DIDACTICS
OF
MATHEMATICS

8(12)

The Publishing House
of Wrocław University of Economics
Wrocław 2011

Referee
Henryk Zawadzki
(University of Economics in Katowice)

Copy-editing
Dorota Pitulec

Proof-reading
Barbara Łopusiewicz

Typesetting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, Sower
(private collection)

This publication is available at: www. journal.ue.wroc.pl and www.ibuk.pl.
Abstracts of published papers are available in the international database
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities
http://cejsh.icm.edu.pl

Information on submitting and reviewing paper is available
on the Publishing House's website www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1733-7941

The original version: printed
Printing: Printing House TOTEM
Print run: 200 copies

TABLE OF CONTENTS

D I D A C T I C S O F M A T H E M A T I C S

No. 8 (12) 2011

ZŁOTA ELIPSA I ZŁOTA HIPERBOLA

Tadeusz Janaszak

Abstract. An ellipse, parabola and hyperbola are the curve that can be obtained as the plane section of cone; there are characterizations, one of which is by means of the focus and directrix property. The golden ellipse or the golden hyperbola is the curve, which has golden eccentricity.

Keywords: ellipse, hyperbola, parabola, focus, directrix, eccentricity, major axis, minor axis, equation of the ellipse, equations of the hyperbola, equation of the parabola, conic section curve.

1. Wstęp

Krzywe stożkowe można zdefiniować jako zbiory punktów płaszczyzny, których odległości od ustalonego punktu zwanego **ogniskiem** i ustalonej prostej zwanej **kierownicą**[1] pozostają w stałym stosunku. Ognisko oznaczmy symbolem *F*, natomiast kierownicę symbolem *K*. Zgodnie z przyjętym założeniem mamy: $F \notin K$. Niech będzie dana liczba dodatnia *e*; nazwiemy ją *mimośrodem* krzywej stożkowej.

Definicja 1. *Niech M oznacza dowolny punkt płaszczyzny. Mówimy, że punkt M należy do krzywej stożkowej S, jeśli iloraz odległości tego punktu od ogniska F i jego odległości od kierownicy K jest równy liczbie e. Czyli* $M \in S$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{|MF|}{|MK|} = e . \tag{1}$$

Definicja 2. *Jeśli* $0 < e < 1$, *wówczas krzywą stożkową S nazywamy* ***elipsą****.*

Taduesz Janaszak
Department of Mathematics, Wrocław University of Economics, Komandorska Street 118/120, 53-345 Wrocław, Poland.
E-mail: tadeusz.janaszak@ue.wroc.pl

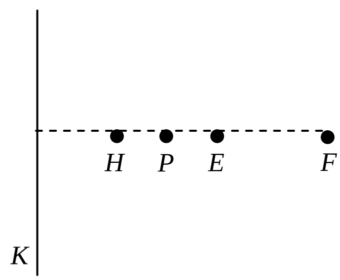
[1] Zakładamy, że ognisko nie leży na kierownicy.

Definicja 3. *Jeśli* $e = 1$, *wówczas krzywą stożkową S nazywamy* ***parabolą***.

Definicja 4. *Jeśli* $e > 1$, *wówczas krzywą stożkową S nazywamy* ***hiperbolą***.

W dalszym ciągu zwrócimy uwagę na to, że parabola ma jedno ognisko i jedną kierownicę, natomiast elipsa i hiperbola mają dwa ogniska i dwie kierownice. Rozważając bowiem, zgodnie z przyjętymi definicjami, elipsę i hiperbolę jako krzywe zależne od ogniska, kierownicy i mimośrodu różnego od jedynki, zauważymy, że w naturalny sposób u obu krzywych pojawi się drugie ognisko i druga kierownica.

Narysujmy kierownicę *K* i ognisko *F* oraz połączmy prostą *K* z punktem *F* za pomocą odcinka (zob. rys. 1).



Rys. 1. Kierownica, ognisko oraz punkty wierzchołkowe hiperboli, paraboli i elipsy

Źródło: opracowanie własne.

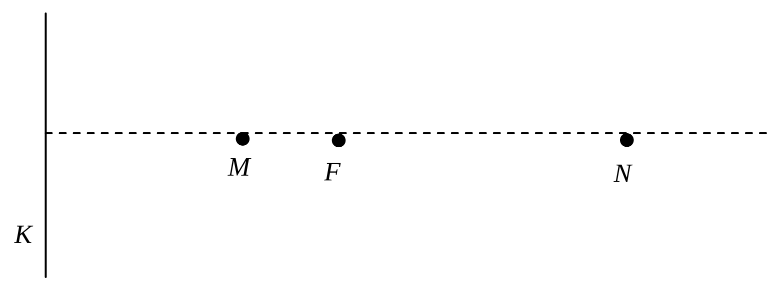
Na rys. 1 ognisko *f* jest umieszczone w odległości *dwunastu spacji* od kierownicy *k* . Punkt *p* leży na środku odcinka prostopadłego do prostej *k*, łączącego tę prostą z punktem f. Odległość tego punktu, zarówno od prostej *k*, jak i od punktu *f*, wynosi sześć spacji. Punkt *p*, zgodnie z przyjętą definicją, należy do paraboli, której prosta *k* jest kierownicą, a punkt *f* ogniskiem.

Punkt *e* jest położony pomiędzy punktami *p* oraz *f*, czyli jego odległość od punktu *f* jest mniejsza niż odległość od prostej *k*. Wynika z tego, że punkt *e* należy do elipsy, której prosta *k* jest kierownicą, a punkt *f* ogniskiem; mimośrodem tej elipsy jest liczba $e = \frac{|EF|}{|EK|}$; z położenia punktu *e* wynika, że zdefiniowana liczba *e* jest mniejsza od jedynki.

Analogiczne rozważanie doprowadzi do tego, że punkt H położony między prostą K oraz punktem P należy do hiperboli o mimośrodzie równym $e = \frac{|HF|}{|HK|}$; z położenia punktu H wynika, że liczba ta jest większa od jedynki.

2. Elipsa

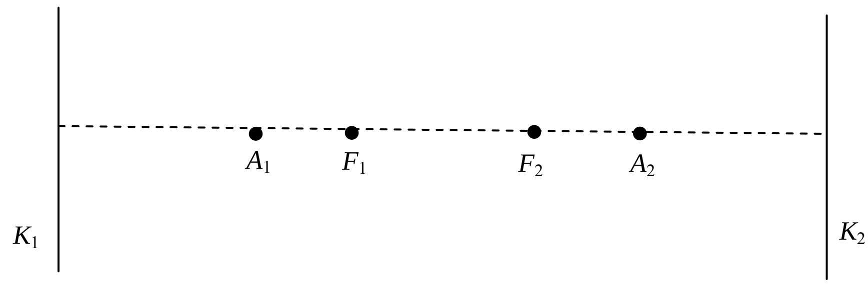
Spójrzmy na rys. 2. Zaznaczono na nim kierownicę K jako linię pionową i odległe od niej o *dwanaście spacji* ognisko F. Przyjmujemy mimośród równy: $e = \frac{1}{2}$. Na linii przerywanej przechodzącej przez ognisko F i prostopadłej do kierownicy K znajdujemy dwa punkty elipsy S. Są to punkty M oraz N. Punkt M jest odległy: od kierownicy K o *osiem spacji* i od ogniska F o *cztery spacje*; punkt N znajduje się w odległości *dwudziestu czterech spacji* od kierownicy K i *dwunastu spacji* od ogniska F. Zgodnie z przyjętą definicją oba punkty M i N należą do elipsy S, gdyż ich odległości od kierownicy i ogniska spełniają równanie (1) dla $e = \frac{1}{2}$, mamy bowiem: $\frac{|MF|}{|MK|} = \frac{1}{2}$ oraz $\frac{|NF|}{|NK|} = \frac{1}{2}$.



Rys. 2. Kierownica i punkty wierzchołkowe elipsy

Źródło: opracowanie własne.

Widzimy zatem, że jeśli między punktami F oraz N umieścimy punkt F_2 w odległości *czterech spacji* od punktu N oraz *ośmiu spacji* od ogniska F oraz prostą K_2 prostopadłą do linii przerywanej, na której leżą punkty M, F i N, w odległości *ośmiu spacji* w prawo od punktu N, wówczas otrzymamy drugie ognisko F_2 i drugą kierownicę K_2. Umieścimy to wszystko na rys. 3, zmieniając przy okazji oznaczenia: zamiast F napiszemy F_1, zamiast K napiszemy K_1, oznaczenie M zmienimy na A_1, a oznaczenie N na A_2.



Rys. 3. Dwie kierownice, dwa ogniska i dwa punkty wierzchołkowe

Źródło: opracowanie własne.

Widzimy zatem, że przyjmując w definicji elipsy jedno ognisko i jedną kierownicę, odkrywamy, że pojawiają się symetrycznie położone drugie ognisko i druga kierownica.

Z rys. 3 możemy wywnioskować, że kształt elipsy będzie zależał od odległości między ogniskiem i odpowiadającą mu kierownicą, oznaczmy to liczbą $r = |F_1K_1| = |F_2K_2|$, symbol r od słowa *rozstęp*, oraz od mimośrodu $e = \frac{|A_1F_1|}{|A_1K_1|} = \frac{|A_2F_2|}{|A_2K_2|}$. Wracając do rys. 1, wybór punktu E położonego między punktami P i F w sposób jednoznaczny określa elipsę o kierownicy K i ognisku F. Rozstęp r jest dany odległością punktu F od prostej K, mimośród jest ilorazem odległości punktu E od punktu F oraz punktu E od prostej K.

Wybierając zatem punkt E tak, by podział prostopadłego do kierownicy odcinka łączącego ognisko z tą kierownicą był złoty, otrzymujemy ***złotą elipsę***. Po zapoznaniu się z dalszą treścią artykułu zaleca się napisanie równania złotej elipsy i wykreślenie jej w odpowiednim programie komputerowym, np. w Matlabie. Zgodnie z kanonami malarskimi powinna to być najbardziej proporcjonalna elipsa ze wszystkich możliwych. Analogicznie, jeśli punkt H będzie położony w ten sposób, że będzie on dzielił ten sam odcinek w sposób złoty, z drugiej strony otrzymamy ***złotą hiperbolę***. Interesującym ćwiczeniem jest podanie jej równania i wykreślenie w programie komputerowym. Aby otrzymać ***złoty efekt***, należy w pionie i w poziomie polecić zastosowanie tej samej wielkości jednostki.

Wyprowadzimy teraz równanie elipsy w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych.

Umieszczając początek układu współrzędnych na linii przerywanej pośrodku obu ognisk (rys. 3)[2], przyjmijmy współrzędne: $F_1(-c,\ \ 0)$, $F_2(c,\ \ 0)$, $A_1(-a,\ \ 0)$, $A_2(a,\ \ 0)$; równanie kierownicy K_1: $x=-k$, kierownicy K_2: $x=k$, gdzie liczby *c, a* oraz *k* są dodatnie.

Jako **wyjściowe parametry** przyjmujemy rozstęp[3] $r>0$ oraz mimośród $e\in(0,\ \ 1)$. Wyliczymy liczby *c, a* oraz *k* w zależności od wyjściowych parametrów *r* oraz *e*. Otrzymamy je, rozwiązując układ równań:

$$\frac{a-c}{k-a}=e\,, \tag{2}$$

$$k-c=r\,, \tag{3}$$

$$\frac{c+a}{k+a}=e\,. \tag{4}$$

Równania wynikają z analizy położenia punktów na rys. 3. Układ tych trzech równań jest układem liniowym; zapiszemy go w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} -1 & (1+e) & -e \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & (1-e) & -e \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c \\ a \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

rozwiązujemy go za pomocą wzorów Cramera. Wyznacznik główny wynosi $W=2\cdot(1-e^2)$. Wyznacznik dla niewiadomej *k* jest równy $W_k=2\cdot r$, dla niewiadomej *a:* $W_a=2\cdot e\cdot r$, wreszcie dla niewiadomej *c*: $W_c=2\cdot e^2\cdot r$. Dostajemy następujące rozwiązanie układu (5):

$$c=\frac{e^2}{1-e^2}\cdot r\,, \tag{6}$$

$$a=\frac{e}{1-e^2}\cdot r\,, \tag{7}$$

$$k=\frac{1}{1-e^2}\cdot r\,. \tag{8}$$

---

[2] Oś odciętych pokrywa się z linia przerywaną.

[3] Uwaga: termin rozstęp nie jest ogólnie używany, my uważamy, że termin ten jest wygodny.

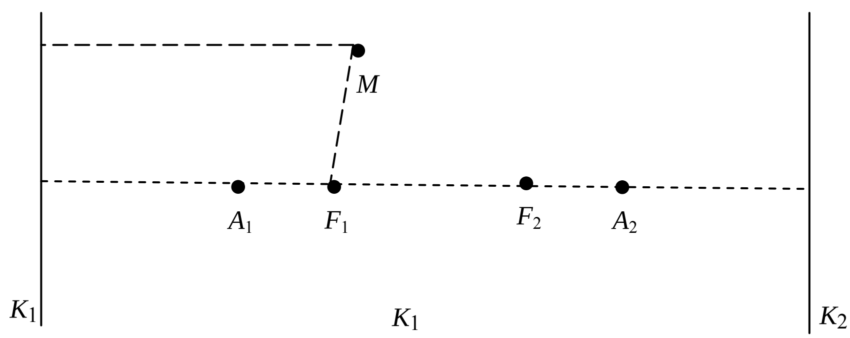
Tak więc z podstawowych parametrów elipsy: rozstępu *r* i mimośrodu *e* wywiedliśmy współrzędne ogniska, kierownicy i końcowych punktów elipsy położonej w układzie współrzędnych centralnie, gdzie kierownice są prostopadłe do osi odciętych, a równoległe do osi rzędnych. Z trzech wzorów (5), (6) i (7) wynikają zależności między współrzędnymi:

$$c = e \cdot a = e^2 \cdot k, \tag{9}$$

$$a = e \cdot k. \tag{10}$$

Odstęp między ogniskami wynosi $2 \cdot c = 2 \cdot \frac{e^2}{1-e^2} \cdot r$; odległość między kierownicami jest równa $2 \cdot k = 2 \cdot \frac{1}{1-e^2} \cdot r$; oś wielka elipsy jest równa $2 \cdot a = 2 \cdot \frac{e}{1-e^2} \cdot r$.

Obecnie wyprowadzimy równanie elipsy w przyjętym układzie współrzędnych. Niech punkt $M(x, \quad y)$ będzie punktem należącym do elipsy *S*.



Rys. 4. Kierownice, ogniska, punkty wierzchołkowe i dowolny punkt elipsy

Źródło: opracowanie własne.

Równanie (1) możemy przepisać w formie:

$$\frac{|MF_1|^2}{|MK_1|^2} = e^2, \tag{11}$$

czyli

$$\frac{(x+c)^2+y^2}{(x+k)^2}=e^2, \tag{12}$$

skąd

$$x^2+2xc+c^2+y^2=e^2x^2+2e^2xk+e^2k^2. \tag{13}$$

Korzystamy z równości $c=e\cdot a=e^2\cdot k$:

$$x^2+2xc+c^2+y^2=e^2x^2+2xc+ck, \tag{14}$$

czyli

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=ck-c^2, \tag{15}$$

co jest równoważne

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=a^2-c^2. \tag{16}$$

Podstawiając

$$b^2=a^2-c^2, \tag{17}$$

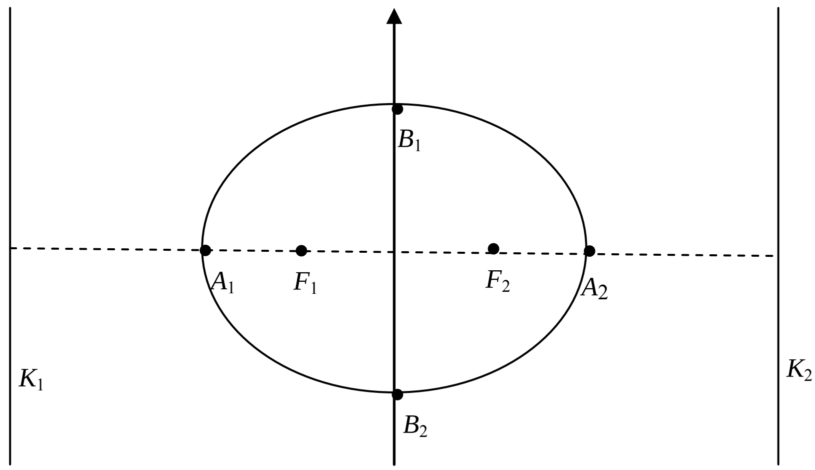
uwzględniając równość $a^2-c^2=a^2\left(1-e^2\right)$ i dzieląc obustronnie równość (16) przez a^2-c^2, dostajemy klasyczne równanie elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{18}$$

przy czym równość (17) daje zależność między współrzędnymi ognisk oraz półosią wielką i małą elipsy. Z zależności tej można wywieść wzory na kierownicę *k*, mimośród *e* i rozstęp *r*, jeśli za wyjściowe parametry elipsy przyjmiemy wymiar półosi wielkiej *a* i małej *b*, gdzie $0<b<a$; dostajemy: $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $k=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Widać, że między parametrami elipsy zachodzą nierówności $0<b<a$, oraz $0<c<a<k$.

Zaleca się wyprowadzenie samodzielnie równania elipsy i to nawet kilkakrotnie. Po wykonaniu tych czynności dostrzeże się ich wartość.

Na zakończenie tej części artykułu o elipsie naszkicujemy elipsę, którą analizowaliśmy na rys. 3.



Rys. 5. Elipsa z kierownicami, ogniskami i punktami wierzchołkowymi

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli *spację* przyjmiemy za jednostkę, wówczas mamy następujące parametry elipsy: $e = \frac{1}{2}$, $r = 12$, $k = 16$, $a = 8$, $c = 4$, $b = \sqrt{48}$ – na rys. 5 przyjęliśmy jako *b sześć spacji*, a więc z niedomiarem, gdy próbowaliśmy wykonać rysunek z przyjęciem jako *b siedmiu spacji*, wówczas narysowana elipsa bardzo przypominała koło. Najlepiej wykonywać rysunki w programie Matlab, artykuł zaś jest pisany wyłącznie w programie Word.

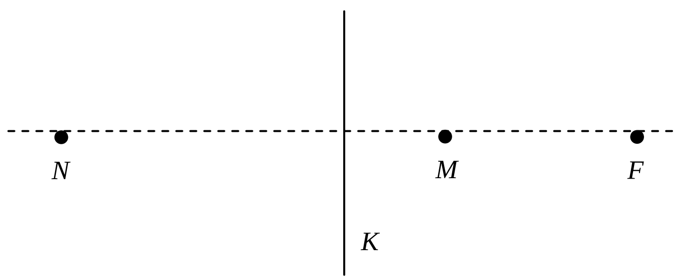
Przejdziemy teraz do wyprowadzenia równania hiperboli.

3. Hiperbola

Spójrzmy na rys. 6. Zaznaczono na nim kierownicę K jako linię pionową i odległe od niej o *dwanaście spacji* ognisko F. Przyjmujemy mimośród równy: $e = 2$. Na linii przerywanej przechodzącej przez ognisko F i prostopadłej do kierownicy K znajdujemy dwa punkty hiperboli S. Są to punkty M oraz N. Punkt M jest odległy: od kierownicy K o *cztery spacje* i od ogniska F o *osiem spacji*; punkt N znajduje się w odległości *dwunastu spacji* od kierownicy K i *dwudziestu czterech spacji* od ogniska F. Zgodnie z przyjętą definicją oba punkty M i N należą do hiperboli S, gdyż ich odległości od kierownicy i ogniska spełniają równanie (1) dla $e = 2$, mamy bowiem:

$$\frac{|MF|}{|MK|} = 2 \quad \text{oraz} \quad \frac{|NF|}{|NK|} = 2\,.$$

Z lewej strony punktu N w odległości *ośmiu spacji* od niego umieścimy punkt F_2 , a w odległości *czterech spacji* na prawo od punktu N prostą K_2 prostopadłą do linii przerywanej, na której leżą punkty M, F i N. Otrzymujemy w ten sposób drugie ognisko F_2 i drugą kierownicę K_2 . Umieścimy to wszystko na rys. 3, zmieniając przy okazji oznaczenia: zamiast F napiszemy F_1, zamiast K napiszemy K_1, oznaczenie M zmienimy na A_1, a oznaczenie N na A_2 .

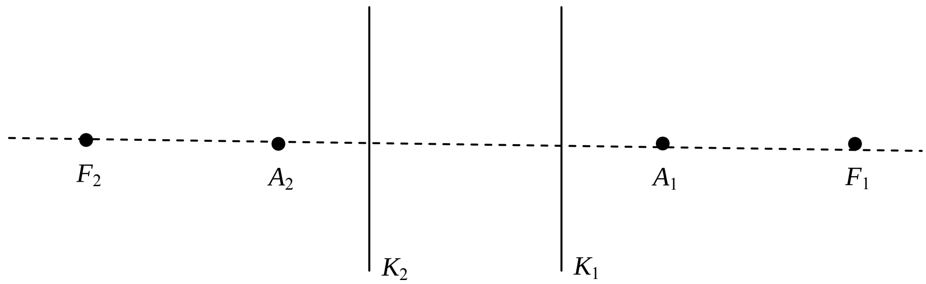


Rys. 6. Kierownica, ognisko i punkt wierzchołkowy hiperboli

Źródło: opracowanie własne.

Widzimy zatem, że przyjmując w definicji elipsy jedno ognisko i jedną kierownicę, odkrywamy, że pojawiają się: symetrycznie położone drugie ognisko i druga kierownica.

Z rys. 7 możemy wywnioskować, że kształt hiperboli będzie zależał od odległości między ogniskiem i odpowiadającą mu kierownicą; oznaczmy to liczbą $r = |F_1K_1| = |F_2K_2|$, symbol r od słowa *rozstęp*, oraz od mimośrodu $e = \frac{|A_1F_1|}{|A_1K_1|} = \frac{|A_2F_2|}{|A_2K_2|}$. Wracając do rys. 1, wybór punktu H położonego między punktem P i prostą K w sposób jednoznaczny określa hiperbolę o kierownicy K i ognisku F. Rozstęp r jest dany odległością punktu F od prostej K, mimośród jest ilorazem odległości punktu H od punktu F oraz punktu H od prostej K. Powtórzymy jeszcze raz uwagę podaną przy omawianiu elipsy.



Rys. 7. Dwie kierownice, dwa ogniska i dwa punkty wierzchołkowe hiperboli

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli wybierzemy punkt H tak, by podział prostopadłego do kierownicy odcinka łączącego ognisko z tą kierownicą był złoty, otrzymujemy ***złotą hiperbolę***. Po zapoznaniu się z dalszą treścią artykułu zaleca się napisanie równania złotej elipsy i wykreślenie jej w odpowiednim programie komputerowym, np. w Matlabie. Zgodnie z kanonami malarskimi powinna to być najbardziej proporcjonalna hiperbola ze wszystkich możliwych. Analogicznie, jeśli punkt E będzie położony w ten sposób, że będzie on dzielił ten sam odcinek w sposób złoty, z drugiej strony otrzymamy ***złotą elipsę***. Zaleca się również podanie jej równania i wykreślenie w programie komputerowym. Aby otrzymać ***złoty efekt***, należy w pionie i w poziomie polecić zastosowanie tej samej wielkości jednostki.

Wyprowadzimy teraz równanie elipsy w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych.

Umieszczając początek układu współrzędnych na linii przerywanej pośrodku obu ognisk (rys. 7), przyjmijmy współrzędne: $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)$, $A_1(a,\ 0)$, $A_2(-a,\ 0)$; równanie kierownicy K_1: $x = k$, kierownicy K_2: $x = -k$, gdzie liczby c, a oraz k są dodatnie.

Jako **wyjściowe parametry** przyjmujemy rozstęp $r > 0$ oraz mimośród $e \in (1,\ \infty)$. Wyliczymy liczby c, a oraz k w zależności od wyjściowych parametrów r oraz e. Otrzymamy je, rozwiązując układ równań:

$$\frac{c-a}{a-k} = e, \tag{19}$$

$$c - k = r, \tag{20}$$

$$\frac{c+a}{k+a} = e. \tag{21}$$

Równania wynikają z analizy położenia punktów na rys. 7. Układ tych trzech równań jest układem liniowym; zapiszemy go w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & (-1-e) & e \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & (1-e) & -e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ a \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{22}$$

rozwiązujemy go za pomocą wzorów Cramera. Wyznacznik główny wynosi $W = -2 \cdot (e^2 - 1)$. Wyznacznik dla niewiadomej k jest równy $W_k = -2 \cdot r$, dla niewiadomej a: $W_a = -2 \cdot e \cdot r$, wreszcie dla niewiadomej c: $W_c = -2 \cdot e^2 \cdot r$. Dostajemy następujące rozwiązanie układu (5):

$$c = \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot r, \tag{23}$$

$$a = \frac{e}{e^2 - 1} \cdot r, \tag{24}$$

$$k = \frac{1}{e^2 - 1} \cdot r. \tag{25}$$

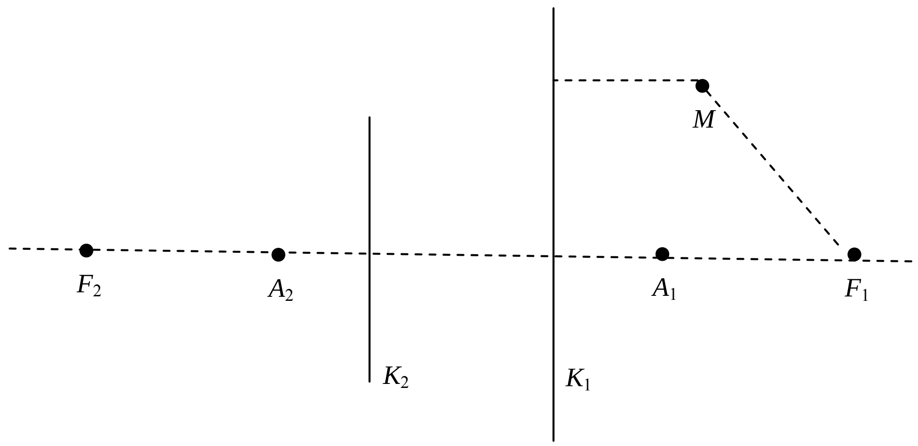
Tak więc z podstawowych parametrów hiperboli: rozstępu r i mimośrodu e wywiedliśmy współrzędne ogniska, kierownicy i końcowych punktów hiperboli położonej w układzie współrzędnych centralnie, gdzie kierownice są prostopadłe do osi odciętych, a równoległe do osi rzędnych. Z trzech wzorów (23), (24) i (25) wynikają zależności między współrzędnymi:

$$c = e \cdot a = e^2 \cdot k, \tag{26}$$

$$a = e \cdot k. \tag{27}$$

Odstęp między ogniskami wynosi $2 \cdot c = 2 \cdot \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot r$; odległość między kierownicami jest równa $2 \cdot k = 2 \cdot \frac{1}{e^2 - 1} \cdot r$; oś rzeczywista hiperboli jest równa $2 \cdot a = 2 \cdot \frac{e}{1 - e^2} \cdot r$.

Obecnie wyprowadzimy równanie hiperboli w przyjętym układzie współrzędnych. Niech punkt $M(x, \quad y)$ będzie punktem należącym do hiperboli *S*.



Rys. 8. Kierownice, ogniska, wierzchołki i punkt hiperboli

Źródło: opracowanie własne.

Równanie (1) możemy przepisać w formie:

$$\frac{|MF_1|^2}{|MK_1|^2} = e^2, \tag{28}$$

czyli

$$\frac{(x-c)^2 + y^2}{(x-k)^2} = e^2, \tag{29}$$

skąd

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e^2xk + e^2k^2. \tag{30}$$

Korzystamy z równości $c = e \cdot a = e^2 \cdot k$:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2xc + ck, \tag{31}$$

czyli

$$(e^2 - 1) \cdot x^2 - y^2 = c^2 - ck, \tag{32}$$

co jest równoważne

$$\left(e^2-1\right)\cdot x^2 - y^2 = c^2 - a^2 . \tag{33}$$

Podstawiając

$$b^2 = c^2 - a^2 , \tag{34}$$

uwzględniając równość $c^2 - a^2 = a^2\left(e^2-1\right)$ i dzieląc obustronnie równość (33) przez $c^2 - a^2$, dostajemy klasyczne równanie hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 , \tag{35}$$

przy czym równość (34) daje zależność między współrzędnymi ognisk oraz półosią rzeczywistą i półosią urojoną hiperboli. Z zależności tej można wywieść wzory na kierownicę *k*, mimośród *e* i rozstęp *r*, jeśli za wyjściowe parametry hiperboli przyjmiemy wymiar półosi rzeczywistej *a* i urojonej *b*, gdzie:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\ ,\ k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

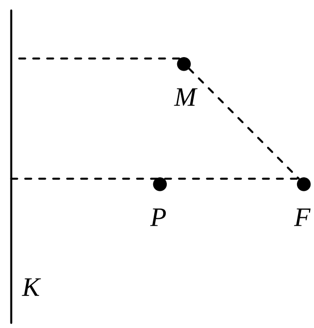
Widać, że między parametrami hiperboli zachodzą nierówności oraz $0 < k < a < c$.

Zaleca się wyprowadzić samodzielnie równanie elipsy i to nawet kilkakrotnie. Po wykonaniu tych czynności dostrzeże się ich wartość.

4. Parabola

Jeśli rzucalibyśmy losowo punkt na odcinek łączący ognisko F z kierownicą K (rys. 1), wówczas prawdopodobieństwo, że punkt ten spadnie w położenie E jest jedna druga; że spadnie w położenie H również wynosi jedna druga. Prawdopodobieństwo, że punkt spadnie w położenie P jest równe zero. Tak więc prawdopodobieństwo, że losowo rzucony punkt wygeneruje elipsę, wynosi jedna druga, że hiperbolę również jedna druga, a prawdopodobieństwo wygenerowania paraboli wynosi zero. Wyprowadzimy równanie paraboli o rozstępie między ogniskiem i kierownicą równym *r* w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych.

Układ współrzędnych dobierzemy w taki sposób, aby jego początek przechodził przez punkt P (rys. 1). Ognisko ma więc współrzędne $F\left(\frac{r}{2},\quad 0\right)$, kierownica ma równanie $x=-\frac{r}{2}$, punkt $P(0,\quad 0)$ – rys. 9:



Rys. 9. Kierownica, ognisko, wierzchołek i punkt paraboli

Źródło: opracowanie własne.

Bieżący punkt $M(x,\quad y)$ paraboli jest równo odległy od ogniska F i od kierownicy K:

$$|MK|=|MF|, \tag{36}$$

czyli

$$x+\frac{r}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2}. \tag{37}$$

Podnosząc równość (37) obustronnie do kwadratu, otrzymujemy

$$x^2+r\cdot x+\frac{r^2}{4}=x^2-r\cdot x+\frac{r^2}{4}+y^2, \tag{38}$$

co jest równoważne

$$y^2=2r\cdot x. \tag{39}$$

Wzór (39) jest standardową wersją równania paraboli o ognisku $F\left(\frac{r}{2},\quad 0\right)$ i kierownicy K danej równaniem $x=-\frac{r}{2}$.

5. Zakończenie

Można wykonać analizę, jak będzie się zmieniać krzywa stożkowa, gdy generujący ją punkt będzie wędrował pomiędzy kierownicą i ogniskiem. Elipsa będzie podobna do koła, gdy wędrujący punkt będzie się zbliżał do ogniska. Chcąc zwiększyć rozmiary elipsy, trzeba odsuwać kierownicę w lewo, czyli zwiększać rozstęp. Co się dzieje, kiedy punkt zbliża się do kierownicy? Gałęzie hiperboli będą się zbliżały do położenia kierownicy, jedna gałąź z jednej strony, druga zaś z drugiej strony kierownicy.

Kiedy punkt, wędrując od ogniska w kierunku kierownicy, przechodzi przez połowę odcinka – odbywa się wówczas przeskok. Krzywa stożkowa zmienia się z elipsy, poprzez parabolę, w hiperbolę. Załóżmy, że mamy rysunek[4] przedstawiający trzy fragmenty trzech krzywych stożkowych: elipsy, paraboli i hiperboli, przy czym położenie punktów generujących elipsę i hiperbolę będzie bliskie położenia punktu wyznaczającego parabolę. Fragmenty krzywych przechodzą przez punkty generujące daną krzywą. Wydrukujmy trzy rysunki, pomieszajmy je i spróbujmy rozpoznać, który z nich jest elipsą, który parabolą, a który hiperbolą? Okaże się to zadaniem trudnym. Wniosek: przeskok między krzywymi jest istotny, ale dla wybranych fragmentów prawie niezauważalny. Z tego właśnie powodu astronomowie myśleli kiedyś, że niektóre komety krążą wokół Ziemi po torach parabolicznych. Myśleli, że kometa zbliża się do Ziemi, nadlatując z przestrzeni kosmicznej, i odlatuje dalej w bezkres, aby nigdy nie wrócić, gdyż jej tor jest krzywą otwartą – parabolą. Okazało się jednak, że zaobserwowany tor poruszania się komety jest fragmentem ogromnej elipsy, a nie paraboli. Wobec niedoskonałości dokonywanych pomiarów trudno się dziwić wnioskom wyciąganym przez astronomów. Jeśli wydrukowane na kartce papieru krzywe stożkowe można pomylić, to co dopiero, gdy ma się kilka niezbyt precyzyjnych pomiarów i z tych danych próbuje się odczytać, po jakiej trajektorii krąży kometa; a może jednak są komety krążące po paraboli; a może również są takie, które krążą po hiperboli? Bardziej prawdopodobne jest to, że krążą po hiperboli, bo jak zauważyliśmy wyżej, prawdopodobieństwo wystąpienia hiperboli jest jedna druga, a paraboli zero; jednakże, jeśli prawdopodobieństwo wynosi zero, nie znaczy to, że zdarzenie takie nie może zachodzić.

---

[4] Rysunek taki można wykreślić za pomocą programu Matlab.