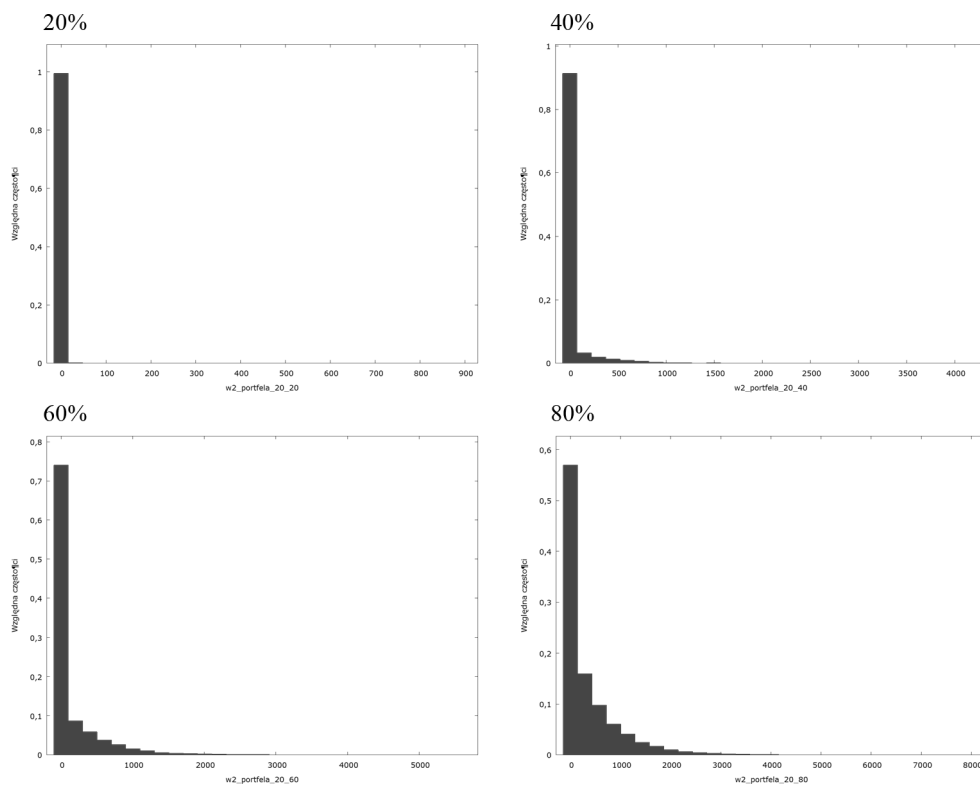


**Rys. 3.** Wykresy pudełkowe rozkładu wartości portfela ubezpieczenia UFK z okresem  $n = 10$  i  $20$

Źródło: opracowanie własne.

Istotne jest jednak to, że niezależnie od okresu trwania ubezpieczenia UFK największy odsetek stanowi wartość portfela nieprzekraczająca sumy gwarantowanej. A zatem w sytuacji, gdy ubezpieczyciel gwarantuje wypłatę ustalonej sumy ubezpieczenia, ubezpieczony powinien być zainteresowany kształtowaniem się nadwyżki, jaką wypłaci mu ubezpieczyciel ponad sumę gwarantowaną. Nadwyżka ta, jak wykazano, to wartość opcji kupna z ceną wykonania  $G_{II}$ , której ubezpieczony może oczekiwać, gdy opcja ta jest w cenie. Korzystając z przedstawionego wzoru, zbadać rozkład nadwyżki wynikającej z wartości portfela inwestycyjnego w terminie wykonania  $T$ .

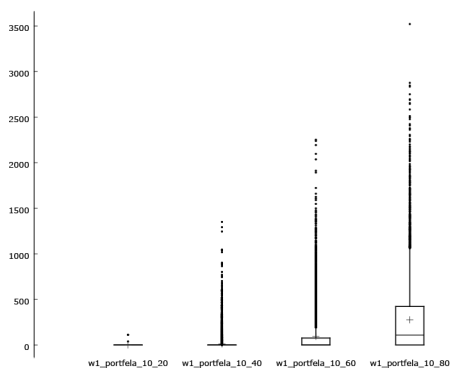
Otrzymane wyniki wskazują jednoznacznie na skrajną asymetryczność rozkładu nadwyżki z ubezpieczenia UFK i konieczność zastosowania odpowiedniej strategii inwestycyjnej gwarantującej wypłatę. Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, że ubezpieczony może kontrolować nadwyżkę, a tym samym wysokość wypłaty z tytułu ubezpieczenia unit-linked, dobierając odpowiednią strategię awersji do ryzyka, ustalając części składki budującej wartość portfela inwestycyjnego



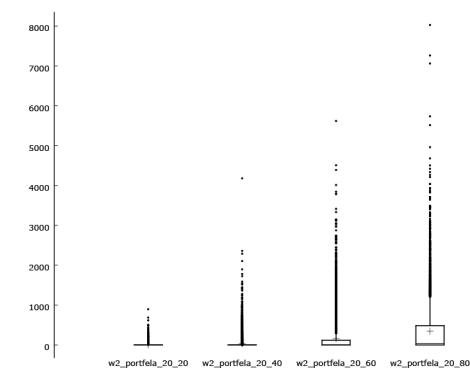
**Rys. 4.** Rozkład nadwyżki w ubezpieczeniu UFK z sumą gwarantowaną 1000 j.p. z okresem  $n = 20$  i terminem wykonania  $T = n$

Źródło: opracowanie własne.

### 10-letnie UFK



### 20-letnie UFK



**Rys. 5.** Rozkład nadwyżki w ubezpieczeniu UFK w z okresie  $n = 10$  i  $20$  w zależności od awersji do ryzyka (premia inwestycyjna na poziomie 20%, 40%, 60% i 80%)

Źródło: opracowanie własne.

w zależności od swoich oczekiwań. Wpływ strategii awersji do ryzyka na rozkład nadwyżki zarówno w 10-, jak i w 20-letnim ubezpieczeniu UFK przedstawiono na rys. 5.

Niezależnie od przyjętej strategii nadwyżka nad sumą gwarantowaną pojawia się dopiero w połowie trwania okresu ubezpieczenia, a procent inwestowanej części składki wpływa na jej dynamikę. Przeprowadzona analiza rozkładu wartości portfela i nadwyżki, jaką wypłaca ubezpieczyciel ponad sumę gwarantowaną, jednoznacznie potwierdza, jak istotnym elementem ubezpieczeń UFK jest świadomość osób ubezpieczających się. To ubezpieczony, dobierając odpowiednią strategię do okresu trwania ubezpieczenia, może kontrolować wartość portfela, a tym samym wypłacaną nadwyżkę finansową.

## Literatura

- Ballotta L., Habermann S., *The fair valuation problem of guaranteed annuity options: The stochastic mortality environment case*, „Insurance Mathematics&Economics” 2006, no. 38.
- Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg 1997.
- Glasserman P., *Monte Carlo methods in financial engineering*, “Stochastic Modelling and Applied Probability”, vol. 53, Springer-Verlag, New York 2004.
- Moller T., *Indifference pricing of insurance contracts In a products pace model: Applications*, „Insurance Mathematics&Economics” 2003, no. 32.
- Moller T., Steffensen M., *Market Valuation Methods in Life and Pension Insurance*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych, symulacje komputerowe, statystyka rynku*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

### DISTRIBUTION OF THE PAYMENTS IN THE UNIT-LINKED LIFE INSURANCE AND FINANCIAL RISK

**Summary:** Insurance which connects the protective nature and savings is the development of traditional life insurance. Life insurance linked to investment funds (unit-linked) so-called UFK is getting more and more popular in Poland. Contracts of this type are a combination of two products: insurance and investments. These are combined with an investment of insurance premium of investment funds in selected financial institutions. However, this combination creates a problem: correct valuation of UFK contract with both insurance and financial risks. An important element of this insurance is that the insured shall decide which assets to invest and what part of the premium to spend on investments. This was the premise for the proposition of the correct valuation of the unit-linked insurance portfolio and determination of the distribution of its value, and thus an indication of how the insured can control the value of the portfolio and insurance payment. Therefore it was analyzed if the strategy adopted by the insured, and referring to risk aversion and the level of investment premium determines the changes in the distribution of the insurance portfolio.

**Keywords:** unit-linked insurance, European option, valuation of insurance, Monte Carlo methods.