

PRACE NAUKOWE  
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 312

RESEARCH PAPERS  
of Wrocław University of Economics No. 312

# Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

Redaktor naukowy  
**Joanna Dębicka**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Dorota Pitulec

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

[www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl), [www.ebscohost.com](http://www.ebscohost.com),

The Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com),

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

[http://kangur.uek.krakow.pl/bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa

[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2013

**ISSN 1899-3192**

**ISBN 978-83-7695-315-1**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	7
<b>Wojciech Bijak</b> , Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa.....	9
<b>Joanna Dębicka</b> , Wpływ zmian parametrów tablic trwania życia w krajach Unii Europejskiej na wielkości aktuarialne .....	29
<b>Kamil Gala</b> , Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula.....	50
<b>Stanisław Heilpern</b> , Złożony proces Poissona z zależnymi okresami między szkodami i wielkościami szkód .....	67
<b>Magdalena Homa</b> , Rozkład wypłaty w ubezpieczeniu na życie z funduszem kapitałowym a ryzyko finansowe .....	78
<b>Helena Jasiulewicz</b> , Uogólnienie klasycznego procesu nadwyżki finansowej w czasie dyskretnym.....	88
<b>Agnieszka Marciniuk</b> , Długowieczność i instrumenty finansowe związane z długowiecznością .....	100
<b>Daniel Sobiecki</b> , Dwustopniowe modelowanie składki za ubezpieczenie komunikacyjne OC .....	116

## Summaries

<b>Wojciech Bijak</b> , Non-homogenous Markov chain models for life insurance..	28
<b>Joanna Dębicka</b> , Varying parameters of life tables in the European Union: influence on actuarial amounts .....	47
<b>Kamil Gala</b> , Analysis of multiple life insurance using copulas.....	66
<b>Stanisław Heilpern</b> , Compound Poisson process with dependent interclaim times and claim amounts .....	77
<b>Magdalena Homa</b> , Distribution of the payments in the unit-linked life insurance and financial risk .....	87
<b>Helena Jasiulewicz</b> , Generalization of a classical process of a financial surplus process in discrete time .....	99
<b>Agnieszka Marciniuk</b> , Longevity and financial instrument related to longevity .....	115
<b>Daniel Sobiecki</b> , Two-stage premium modelling in MTPL .....	134

**Agnieszka Marciniuk**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

## **DŁUGOWIECZNOŚĆ I INSTRUMENTY FINANSOWE ZWIĄZANE Z DŁUGOWIECZNOŚCIĄ**

---

**Streszczenie:** Spadek umieralności w stosunku do lat 60.-70. XX wieku obserwuje się u osób w wieku emerytalnym, którzy mogą oczekiwać, że będą dłużej żyć i pobierać świadczenia emerytalne. Z drugiej strony może pojawić się niewypłacalność systemów emerytalnych czy bankructwa firm ubezpieczeniowych, gdy okazuje się, że należy wypłacać świadczenia dłużej lub w innej wysokości, niż zakładano. Jak zabezpieczyć się przed taką sytuacją? Celem artykułu jest analiza wpływu wydłużającego się czasu trwania życia na kondycję finansową firm oraz przedstawienie struktury instrumentów stanowiących zabezpieczenie przed długowiecznością. Za pomocą własnych programów, na podstawie rzeczywistych danych stóp procentowych dla Polski obliczone są składki z dwóch zasad z uwzględnieniem rocznych zmian prawdopodobieństwa przeżycia. Na koniec przedstawione są wnioski.

**Słowa kluczowe:** długowieczność, sekurytyzacja, odwrócona hipoteka, opcje kupna, indeks przeżycia.

### **1. Wstęp**

Bardzo duży postęp w rozwoju medycyny oraz skuteczne uświadamianie społeczeństwa o zdrowym sposobie odżywiania się i prowadzenia zdrowego stylu życia przyczyniły się do wydłużania się przeciętnego dalszego trwania życia. Społeczeństwo żyje coraz dłużej, znacznie ponad przeciętne dalsze trwanie życia, a zjawisko takie nazywane jest długowiecznością. W ostatnich pięćdziesięciu latach nastąpił wzrost przeciętnego dalszego życia Polaków o ok. 10 lat, a znaczny spadek umieralności w stosunku do lat 60.-70. XX wieku obserwuje się u osób w wieku emerytalnym. Nie ulega wątpliwości, że jest to dobra wiadomość dla ludzi, którzy wkraczają w wiek emerytalny i mogą oczekiwać, że będą żyli dłużej i dłużej pobierali chociażby świadczenia emerytalne. Jednak z drugiej strony jest to sytuacja, w której może pojawić się wiele problemów związanych np. z niewypłacalnością systemów emerytalnych, bankructwem firm ubezpieczeniowych, oferujących ubezpieczenia na dożycie lub dożywotnie renty życiowe, czy też firm oferujących tzw. rentę hipoteczną, kiedy to okazuje się, że należy wypłacać świadczenia dłużej, niż zakładano, czy w innej wysokości, niż zakładano.

Pojawia się pytanie, jak można się zabezpieczyć przed sytuacją niewypłacalności czy niepoprawnego obliczania wypłacanych świadczeń związanych z prawdopodobieństwem przeżycia? Ponieważ pojemność rynku ubezpieczeniowego jest zbyt mała, to stworzone zostało narzędzie (sekurytyzacja) umożliwiające transfer tzw. ryzyka katastroficznego na rynki kapitałowe poprzez emisję papierów wartościowych. Wiele firm oferuje różnego rodzaju instrumenty finansowe, jak obligacje związane z długowiecznością (*longevity bonds*), swapy czy indeks LifeMetrics oparty na prawdopodobieństwie przeżycia. Celem artykułu jest analiza wpływu wydłużającego się czasu trwania życia na kondycję finansową firm ubezpieczeniowych, funduszy hipotecznych czy zakładów emerytalnych oraz przedstawienie struktury kilku instrumentów finansowych i sposobu ich wyceny i wykorzystania jako formy zabezpieczenia przed ryzykiem złego oszacowania pobieranych składek i wypłacanych świadczeń. Na podstawie rzeczywistych danych stóp procentowych i tablic trwania życia dla Polski obliczone są składki, jakie za taki instrument finansowy należy zapłacić (w przypadku modelu dyskretnego). Składki wyznaczone są według zasady równoważności oraz funkcji użyteczności, stosowanej w przypadku rynku ubezpieczeniowego, zarówno dla kobiet, jak i mężczyzn.

## 2. Długość trwania życia w Polsce i na tle niektórych krajów europejskich

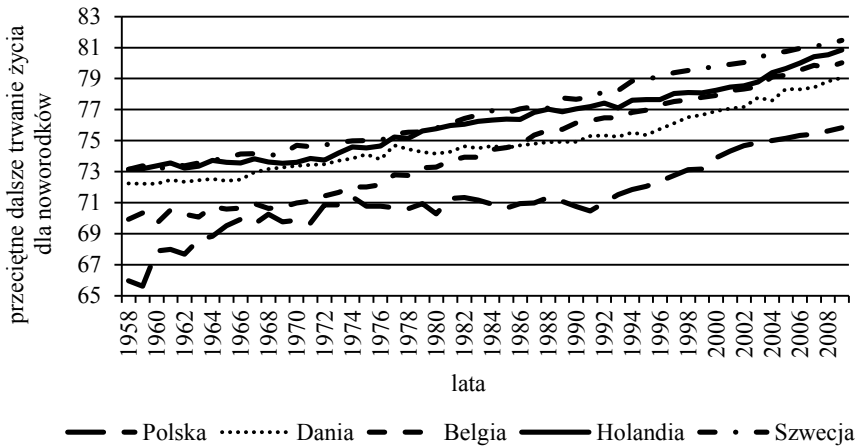
Przeciętne dalsze trwanie życia dla osób w wieku  $x$  lat oznacza się symbolem  $e_x$ . Przeciętne dalsze trwanie życia  $e_0$  dla osób nowo urodzonych w Polsce w latach 1958-2009 wzrosło o ok. 10 lat. Od roku 1958, od którego dostępne są dane (www.mortality.org) dla Polski, obserwuje się wzrost przeciętnego dalszego trwania życia. W latach 70.-80. XX wieku  $e_0$  utrzymywało się na podobnym poziomie, a od roku 1991 zaczęło ponownie wzrastać. W tab. 1 przedstawiono przeciętne dalsze trwanie życia noworodków, a także średni roczny i miesięczny przyrost dla Polaków ogółem oraz z rozróżnieniem na płeć w latach 1958-2009.

Na rys. 1 przedstawiono przeciętne dalsze trwanie życia ogółem dla osób urodzonych w niektórych krajach europejskich, a w tab. 2 średni roczny przyrost prze-

**Tabela 1.** Przeciętne dalsze trwanie życia Polaków w latach 1958-2009

	Kobiety	Mężczyźni	Ogółem
$e_0$ w 1958 r. (w latach)	68,63	63,03	65,97
$e_0$ w 2009 r. (w latach)	79,92	71,48	75,82
Przyrost $e_0$ (w latach)	11,29	8,45	9,85
Średni roczny przyrost $e_0$ w ciągu 52 lat (w latach)	0,22	0,16	0,19
Średni roczny przyrost $e_0$ (w m-c/rok)	2,61	1,95	2,27

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony www.mortality.org.



Rys. 1. Przeciętne dalsze trwanie życia noworodków ogółem w latach 1958-2009

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony [www.mortality.org](http://www.mortality.org).

Tabela 2. Średni roczny przyrost przeciętnego dalszego trwania życia w latach 1958-2009

	Kobiety	Mężczyźni	Ogółem
Polska	2,605	1,950	2,273
Dania	1,615	1,465	1,572
Belgia	2,275	2,280	2,326
Holandia	1,800	1,632	1,775
Szwecja	1,973	1,805	1,922

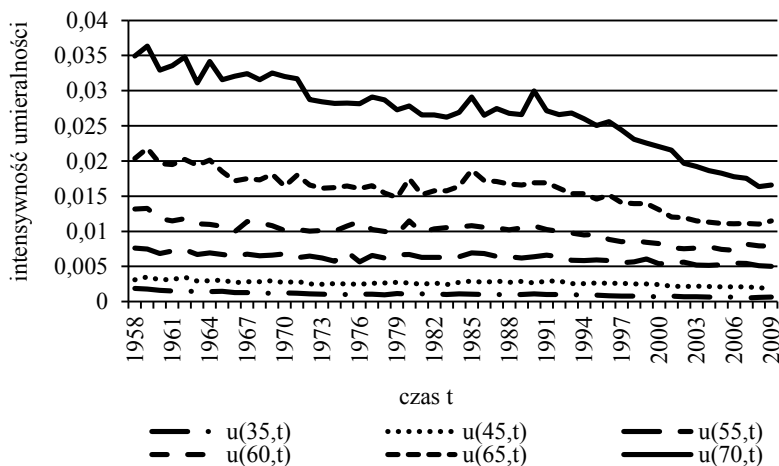
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony [www.mortality.org](http://www.mortality.org).

ciętnego dalszego trwania życia w miesiącach z rozróżnieniem na płeć w tych krajach w latach 1958-2009.

W porównaniu z Danią, Holandią, Belgią czy Szwecją wzrost  $e_0$  ogółem dla Polski jest największy, jednak przeciętne dalsze trwanie życia jest nadal niższe niż w porównywanych krajach. W roku 2009 dla Polaków ogółem  $e_0$  wynosiło ok. 76 lat, w pozostałych krajach ponad 79 lat. Największy przyrost  $e_0$ , równy ponad 2,6 miesiąca/rok, występuje dla kobiet w Polsce. Przyrost  $e_0$  powyżej 2 miesięcy w roku zarówno dla kobiet, jak i mężczyzn można zaobserwować również w Belgii. W Danii przyrost jest najmniejszy, ale kiedy w Polsce w roku 1958 przeciętne dalsze trwanie życia noworodków ogółem wynosiło 65,97 lat, to w Danii  $e_0$  było znacznie wyższe i wynosiło 72,24 lat.

Spółeczeństwo żyje coraz dłużej, znacznie ponad przeciętne dalsze trwanie życia. Zjawisko takie nazywane jest długowiecznością. Znaczny spadek umieralności w stosunku do lat 60.-70. XX wieku obserwuje się u osób w wieku emerytalnym, ale

nie tylko. Na rys. 2 przedstawiono intensywność umieralności w latach 1958-2009 dla kobiet w wieku 35, 45, 55, 60, 65 i 70 lat.



Rys. 2. Intensywność umieralności  $\mu(x,t)$  Polek w latach 1958-2009

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony [www.mortality.org](http://www.mortality.org).

Spadek intensywności umieralności  $\mu(x,t)$  u osób młodych na rys. 2 nie jest tak bardzo widoczny jak u osób starszych, gdyż intensywność umieralności jest na niskim poziomie. Okazuje się jednak, że spadek intensywność umieralności jest również duży dla ludzi w młodym wieku, np. wartość  $\mu(35,t)$  spadła o ponad 64% w roku 2009 w stosunku do roku 1958. Dla kolejnych  $x$  spadek jest mniejszy, np. dla  $x = 55$  wartość  $\mu(x,t)$  spadła o 34,3%. Powyżej wieku  $x = 55$  ponownie obserwuje się spadek intensywności umieralności, np. spadek  $\mu(65,t)$  wynosi prawie 44%.

### 3. Skutki wydłużania się czasu trwania życia

Nie ulega wątpliwości, że wydłużanie się czasu trwania życia to dobra wiadomość dla ludzi, którzy wkraczają w wiek emerytalny. Przyszli emeryci mogą oczekiwać, że będą dłużej żyć, dłużej cieszyć się wolnym czasem, który na emeryturze mogą wykorzystać w inny, może lepszy sposób, niż gdy pracowali, i dłużej będą pobierać chociażby świadczenia emerytalne. Z drugiej jednak strony może się okazać, że nie wystarczy im środków na to, żeby godnie przeżyć starość.

Nowy system emerytalny zakłada, że przy wyliczaniu emerytury zgromadzony kapitał jest dzielony przez przeciętną dalszą długość życia ogółem. Spowoduje to, że emerytury, które dla większości społeczeństwa i tak są niskie, będą jeszcze niższe. Nie jest to sytuacja korzystna dla emerytów. Tablice trwania życia były sporządzane do wieku 100 lat. Nie zakładano bowiem, że osób, które ukończą wiek 100 lat będzie

przybywać. Obecnie tablice trwania życia sporządzane są do wieku 110 lat. W Polsce w grupie stulatków jest prawie 3 tys. osób, a każda z tych osób otrzymuje specjalną dodatkową rentę z ZUS w wysokości 3000 zł. Ponadto do 2035 r. zakłada się, że liczba osób w wieku poprodukcyjnym wzrośnie z 6,4 mln do 9,6 mln (por. [Kostkowski, Miączyński 2013]), a w efekcie na jednego emeryta będą przypadać 2 osoby w wieku produkcyjnym (obecnie są to 4 osoby). Zadłużenie ZUS, który co roku występuje do budżetu państwa o dotacje na wypłatę emerytur, rośnie. W tym roku będzie to 37 mld zł. Nie jest to jedynie problem Polski. Koszty związane z niedoszacowaniem oczekiwanego dalszego czasu trwania życia np. w brytyjskim systemie emerytalnym wynoszą ok. 1 bln funtów. W roku 2010 zobowiązania z tego tytułu wzrosły o 5 mld funtów.

Wraz ze zwiększającym się prawdopodobieństwem przeżycia pojawia się również problem odpowiedniego obliczania składek w ubezpieczeniach na dożycie czy wypłacanych świadczeń, chociażby z tytułu tzw. hipoteki odwróconej. Można przytoczyć za [Stykowski 2012] przykład Jeanne Calmet, najdłużej żyjącej kobiety świata, której prawnik zaproponował coś w rodzaju hipoteki odwróconej, kiedy była w wieku 90 lat, w zamian za 2,5 tys. franków miesięcznie. Kobieta zmarła w wieku 122 lat, przeżywszy swojego prawnika. Spadkobiercy prawnika nadal musieli płacić jej rentę, która łącznie trzykrotnie przewyższyła wartość mieszkania.

Rozpatrzmy prosty przykład, gdy kobieta w wieku  $x$  lat wykupuje ubezpieczenie na dożycie na  $n$  lat, ze świadczeniem płatnym w wysokości  $b$  zł. Jednorazową składkę netto, jaką należy za takie ubezpieczenie zapłacić, oblicza się ze wzoru (por. [Bowers i in. 1986])

$$b \cdot A_{x:n|}^{\frac{1}{i}} = b \cdot (1+i)^{-1} \cdot {}_x p_n,$$

gdzie  $i$  oznacza stopę procentową.

Prawdopodobieństwo  ${}_x p_n$  że kobieta w wieku  $x$  lat przeżyje  $n$  lat, oblicza się z tablic trwania życia. W tab. 3 przedstawiono obliczone składki dla kobiety w wieku 35 i 67 lat, gdy ubezpieczenie zawarte jest na 20 lat, według tablic trwania życia z roku 1989, 1999 i 2009.

**Tabela 3.** Jednorazowa składka netto w ubezpieczeniu na dożycie

Wiek	Okres ubezpieczenia	Jednorazowa składka netto (j.s.n.)		
		1989	1999	2009
$x$	$n$			
35	20	35 577,5	35 786,6	36 130,8
	<i>j.s.n./j.s.n.</i> 1989		1,00588	1,01555
	<i>j.s.n./j.s.n.</i> 1999			1,00962
67	20	9 538,12	11 273	14 792,6
	<i>j.s.n./j.s.n.</i> 1989		1,18189	1,55090
	<i>j.s.n./j.s.n.</i> 1999			1,31222

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony [www.mortality.org](http://www.mortality.org).



Z analizy tab. 3 wynika, że w obliczeniach ważne jest, z jakich tablic trwania życia się korzysta. Dla kobiety w wieku 35 lat składka w roku 1999 w stosunku do składki w 1989 r. wzrosła o 0,5%, zaś w 2009 r. w stosunku do 1999 r. wzrosła o 1,5%. Składka w roku 2009 w stosunku do składki z roku 1999 wzrosła o ok. 1,01%. Wydaje się, że nie jest to duży wzrost, ale w skali portfela polis, gdy różnicę 344,20 zł na jedno ubezpieczenie przemnożymy przez liczbę osób ubezpieczonych (np. 10 tys. kobiet), to łączna różnica wynosi 3,442 mln zł. Zauważmy też, że składka dla kobiety w wieku 67 lat w roku 2009 w stosunku do roku 1999 jest wyższa o 30%, a to jest już zdecydowana różnica.

Jak wynika z powyższych przykładów, wydłużanie czasu trwania życia stwarza wiele sytuacji, w których może się pojawić sporo problemów, jak chociażby niewypłacalność systemów emerytalnych, bankructwa firm ubezpieczeniowych i reasekuracyjnych czy też firm oferujących tzw. rentę hipoteczną, kiedy to okazuje się, że należy wypłacać świadczenia dłużej, niż zakładano, czy w innej wysokości, niż zakładano. Rynek ubezpieczeniowy stwarza możliwość zabezpieczenia się przed takimi sytuacjami, a odpowiedź na pytanie, w jaki sposób można to zrobić, przedstawiona jest w kolejnym punkcie.

#### **4. Sekurytyzacja. Instrumenty finansowe oparte na długowieczności**

Sekurytyzacja jest to narzędzie umożliwiające transfer tzw. ryzyka „katastroficznego” na rynki kapitałowe poprzez emisję papierów wartościowych (por. [Kardasz 2010]). Pojemność rynku ubezpieczeniowego jest zbyt mała, dlatego z rynku ubezpieczeniowego przekazuje się ryzyko również na rynki kapitałowe.

Na rynkach finansowych sekurytyzacja pojawiła się już w latach 70., a na rynkach ubezpieczeniowych w latach 90. XX wieku, po katastrofach, które wyrządziły bardzo dużo szkód i spowodowały niewypłacalność wielu firm ubezpieczeniowych z dnia na dzień (np. huragan Andrew w 1992 r. – straty na kwotę 19,6 mld USD). W latach 1994-2002 w ubezpieczeniach majątkowych przeznaczono na sekurytyzację 15 mld USD, później zainteresowanie zaczęło spadać, czego powodem były wysokie koszty, brak rozwiązań prawnych, jak również zmiany cen na rynkach tradycyjnych. Sekurytyzacja jest dobrze rozwinięta na rynku USA oraz w Wielkiej Brytanii.

Wyróżnia się dwa rodzaje sekurytyzacji, tj. pierwotną i wtórną (por. [Kardasz 2010]). Sekurytyzacja pierwotna (bezpośrednia) ma miejsce wtedy, gdy cedentem ryzyka i emitentem papierów wartościowych jest ten sam podmiot, np. zakład ubezpieczeń lub reasekuracji. W emisji papierów wartościowych pośredniczy bank, a uzyskane w ten sposób środki lokowane są w wolne od ryzyka obligacje skarbowe. W przypadku tego typu sekurytyzacji ryzyko związane z emisją papierów wartościowych nie jest oddzielone od ryzyka związanego z główną działalnością gospodarczą,

co jest wadą tego typu zabezpieczenia. Sekurytyzacja wtórna (pośrednia) ma miejsce wtedy, gdy cedent zakłada niezależną spółkę celową (SPV – *special purpose vehicle* lub SPR – *special purpose reinsurance vehicle*), która przejmuje na siebie ryzyko emisji papierów wartościowych. Są to zwykle firmy reasekuracyjne, brokerzy reasekuracyjni oraz spółki, tzw. captive, należące do jednego podmiotu gospodarczego lub grup powiązanych, zajmujące się zabezpieczeniem ryzyka nieubezpieczonego, zakładane w rajach podatkowych. Środki zgromadzone z emisji papierów wartościowych lokowane są w bezpieczne instrumenty finansowe, a osiągnięty z nich zysk zamieniany jest na zmienne oprocentowanie oparte na LIBOR, co pozwala na redukcję stopy procentowej emitowanych papierów wartościowych. Inwestor otrzymuje marżę za przyjęcie ryzyka ponad stopę LIBOR.

Transfer ryzyka na rynki kapitałowe odbywa się za pomocą ubezpieczeniowych instrumentów finansowych. Jednym z takich instrumentów są *obligacje katastroficzne* (kryzysowe). Są to papiery wartościowe emitowane przez ubezpieczyciela, który w wyniku zajścia określonego katastroficznego zdarzenia naturalnego (np. huraganu, trzęsienia ziemi) w określonym czasie odpowiada za jego skutki. Jeżeli takie zdarzenie zajdzie, to emitent obligacji wypłaca świadczenie uzyskane z emisji papierów wartościowych, a jeżeli nie, to ubezpieczyciel wypłaca kwoty nominalne z obligacji powiększone o premię (por. [Stykowski 2012]). W listopadzie 2004 r. Europejski Bank Inwestycyjny we współpracy z BNP Paribas podjął nieudaną próbę emisji obligacji (*longevity bonds, survivor bonds*) związanych z długowiecznością (prawdopodobieństwem przeżycia) danej populacji. W konstrukcji indeksu, na którym obligacje były oparte, nie uwzględniono podziału populacji pod względem płci i wieku (por. [Kardasz 2010]), a ponadto ustalono sztywny poziom płatności emerytalnych (w rzeczywistości są one waloryzowane). Największa na świecie firma ubezpieczeniowa SwissRe w grudniu 2010 r. wyemitowała 8-letnie obligacje na 50 mln funtów, które uzależniają wysokość odsetek od różnicy demograficznej w trendach między określonymi grupami wiekowymi mieszkańców USA i Wielkiej Brytanii. Inwestorzy przejmują ryzyko do 2016 r., że średnia wieku Brytyjczyków będzie rosła wolniej niż Amerykanów. Inwestorzy ryzykują utratę części lub wszystkich swoich pieniędzy, gdy występuje duża rozbieżność między zmniejszeniem liczby zgonów mężczyzn w Wielkiej Brytanii w wieku od 75 do 85 a mężczyzn w wieku 55 lat do 65 w USA.

Popularnym instrumentem finansowym stały się tzw. *longevity swaps*. Są to umowy, w których uczestniczą np. bank i ubezpieczyciel (może to być również inny podmiot, np. oferujący hipotekę odwróconą). Strony kontraktu porównują w określonych jednostkach czasu (np. co miesiąc) kwotę  $A$ , jaką musi wypłacić ubezpieczyciel z umów, oraz kwotę  $B$ , na jaką została zawarta umowa. Jeśli  $A > B$ , to bank wypłaca ubezpieczycielowi różnicę wynikającą z porównywanych kwot, w przeciwnym razie ubezpieczyciel płaci bankowi. Jedną z największych instytucji finansowych na świecie, J.P. Morgan z Nowego Jorku, stworzyła swapy zwane *q-Forwards*. Fundusze emerytalne płacą ustalone składki dla kontrahenta na podstawie długości

życia członków towarzystwa ubezpieczeniowego do określonego wieku. Jeśli członkowie żyją dłużej, niż oczekiwano, kontrahent dokonuje zwrotu funduszy, jeśli umierają wcześniej, kontrahent zyskuje. Dziesięcioletni kontrakt, zawarty 31.12.2006 r., oparty jest na długości trwania życia mężczyzn w wieku 65 lat w Wielkiej Brytanii i opiewa na kwotę 50 mln funtów. Kwota nominalna, jaką można uzyskać z tego kontraktu, jest obliczana ze wzoru (por. [Coughlan i in. 2007]):

kwota nominalna =  $(1,2\% - \text{rzeczywiste prawdopodobieństwo śmierci}) \cdot 50 \text{ mln} \cdot 100$

Jeżeli np. rzeczywiste prawdopodobieństwo śmierci wyniesie 1,1%, to kwota nominalna wynosi 5 mln funtów i jest to zysk dla funduszu emerytalnego. Jeżeli natomiast rzeczywiste prawdopodobieństwo śmierci mężczyzn będzie równe 1,3%, to J.P. Morgan zarobi kwotę 5 mln funtów.

Tego typu instrumentów finansowych jest wiele. W lutym 2011 r. J.P. Morgan zaproponował amerykańskiej spółce technologicznej hedging dotyczący niedoszacowania średniej długości życia młodszej grupy pracowników firmy, którzy nie przeszli jeszcze na emeryturę. W tym celu został skonstruowany indeks *LifeMetrics* (por. [Wróbel 2011]). Transakcja została zawarta na 10 lat. Firmowy fundusz emerytalny nie musiał ponosić żadnych płatności z góry, a jeśli pracownicy będą pobierać świadczenia dłużej, niż założono w indeksie, to firma otrzyma na nie pieniądze od inwestorów, którym przekazała ryzyko. Innowacja tego rozwiązania polega na tym, że program nie jest przeznaczony dla obecnych emerytów, ale osób pracujących, dla których oczekiwaną dalszą długość życia jest znacznie trudniej oszacować. Obecnie J.P. Morgan przygotowuje analogiczne wersje indeksu dla rynku niemieckiego, brytyjskiego i holenderskiego.

## 5. Konstrukcja instrumentów finansowych opartych na indeksie przeżycia

Prawdopodobieństwo, że osoba w wieku  $x$  lat, przeżyje  $s + t$  lat oblicza się ze wzoru (por. [Bowers i in. 1986])

$${}_{s+t}P_x = {}_sP_x \cdot {}_tP_{x+s}$$

Korzystając z powyższej zależności, można wyprowadzić ogólny wzór na prawdopodobieństwo  ${}_n p_x$ , oparty na rocznych prawdopodobieństwach przeżycia, następującej postaci:

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+n-2} \cdot p_{x+n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} p_{x+k}$$

Prawdopodobieństwo, że osoba, które w chwili  $t_0$  jest w wieku  $x$ , przeżyje  $n$  lat, można obliczyć z powyższego wzoru, korzystając z tablic trwania życia dla roku poprzedniego<sup>1</sup>. Można też korzystać z kolejnych przybliżeń wartości  $p_x$ , gdzie

<sup>1</sup> Tablice trwania życia dla danego roku publikowane są z co najmniej rocznym opóźnieniem.

${}_t p_x = \exp(\mu(x, t))$ , przy czym intensywność umieralności  $\mu(x, t)$  jest modelowana i prognozowana za pomocą jakiegoś modelu intensywności umieralności (np. modelu Lee–Cartera (por. [Lee 2000])). Powstały w ten sposób szereg czasowy definiuje się jako indeks przeżycia (por. [Cox i in. 2010])

$${}_n p_{x, t_0} = \prod_{k=0}^{n-1} {}_n p_{x+k, t_0+k}, \quad (1)$$

gdzie  $t_0$  oznacza rok, dla którego wyznaczane jest prawdopodobieństwo.

Autorzy pracy [Cox i in. 2010] zastosowali indeks przeżycia do skonstruowania opcji kupna i opcji kołnierkowej z indeksem przeżycia w roli instrumentu bazowego, przy czym zdefiniowali oni funkcje wypłaty dla osób w wieku 65 lat ( $x = 65$ ) na  $n = 10$  lat w roku  $t_0 = 2005$ . Funkcja wypłaty opcji kupna dla dowolnych parametrów jest określona w następujący sposób

$$C_1 = \begin{cases} 0 & \text{gdy } {}_n p_{x, t_0} \leq p, \\ {}_n p_{x, t_0} - p & \text{gdy } {}_n p_{x, t_0} > p, \end{cases} \quad (2)$$

a opcji kołnierkowej następująco

$$C_2 = \begin{cases} 0 & \text{gdy } {}_n p_{x, t_0} \leq p_1, \\ {}_n p_{x, t_0} - p_1 & \text{gdy } p_1 < {}_n p_{x, t_0} < p_2, \\ p_2 - p_1 & \text{gdy } p_2 \leq {}_n p_{x, t_0}, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie  $p, p_1$  i  $p_2 \in [0, 1]$  są to poziomy, przy których daną opcję można wykonać.

Opcja kupna służy do zabezpieczenia sytuacji, gdy przeżywa więcej ludzi, niż zakładano, i trzeba dokonać większych wypłat. Mniejsza część ryzyka jest przenoszona na wystawcę opcji w sytuacji, gdy poziomy  $p$  i  $p_1$  są większe. W przypadku opcji kołnierkowej, aby zapobiec sytuacji nagłych dużych spadków umieralności, pojawia się poziom zabezpieczenia  $p_2$ , którego wyższa wartość powoduje, że większa część ryzyka przenoszona jest na wystawcę opcji.

Ze względu na to, że towarzystwa ubezpieczeniowe, zakłady emerytalne i fundusze hipoteczne wypłacają renty dożywotnie dla ludzi w różnym wieku, przez różne okresy, sensowne staje się wprowadzenie opcji kupna, dla której instrumentem bazowym jest wartość aktuarialna renty dożywotniej (por. [Czmochowski 2011])

$$C_3 = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a_{x, t_0+n} \leq a_{x, stala}, \\ a_{x, t_0+n} - a_{x, stala} & \text{gdy } a_{x, t_0+n} > a_{x, stala}, \end{cases} \quad (4)$$

gdzie  $t_0$  oznacza rok zawarcia kontraktu,  $n$  – okres, na jaki kontrakt jest zawierany, a  $a_{x, stala}$  jest to poziom zabezpieczenia.

Wartość aktuarialną renty dożywotniej oblicza się ze wzoru

$$a_{x,t} = \sum_{s=0}^{\omega_{\max}-x} v^s \cdot {}_s p_{x,t}, \quad (5)$$

gdzie  $\omega_{\max}$  oznacza wiek graniczny (obecnie w Polsce tablice trwania życia konstruowane są do wieku 110 lat),  ${}_s p_{x,t}$  jest to indeks przeżycia, a  $v$  to czynnik dyskontowania.

## 6. Metody wyceny instrumentów finansowych

Składkę, jaką trzeba zapłacić za dany instrument finansowy, można obliczyć różnymi metodami. W artykule składka jest obliczona dwoma sposobami, tj. za pomocą zasady równoważności oraz za pomocą zasady użyteczności.

Według zasady równoważności przeciętne przyszłe składki, zaktualizowane na chwilę  $t = 0$ , równoważą przeciętną wielkość świadczenia zaktualizowaną na chwilę  $t = 0$  (por. [Bowers i in. 1986]). Stąd otrzymujemy następujące równanie

$$E(P - v^T C_i) = 0,$$

gdzie  $P$  jest to składka,  $C_i$  – wypłata z  $i$ -tego instrumentu, a  $v$  jest to czynnik dyskontowania.

Z powyższego równania otrzymujemy

$$P = E(v^T C_i). \quad (6)$$

Według zasady użyteczności składkę  $P$  za przyjęte ryzyko wyznacza się z równania (por. [Ostasiewicz (red.) 2000])

$$E[u(\omega + P - v^T C_i)] = u(\omega), \quad (7)$$

gdzie  $u(\omega)$  jest to funkcja użyteczności, a  $\omega$  oznacza majątek firmy.

Jedną z funkcji użyteczności stosowanych w ubezpieczeniach jest funkcja postaci (por. [Ostasiewicz (red.) 2000])

$$u(\omega) = \frac{1 - e^{-\alpha\omega}}{\alpha}, \quad (8)$$

gdzie  $\alpha$  jest to stopień awersji ubezpieczyciela do ryzyka.

Wstawiając do równania (7) funkcję określoną wzorem (8), po przekształceniach otrzymujemy

$$P = \frac{1}{\alpha} \ln E[\exp(\alpha v^T C_i)]. \quad (9)$$

Czynnik dyskontowania może być stały, ale można go też obliczyć ze wzoru (por. [Marciniuk 2009])

$$v^T = \exp(-R_{0,T} \cdot T),$$

gdzie  $R_{0,t}$  oznacza natychmiastową stopę procentową.

Do najbardziej popularnych nielosowych modeli natychmiastowej stopy procentowej należy model Nelsona–Siegela i model Svenssona (por. [Anderson i in. 1996]). W artykule do obliczeń wykorzystany jest model Svenssona następującej postaci

$$R_{0,t} = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau_1}{t} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left( \frac{\tau_1}{t} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \left( \frac{\tau_2}{t} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right), \quad (10)$$

gdzie  $\tau > 0$ ,  $\beta_0 \geq 0$ ,  $\beta_0 + \beta_1 \geq 0$ .

Model ten jest modyfikacją modelu Nelsona–Siegela, a został wzbogacony o dodatkowe parametry  $\beta_3$  i  $\tau_2$ , co umożliwia większą elastyczność w modelowaniu funkcji  $R_{0,t}$  (uwzględnienie większej liczby ekstremów). Ponieważ  $\lim_{T \rightarrow \infty} R_{0,t} = \beta_0$ , to parametr  $\beta_0$  oznacza długoterminową stopę procentową i określa poziom krzywizny tej funkcji. Krótkoterminowa stopa procentowa jest równa  $\beta_0 + \beta_1$ . Parametr  $\beta_1$  określa stopień nachylenia krzywej. Parametr  $\beta_2$  odpowiada za kształt krzywej, a  $\tau_1, \tau_2$  są to parametry skali.

## 7. Przykładowa wycena numeryczna

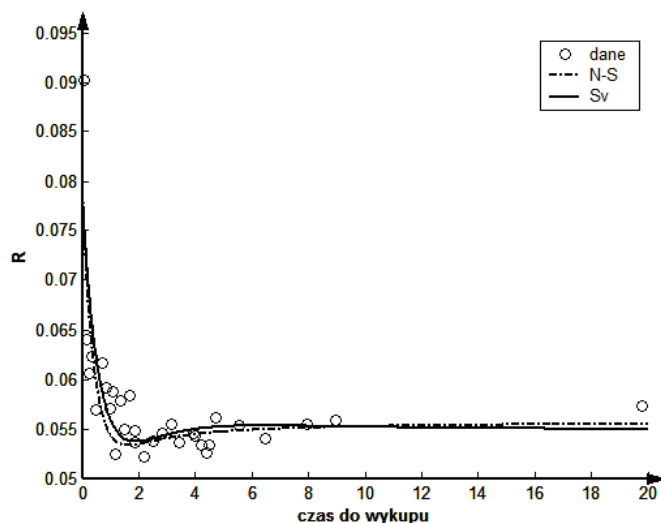
W tej części artykułu obliczone są składki, jakie należy zapłacić za opcję kupna z indeksem przeżycia (2) oraz rentą dożywotnią (4) jako instrumentem podstawowym, z rozróżnieniem na płeć. Obliczenia wykonane są za pomocą własnych programów. Dla przykładu przyjęto, że 10-letnie kontrakty zawarte są osobno dla 65-letnich kobiet i mężczyzn w roku 2002. Składki liczone są każdorazowo według zasady równoważności i zasady użyteczności. We wzorach (6) i (9) na składki występuje wartość oczekiwana zdyskontowanej wielkości wypłaty z poszczególnych instrumentów finansowych, którą oblicza się metodą Monte Carlo na podstawie  $N$  wygenerowanych trajektorii (ścieżek życia ubezpieczonych) według rozkładu prawdopodobieństwa przeżycia z polskich tablic trwania życia z 2002 roku. Ponadto mając w tym momencie dane z rocznych tablic trwania życia z lat 2002-2011<sup>2</sup>, trajektorie generuje się również na podstawie zmodyfikowanych rocznych prawdopodobieństw przeżycia (według rozkładu z tych tablic).

Na podstawie danych dotyczących stopy zwrotu z obligacji o stałym oprocentowaniu, notowanych na giełdzie papierów wartościowych w dniu 9.12.2002 r.<sup>3</sup>, oraz

<sup>2</sup> Źródło danych: [www.mortality.org](http://www.mortality.org) oraz [www.stat.gov.pl](http://www.stat.gov.pl).

<sup>3</sup> Źródło danych: [www.money.pl/pieniadze/bony.przetargi/](http://www.money.pl/pieniadze/bony.przetargi/).

przetargu bonów skarbowych z tego samego dnia<sup>4</sup>, estymowano parametry funkcji natychmiastowej stopy procentowej zarówno dla modelu Nelsona–Siegela (N–S), jak i dla modelu Svenssona (Sv). Estymacji dokonano metodą najmniejszych kwadratów przy użyciu pakietu Solver, stanowiącego dodatek do programu Excel. Dane oraz dopasowane funkcje przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Wykres natychmiastowej stopy procentowej

Źródło: opracowanie własne.

Jak wynika z rys. 3, obie funkcje są dobrze dopasowane do danych, minimalizowana suma kwadratów odległości między danymi a wartościami funkcji dla obu modeli jest podobnej wielkości i wynosi ok. 0,0004. Do obliczeń przyjęto model Svenssona, a estymowane parametry mają następujące wartości:

$$\beta_0 = 0,0547, \beta_1 = 0,0245, \beta_2 = -0,0549, \beta_3 = 0,0198, \tau_1 = 0,6669, \tau_2 = 1,2622.$$

W przypadku zasady użyteczności przyjęto niezbędną do obliczeń wartość stopnia awersji do ryzyka (wartość parametru  $\alpha$ ) równą 0,00000048 (por. [Cox i in. 2010]). Autorzy pracy [Cox i in. 2010] oszacowali parametr  $\alpha$  na podstawie amerykańskich danych dotyczących wykupionych indywidualnych rent. W tab. 4 przedstawiono cenę za opcję kupna z wypłatą, określoną wzorem (2), opiewającą na 1 mln zł, dla różnej wielkości poziomu  $p$ . Wygenerowano 10 000 trajektorii dla miliona kobiet w wieku 65 lat. Składkę wyliczono według tablic trwania życia z 2002 r. i rocznych tablic z lat 2002-2011.

Przy tak przyjętej wartości  $\alpha$  różnice między składką liczoną według zasady równoważności i użyteczności nie są znaczące. Składki obliczane na podstawie

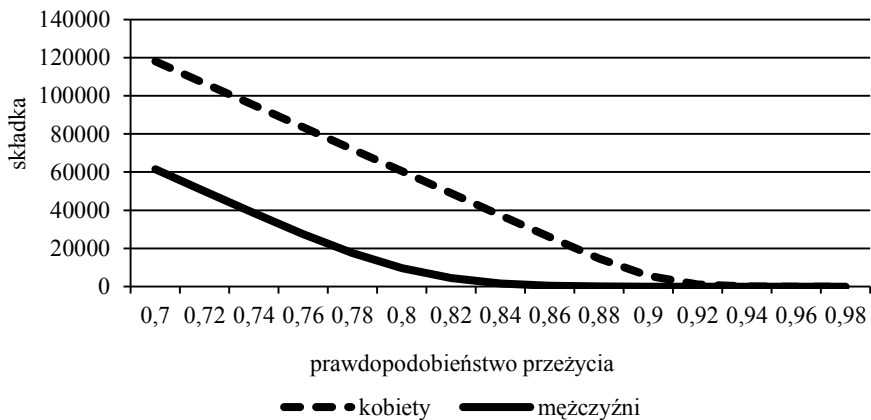
<sup>4</sup> Źródło danych: [http://bossa.pl/notowania/stopy/rentownosc\\_obligacji/](http://bossa.pl/notowania/stopy/rentownosc_obligacji/).

**Tabela 4.** Składki dla kobiet w przypadku opcji kupna opartej na indeksie przeżycia

$p - \text{const}$	Składka (w zł)			
	zasada użyteczności		zasada równoważności	
	t. 2002	t. roczne (2002-2011)	t. 2002	t. roczne (2002-2011)
0,70	118 020	125 650	118 050	125 670
0,72	106 510	114 140	106 530	114 160
0,74	94 990	102 620	95 010	102 640
0,76	83 470	91 100	83 500	91 120
0,78	71 960	79 590	71 980	79 600
0,80	60 440	68 070	60 460	68 090
0,82	48 920	56 550	48 950	56 570
0,84	37 400	45 030	37 430	45 050
0,86	25 900	33 520	25 920	33 540
0,88	14 690	22 020	14 710	22 030
0,90	5 590	10 980	5 600	10 990
0,92	1 080	3 010	1 090	3 020
0,94	80	280	80	280
0,96	0	10	0	10
0,98	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

rocznych tablic są wyższe niż w przypadku tablic z roku 2002, co oznacza, że prawdopodobieństwo przeżycia z roku na rok nadal wzrasta. Im niższy jest poziom  $p$ , tym wyższą składkę trzeba zapłacić, co wiąże się z przekazaniem większej części ryzyka na wystawcę opcji. Podobne wnioski są formułowane w odniesieniu do składek dla

**Rys. 4.** Składki dla kobiet i mężczyzn w przypadku opcji kupna opartej na indeksie przeżycia

Źródło: opracowanie własne.



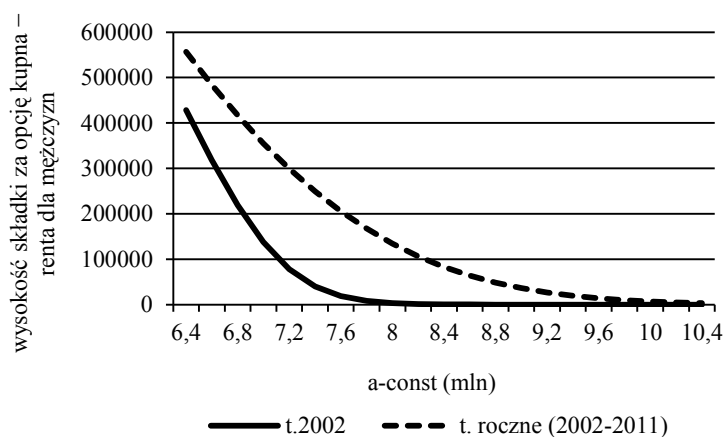
**Tabela 5.** Składki dla kobiet w przypadku opcji kupna opartej na rencie dożywotniej

$a_{65,stała} - \text{const}$ (w mln zł)	Składka (w zł)			
	Zasada użyteczności		Zasada równoważności	
	t. 2002	t. roczne (2002-2011)	t. 2002	t. roczne (2002-2011)
8	531 260	525 480	540 440	585 780
8,4	304 260	369 460	312 910	415 620
8,8	117 270	243 780	122 390	275 890
9,2	26 140	149 880	27 420	169 960
9,6	3 430	85 540	3 590	96 730
10	270	44 780	280	50 320
10,4	20	21 090	20	23 520
10,8	0	8 960	0	9 900
11,2	0	3 320	0	3 630
11,6	0	1 080	0	1 180
12	0	340	0	360

Źródło: opracowanie własne.

mężczyzn. Składki dla mężczyzn są podobnej wysokości, ale przy niższym poziomie  $p$  (dla  $p$  równego ok. 0,6), co jest wynikiem tego, że prawdopodobieństwo przeżycia mężczyzn jest niższe niż kobiet w tym samym wieku. Na rys. 4 przedstawiono dla porównania składki dla kobiet i mężczyzn wyznaczone na podstawie tablic trwania życia z 2002 r. (wyznaczone dla takich samych parametrów).

W tab. 5 przedstawiono cenę za opcję kupna z wypłatą w kwocie 1 mln zł, określoną wzorem (4), dla różnej wielkości poziomu  $a_{65,stała}$ . Wygenerowano 10 000

**Rys. 5.** Składki dla mężczyzn w przypadku opcji kupna opartej na rencie dożywotniej

Źródło: opracowanie własne.

trajektorii dla miliona kobiet w wieku 65 lat. Jak poprzednio, składkę obliczono według tablic trwania życia z 2002 r. i rocznych tablic z lat 2002-2011.

W tym przypadku można zaobserwować różnice między składką wyznaczaną według zasady równoważności i zasady użyteczności (te drugie są niższe). W przypadku wygenerowanych trajektorii dla  $a_{65,stała} = 8$  mln składka liczona według tablic rocznych jest nieco niższa niż składka liczona według tablic z 2002 r. (według zasady użyteczności), w pozostałych przypadkach składka jest wyższa. Dla niższego poziomu  $a_{65,stała}$  składka liczona według tablic z 2002 r. jest równa zero, co również wskazuje na to, że z roku na rok podwyższa się prawdopodobieństwo przeżycia i trzeba być ostrożnym w podejmowaniu decyzji i obliczaniu składek. Podobnie jest w przypadku składek obliczonych dla mężczyzn, jednak różnice między składkami wyznaczonymi różnymi metodami są wyższe. Zmienił się też znacząco poziom stałej wartości aktuarialnej renty  $a_{65,stała}$ , który dla mężczyzn przy składce podobnej wysokości jest o ok. 2 mln niższy. Składki dla mężczyzn wyznaczone przy takich samych parametrach są przedstawione na rys. 5.

## 8. Podsumowanie i wnioski

Spółeczeństwo starzeje się, a wydłużające się przeciętne dalsze trwanie życia ma wpływ na wyznaczone wielkości aktuarialne rent życiowych, na wysokość emerytur czy rent hipotecznych. Zakłady ubezpieczeniowe, fundusze emerytalne i hipoteczne muszą zabezpieczyć się przed złą wyceną wypłacanych świadczeń czy złym oszacowaniem czasu, przez który te świadczenia mają być wypłacane. W artykule przedstawiono kilka instrumentów finansowych służących jako forma zabezpieczenia się przed długowiecznością. Na przykładzie polskich tablic trwania życia wyznaczone zostały składki, jakie należy zapłacić za opcję kupna, której instrumentem bazowym jest indeks przeżycia lub renta dożywotnia. Składki zostały wyznaczone w przypadku dyskretnym według zasady równoważności i użyteczności na podstawie tablic trwania życia z roku 2002 i rocznych tablic trwania życia z lat 2002-2011. Różnice między składką wyznaczaną według zasady równoważności a składką wyznaczaną według zasady użyteczności dla przyjętego parametru  $\alpha$  są małe (parametr  $\alpha$  musiałby być znacząco większy, żeby różnice w składkach były większe). Różnice między składką opartą na tablicach trwania życia z roku 2002 a opartą na rocznych tablicach (corocznie uwzględniane zmiany rozkładu prawdopodobieństwa przeżycia) są znaczące. Towarzystwa ubezpieczeniowe, emerytalne czy fundusze hipoteczne muszą częściej niż raz na kilkanaście lat uwzględniać zmiany w długości życia swoich klientów. Z roku na rok podwyższa się prawdopodobieństwo przeżycia, trzeba więc być ostrożnym w podejmowaniu decyzji oraz w wyznaczaniu płaconych za przekazywane ryzyko składek, ale również wypłacanych świadczeń.

Znaczące różnice w wysokościach składek daje się zauważyć dla kobiet i mężczyzn (różnice w poziomach zabezpieczenia – niższe dla mężczyzn), co pozwala wnioskować, że instrumenty finansowe powinny być oferowane nie tylko dla konkretnej grupy wiekowej, ale również z podziałem na płeć.

## Literatura

- Anderson N., Breedon F., Deacon M., Derry A., Murphy G., *Estimating and Interpreting the Yield Curve*, John Wiley & Sons, Chichester 1996.
- Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman, J.C., Jones D.A., Nesbit C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois 1986.
- Coughlan G., Epstein D., Sinha A., Honig P., *q-Forwards: derivatives for transferring longevity and mortality risk*, 02.02.2007, [https://www.jpmmorgan.com/cm/BlobServer/LM\\_Q\\_forwards.pdf?blobkey=id&blobwhere=1158464081417&blobheader=application%2Fpdf&blobcol=url-data&blobtable=MungoBlobs](https://www.jpmmorgan.com/cm/BlobServer/LM_Q_forwards.pdf?blobkey=id&blobwhere=1158464081417&blobheader=application%2Fpdf&blobcol=url-data&blobtable=MungoBlobs) (pobrano 08.01.2013).
- Cox S.H., Lin Y., Pedersen H. *Mortality risk modeling: Applications to insurance securitization*, "Insurance: Mathematics and Economics" 2010, 46, s. 242-253.
- Czmochoński P., *Instrumenty finansowe związane z ryzykiem długowieczności*, praca dyplomowa, Politechnika Wroclawska 2011.
- Kardasz W., *Sekurytyzacja jako nowy element zarządzania ryzykiem w zakładzie ubezpieczeniowym i reasekuracyjnym*, 2010, <http://www.rzu.gov.pl/> (pobrano 05.01.2013).
- Kostkowski L., Miączyński P., *Praca po siedemdziesiątce? Budżet nie wytrzyma wzrastającej długości życia*, „Gazeta Wyborcza”, 1.04.2013, [http://wyborcza.pl/1,75248,13663437,Praca\\_po\\_siedemdziesiątce\\_\\_Budżet\\_nie\\_wytrzyma\\_wzrastającej.html](http://wyborcza.pl/1,75248,13663437,Praca_po_siedemdziesiątce__Budżet_nie_wytrzyma_wzrastającej.html) (pobrano 02.04.2013).
- Lee R., *The Lee-Carter Method for forecasting mortality, with various extensions and applications*, "North American Actuarial Journal" 2000, vol. 4, no. 1, s. 80-93.
- Marciniuk A., *Nielosowe modele natychmiastowej stopy procentowej i ich zastosowanie w klasycznych ubezpieczeniach życiowych*, *Ekonometria* 27, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 84, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław 2009, s. 112-127.
- Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2000.
- Stykowski P., *Zabezpieczenie przed długowiecznością*, 26.01.2012, Parkiet, <http://blog.parkiet.com/stykowski/2012/01/26/zabezpieczenie-przed-długowiecznością/> (pobrano 08.01.2013).
- Wróbel Ł., *Ryzyko długowieczności już niestraszne*, 04.02.2011, <http://m.onet.pl/biznes/analizy,wpm26> (pobrano 05.01.2013).

## LONGEVITY AND FINANCIAL INSTRUMENTS RELATED TO LONGEVITY

**Summary:** A significant decrease in mortality is observed in people at retirement age compared to the 60s-70s of the 20th century. They can expect that they will live and receive retirement benefits longer. However insolvency of pension systems, the bankruptcy of insurance companies could be possible, when it turns out that benefits should be paid for longer, or at a different amount than expected. How to protect against this situation? The aim of the article is the analysis of the impact of a lifetime increase on the financial condition of companies and the presentation of the structure of several kinds of financial instruments that hedge the longevity. Premiums are calculated by the two principles, taking into account the annual changes of survival probability by using own programs. The conclusions are presented in the last part of the article.

**Keywords:** longevity, securitization, reverse mortgage, call option, longevity index.