

POLITECHNIKA OPOLSKA
WYDZIAŁ MECHANICZNY



mgr inż. Daniel Krzyżak

ROZPRAWA DOKTORSKA

Zastosowanie metod nielokalnych
przy wyznaczaniu trwałości zmęczeniowej
elementów z karbem

Promotor:

Prof. dr hab. inż. Tadeusz Łagoda

Promotor pomocniczy:

dr inż. Grzegorz Robak

OPOLE 2016

Składam serdeczne podziękowania dla prof. dra hab. inż. Tadeusza Łagody oraz dra inż. Grzegorza Robaka za opiekę naukową, wszechstronną pomoc i cenne uwagi merytoryczne.

Spis treści

	str.
Wykaz ważniejszych oznaczeń	5
1. Wprowadzenie	8
2. Karby w elementach konstrukcyjnych	13
2.1. Spiętrzenie naprężeń i ich gradient w elementach z karbem.....	16
2.2. Analiza rozkładu i poziomu spiętrzenia naprężeń w badanych elementach z karbem	18
3. Wpływ karbu na wytrzymałość zmęczeniową	22
4. Metody obliczeniowe dla elementów z karbem.....	31
4.1. Metody globalne	35
4.2. Metody lokalne	36
4.3. Metody nielocalne	41
4.3.1. Metoda punktowa.....	41
4.3.2. Metoda liniowa.....	45
4.3.3. Metoda płaszczyznowa	50
4.3.4. Metoda objętościowa	54
5. Funkcje wagowe.....	59
6. Obliczenia własne wybranymi metodami na podstawie badań literaturowych	65
6.1. Obliczenia metodą objętościową z wykorzystaniem parametru energetycznego	65
6.2. Obliczenia metodą promienia fikcyjnego Neubera	67
7. Cel i zakres pracy	72
8. Badania eksperymentalne własne	74
8.1. Badania stali EA4T.....	74
8.2. Badania stali 42CrMo4+QT	86

9. Nielokalna metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie badań własnych	95
9.1. Dane wejściowe do algorytmu obliczeniowego z badań eksperymentalnych własnych	96
9.2. Analiza naprężeń z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych ..	97
9.3. Obliczenie położenia płaszczyzny krytycznej	111
9.4. Wyznaczenie naprężeń normalnych w płaszczyźnie krytycznej	117
9.5. Zastosowanie funkcji wagowej	121
9.6. Obliczenie długości efektywnej	124
9.7. Ekwivalentna długość efektywna, jako wielkość zależna od poziomu obciążenia i rodzaju karbu	126
10. Analiza wyników badań	134
11. Podsumowanie i wnioski	139
Literatura	142
Załączniki	148
Streszczenie	158

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$2N_f$ – liczba nawrotów (półcykli) do zniszczenia,
 a – długość pęknięcia,
 A – stała modelu regresji w charakterystyce Basquina,
 A_l – stała modelu regresji w równaniu liniowym długości efektywnej,
 A_p – stała modelu regresji w równaniu płaszczyzny długości efektywnej,
 B_l – stała modelu regresji w równaniu liniowym długości efektywnej,
 B_p – stała modelu regresji w równaniu płaszczyzny długości efektywnej,
 C_p – stała modelu regresji w równaniu płaszczyzny długości efektywnej,
 d – średnica próbki,
 d_p – średnica strefy plastycznej,
 E – moduł Younga,
 \mathbf{F} – tensor gradientu deformacji,
 K' – współczynnik cyklicznego umocnienia,
 K_f – zmęczeniowy współczynnik działania karbu,
 K_t – teoretyczny współczynnik działania karbu,
 K_{th} – progowy współczynnik intensywności naprężeń,
 l – długość (liczona od powierzchni do osi próbki),
 L – długość w teorii krytycznego dystansu,
 m – stała modelu regresji w charakterystyce Basquina,
 M_g – moment zginający,
 n' – wykładnik cyklicznego umocnienia,
 N_{exp} – trwałość eksperymentalna,
 N_f – liczba cykli do zniszczenia,
 N_{obl} – trwałość obliczeniowa,
 P – siła,
 Q – funkcja wagowa,
 R – promień dna karbu,
 r – promień próbki (liczony od powierzchni do osi próbki),
 $R_{0,2}$ – umowna granica plastyczności,
 R_e – statyczna granica plastyczności,
 R_e' – cykliczna granica plastyczności,
 r_Y – moduł promienia wodzącego w opisie funkcji wagowej Yao,

\mathbf{s} – dewiator naprężenia,
 s_N – współczynnik wieloosiowości w metodzie promienia fikcyjnego,
 t – czas,
 V – objętość,
 W – gęstość energii odkształcenia, parametr gęstości energii odkształcenia,
 X_{ef} – odległość efektywna,
 α – kąt położenia płaszczyzny krytycznej,
 Δ – zakres,
 ε – odkształcenie,
 ν – współczynnik Poissona,
 ρ – promień rzeczywisty karbu w metodzie promienia fikcyjnego,
 ρ^* – zastępcza długość mikrostrukturalna w metodzie promienia fikcyjnego,
 ρ_f – promień fikcyjny w metodzie Neubera,
 σ – naprężenie normalne,
 σ_0 – wytrzymałość zmęczeniowa próbki gładkiej (granica zmęczenia),
 σ_{H-M-H} – naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera-Misesa-Henckiego,
 σ_n – naprężenie normalne w płaszczyźnie,
 σ_{nom} – naprężenie nominalne (netto),
 τ – naprężenie styczne,
 χ – gradient naprężenia,
 Ω – powierzchnia, obszar dwuwymiarowy.

Indeksy i skróty

$'$ – cykliczne,
 $^{-1}$ – macierz odwrotna,
 a – amplituda,
 c – krytyczny,
 ef – efektywny,
 eq – ekwiwalentne,
 $gł$ – gładkie,
 $H-M-H$ – Huber-Mises-Hencky,
 i – kolejny,
 ij – indeksy w zapisie wskaźnikowym (x,y,z),

k – karb,
max – maksymalne,
n – kierunek normalny do płaszczyzny,
ns – kierunek styczny na płaszczyźnie o normalnej n,
p – plastyczne,
ps – pseudosprężyste,
PSN – płaski stan naprężenia,
PSO – płaski stan odkształcenia,
s – sprężyste,
śr – średnie,
^T – transponowane,
x, y, z – kierunki osi układu współrzędnych.

1. Wprowadzenie

Znajomość trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych wymaga przeprowadzenia testów zmęczeniowych, które są kosztowne i długotrwałe. Praktycznie niemożliwym oraz nieuzasadnionym ekonomicznie jest przeprowadzenie testów dla wszystkich rodzajów materiału oraz konkretnych elementów stosowanych w konstrukcjach inżynierskich. Tylko w niektórych sytuacjach, kiedy elementy stosowane są w urządzeniach odpowiedzialnych za życie i bezpieczeństwo ludzi, takie testy powinny być przeprowadzane. Na tle tych problemów, zadaniem naukowców jest opracowywanie skutecznych, dokładnych oraz opartych o prawa fizyki modeli obliczeniowych, które mogą być wykorzystane na etapie projektowania. Zastosowanie takich modeli pozwala na oszacowanie trwałości zmęczeniowej elementów przy złożonych stanach naprężenia, jak również złożonych stanach obciążenia, także losowych. Jednym z trudniejszych zadań jest wyznaczenie trwałości zmęczeniowej elementów z karbem bazując jedynie na podstawowych charakterystykach zmęczeniowych. Na etapie projektowania potrzebne jest narzędzie (model obliczeniowy), za pomocą którego możliwe będzie obliczenie trwałości zmęczeniowej dowolnego elementu, na podstawie właściwości mechanicznych i charakterystyk materiałowych uzyskanych dla próbek gładkich. Charakterystyki te, wykonane najczęściej w próbie jednoosiowego rozciągania-ściskania, odzwierciedlają właściwości materiałowe w warunkach cyklicznych obciążeń. W elementach z karbem poddanych cyklicznym obciążeniom, w okolicy karbu występuje wieloosiowy stan naprężenia oraz gradient naprężenia. Uwzględnienie tych czynników podczas szacowania trwałości zmęczeniowej jest konieczne i wymaga zastosowania rozbudowanych modeli obliczeniowych. Modelami takimi mogą być algorytmy obliczeniowe oparte na podejściu nielokalnym. W modelach tych, można także uwzględnić pole działania odkształceń plastycznych, położenie płaszczyzn złomu oraz wpływ gradientu naprężenia na proces inicjacji pęknięcia zmęczeniowego. Wykorzystując nielocalne metody obliczeniowe, można uwzględnić procesy zmęczeniowe zachodzące w przyjętej przestrzeni geometrycznej materiału znajdującej się w okolicy karbu. Nielokalność oznacza wpływ niejednorodnego pola naprężeń w materiale na trwałość zmęczeniową liczoną do chwili zainicjowania pęknięcia. Założeniem metod nielokalnych jest, że w obszarze wpływu karbu występuje

ekwiwalentny stan uśrednionego pola naprężeń, który może być porównywany ze stanem naprężenia występującym w elementach o jednorodnym rozkładzie naprężeń.

Metody nielokalne można podzielić na: punktowe, liniowe, płaszczyznowe i objętościowe. Metody liniowe i płaszczyznowe można stosować przy uwzględnianiu wyężenia w płaszczyźnie, w których inicjuje się, a następnie propaguje pęknięcie zmęczeniowe. Metoda liniowa może być traktowana jako pewne uproszczenie metody płaszczyznowej. Wynika to z przyjęcia jednowymiarowości obliczeń, do której można sprowadzić algorytm w przypadku symetrii elementu (w płaszczyźnie po grubości) lub uwzględnienia położenia długości uśredniania w przestrzeni trójwymiarowej. Metoda liniowa ma także związek z szeroko stosowanym podejściem, w którym wykorzystuje się promień fikcyjny Neubera. W metodzie tej zakłada się, że odcinek uśredniania jest związany z właściwościami materiału i może być zastąpiony przez promień fikcyjny. Promień fikcyjny przyjmuje zawsze większe wartości od promienia rzeczywistego, co powoduje otrzymanie mniejszej wartości naprężenia ekwiwalentnego i w ten sposób uwzględnienie wpływu działania karbu. Natomiast w metodzie objętościowej zakłada się, że istotne procesy zmęczeniowe powodujące zainicjowanie pęknięcia zachodzą w pewnej przestrzeni trójwymiarowej. Przestrzeń ta przyjmowana jest najczęściej w postaci kuli, co powoduje, że obszar ten trudno jest utożsamiać z pęknięciem, które jest związane z otwieraniem płaszczyzn. Metoda punktowa jest także zaliczana do metod nielokalnych, pomimo, że obliczenia wykonywane są jedynie dla lokalnego punktu znajdującego się w pewnej odległości od punktu bazowego, znajdującego się na powierzchni dna karbu. Zasadność tej metody wydaje się najmniej pokrywać z fizycznymi procesami zachodzącymi w materiale, gdyż w niewielkim stopniu uwzględnia się geometrię karbu i gradient naprężenia tam występujący.

Uwzględniając wymienione uwagi, w pracy wykorzystano trzy podejścia obliczeniowe oparte na metodzie objętościowej, metodzie promienia fikcyjnego Neubera oraz metodzie liniowej.

W metodzie objętościowej wykorzystano parametr energetyczny oparty o odkształcenia i naprężenia efektywne obliczane według hipotezy Hubera-Misesa-Henckego (H-M-H). Obliczenia wykonano wykorzystując cykliczne właściwości materiałowe dla danych pozyskanych z literatury. W drugiej metodzie zastosowano promień fikcyjny Neubera, a obliczenia na podstawie danych literaturowych wykonano przyjmując liniowo-sprężyste właściwości materiałowe. W metodach tych wyznaczono ekwiwalentne strefy zmęczeniowe, jedno- i trój-wymiarowe, odpowiadające dobremu

dopasowaniu zastosowanego parametru do charakterystyk bazowych i prowadzących do otrzymania jak najmniejszego rozrzutu przy porównaniu trwałości obliczeniowej z eksperymentalną. W obu modelach wykazano zależność (zmiennosć) obliczonych zmęczeniowych stref ekwiwalentnych od rodzaju materiału, poziomu obciążenia i rodzaju karbu. W metodzie objętościowej strefą ekwiwalentną była objętość zlokalizowana w obszarze znajdującym się w okolicy karbu, którą można wyrazić, jako krotność granicy zmęczenia w ujęciu energetycznym. W przypadku metody promienia fikcyjnego Neuber'a wykazano, że odcinek uśredniania będący zastępczą długością mikrostrukturalną, jest zmienny w funkcji sposobu i poziomu obciążenia. Brak możliwości uwzględnienia aspektu położenia płaszczyzny krytycznej, a także problemy związane z czasem trwania analizy w modelu objętościowym spowodowały, że na potrzeby dalszych badań opracowano i zastosowano nielokalny model liniowy. Do symulacji numerycznych konieczne było wykonanie własnych badań eksperymentalnych, obejmujących wyznaczenie charakterystyk zmęczeniowych oraz statycznych i cyklicznych właściwości materiałowych. Badania eksperymentalne obejmowały testy zmęczeniowe elementów gładkich oraz elementów z karbem dla dwóch rodzajów materiału. Wybrane stale zbadano przy obciążeniu rozciągania-ściskania – stal EA4T według EN / ISO (stare oznaczenie według PN - P55G) i wahadłowego zginania – stal 42CrMo4+QT według EN / ISO (stare oznaczenie według PN - 40 HM-T). W wyniku badań elementów gładkich wyznaczono charakterystyki zmęczeniowe oraz wyznaczono cykliczne właściwości materiałowe. Podczas badań próbek z karbem, obserwowano i rejestrowano moment inicjacji pęknięcia, a następnie przyrosty długości pęknięcia podczas propagacji. Na tej podstawie określono liczbę cykli do inicjacji pęknięcia ustalonego na długości $a = 0,1$ mm. Analizę naprężeń w okolicy karbu wykonano z zastosowaniem Metody Elementów Skończonych (MES) [132], wykorzystując cykliczne właściwości materiałowe. Na podstawie uzyskanych danych opracowano nielokalny model liniowy, w którym naprężenie normalne w płaszczyźnie krytycznej jest uśredniane wraz z funkcją wagową. W wyniku obliczeń nielokalnych, uzyskano wartości długości efektywnych, które odzwierciedlają ekwiwalentną strefę zmęczeniową w okolicy karbu, w której jak przyjmuje się, zachodzą istotne procesy zmęczeniowe. Wyznaczone wartości długości efektywnych są zależne od rodzaju materiału, poziomu obciążenia i geometrii karbu. Seria badań i obliczenia wykonane dla materiału 42CrMo4+QT umożliwiły dodatkowo opisanie tej zmienności równaniem płaszczyzny.

W pracy wykazano, że odnosząc obliczone wartości uśrednionego naprężenia ekwiwalentnego do charakterystyk elementów gładkich, uzyskuje się zadawalającą zgodność trwałości obliczeniowej z trwałością eksperymentalną. Taka zgodność jest możliwa do osiągnięcia tylko w przypadku zmienności ekwiwalentnej strefy zmęczeniowej wyrażonej w postaci długości efektywnej. W zastosowanym nielokalnym modelu liniowym, uwzględniono wiele czynników mających wpływ na uzyskanie wartości naprężeń zbliżonych do rzeczywistych, takich jak uwzględnienie cyklicznych właściwości materiałowych, wieloosiowego stanu naprężenia, efektywnych wartości naprężeń w płaszczyźnie krytycznej, a także funkcji wagowej.

Oryginalnym rozwiązaniem problemu naukowego jest zaproponowanie własnego nielokalnego modelu liniowego, za pomocą którego możliwe jest wyznaczenie zależności pomiędzy długością efektywną, a poziomem obciążenia i rodzajem karbu. Zależność ta może być także przedstawiona w postaci równania płaszczyzny. Proponowane rozwiązanie może być zastosowane do innych materiałów i geometrii karbów, w których działające obciążenie jest związane z pierwszym sposobem pękania (rozrywanie). Wyznaczone zależności opisujące zmienność długości efektywnej są oparte o efektywne wartości naprężeń, które są bliskie wartościom rzeczywistym występującym w okolicy karbu podczas obciążeń zmiennych.

W rozprawie wskazano także na zmienność ekwiwalentnej strefy zmęczeniowej, która jest zależna od geometrii karbu i poziomu obciążenia.

Przedstawiono obecny stan wiedzy na temat wykorzystania metod nielokalnych do wyznaczania trwałości zmęczeniowej elementów z karbem, ze szczególnym uwzględnieniem metod liniowych [122]. Większą uwagę poświęcono metodom bazującym na efektywnych wartościach naprężeń [33], [86], [128] oraz metodom, w których wykorzystuje się funkcje wagowe [4], [33], [128].

W rozdziale drugim i trzecim przedstawiono zjawisko karbu, jako czynnik powodujący spiętrzenie i gradient naprężeń, opisano wielkości charakteryzujące spiętrzenie naprężeń oraz wpływ karbu na trwałość zmęczeniową.

W rozdziale czwartym dokonano podziału i opisu metod obliczeniowych wykorzystywanych do wyznaczania trwałości zmęczeniowej elementów z karbem. Większą część przeglądu literaturowego poświęcono metodom nielokalnym, w których zastosowano efektywne wartości naprężeń [33], [86], [128].

W rozdziale piątym przedstawiono funkcje wagowe stosowane w metodach nielokalnych. Zaprezentowano przebiegi zmienności funkcji wagowych oraz porównano je między sobą.

W rozdziale szóstym przedstawiono dwie metody obliczeniowe oraz wyniki obliczeń, w których wykorzystano dane literaturowe.

W rozdziale siódmym sformułowano cel i zakres pracy.

W rozdziale ósmym przedstawiono informację i wyniki z własnych badań eksperymentalnych, które były niezbędne do wykonania symulacji numerycznych zgodnie z nielokalną metodą liniową zaprezentowaną w kolejnym rozdziale.

W rozdziale dziewiątym przedstawiono etapy zaproponowanego nielokalnego modelu obliczeniowego [42], [43], w którym uwzględniono efektywne wartości naprężeń uzyskane w nieliniowej analizie MES. Kolejne podpunkty zawierają informację na temat analizy MES, obliczenia położenia płaszczyzny krytycznej, przebiegu naprężenia normalnego w tej płaszczyźnie, zastosowanej funkcji wagowej oraz sposobu obliczenia długości efektywnej.

W rozdziale dziesiątym przedstawiono analizę wyników badań, w której wskazano na zmienność długości efektywnej od poziomu obciążenia i geometrii karbu.

W rozdziale jedenastym zamieszczono podsumowanie oraz sformułowano wnioski.

Na końcu pracy zamieszczono spis cytowanej literatury i załączniki, w których przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych i zdjęcia badanych próbek.

2. Karby w elementach konstrukcyjnych

Od kiedy niemiecki inżynier August Wöhler zauważył, że zmiana geometrii w osiach kolejowych wpływa na osłabienie trwałości zmęczeniowej [96] zagadnienia związane z karbem są tematem prac wielu naukowców. Pierwszym obszernym opracowaniem na temat karbów była praca Neubera z 1937 roku [73], z późniejszymi wydaniem [74], [75]. W pracach tych Neuber przedstawił teorię na temat możliwości zastosowania teoretycznego współczynnika działania karbu, wieloosiowego stanu naprężenia i odkształcenia w karbie oraz zależności analityczne na rozkład naprężenia w okolicy karbu o różnych geometriach.

Analizując zjawisko karbu należy rozpatrywać efekty, które on powoduje [96]:

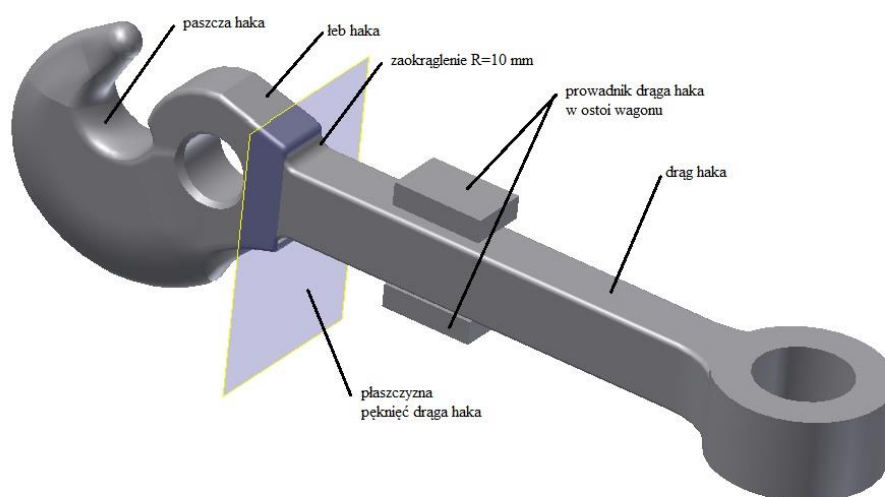
- koncentracja naprężeń i odkształceń,
- gradient naprężenia,
- naprężenia średnie i resztkowe,
- lokalne uplastycznienie i płynięcie materiału,
- nukleacja i wzrost pęknięć.

Karb jest obok naprężeń średnich, temperatury, efektu skali i działania korozji, głównym czynnikiem mającym wpływ na zmniejszenie trwałości zmęczeniowej elementu [37]. Zjawisko karbu oraz jego wpływ na trwałość statyczną i zmęczeniową zostało szczegółowo opisane w pracach [22], [37], [84], [86], [109].

Elementy zawierające karby są często spotykane w różnego rodzaju konstrukcjach inżynierskich. Właściwie w każdym elemencie konstrukcyjnym znajduje się miejsce, w którym występuje mniejsze lub większe spiętrzenie naprężeń. Powoduje to, że w analizach naukowcy uwzględniają wpływ karbów na wytrzymałość elementów lub rzeczywistych konstrukcji [30], [39], [106], [107], [108].

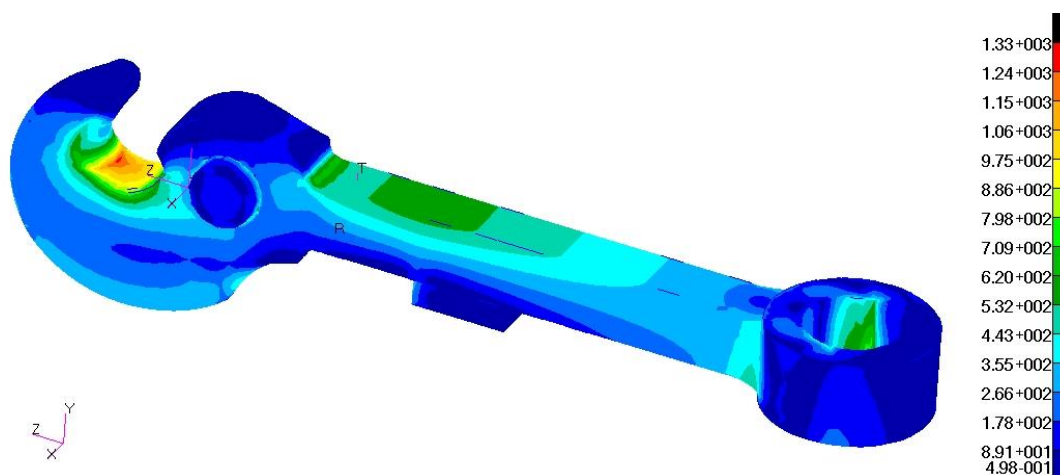
Karby można ogólnie podzielić na geometryczne i strukturalne. Karby geometryczne charakteryzują się różnego rodzaju nieciągłościami występującymi na powierzchni elementu. Związane są one z konstrukcyjnym kształtem elementów wynikających z ich przeznaczenia. Karby geometryczne to także nieciągłości związane z chropowatością powierzchni. Karby strukturalne są to natomiast wszelkiego rodzaju nieciągłości wewnętrzne, spowodowane głównie przez procesy obróbki cieplno-mechanicznej. Można więc przyjąć, że niemal każdy element czy część techniczna posiada geometryczne nieciągłości, które muszą być wykonane z uwagi na ich przeznaczenie,

pomimo, że podczas konstruowania dąży się do uzyskania elementów o jak najbardziej prostych i regularnych kształtach. Jednak takie elementy w wielu przypadkach nie mogą być stosowane z uwagi na charakter ich warunków pracy. Każdy karb geometryczny powoduje, oprócz spiętrzenia naprężeń także powstanie wieloosiowego stanu naprężenia, nawet w przypadku oddziaływania prostego stanu obciążenia. Wieloosiowy stan naprężenia występujący zarówno w dnie karbu jak i pod powierzchnią wprowadza większe prawdopodobieństwo zainicjowania pęknięcia. W tej sytuacji możliwe jest, że kierunek naprężenia stycznego będzie pokrywał się z mikrostrukturalnym kierunkiem poślizgu ziaren, co spowoduje poślizgi w kryształach i powstanie mikroszczelin, łączących się następnie w widoczne pęknięcia. Powstanie tych poślizgów może nastąpić po osiągnięciu przez obciążenie zewnętrzne poziomu, który pozwala na przekroczenie granicy plastyczności poszczególnych kryształów a w skali makro osiągnięcie cyklicznej granicy plastyczności. Z tego powodu wpływ karbu na trwałość zmęczeniową stanowi nieodzowny czynnik w wytrzymałości materiałów, który wprowadza komplikacje natury projektowej i obliczeniowej. W zakresie oddziaływania obciążeń zmiennych i związanym z tym pojęciem wytrzymałości zmęczeniowej, obecność karbów w elementach powoduje szerokie możliwości badawcze. Jednym z przykładów występowania karbów jest kolejowy hak ciągowy (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Kolejowy hak ciągowy [40]

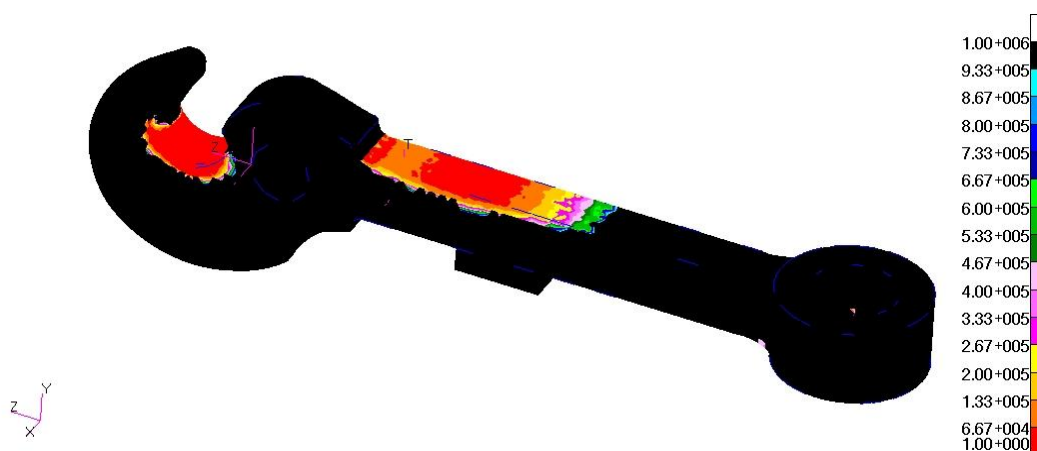
Zaokrąglenie występujące w miejscu przejścia draga w łeb haka powoduje spiętrzenie naprężeń (rys. 2.2), które przy odpowiednio dużym obciążeniu może spowodować zerwanie haka.



Rys. 2.2. Naprężenia (σ_{H-M-H}) w haku rozciągającym i jednocześnie zginanym [39]

Analiza wytrzymałości haka ciągowego oraz sprzęgu ciągowego została przedstawiona w pracach [39], [40].

Pomimo zastosowania nieliniowych obliczeń MES wykazano, że w przypadku uwzględnienia dodatkowego obciążenia w postaci zginania, trwałość warstw na powierzchni haka wynosi jeden blok obciążenia (rys. 2.3), czyli ulega on natychmiastowemu zniszczeniu.



Rys. 2.3. Warstwice trwałości (liczba bloków obciążenia) dla haka ciągowego (obciążenie rozciągające i zginające) [39]

Taka wartość jest oczywiście niezgodna z trwałością rzeczywistą, ponieważ elementy te nie ulegają zniszczeniu przy tych obciążeniach. W obliczeniach założono przypadek bloku obciążenia (jednego cyklu pracy) zawierającego maksymalne obciążenie przyjmowane dla sprzęgu ciągowego (zespół elementów współpracujących z hakiem podczas przenoszenia sił). Obciążenie o tej wartości nie powinno powodować zerwania haka nawet przy obciążeniu statycznym. Wyniki tej analizy skłoniły do poszukiwania

algorytmu szacowania trwałości zmęczeniowej elementów z karbem wykorzystując metody nielokalne. Brak całościowej informacji o przebiegu obciążeń, duży wpływ wartości średniej naprężenia oraz dynamicznego charakteru obciążeń spowodował, że odpowiedź na pytanie o przyczynę zerwań haków pozostaje otwarta. Brak jest także wiedzy o liczbie cykli, jakie przeniósł hak podczas swojej pracy poprzedzającej uszkodzenie. Na obecnym etapie analizy konieczne jest przeprowadzenie badań podstawowych, w których należy sprawdzić, jaki jest wpływ maksymalnego naprężenia oraz gradientu naprężenia w elemencie z karbem, na możliwość wyznaczenia trwałości zmęczeniowej na podstawie bazowej charakterystyki zmęczeniowej. Badanie to jest więc jednym z pierwszych kroków jakie musi być wykonane, zanim przeprowadzona zostanie analiza rzeczywistego elementu konstrukcyjnego.

2.1. Spiętrzenie naprężeń i ich gradient w elementach z karbem

W elementach, w których występuje zmiana kształtu, wymiarów i krzywizn, dochodzi do mniejszej lub większej koncentracji pola naprężeń. Prowadzi to w efekcie do spiętrzenia naprężeń, których wartości przekraczają wartości nominalne, a także mogą znacznie przekroczyć cykliczną i statyczną granicę plastyczności. Jest to sytuacja bardzo niebezpieczna, ponieważ w przypadku występowania odkształceń plastycznych w zakresie obciążeń zmiennych, w okolicy karbu pojawiają się procesy destrukcyjne, szybko rozwijające się wraz ze zwiększającą się liczbą cykli. Spiętrzenie naprężeń powstaje z powodu zagęszczania linii sił, które odpowiadają punktom przekazującym obciążenie elementarnym cząstkom materiału [37]. Na skutek zakłóconego przebiegu linii sił oraz ich skupienia, elementarny przekrój materiału musi przenieść większe obciążenia. Zwiększona wartość sił przypadająca na elementarny przekrój prowadzi do zwiększenia wartości naprężenia. Karby mogą być więc czynnikiem mającym kluczowy wpływ na powstanie awarii i wypadków. Najprostszym sposobem wyeliminowania wpływu karbu są różnego rodzaju zabiegi wygładzania nieciągłych powierzchni lub ulepszanie powierzchni zabiegami wprowadzającymi naprężenia ściskające. Nie zawsze jednak jest to możliwe lub uzasadnione ekonomicznie.

Wielkością, za pomocą której opisuje się stopień spiętrzenia naprężeń jest teoretyczny współczynnik działania karbu K_t (współczynnik kształtu α_k). Jest to wielkość niezależna od wartości obciążenia, rozmiarów elementu, a także liniowo-sprężystych właściwości materiału. Współczynnik K_t jest natomiast zależny od geometrii elementu oraz rodzaju

obciążenia (rozciąganie, zginanie, skręcanie). Jest on wyznaczany, jako iloraz maksymalnego naprężenia lokalnego w elemencie z karbem σ_{max} do naprężenia nominalnego w elemencie gładkim σ_{nom} ,

$$K_t = K_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}. \quad (2.1)$$

W przypadku występowania karbów w próbkach eksperymentalnych, można dokonać obliczenia wartości współczynnika K_t stosując zależności podane w pracy Nody [78].

Współczynnik działania karbu może być także przedstawiony w zależności od rzeczywistych odkształceń ε_{max} i odkształceń ε_{nom} , liczonych z naprężeń nominalnych i prawa Hooke'a

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{nom}}. \quad (2.2)$$

Współczynnik K_t jest wyznaczany w zakresie odkształceń sprężystych, co zapewnia jego stałą wartość aż do granicy plastyczności R_e . W zakresie odkształceń plastycznych, teoretyczny współczynnik działania karbu K_t przyjmuje zmienne wartości, co jest spowodowane nie tylko umocnieniem materiału, ale także rodzajem karbu i poziomem obciążenia, dla którego jest liczony. Z tego względu wyznaczanie współczynnika K_t dla zakresu plastycznego traci sens zastosowania i tylko stosowanie go w zakresie sprężystym pozwala na otrzymanie informacji o stopniu spiętrzenia naprężeń [31]. Teoretyczny współczynnik działania karbu K_t jest zależny od geometrii karbu, co pozwala w niektórych przypadkach na wyznaczenie jego wartości dla charakterystycznych karbów i rodzajów obciążeń z opracowanych wykresów [37], [96], [127]. Jednocześnie należy zauważyć, że teoretyczny współczynnik działania karbu K_t jest równy, w przypadku wyznaczenia go z naprężeń lub z odkształceń w zakresie liniowo-sprężystym

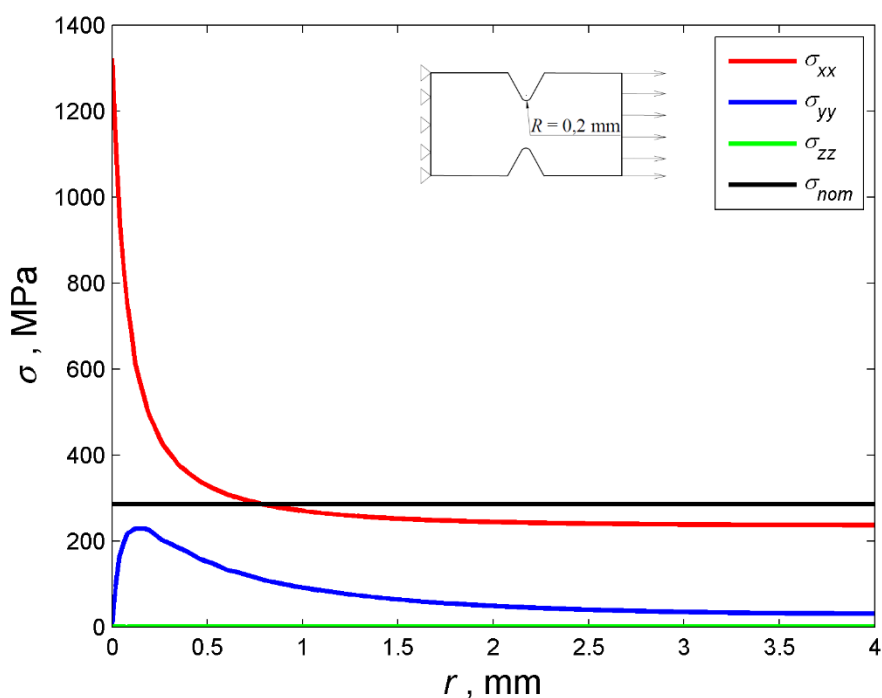
$$K_t = K_\sigma = K_\varepsilon. \quad (2.3)$$

2.2. Analiza rozkładu i poziomu śpiętrzenia naprężeń w badanych elementach z karbem

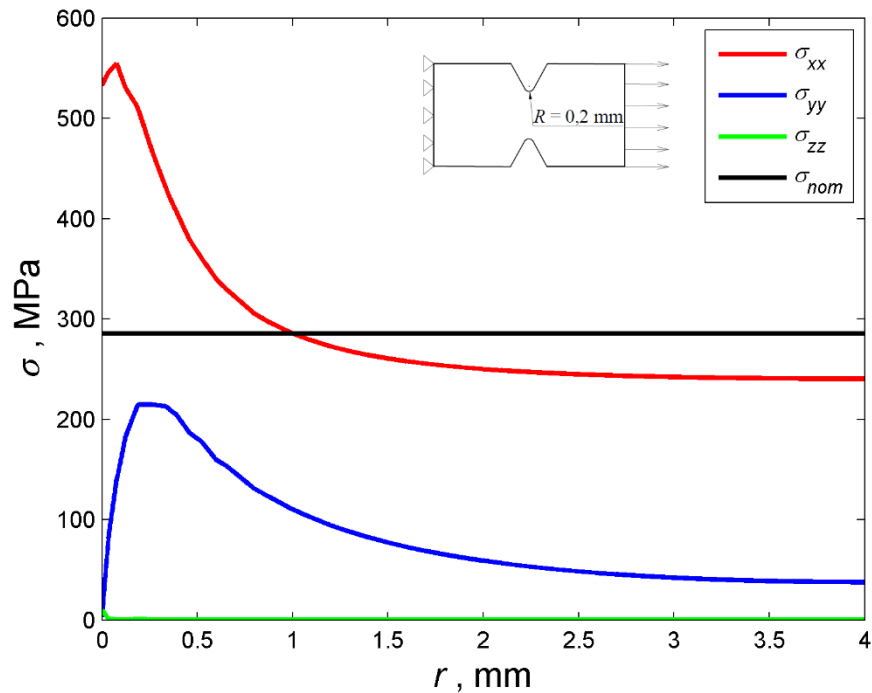
Analiza stanu naprężenia w elementach z karbem poddanych jednoosiowemu rozciąganiu oraz zginaniu jest przedstawiona na rys. 2.4 ÷ 2.7. Na rys. 2.4 przedstawiono rozkład naprężeń normalnych dla elementu rozciąganego, a także poziom naprężeń nominalnych uzyskanych dla modelu ciała liniowo-sprężystego. Na rys. 2.5 przedstawiono rozkład tych samych naprężeń dla modelu ciała cyklicznie sprężysto-plastycznego, gdzie cykliczną granicę plastyczności R_e' określono na poziomie 200 MPa. Naprężenie nominalne dla rozciągania obliczono z zależności

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{S}, \quad (2.4)$$

gdzie: P – siła, S – pole powierzchni przekroju poprzecznego.



Rys. 2.4. Rozkłady naprężeń pseudosprężystych w elemencie z karbem o promieniu $R = 0,2$ mm poddanemu rozciąganiu (wyniki dla próbki płaskiej ze stali EA4T, $P = 16$ kN)



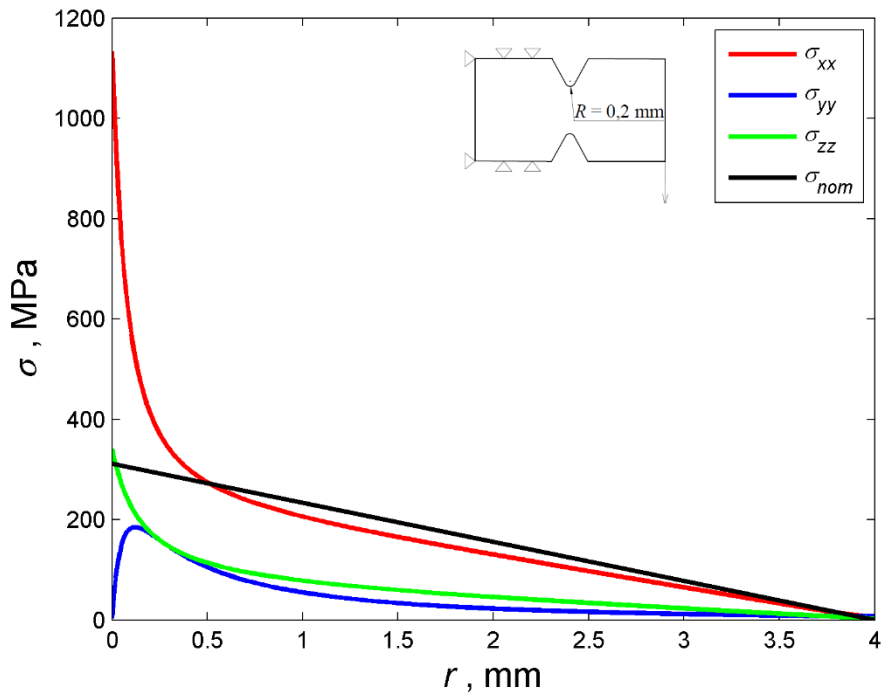
Rys. 2.5. Rozkłady naprężeń sprężysto-plastycznych w elemencie z karbem o promieniu $R = 0,2$ mm poddanemu rozciąganiu (wyniki dla próbki płaskiej ze stali EA4T, $P = 16$ kN)

W podobny sposób, na rys. 2.6 i 2.7 przedstawiono te same wielkości dla elementu poddanego zginaniu, a naprężenie nominalne obliczono z zależności

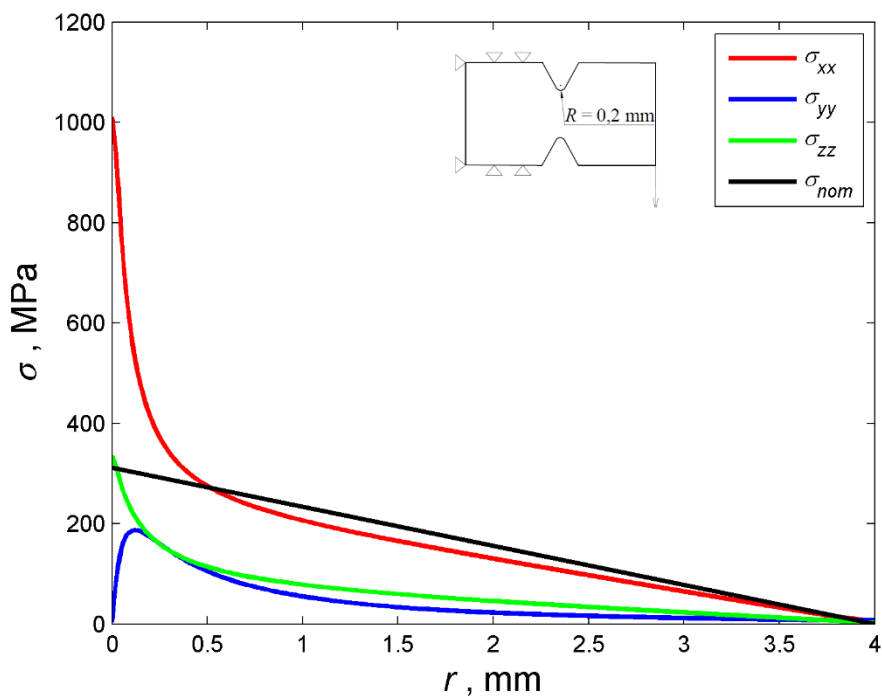
$$\sigma_{nom} = \frac{M_g}{W_z}, \quad (2.5)$$

gdzie: M_g – moment zginający, W_z – wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie.

Cykliczną granicę plastyczności R_e' określono na poziomie 600 MPa.



Rys. 2.6. Rozkłady naprężeń pseudosprężystych w elemencie z karbem o promieniu $R = 0,2$ mm poddanemu zginaniu (wyniki dla próbki płaskiej ze stali 42CrMo4+QT, $M_g = 48,8$ N·m)



Rys. 2.7. Rozkłady naprężeń sprężysto-plastycznych w elemencie z karbem o promieniu $R = 0,2$ mm poddanemu zginaniu (wyniki dla próbki płaskiej ze stali 42CrMo4+QT, $M_g = 48,8$ N·m)

2. Karby w elementach konstrukcyjnych

Analizując dwa stany obciążenia którymi zajęto się w tej pracy, można stwierdzić, że największymi wartościami występującymi w elementach z karbem są naprężenia osiowe σ_{xx} , które zarazem mają największy wpływ na wartości naprężeń σ_1 i σ_{H-M-H} . Jednocześnie należy zwrócić uwagę, że wartości naprężeń obliczane w zakresie sprężysto-plastycznym przyjmują znacznie mniejsze wartości. Wykorzystując nieliniową analizę MES, wartości tych naprężeń znacząco zależą od przyjętej wartości granicy plastyczności, która w przypadku obciążeń cyklicznych, jest niższa od granicy plastyczności dla obciążenia statycznego. W przypadku znacznego przekroczenia cyklicznej granicy plastyczności, co związane jest z pojawieniem się dużych odkształceń plastycznych, maksymalne naprężenia σ_{xx} występują pod powierzchnią elementu.

Bazując na wynikach liniowo-sprężystej analizy MES dla elementów z karbem, wyznaczono teoretyczne współczynniki działania karbu zgodnie z zależnością (2.1), które przedstawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Wartości współczynnika działania karbu K_t dla geometrii karbów analizowanych w pracy

Materiał, geometria	Współczynnik K_t , -	
	rozciąganie	zginanie
EA4T, $R = 0,2$ mm	4,63	-
42CrMo4+QT, $R = 0,2$ mm	-	3,64
42CrMo4+QT, $R = 0,5$ mm	-	2,52
42CrMo4+QT, $R = 0,8$ mm	-	2,15
42CrMo4+QT, $R = 1$ mm	-	2,00

3. Wpływ karbu na wytrzymałość zmęczeniową

W przypadku karbów, inicjacja pęknięcia następuje zazwyczaj w dnie karbu, w miejscu występowania największego naprężenia. Największy wpływ na powstanie mikropęknięć mają naprężenia styczne, ale tylko w sytuacji, gdzie występują duże gradienty i w niewielkim obszarze. Wpływ ten jest największy, kiedy kierunek działania maksymalnych naprężeń stycznych, pokrywa się z liniami poślizgów poszczególnych ziaren. Linie poślizgów zlokalizowane w płaszczyznach poślizgów łączą się następnie w pasma, które wraz ze wzrostem liczby cykli obciążenia prowadzą do powstania skupień i wiązki [37]. W pasmach poślizgów dochodzi do inicjacji, a następnie do łączenia się mikropęknięć spowodowanych lokalnymi spiętrzeniami naprężeń [37]. Zarodkujące w ziarnach pęknięcia mogą nie wzrastać, jeśli zostaną zablokowane przez bariery dyslokacyjne, brak będzie zgodności kierunków naprężeń stycznych z płaszczyznami poślizgów lub naprężenia styczne znacznie zmaleją. Obszar wpływu naprężeń stycznych jest stosunkowo niewielki w porównaniu z obszarem wpływu dla naprężeń normalnych, których odpowiedni poziom wartości może dopiero spowodować łączenie mikropęknięć i propagację pęknięcia [33]. Jednak powstała szczelina zmęczeniowa powoduje, że wpływ karbu zostaje zmniejszony na skutek powstałego pęknięcia. Należy założyć, że pole naprężeń występujące w okolicy karbu zmieni się po zainicjowaniu pęknięcia zmęczeniowego. Zmianie ulegnie także występujący w okolicy karbu gradient naprężenia. Po inicjacji pęknięcia i zmianie pola naprężeń w okolicy karbu, wpływ karbu zanika na rzecz większego znaczenia naprężenia związanego z powstałą szczeliną zmęczeniową. Powoduje to sytuację, w której rozwój pęknięcia może zostać spowolniony, z powodu zmniejszenia się naprężenia związanego z karbem oraz z powodu powstałej strefy plastycznej związanej ze szczeliną zmęczeniową [27]. W miarę rozwoju pęknięcia zmniejsza się przekrój elementu przynoszący niezmiennie obciążenie, co zdecydowanie wpływa na wzrost naprężeń nominalnych i wzrost szybkości przyrostu pęknięcia. Po zwiększeniu się długości szczeliny, dalszy rozwój pęknięcia może być rozpatrywany jak dla elementu gładkiego i zgodnie z zasadami mechaniki pękania. W związku z tym, w elementach z karbem, zmęczenie materiału powinno być rozpatrywane jedynie do momentu zainicjowania pęknięcia, a samo zdefiniowanie pęknięcia i jego długości określającej granicę pomiędzy zmęczeniem a mechaniką pękania jest kłopotliwe. Istotnym jest przyjęcie, że propagacja pęknięcia następuje po

osiągnięciu progowego współczynnika intensywności naprężeń K_{th} . Jednakże podczas badań zmęczeniowych na próbkach z karbem, uchwycenie pęknięcia odpowiadającego progowemu współczynnikowi intensywności naprężeń nie jest zadaniem łatwym. Z punktu widzenia zachowania bezpieczeństwa pracy niektórych konstrukcji można przyjąć, że czas propagacji pęknięcia można uważać jako zabezpieczenie przed ewentualną awarią lub katastrofą. Zatem samo zdefiniowanie wartości długości pęknięcia odpowiadającej inicjacji, biorąc pod uwagę możliwości prowadzenia badań zmęczeniowych, można uznać za mierzoną w dziesiątych częściach milimetrów. W metodach nielokalnych należy więc rozpatrywać naprężenie działające w niewielkiej strefie w pobliżu dna karbu. Strefa ta zwykle nie przekracza 1 mm długości, promienia lub średnicy w zależności od zastosowanego podejścia. Największą trudnością jest określenie rozmiarów tej strefy oraz wskazanie jej stałej lub zmiennej wartości w zależności od poziomu obciążenia i rodzaju koncentratora naprężeń. Biorąc pod uwagę zmęczeniową próbę rozciągania-ściskania elementu gładkiego można stwierdzić, że cały przekrój jest wyłożony w jednakowy sposób i jednakowo ulega zmęczeniu. Zmniejszając promień karbu R od ∞ do 0, coraz to mniejsza część przekroju jest poddana wysokiemu wyłożeniu z powodu zwiększającego się gradientu naprężenia. W przypadku karbu, którego promień $R \rightarrow 0$, obszar ten skupia się w bliskości karbu, a bardzo duża wartość naprężenia oraz odkształcenia plastyczne spowodują szybkie zainicjowanie pęknięcia zmęczeniowego. Z punktu widzenia uproszczenia analizy pożądanym byłoby, aby strefę zmęczeniową określać zawsze jako stałą. Wydaje się jednak, że strefa ta związana zwykle ze strefą działania odkształceń plastycznych, powinna być zmienna. Rozmiar i kształt strefy plastycznej w okolicy karbu jest inny niż w przypadku frontu szczeliny zmęczeniowej, chyba, że rozpatrywany jest karb o bardzo małym promieniu.

Najczęściej stosowaną wielkością charakteryzującą wpływ karbów na trwałość zmęczeniową jest zmęczeniowy współczynnik działania karbu K_f (zmęczeniowy współczynnik spiętrzenia naprężeń β_k). Wartość współczynnika K_f można wyznaczyć dysponując charakterystykami zmęczeniowymi elementów gładkich i z karbem, na podstawie zależności

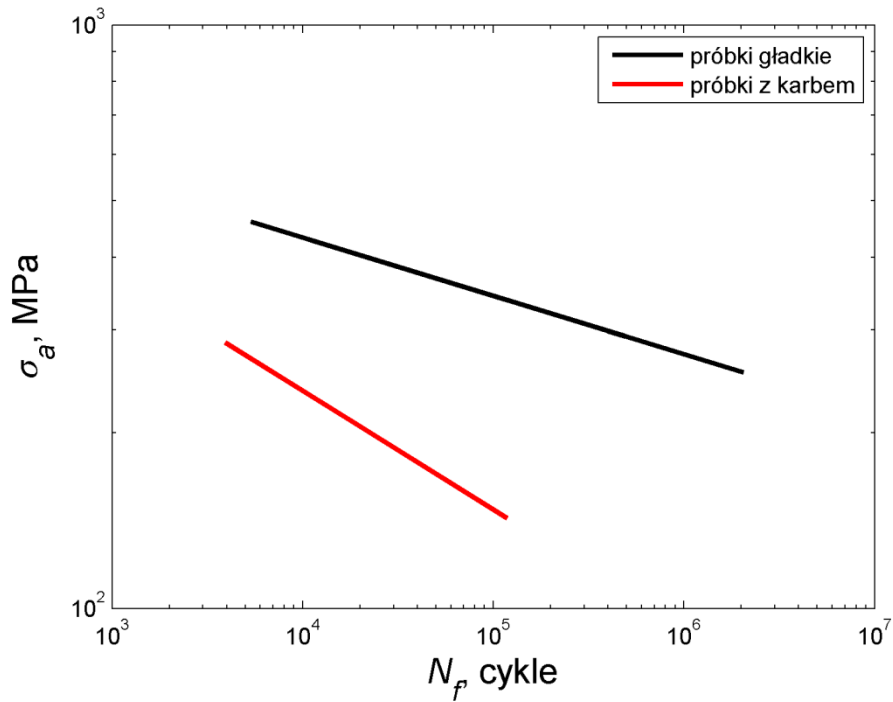
$$K_f = \frac{\sigma_{nom,g}}{\sigma_{nom,k}}, \quad (3.1)$$

gdzie: $\sigma_{nom,g}$ – wytrzymałość zmęczeniowa elementu gładkiego, $\sigma_{nom,k}$ – wytrzymałość zmęczeniowa elementu z karbem.

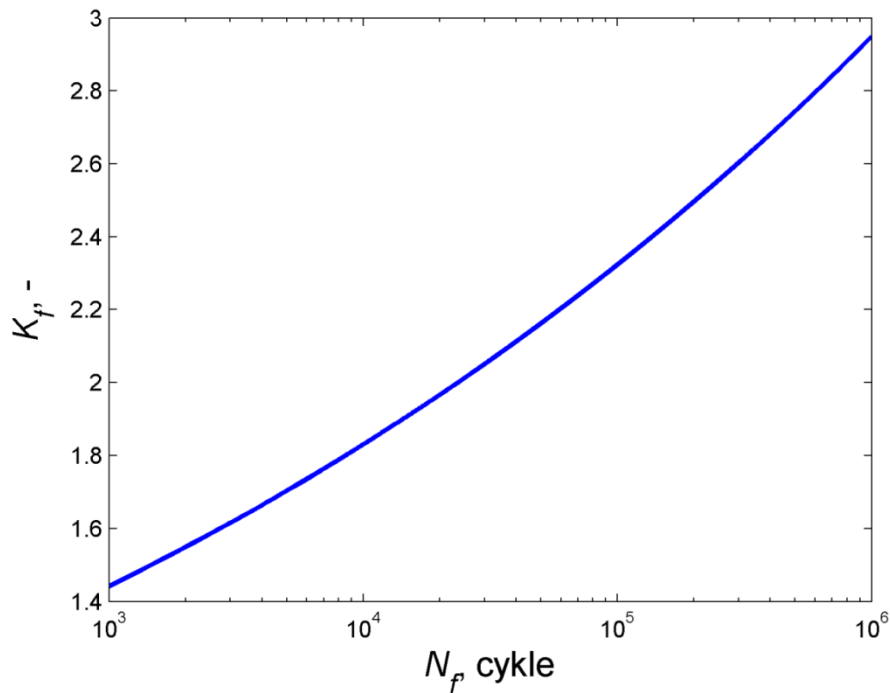
3. Wpływ karbu na wytrzymałość zmęczeniową

Z uwagi na możliwość występowania nierównoległości charakterystyk zmęczeniowych próbek gładkich i z karbem (rys. 3.1), zmęczeniowy współczynnik działania karbu jest zwykle zmienny w funkcji liczby cykli [13] (rys. 3.2), co można zapisać przez zależność

$$K_f(N_f) = \frac{\sigma_{nom,g}(N_f)}{\sigma_{nom,k}(N_f)}. \quad (3.2)$$



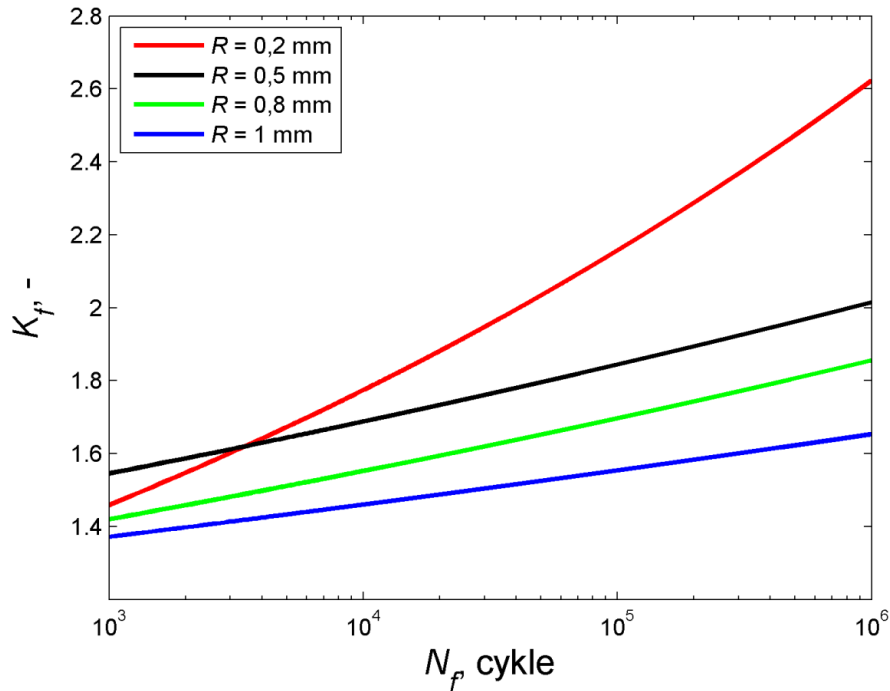
Rys. 3.1. Charakterystyka zmęczeniowa próbek gładkich i próbek z karbem ze stali EA4T



Rys. 3.2. Zmęczeniowy współczynnik działania karbu dla próbek z karbem ze stali EA4T

Pomimo tego, najczęściej zmęczeniowy współczynnik działania karbu wyznacza się dla liczby cykli N_f równej 10^6 , co wynika głównie z powodu zastosowania metod opartych na współczynniku K_f do zakresu dużej liczby cykli [56].

Zmęczeniowy współczynnik działania karbu jest wyznaczany w oparciu o naprężenia nominalne netto co powoduje, że dla różnych geometrii karbów, które charakteryzują się zmiennym teoretycznym współczynnikiem działania karbu, będzie przyjmował inne wartości (rys. 3.3). Wykorzystując naprężenie nominalne i zmęczeniowy współczynnik działania karbu nie uwzględnia się lokalnych naprężeń, które w przypadku karbów zwykle przekraczają cykliczną granicę plastyczności.



Rys. 3.3. Zmęczeniowy współczynnik działania karbu dla próbek z karbem ze stali 42CrMo4+QT

W pracy [63] autorzy przedstawili metodę wyznaczania efektywnego współczynnika działania karbu β_k^l , przyjmując wartość lokalnego naprężenia σ_z w karbie wyznaczonym dla pewnej odległości l znajdującej się pod powierzchnią zgodnie z zależnością

$$K_f^l = \beta_k^l = \frac{\sigma_{z,k}^l}{\sigma_{nom,gl}} \quad (3.3)$$

Jest to sposób zastosowania nielokalnej metody punktowej za pomocą której możliwe jest przyjęcie ekwiwalentnej wartości naprężenia obliczonej dla liniowo-sprężystego rozkładu naprężenia w okolicy karbu.

Drugą wielkością opisującą karb w zakresie obciążeń zmiennych jest współczynnik wrażliwości materiału na działanie karbu q opisany zależnością

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (3.4)$$

Współczynnik ten przyjmuje wartości z zakresu $\langle 0 \div 1 \rangle$, gdzie: 0 – oznacza brak wrażliwości materiału na działanie karbu, 1 – oznacza maksymalną wrażliwość materiału na działanie karbu. Jest to opis, który odpowiada materiałom doskonale kruchym i sprężystym lub materiałom doskonale plastycznym [37].

3. Wpływ karbu na wytrzymałość zmęczeniową

W przypadku braku charakterystyk zmęczeniowych elementów z karbem, zmęczeniowy współczynnik działania karbu K_f może zostać także wyznaczony za pomocą zależności analitycznych. Najbardziej znane zależności empiryczne oparte są o stałe materiałowe wyrażone w jednostkach długości [47], [74], [84].

W pracy [74] Neuber zaproponował zależność na obliczenie współczynnika K_f stosując stałą materiałową a_N , (Neubera), która ma wymiar długości

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{a_N}{R}}}, \quad (3.5)$$

gdzie, R – promień karbu.

Stała materiałowa a_N , zwana także charakterystyczną długością, jest przyjmowana na podstawie wykresu, w którym a_N zależy od wytrzymałości na rozciąganie R_m . Stała ta nie jest jednak tożsama ze stałą materiałową ρ^* stosowaną w metodzie promienia fikcyjnego Neubera [76].

Dowling w pracy [19] zaproponował empiryczną zależność bazującą na wytrzymałości na rozciąganie R_m w postaci

$$a_N = 10^{-\frac{R_m - 134}{586}}. \quad (3.6)$$

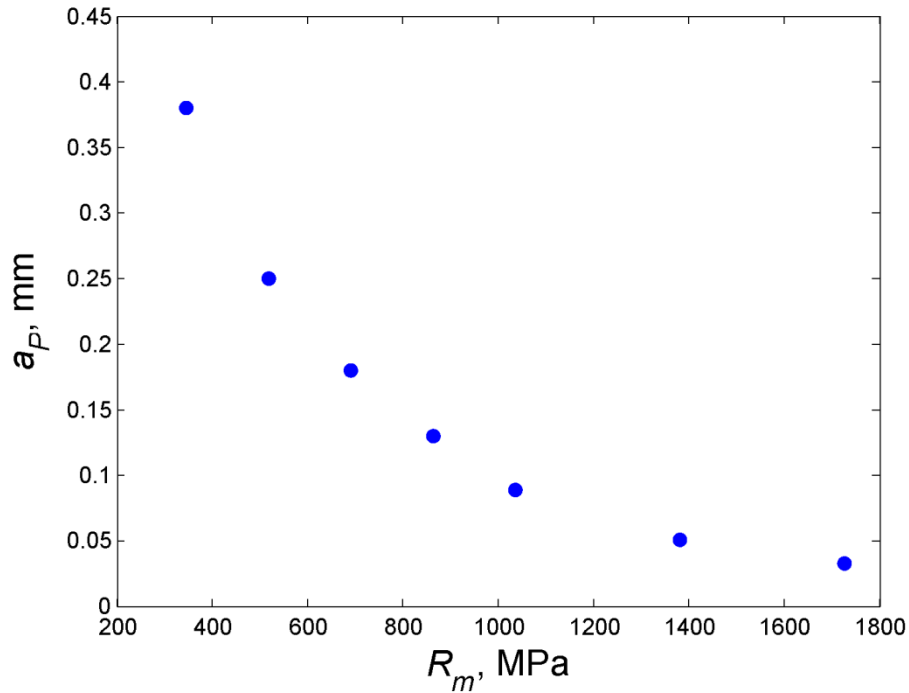
Zastosowanie w obliczeniach zależności Neubera prowadzi często do uzyskania konserwatywnych wyników trwałości obliczeniowej [107].

W pracy [84] Peterson zaproponował wyznaczenie współczynnika K_f z zależności

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{a_P}{R}}, \quad (3.7)$$

gdzie: a_P – stała materiałowa (Petersona) wyrażona w jednostkach długości.

Peterson zaproponował dla zginanych elementów z karbem wyznaczenie stałej a_P w funkcji wytrzymałości na rozciąganie R_m , wykorzystując wartości, które przedstawiono na rys. 3.4.



Rys. 3.4. Zależność stałej a_P od wytrzymałości na rozciąganie R_m

Peterson w innej pracy [85] uzależnił wyznaczenie stałej a_P od rodzaju stali i jej twardości, przyjmując dla stali wyżarzanej zmiękczająco $a_P = 0,254$ mm (≈ 170 HB), a dla stali ulepszanej cieplnie $a_P = 0,0635$ mm (≈ 360 HB).

Sposoby obliczeń współczynnika K_f które zaproponowali Neuber i Peterson, są oparte o zależności empiryczne.

Lavrence [57] zaproponował wyznaczanie stałych a_P z zależności

$$a_P = 0,025 \left(\frac{2068}{R_m} \right)^{1,8} = \frac{10870}{R_m^2}. \quad (3.8)$$

Natomiast Dowling w pracy [19] przedstawił zależność stosowaną dla grupy stali o wytrzymałości R_m powyżej 550 MPa w postaci

$$a_P = \left(\frac{270}{R_m} \right)^{1,8}. \quad (3.9)$$

W metodzie (gorącego punktu) „Hot-spot” mogą być zastosowane obliczenia numeryczne [89], [100], ale także sposób wyznaczenia zmęczeniowego współczynnika K_f z teoretycznego współczynnika K_t i cyklicznych właściwości materiałowych. Zależność na współczynnik K_f ma postać

$$K_f = \frac{K_t^2}{\zeta}. \quad (3.10)$$

Zależności na wyznaczenie współczynnika ζ zaproponowali m.in. Glinka [28], Morozov i Pluvinage [9]. Autorzy uzależnili wartość współczynnika ζ od wykładnika cyklicznego umocnienia n' , co spowodowało uzyskanie stałej lub nieznacznie zmiennej wartości współczynnika K_f [9].

Zmęczeniowy współczynnik działania karbu jest wyznaczany w oparciu o naprężenie nominalne, w którym nie uwzględnia się lokalnych wartości naprężeń w zakresie liniowo-sprężystym jak i sprężysto-plastycznym. Ta sytuacja powoduje, że do wyznaczenia lokalnych wartości naprężeń konieczne jest dodatkowe uwzględnienie teoretycznego współczynnika działania karbu K_t lub wykorzystanie MES.

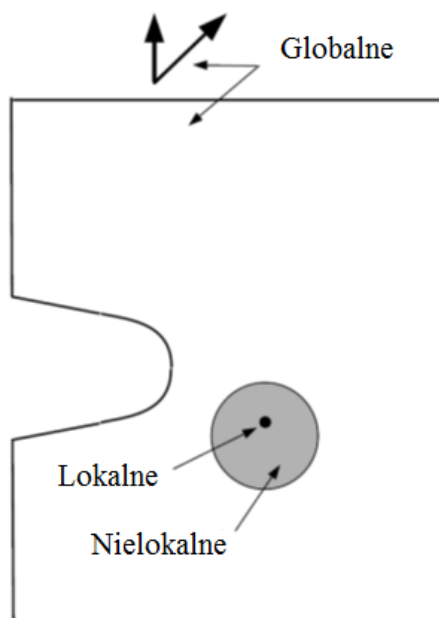
Wykorzystując MES, można opracować nowe metody bazujące na wynikach tych analiz. Można także zdecydować się na przeprowadzenie nieliniowych analiz MES, których wynikiem będą efektywne wartości naprężeń uwzględniające umocnienie materiału i odkształcenia plastyczne. Zatem skuteczne wyznaczenie pola efektywnych naprężeń w okolicy karbu wymaga zastosowania obliczeń MES.

Karby zawsze powodują spiętrzenie naprężeń oraz powstanie wieloosiowego stanu naprężenia. Oba te czynniki wpływają negatywnie na trwałość zmęczeniową danego elementu, wprowadzając jednocześnie komplikacje w analizie. W zależności od promienia karbu, a zarazem wartości teoretycznego współczynnika działania karbu, zainicjowanie pęknięcia będzie przebiegać znacznie szybciej niż w przypadku elementu gładkiego. Porównując trwałość zmęczeniową elementu z karbem, z trwałością elementu gładkiego można stwierdzić, że dla tej samej liczby cykli, element z karbem może przenieść obciążenie o większej wartości maksymalnego lokalnego naprężenia. Jednocześnie element z karbem wyczerpany tym samym lokalnym naprężeniem maksymalnym co element gładki, będzie pracował przez większą liczbę cykli. Związane jest to z występującym gradientem naprężenia, który w elementach z karbem, ale także w elementach zginanych może być znaczny. Na skutek zmniejszenia się wartości naprężenia związanego z karbem, zainicjowane pęknięcie propaguje znacznie wolniej niż w elemencie gładkim. Należy jednak zaznaczyć, że w przypadku operowania naprężeniem nominalnym dla elementu z karbem, sposób interpretacji wytrzymałości zmęczeniowej jest odwrotny, to znaczy, element z karbem przy tym samym poziomie naprężeń nominalnych wytrzyma mniejszą liczbę cykli. Naprężenie nominalne jest także informacją o poziomie obciążenia elementu odpowiednią wartością siły lub momentu

zginającego. Wraz z zastosowaniem teoretycznego współczynnika działania karbu K_t , uzyskać można informacje o maksymalnym lokalnym naprężeniu działającym w dnie karbu. Jest to jednak informacja jedynie o maksymalnym naprężeniu działającym na powierzchni elementu, obliczonego w zakresie sprężystych odkształceń (pseudosprężystych po przekroczeniu cyklicznej granicy plastyczności). Nie całkiem właściwe jest odniesienie tak obliczonego naprężenia do charakterystyki próbki gładkiej, gdzie wartość naprężenia będąca ilorazem siły i pola powierzchni określa rzeczywiste naprężenie, uwzględniające powstałe odkształcenia plastyczne. Analizując rozkład zmiennego pola naprężenia w okolicy karbu należy stwierdzić, że gradient naprężenia w przekroju elementu powoduje znaczny spadek naprężenia wzdłuż promienia próbki. W zależności od ostrości karbu, już w niewielkiej odległości od dna karbu, naprężenia zmniejszają się do poziomu odpowiadającemu naprężeniu z próbki gładkiej, odczytanej z charakterystyki zmęczeniowej dla tej samej trwałości. Wynika z tego, że w elementach z karbem, to nie maksymalne lokalne naprężenie jest decydujące o inicjacji pęknięcia, ale pole naprężeń działające w okolicy karbu.

4. Metody obliczeniowe dla elementów z karbem

Metody stosowane do szacowania trwałości zmęczeniowej elementów z karbem można podzielić na globalne oraz lokalne i nielokalne [122] (rys. 4.1). Stosowane w literaturze anglojęzycznej określenia „local criterion” lub „global criterion” są rozumiane w ten sposób, że kryteria „local” są oparte o lokalne wartości naprężeń lub odkształceń, a kryteria „global” są oparte o wartości zewnętrznych sił, momentów lub naprężeń nominalnych. Metody nielokalne „non-local” są rozumiane jako algorytmy, w których obliczenia wykonywane są w pewnym obszarze, który może być opisany w jednostkach długości, pola powierzchni lub objętości.



Rys. 4.1. Metody globalne, lokalne i nielokalne [122]

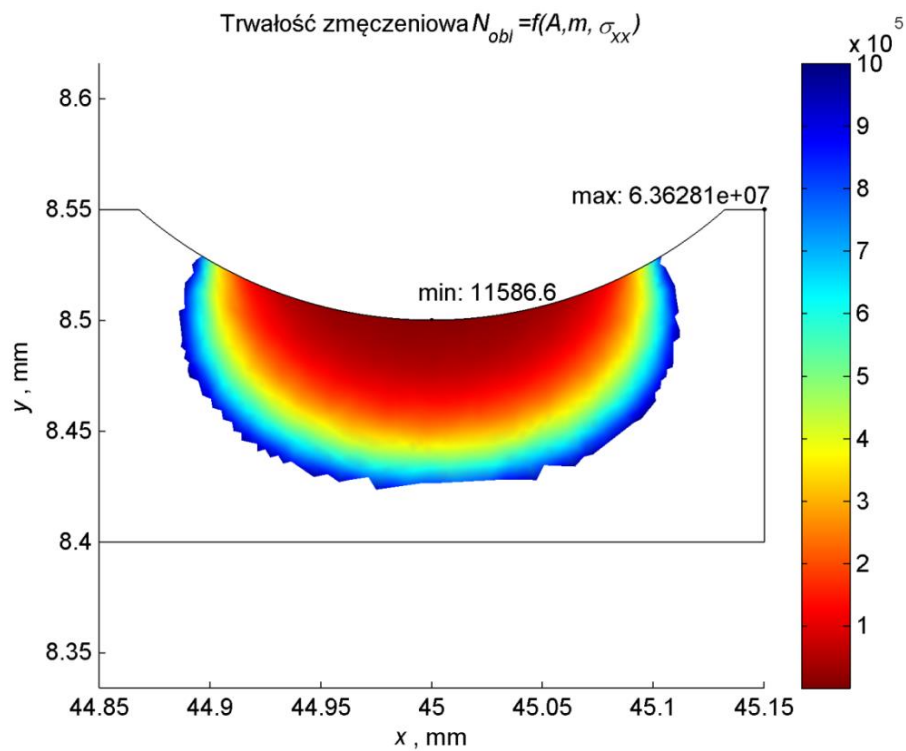
Zarówno metody lokalne jak i nielokalne można dodatkowo podzielić na te bazujące na naprężeniach wykorzystujących sprężysty model materiałowy ciała oraz te wykorzystujące zależności sprężysto-plastyczne wyznaczone w stanie statycznym lub cyklicznym. Najbardziej bliskie stanu faktycznemu naprężeń, jaki występuje w elementach z karbem poddanych obciążeniom zmiennym, są naprężenia obliczone przy zastosowaniu cyklicznych właściwości materiałowych. Są to naprężenia efektywne, bliskie naprężeniom rzeczywistym. Prace, w których prezentowane są modele nielokalne bazujące na cyklicznych właściwościach materiałowych, są najczęściej wykonywane

przez Pluvinage, Qylafku, Karolczuka [2], [3], [4], [9], [33], [34], [35], [91], [131]. Także w pracach Seweryna i Szusty [18], [119], [120], wykorzystywane są cykliczne właściwości materiałowe, choć obliczenia nie są wykorzystywane w modelach nielokalnych. Inni badacze wykorzystują cykliczne właściwości materiałowe z wykorzystaniem modeli kumulacji uszkodzeń w elementach z karbem [104].

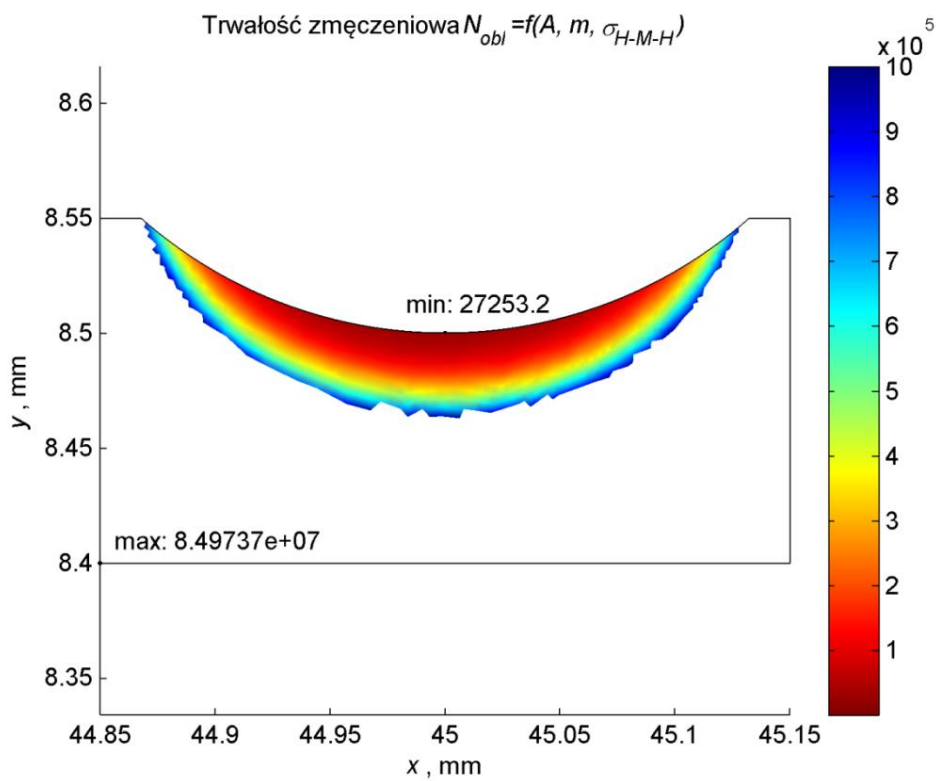
Modele lokalne nie uwzględniają w żaden sposób gradientu naprężenia działającego w okolicy dna karbu. W rozważaniach na temat inicjacji pęknięcia najczęściej przyjmuje się, że inicjacja pęknięcia zachodzi na powierzchni karbu. W tym miejscu, lokalne naprężenie zwykle przyjmuje duże wartości i obliczeniowa trwałość często wskazuje na znacznie zaniżone liczby cykli do zniszczenia. Zbyt konserwatywny wynik obliczeniowej trwałości może być także wyznaczony w przypadku wykonania obliczeń sprężysto-plastycznych, kiedy to maksymalne naprężenie jest wyraźnie mniejsze w porównaniu do tego otrzymanego z obliczeń sprężystych. Przyjęcie do obliczeń lokalnych maksymalnych naprężeń (np. największych naprężeń normalnych σ_{xx} lub zredukowanych według hipotezy H-M-H σ_{H-M-H}) powoduje, że po porównaniu tych wartości z charakterystyką dla próbek gładkich, otrzymana trwałość jest często bardzo zaniżona [71], [82].

Na rys. 4.2 i 4.3 przedstawiono obliczeniową trwałość zmęczeniową dla płaskiej próbki wykonanej ze stali 42CrMo4+QT o promieniu karbu $R = 0,2$ mm i obciążeniu momentem zginającym $M_g = 29$ N·m ($\sigma_{nom} = 185$ MPa, $\sigma_{H-M-H,max} = 610$ MPa). Zastosowano referencyjną charakterystykę zmęczeniową próbek gładkich oraz kryterium zmęczenia w postaci naprężeń σ_{xx} i σ_{H-M-H} .

4. Metody obliczeniowe dla elementów z karbem



Rys. 4.2. Trwałość obliczeniowa w cyklach dla kryterium naprężeń σ_{xx}
($N_{exp} = 272289$ cykli)

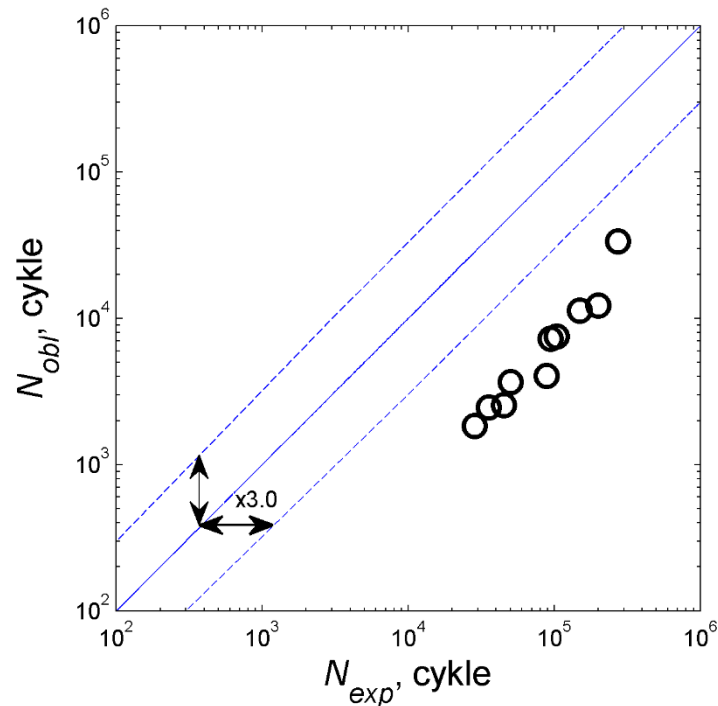


Rys. 4.3. Trwałość obliczeniowa w cyklach dla kryterium naprężeń σ_{H-M-H}
($N_{exp} = 272289$ cykli)

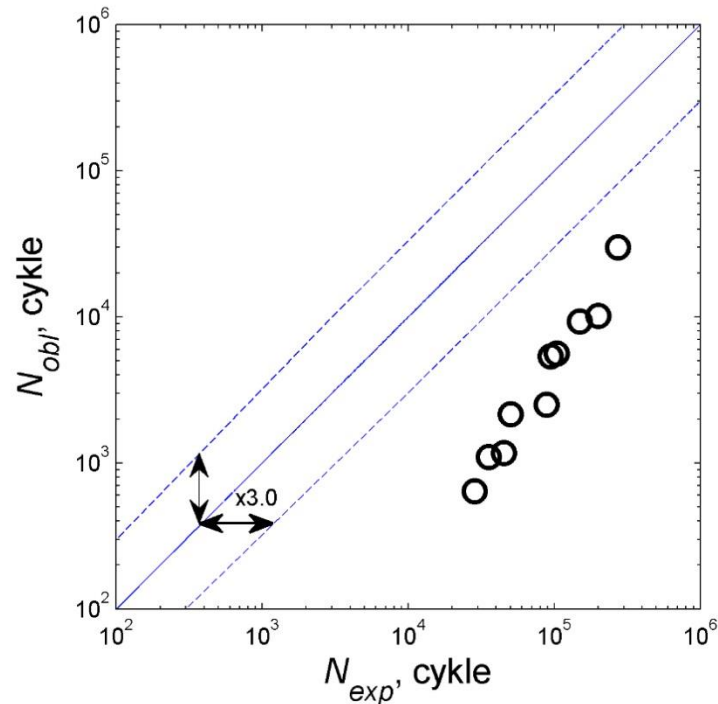
Z analizy rysunków 4.2 i 4.3 wynika, że uzyskana z obliczeń trwałość jest znacznie zaniżona, co potwierdza dużą konserwatywność kryteriów opartych na lokalnych wartościach naprężeń. Podkreślić należy, że naprężenia obliczone zostały w zakresie sprężysto-plastycznym a w przypadku zastosowania naprężeń pseudosprężystych, otrzymane wyniki będą jeszcze bardziej konserwatywne.

Wykonując obliczenia dla wszystkich punktów eksperymentalnych z serii badań dla stali 42CrMo4+QT i próbek o promienia karbu $R = 0,2$ mm, oraz stosując kryterium lokalnych wartości naprężenia H-M-H w zakresie sprężysto-plastycznym, otrzymano porównanie trwałości eksperymentalnej z obliczeniową, którą przedstawiono na rys. 4.4.

W przypadku zastosowania sprężystych właściwości materiałowych, analiza wyników wskazuje na większe rozrzuty, szczególnie w zakresie małej liczby cykli, gdzie w analizie MES uzyskano odkształcenia plastyczne (rys. 4.5).



Rys. 4.4. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla lokalnych maksymalnych wartości naprężenia σ_{H-M-H} obliczonych w zakresie sprężysto-plastycznym



Rys. 4.5. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla lokalnych maksymalnych wartości naprężenia σ_{H-M-H} obliczonych w zakresie sprężystym

Podsumowując, zastosowanie w analizie lokalnych wartości naprężeń, czy to w zakresie sprężystym, czy także sprężysto-plastycznym, prowadzi do znacznego zaniżenia wyników trwałości obliczeniowej. Decydując się na zastosowanie metod nielokalnych, koniecznym jest wyznaczenie strefy zmęczeniowej, w której uśredniony stan naprężenia będzie odzwierciedlał stan ekwiwalentny.

4.1. Metody globalne

Metody globalne bazują głównie na wartościach naprężeń nominalnych, za pomocą których wyrażone są wartości sił zewnętrznych lub momentów. Przy zastosowaniu tych metod nie uwzględnia się więc geometrii elementu, a jedynie poziom i charakter obciążenia. Spośród metod globalnych, najczęściej stosowane są te wykorzystujące zmęczeniowy współczynnik działania karbu K_f [91]. Sposób wyznaczenia trwałości zmęczeniowej polega więc na wyznaczeniu współczynnika K_f opierając się na opracowanych zależnościach analitycznych. W tym przypadku zakłada się, że trwałość zmęczeniowa elementu z karbem nie jest znana, a więc nieznanym jest także współczynnik K_f . Są to więc metody oparte o charakterystyki zmęczeniowe $\sigma_{nom}-N_f$ (wykresy $S-N$).

Metody oparte o zmęczeniowy współczynnik działania karbu zostały opisane w rozdziale 3.

4.2. Metody lokalne

Najprostszą metodą z podejściem lokalnym jest przyrównanie lokalnego maksymalnego naprężenia lub odkształcenia w karbie do charakterystyki zmęczeniowej elementu gładkiego i odczytanie trwałości dla takiego wyężenia [122].

Jak wskazano w rozdziale 3, prowadzi to do znacznego zaniżenia wyników trwałości obliczeniowej.

Porównanie lokalnych odkształceń plastycznych w próbce z karbem do odkształceń plastycznych w próbkach gładkich przedstawiono w pracy [60]. Założeniem tego podejścia jest, że kumulacja uszkodzenia zmęczeniowego jest taka sama w przypadku elementu z karbem i elementu gładkiego oraz, że inicjacja pęknięcia nastąpi przy takiej samej liczbie cykli. Z uwagi na gradient odkształcenia w próbkach z karbem, podejście to może być właściwe tylko w przypadku rozpatrywania inicjacji pęknięcia o bardzo niewielkiej długości. Analiza ta wymaga także dokładnego określenia stanu odkształcenia w dnie karbu. Takie podejście ma więc swoje wady, ponieważ nie uwzględnia gradientu naprężenia w elemencie z karbem, przez co otrzymane wyniki powinny być znacznie zaniżone.

Innymi sposobami na szacowanie trwałości zmęczeniowej elementów z karbem są metody oparte na koncepcji płaszczyzny krytycznej [24], [25], [53], [55], prace Neubera, Radaja i Sonsino, związanych głównie z połączeniami spawanymi [74], [94], [95], oraz modele energetyczne wykorzystywane do ustalenia lokalnych wartości naprężeń uwzględniających cykliczne właściwości materiałowe [51], [70], [77].

Metody lokalne można więc podzielić na te wykorzystujące pojęcie płaszczyzny krytycznej, metodę promienia fikcyjnego Neubera, metody bazujące na wykorzystaniu poszczególnych składowych tensora naprężeń i odkształceń oraz metody energetyczne.

Grupa metod energetycznych jest stosowana do obliczenia lokalnego naprężenia w dnie karbu, które to powinno być wyznaczone na podstawie cyklicznych właściwości materiałowych. Właściwości te są opisane przez równanie Ramberga-Osgooda [97]

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}. \quad (4.1)$$

Neuber [77] w swojej koncepcji energetycznej zaproponował wyznaczenie lokalnego naprężenia w karbie, w oparciu o założenie równości parametru gęstości energii odkształcenia dla naprężeń i odkształceń sprężystych, z naprężeniami i odkształceniami w zakresie sprężysto-plastycznym

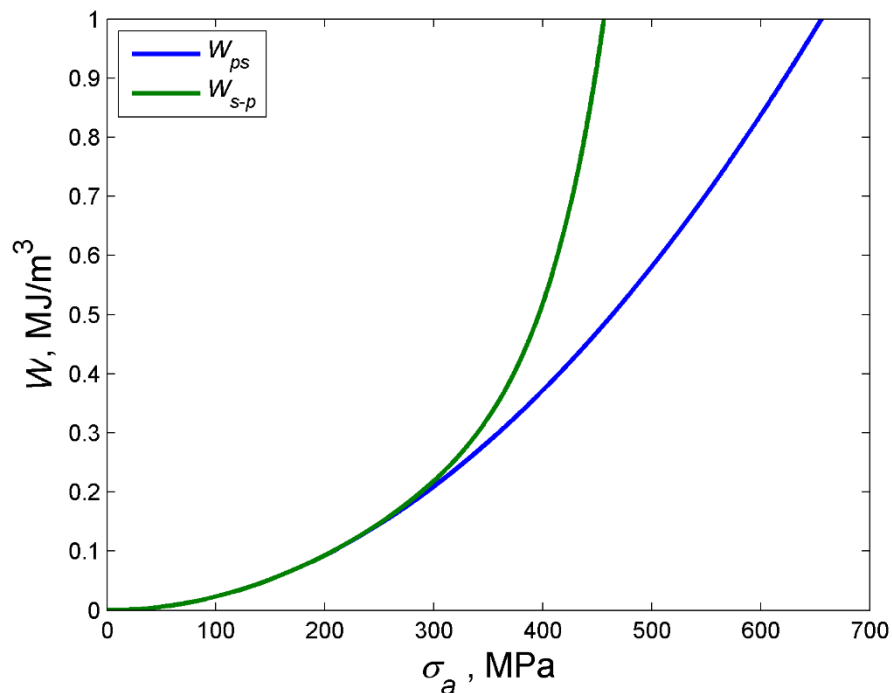
$$\sigma_{s-p} \cdot \varepsilon_{s-p} = W_{s-p} = K_t^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma_{nom} = W_{ps}, \quad (4.2)$$

czyli

$$\sigma_{s-p} \cdot \varepsilon_{s-p} = K_t^2 \cdot \frac{\sigma_{nom}^2}{E}, \quad (4.3)$$

gdzie: W_{ps} – energia pseudosprężysta przy założeniu materiału idealnie sprężystego, która wyliczona jest w oparciu o naprężenie nominalne i teoretyczny współczynnik działania karbu.

Sposób obliczania parametru energii W przedstawiono graficznie na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Wartości energii W obliczane dla energii pseudosprężystej i sprężysto-plastycznej według Neubera

Numeryczne rozwiązanie równania

$$\frac{\sigma_{s-p}^2}{E} + \sigma_{s-p} \left(\frac{\sigma_{s-p}}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} = \frac{K_t^2 \cdot \sigma_{nom}^2}{E}, \quad (4.4)$$

ze względu na naprężenie σ_{s-p} , umożliwia obliczenie wartości lokalnego naprężenia.

Należy zauważyć, że zdefiniowany przez Neubera parametr gęstości energii odkształcenia nie jest energią w rozumieniu fizycznym. Wielkość ta nie jest równa polu powierzchni pod krzywymi wyznaczającymi energię odkształcenia, a jedynie iloczynowi wartości naprężenia i odkształcenia.

Drugą metodą wyznaczania naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym jest metoda Molskiego-Glinki [69], [70]. Autorzy tej metody postulują, że ekwiwalentna gęstość energii odkształcenia dla zakresu sprężystego i sprężysto-plastycznego musi być sobie równa, czyli

$$\int_0^{\varepsilon_{s-p}} \sigma_{s-p} d\varepsilon_{s-p} = \int_0^{\varepsilon_{ps}} \sigma_{ps} d\varepsilon_{ps}. \quad (4.5)$$

W modelu tym uwzględniono energię odkształcenia obliczaną z pól powierzchni znajdujących się pod krzywymi σ - ε . Rozpisując zależność (4.5) na część sprężystą z wykorzystaniem teoretycznego współczynnika działania karbu oraz część plastyczną z wykorzystaniem opisu krzywej cyklicznego umocnienia otrzymuje się równanie

$$\frac{\sigma_{s-p}^2}{2E} + \frac{\sigma_{s-p}}{1+n'} \left(\frac{\sigma_{s-p}}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} = \frac{K_t^2 \cdot \sigma_{nom}^2}{2E}. \quad (4.6)$$

Poszukiwania wartości naprężenia w zakresie sprężysto-plastycznego można dokonać numerycznie.

Trzecim sposobem wyznaczania naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym jest zastosowanie modelu Łagody-Machy [51]. W tym modelu zakłada się, że parametr gęstości energii pseudosprężystej jest równy gęstości energii odkształcenia sprężystego z cyklu obciążenia oraz ćwiartki pola pętli histerezy wyznaczonej przez gęstość energii odkształcenia plastycznego jednego cyklu obciążenia. Zapis ten ma postać

$$W_{ps} = W_s + \frac{1}{4} \Delta W_p, \quad (4.7)$$

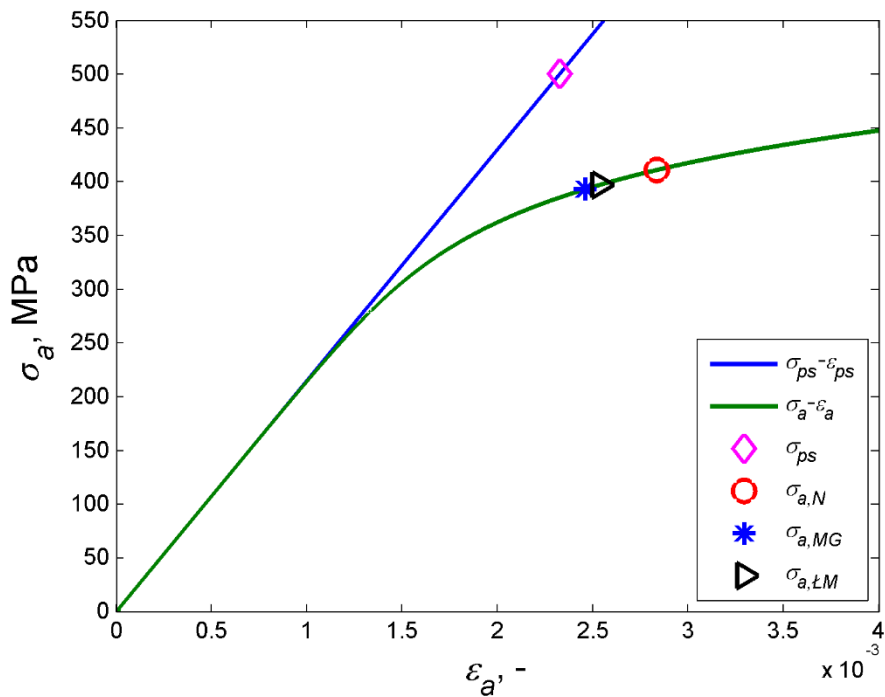
gdzie przyrost gęstości energii odkształcenia ΔW_p wynosi

$$\Delta W_p = \frac{1-n'}{1+n'} \Delta \sigma_p \varepsilon_p. \quad (4.8)$$

Ostatecznie równanie równości energii ma postać

$$\frac{\sigma_{s-p}^2}{2E} + \frac{1-n'}{1+n'} \sigma_{s-p} \left(\frac{\sigma_{s-p}}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} = \frac{K_t^2 \cdot \sigma_{nom}^2}{2E}. \quad (4.9)$$

Stosując trzy wymienione wyżej modele można zauważyć, że wyniki otrzymanych naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym mają pewną prawidłowość, mianowicie $\sigma_N > \sigma_{L-M} > \sigma_{M-G}$. Schematycznie zostało to przedstawione na rys. 4.7, gdzie zadana wartość naprężenia pseudosprężystego jest przeliczana na naprężenia w zakresie sprężysto-plastycznym z wykorzystaniem trzech opisanych wyżej modeli. Opisane modele są najbardziej znane i podobne w swojej konstrukcji.



Rys. 4.7. Wartości naprężeń sprężysto-plastycznych obliczonych modelami energetycznymi

Znaną metodą redukcji złożonego stanu naprężenia do stanu ekwiwalentnego, głównie stosowaną przy wieloosiowym stanie obciążenia, jest metoda płaszczyzny krytycznej. Jednymi z pierwszych prac na ten temat są artykuły Findleya [24], [25], w których przedstawiono sposób redukcji złożonego stanu naprężenia zgodnie z zależnością

$$\frac{\Delta\tau}{2} + k\sigma_n = C, \quad (4.10)$$

gdzie: $\Delta\tau/2$ – amplituda naprężenia stycznego, σ_n – naprężenie normalne działające w płaszczyźnie naprężeń stycznych $\Delta\tau$, k – stała za pomocą której uwzględniany jest udział naprężenia normalnego, C – stała.

Za pomocą podejścia obliczeniowego wykorzystującego płaszczyznę krytyczną, próbuje się odzwierciedlić fizyczną naturę zniszczenia zmęczeniowego, czyli mechanizmu zmęczenia [96]. Z zależności (4.10) wynika, że parametrami decydującymi o zniszczeniu zmęczeniowym są naprężenia styczne i normalne, działające w płaszczyźnie maksymalnych naprężeń stycznych.

Podobny model oparty o ideę płaszczyzny krytycznej został przedstawiony przez Fatemi-Socie w pracy [23]. Zaproponowany zapis ma postać

$$\frac{\Delta\gamma_{max}}{2} + \left(1 + k \frac{\sigma_{n,max}}{R_e}\right) = C. \quad (4.11)$$

Stała C w równaniu Findleya oraz Fatemi-Socie, ma postać charakterystyk zmęczeniowych. W przypadku zastosowania modelu do zakresu dużej liczby cykli wykorzystuje się kryterium naprężenia stycznego [83], a w przypadku zakresu małej liczby cykli, odkształcenia postaciowego w funkcji liczby nawrotów $2N_f$, czyli

$$\tau_{a,ns} + k\sigma_{n,max} = \tau'_f (2N_f)^b, \quad (4.12)$$

lub

$$\frac{\Delta\gamma_{max}}{2} + \left(1 + k \frac{\sigma_{n,max}}{R_e}\right) = \frac{\tau'_f}{G} (2N_f)^{b_0} + \gamma'_f (2N_f)^{c_0}, \quad (4.13)$$

gdzie: b , b_0 – stałe potęgowe w charakterystyce naprężeniowej i odkształceniowej dla części sprężystej, c_0 – stała potęgowa w charakterystyce odkształceniowej dla części plastycznej.

Metody lokalne oparte o ideę płaszczyzny krytycznej w wieloosiowym stanie obciążenia rozwijane były także przez Machę [64] i Łagodę [51], [55].

Wykorzystanie idei płaszczyzny krytycznej zastosował Słowik w pracach związanych z szacowaniem trwałości zmęczeniowej elementów z karbem [55], [109].

W pracach tych wykorzystano kryterium parametru gęstości energii odkształceń postaciowych, w których zakłada się, że za trwałość zmęczeniową odpowiada część gęstości energii odkształcenia, która jest związana z pracą naprężenia normalnego na

odkształceniu normalnym oraz pracy naprężeń stycznych na odkształceniu postaciowym w kierunku stycznym na płaszczyźnie krytycznej o normalnej n

$$W_{a,eq} = (\beta \cdot W_{a,ns})_{max} + \kappa \cdot W_{a,n}, \quad (4.14)$$

gdzie: $W_{a,ns}$ – parametr gęstości energii odkształceń postaciowych, $W_{a,n}$ – parametr gęstości energii odkształceń normalnych, β , κ – współczynniki wagowe.

W pracy [55], autorzy wskazali na dobrą zgodność wyników trwałości obliczeniowej przy wykorzystaniu metody energetycznej zastosowanej do elementów z karbem.

4.3. Metody nielokalne

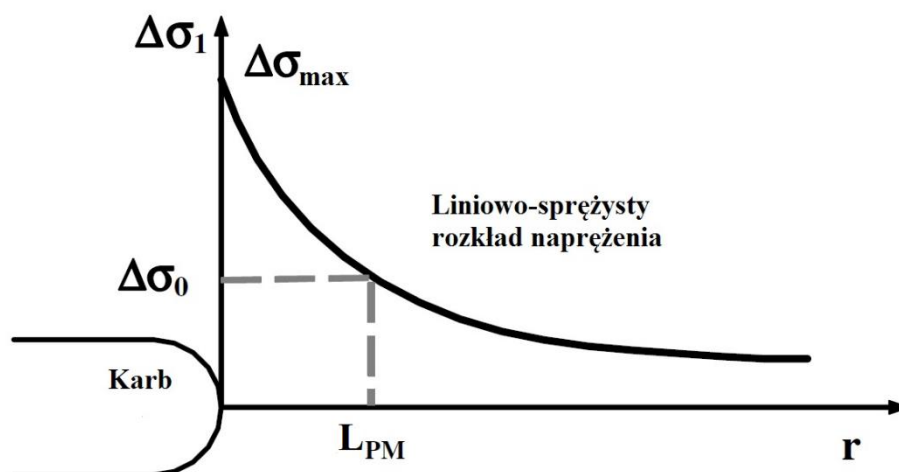
4.3.1. Metoda punktowa

Metoda punktowa jest najprostszą z metod nielokalnych. Formalnie metoda ta nie powinna być zaliczana do grupy metod nielokalnych, ponieważ brak jest odniesienia do przestrzeni uśredniania. Metoda ta ma główną wadę, którą jest brak możliwości uwzględnienia rozkładu naprężenia i jego gradientu, który wynika z geometrii karbu.

W metodzie zaproponowanej przez Petersona [85] i Taylora [122], [123] zakłada się, że do wyznaczenia ekwiwalentnego naprężenia konieczny jest odcinek, który definiuje położenie pewnego punktu pod powierzchnią dna karbu. Położenie tego punktu pod powierzchnią dna karbu jest wyznaczane z wykorzystaniem zależności określającej rozmiar strefy plastycznej, zaproponowanej po raz pierwszy przez Irwina.

Pierwszym autorem takiego podejścia był Peterson [85], który założył uproszczenie metody liniowej zaproponowanej przez Neubergera [73], [74].

W metodzie punktowej konieczna jest jednak znajomość funkcji zmiany naprężenia wzdłuż promienia (rys. 4.8), który jest obliczany w zakresie liniowo-sprężystym [123].

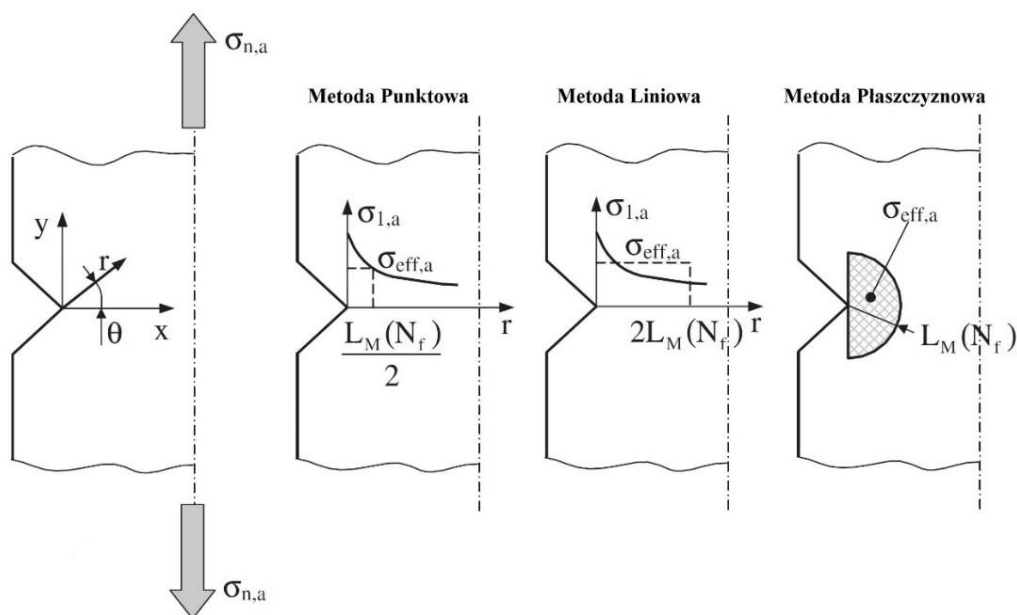
Rys. 4.8. Metoda punktowa i długość krytyczna metody punktowej L_{PM} [113]

W przypadku trudności z wyznaczeniem rozkładu naprężenia, można zastosować zależności analityczne na obliczenie zmęczeniowego współczynnika działania karbu K_f [113]. Zgodnie z teorią krytycznej długości (Theory of Critical Distance TCD) [62], [122], trwałość zmęczeniową elementu z karbem w zakresie dużej liczby cykli można wyznaczyć, poprzez odniesienie naprężenia ekwiwalentnego do naprężenia odpowiadającego wytrzymałości próbki gładkiej $\Delta\sigma_0$, a więc

$$\Delta\sigma_{eq} = \Delta\sigma_0, \quad (4.15)$$

gdzie, $\Delta\sigma_0$ – zakres wytrzymałości zmęczeniowej próbki gładkiej (granicy zmęczenia).

W oparciu o teorię krytycznego dystansu, Taylor i Susmel opracowali nie tylko metodę punktową, ale także metodę liniową i płaszczyznową (rys. 4.9). Krytyczna odległość L_M zaznaczona na rys. 4.9, oznacza wielkość stosowaną przez autorów do obliczeń wykonywanych w zakresie pośredniej liczby cykli, znajdującej się pomiędzy zakresem małej i dużej liczby cykli.



Rys. 4.9. Metody stosowane w ramach teorii krytycznego dystansu [117]

W metodzie punktowej, naprężenie ekwiwalentne σ_{eq} jest przyjmowane dla połowy wartości długości krytycznej L , a więc

$$\Delta\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = \Delta\sigma_{eq} = \Delta\sigma_0. \quad (4.16)$$

Metoda oparta o teorię krytycznego dystansu była opracowana do wyznaczenia trwałości zmęczeniowej w zakresie średniej (MCF) i dużej (HCF) liczby cykli, co zwykle sprowadza jej wyniki do poziomu naprężeń odpowiadającym granicy zmęczenia. Założenie to jest właściwe, ponieważ obliczenia naprężeń są wykonywane w zakresie liniowo-sprężystym.

Pierwotna metoda punktowa Petersena została w kolejnych latach zweryfikowana w pracach Tanaki [121] i Taylora [124]. W swoich badaniach nad metodą punktową, ale także nad metodą liniową, doszli oni do wniosku, że odległość krytyczna L będąca charakterystyczną długością materiałową, powinna być obliczana z zależności [21]

$$L = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta R_e} \right), \quad (4.17)$$

gdzie, ΔK_{th} – zakres progowego współczynnika intensywności naprężeń.

Zapis tej zależności jest dostosowany do obciążeń cyklicznych, z wykorzystaniem zakresu Δ , a nie amplitudy. Zapis, z którego wynika zależność (4.17) dla obciążeń statycznych ma postać [122]

$$L = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{R_e} \right). \quad (4.18)$$

Na podstawie swoich badań Tanaka i Taylor zaproponowali, aby w metodzie punktowej wartość zakresu maksymalnego naprężenia głównego $\Delta\sigma_1$ odczytywana była dla połowy odległości krytycznej L , zgodnie z zapisem

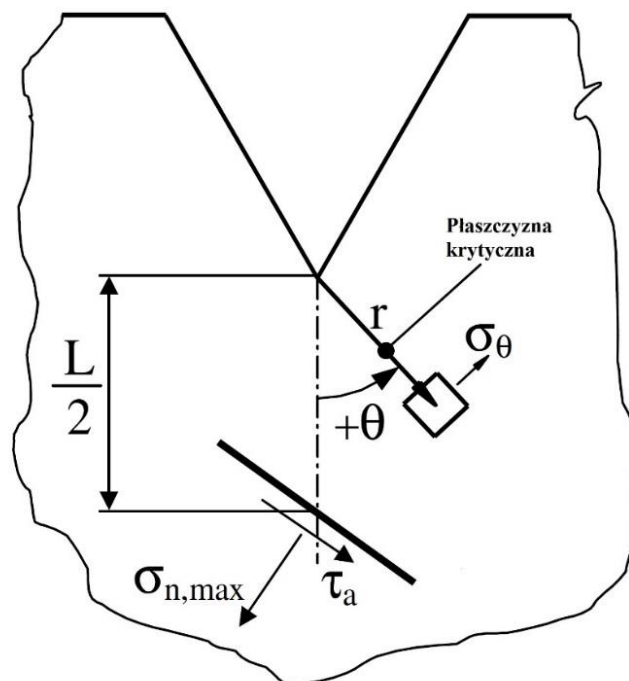
$$\Delta\sigma_{eq} = \Delta\sigma_1 \left(\alpha = 0, r = \frac{L}{2} \right) = \Delta\sigma_0. \quad (4.19)$$

Trwałość elementu z karbem jest równa trwałości próbki gładkiej, kiedy zakres wartości maksymalnego naprężenia głównego $\Delta\sigma_1$ odczytany w punkcie leżącym na połowie długości krytycznej L , jest równy wytrzymałości zmęczeniowej próbki gładkiej $\Delta\sigma_0$.

W przypadku działania wieloosiowego stanu naprężenia, metoda punktowa została także zmodyfikowana w celu uwzględnienia naprężenia normalnego w punkcie zlokalizowanym w płaszczyźnie krytycznej (rys. 4.10) [114], [116],

$$\Delta\sigma_{eq} = \Delta\sigma_\alpha \left(\alpha = \alpha_{kr}, r = \frac{L}{2} \right) = \Delta\sigma_0, \quad (4.20)$$

gdzie, σ_α – naprężenie w płaszczyźnie krytycznej, α_{kr} – kąt określający położenie płaszczyzny maksymalnego naprężenia normalnego (płaszczyzny krytycznej).



Rys. 4.10. Zastosowanie teorii krytycznego dystansu w wieloosiowym zmęczeniu [113]

Lazzarin w pracy [59] postuluje, aby zakres maksymalnego naprężenia głównego $\Delta\sigma_1$ był odczytywany na długości krytycznej L , a następnie korygowany za pomocą funkcji zależnej od długości L i promienia karbu R zgodnie z zależnością

$$\Delta\sigma_{eq} = \Delta\sigma_1(\alpha = 0, r = L) \cdot \frac{1 + \sqrt{2} \frac{L}{R}}{1 + \frac{L}{R}} = \Delta\sigma_0. \quad (4.21)$$

Prowadzi to w konsekwencji do zwiększenia wartości zakresu naprężenia $\Delta\sigma_1$, a więc uzyskania bardziej konserwatywnego wyniku trwałości.

Atzori w pracy [5] dokonał porównania przedstawionych powyżej metod punktowych stwierdzając, że dokładność obliczeń zależy od promienia karbu R oraz długości krytycznej L , która jest zależna od właściwości materiałowych. Metody te powinny być wykorzystywane do materiałów charakteryzujących się kruchym pękaniem, a więc niewykazujących odkształceń plastycznych.

Metoda punktowa rozwijana przez Taylora i Susmela została także wykorzystana do jednoosiowych obciążeń zmiennoodprężeniowych [117]. Oprócz ogólnych założeń metody punktowej, zastosowali oni liniową hipotezę kumulacji uszkodzeń Palmgren-Minera [68]. Autorzy przeprowadzili badania dla stali otrzymując zadowalające wyniki, także przy zastosowaniu metody liniowej i płaszczyznowej.

W pracy [118] Susmel i Taylor zastosowali także teorię krytycznego dystansu do obciążeń zmiennych powodujących odkształcenia sprężysto-plastyczne. W obliczeniach zastosowano metodę punktową, w której wartość krytycznego dystansu określono jak dla obciążeń cyklicznych.

Długości krytyczne mogą być także wyznaczone w oparciu o inne metody i zależności proponowane do materiałów kruchych. Metody te oraz zależności na długości krytyczne przedstawiono w pracy [6]. Pomimo szerokiej analizy problemu dla elementów z karbem, przedstawione metody są oparte głównie o współczynnik intensywności naprężeń K_{IC} lub K_{Ih} , a więc w zakresie liniowej mechaniki pękania.

4.3.2. Metoda liniowa

Metoda liniowa jest po metodzie punktowej jedną z mniej skomplikowanych obliczeniowo. Operacje nielokalne są wykonywane tylko w jednym wymiarze, co w niektórych przypadkach pozwala na zastosowanie w obliczeniach ciągłej funkcji zmian

naprężenia, która może zostać całkowana na pewnym odcinku y zgodnie z ogólną zależnością

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{l} \int_l \sigma(x) dy, \quad (4.22)$$

gdzie: l – długość uśredniania, $\sigma(x)$ – naprężenie zgodne z kierunkiem rozciągania, y – kierunek prostopadły do kierunku rozciągania.

Ciągłe funkcje opisujące zmienność naprężenia wzdłuż promienia próbki prezentowane są w pracach [52], [101], [122]. Najczęściej bazuje się jednak na wynikach analiz MES, które mogą być wykonane dla elementów o dowolnych kształtach. Prowadzi to do sytuacji, w której otrzymuje się wartości naprężeń wzdłuż przyjętego odcinka w formie dyskretnej. Wartości te wynikają z naprężeń dla poszczególnych węzłów elementów skończonych. W tej sytuacji wyznaczenie ciągłej funkcji zmiany naprężenia powoduje pewne komplikacje i niedokładności. Prostszy i skuteczniejszy rozwiązaniem jest więc wykorzystanie wartości dyskretnych, na przykład poprzez zastosowanie metod interpolacji. Dalsze obliczenia można przeprowadzić poprzez numeryczne całkowanie lub wykorzystanie operacji sumy (średniej arytmetycznej) w postaci

$$\sigma_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^n (\sigma_i \cdot \Delta l_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta l_i}, \quad (4.23)$$

gdzie: n – liczba punktów pomiarowych wynikająca z dyskretnego opisu zmienności naprężenia wzdłuż przyrostów długości Δl .

W celu otrzymania jak najdokładniejszych wyników, należy przyjąć stały i odpowiednio gęsty krok obliczeniowy, co nawet w przypadku dużych gradientów nie spowoduje większych błędów.

Metoda liniowa w pierwszej formie została zaproponowana przez Neubera na podstawie teorii przedstawionych w pracach [73], [74], [76]. Neuber postulował, aby ekwiwalentne naprężenie uzyskiwane było poprzez uśrednienie naprężenia σ_r działającego wzdłuż promienia y na długości ρ^* , zgodnie z zależnością [76]

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\rho^*} \int_{y=y_0}^{y_0+\rho^*} \sigma_r dy, \quad (4.24)$$

gdzie: σ_r – teoretyczne (ekwiwalentne) naprężenie w karbie działające wzdłuż promienia próbki y [95], y_0 – odległość związana z lokalizacją początku układu współrzędnych x, y . Neuber jako pierwszy zaproponował metodę liniową, choć z uwagi na trudności z ustaleniem przebiegu zmian naprężenia w elementach zawierających zróżnicowane geometrie karbu, opracował także metodę promienia fikcyjnego [76], [95].

Novozhilov [61], [79], zaproponował kryterium uśredniania naprężenia normalnego σ_y na odcinku strefy kohezji d_{koh} zgodnie z zależnością

$$\sigma_{koh} = \frac{1}{d_{koh}} \int_0^{d_{koh}} \sigma_y(r) dr. \quad (4.25)$$

Zastosowanie uśredniania rozkładu naprężenia na niewielkiej długości pozwoliło na odejście od zasad teorii naprężeń, zgodnie z którą, naprężenia w dnie ostrego karbu osiągają bardzo duże wartości.

Uśredniania naprężeń oparte na strefie dekohezji zaproponowali także Seweryn i Mróz [101]. Kryterium zaproponowane do kruchych materiałów bazuje na założeniu, że inicjacja pęknięcia nastąpi, kiedy średnia wartość naprężenia działającego w obszarze uszkodzenia d_0 osiągnie wartość krytyczną, czyli

$$R_f = \max R(\sigma_n, \tau_n) = \max \left[\frac{1}{d_0} \int_0^{d_0} f(\sigma_n, \tau_n) dr \right] = 1, \quad (4.26)$$

gdzie: R_f – współczynnik uszkodzenia, $R(\sigma_n, \tau_n)$ – nielokalna funkcja uszkodzenia, $f(\sigma_n, \tau_n)$ – funkcja naprężeń normalnych i stycznych w płaszczyźnie, d_0 – nielokalna strefa zmęczeniowa związana z mikrostrukturą (rozmiarem ziarna).

Kryterium to uwzględnia dodatkowe znaczenie naprężeń stycznych, które nie są uwzględniane przez Novozhilova. Strefa dekohezji d_0 jest wyznaczana podobnie jak strefa plastyczna z warunków Griffitha-Irwina,

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2K_{IC}}{R_e} \right)^2. \quad (4.27)$$

Kolejnymi autorami którzy wykorzystują metodę liniową w oparciu o rozmiar strefy plastycznej są Taylor i Susmel [115], [122]. Podobnie jak w metodzie punktowej, wyznaczenie długości krytycznej jest dokonywane zgodnie z zależnością (4.17).

Długość krytyczna L może być także zastąpiona przez średnicę strefy plastycznej d_p , która jest dwukrotną wartością długości krytycznej L [122]

$$d_p = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_C}{\sigma_0} \right), \quad (4.28)$$

Wykorzystując zależność (4.17), metoda długości krytycznej proponowana w pracach Taylora ma postać

$$\Delta\sigma_{eq} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \Delta\sigma_1(\alpha = 0, r) dr = \Delta\sigma_0. \quad (4.29)$$

Podobnie jak w przypadku metody punktowej zakłada się, że elementy z karbem mają trwałość na poziomie granicy zmęczenia, kiedy zakres naprężenia ekwiwalentnego jest równy zakresowi granicy zmęczenia elementu gładkiego, czyli

$$\Delta\sigma_{eq} = \Delta\sigma_0. \quad (4.30)$$

W teorii krytycznego dystansu zakłada się, że uszkodzenie zmęczeniowe jest zależne od rozkładu pola naprężenia działającego w okolicy koncentratora naprężeń oraz że uszkodzenie zmęczeniowe może być właściwie obliczone tylko w przypadku, kiedy całe pole naprężeń powodujące uszkodzenie jest uwzględnione [113].

Qylafku w pracy [91] zaproponował obliczanie zakresu ekwiwalentnego naprężenia w oparciu o efektywną odległość X_{ef} , uwzględniając zarazem występowanie odkształceń plastycznych. Wykorzystano zależność

$$\Delta\sigma_{eq} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{X_{ef}} \Delta\sigma_1(\alpha = 0, r) \cdot [1 - \chi \cdot r] dr = \Delta\sigma_0, \quad (4.31)$$

w której do wyznaczenia długości efektywnej wykorzystano relatywny gradient naprężenia χ

$$\chi = \frac{1}{\sigma_1(\alpha = 0, r)} \frac{d\sigma_1(\alpha = 0, r)}{dr}. \quad (4.32)$$

W przypadku działania wieloosiowego stanu naprężenia, można zastosować zmodyfikowaną metodę liniową, w której uwzględnia się płaszczyzny działania maksymalnego naprężenia normalnego [114], [116]. Położenie płaszczyzny jest uwzględnione za pomocą kąta α_c , wtedy zakres ekwiwalentnego naprężenia wynosi

$$\Delta\sigma_{eq} = \frac{1}{L} \int_0^L \Delta\sigma_1(\alpha = \alpha_c, r) dr = \Delta\sigma_0. \quad (4.33)$$

Qylafku [92] wprowadził także modyfikację uwzględniając wieloosiowy stan obciążenia i wartości sprężysto-plastycznego naprężenia w postaci

$$\tau_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{X_{ef}} \tau_{max}(\theta, r) \cdot [1 - \chi_t \cdot r] dr, \quad (4.34)$$

$$\sigma_{H,ef} = \frac{1}{X_{ef}} \int_0^{X_{ef}} \sigma_H(\theta, r) dr, \quad (4.35)$$

gdzie:

$$\tau_{max}(\theta, r) = \frac{\sigma_1(\theta, r) - \sigma_3(\theta, r)}{2}, \quad (4.36)$$

to maksymalne naprężenie styczne,

$$\sigma_H(\theta, r) = \frac{\sigma_1(\theta, r) + \sigma_2(\theta, r) + \sigma_3(\theta, r)}{3}, \quad (4.37)$$

to naprężenie hydrostatyczne

$$\chi_t = \frac{1}{\tau_{max}(\theta, r)} \cdot \frac{d\tau_{max}(\theta, r)}{dr}, \quad (4.38)$$

to relatywny gradient maksymalnego naprężenia stycznego.

Autorzy tej pracy uznali, że uszkodzenie zmęczeniowe jest spowodowane działaniem nie tylko naprężenia stycznego, ale także naprężenia hydrostatycznego działającego w najbardziej wyczerpanej objętości. Metoda ta, wykorzystująca jednowymiarową wielkość efektywnej odległości X_{ef} jest przez autorów zaliczana do metod objętościowych [86]. Efektywna odległość X_{ef} jest w tej metodzie uważana za średnicę objętości w kształcie kuli, określającą strefę uszkodzenia zmęczeniowego.

Louks i Susmel w pracy [62] zastosowali metodę opartą na krytycznym dystansie do analizy stali C45 w warunkach podwyższonej temperatury w której wskazali użyteczność metody punktowej, liniowej i płaszczyznowej w ocenie trwałości zmęczeniowej w zakresie dużej liczby cykli.

Metody liniowe są także stosowane w odniesieniu do mikrostruktury materiału, a więc do średnicy ziarna. W pracy [98] autorzy zakładają, że charakterystyczna odległość X_c jest równa średnicy ziarna lub podwójnej średnicy ziarna. Odległość X_c jest więc stosunkowo mała, co powoduje, że metoda ta jest przeznaczona do materiałów kruchych.

W pracach [65], [83], [125] autorzy zastosowali zależności analityczne na wyznaczenie rozkładu naprężenia wzdłuż pęknięcia, uzależniając ich wartości od geometrii karbu i współczynnika intensywności naprężeń K_I . Stosując wskazane zależności, przedstawili rozkład naprężenia w okolicy ostrego karbu, w którym wskazali na maksymalne naprężenie efektywne występujące pod powierzchnią dna karbu.

Większość prezentowanych modeli obliczeniowych bazuje na sprężystych właściwościach materiałowych oraz jest przeznaczona do oceny trwałości w zakresie dużej liczby cykli. Głównie prace Qyłaflu i Pluinagea bazują na efektywnych wartościach naprężeń, w których stosowane są cykliczne właściwości materiałowe. Z tego powodu, wskazana jest modyfikacja metod nielokalnych w oparciu o efektywne wartości naprężeń w celu umożliwienia obliczeń w zakresie małej liczby cykli.

4.3.3. Metoda płaszczyznowa

Operacje nielocalne w przestrzeni dwuwymiarowej są wykonywane zgodnie z ogólną zależnością

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma(\Omega) d\Omega. \quad (4.39)$$

Na podstawie teorii przedstawionej przez Shepparda [105], Taylor w pracy [124] zaproponował zmodyfikowany sposób na obliczanie ekwiwalentnego naprężenia. W swoim założeniu zastosował procedurę uśredniania zakresu naprężenia głównego $\Delta\sigma_1$ w półkołowym obszarze (płaszczyźnie), zgodnie z zależnością

$$\Delta\sigma_{eq} = \frac{4}{\pi L} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^L \Delta\sigma_1(\theta, r) dr \cdot d\theta \cong \Delta\sigma_0. \quad (4.40)$$

Metoda krytycznego dystansu rozwijana przez Taylora została zweryfikowana także dla obciążeń zmiennoodamplitudowych [117].

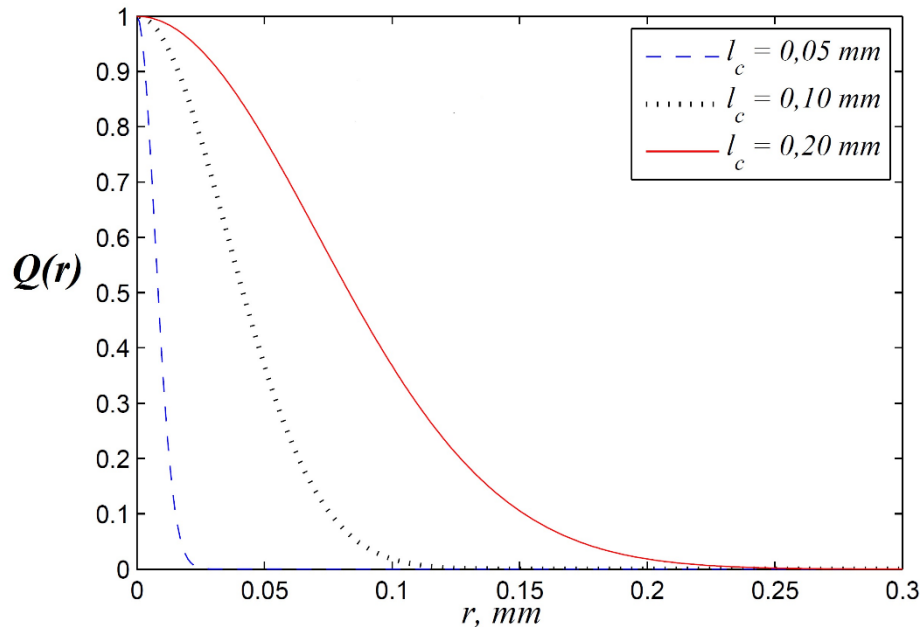
Metodę płaszczyznową w innej postaci zastosował także Karolczuk [33]. W swojej pracy wykonał osobne uśrednianie naprężeń normalnych σ_n i stycznych τ_{ns} w płaszczyźnie krytycznej, wykorzystując zależności

$$\sigma_{eq,n} = \frac{1}{\int_{\Omega} Q_n(r) d\Omega} \int_{\Omega} \sigma_n(r,t) \cdot Q_n(r) d\Omega, \quad (4.41)$$

$$\tau_{eq,ns} = \frac{1}{\int_{\Omega} Q_{ns}(r) d\Omega} \int_{\Omega} \tau_{ns}(r,t) \cdot Q_{ns}(r) d\Omega, \quad (4.42)$$

gdzie: Q_n – funkcja wagowa dla przebiegu naprężeń normalnych, Q_{ns} – funkcja wagowa dla przebiegu naprężeń stycznych.

Wartości funkcji wagowych Q są wyznaczane z zastosowaniem funkcji normalnego rozkładu prawdopodobieństwa, a kształt tego rozkładu, zależy od przyjętej wartości długości krytycznej l_c (rys. 4.11).



Rys. 4.11. Przebieg funkcji wagowej $Q(r)$ [33]

Matematyczny opis funkcji wagowej ma postać

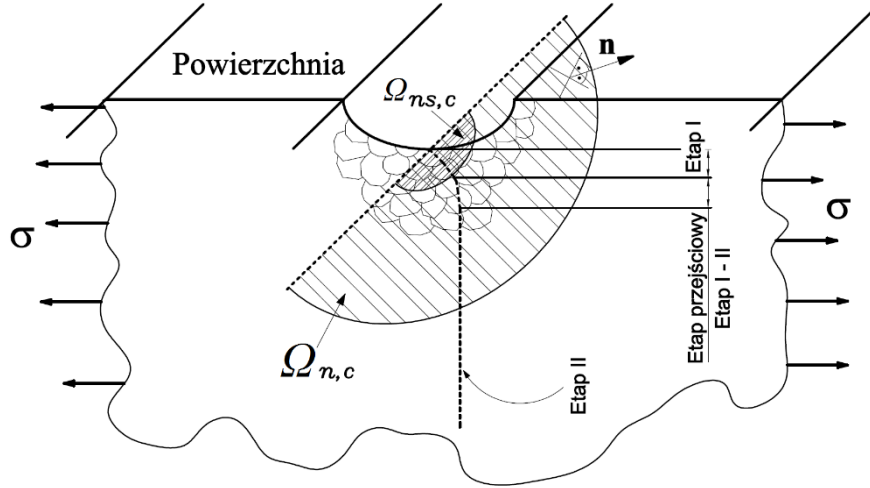
$$Q(r) = e^{-\left(\frac{2r}{l_c}\right)^2}. \quad (4.43)$$

Długość krytyczna l_c przyjmuje różne wartości w zależności od przyjętego parametru, to znaczy: $l_c = l_n$ lub $l_c = l_{ns}$, czyli

$$Q_n(r) = e^{-\left(\frac{2r}{l_n}\right)^2}, \quad (4.44)$$

$$Q_{ns}(r) = e^{-\left(\frac{2r}{l_{ns}}\right)^2}. \quad (4.45)$$

Parametr l_n lub l_{ns} definiuje obszar uśredniania wyrażony w postaci pola powierzchni krytycznej dla naprężeń normalnych $\Omega_{n,c}$, oraz dla naprężeń stycznych $\Omega_{ns,c}$ (rys. 4.12).



Rys. 4.12. Schematyczne przedstawienie powierzchni uśredniania $\Omega_{n,c}$ oraz $\Omega_{ns,c}$ [33]

Uśrednione pola naprężeń normalnych $\sigma_{eq,n}$ i stycznych $\tau_{eq,ns}$ są następnie użyte w kryteriach wieloosiowego zmęczenia bazujących na pojęciu płaszczyzny krytycznej, na przykład kryteria Findleya [24], [25], Machy [64], Mataka [66].

Metoda płaszczyznowa wykorzystująca intensywność pola naprężeń została także zaproponowana przez Yao i innych w pracach [103], [128], [129], [130].

Autorzy przedstawili metodę zweryfikowaną do obciążeń losowych, w której wykorzystali parametr intensywności pola naprężeń σ_{FI} lub odkształceń ϵ_{FI} . Nielokalne obliczenia uśredniania, których wynikiem jest uśredniony parametr intensywności naprężenia ekwiwalentnego, wykonywane są zgodnie z zależnością

$$\sigma_{FI} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(\sigma_{ij}) Q(r) d\Omega, \quad (4.46)$$

gdzie: Ω – obszar uszkodzenia zmęczeniowego (płaszczyzna), $f(\sigma_{ij})$ – funkcja ekwiwalentnego naprężenia.

Funkcja ekwiwalentnego naprężenia oznacza przebieg zmienności przyjętego lokalnego naprężenia ekwiwalentnego. Ekwiwalentne naprężenie σ_{eq} jest przyjmowane dla materiałów kruchych w postaci maksymalnych naprężeń głównych σ_1 , a w przypadku materiałów plastycznych w postaci naprężenia redukowanego według hipotezy H-M-H

(σ_{H-M-H}). Zapis, który zastosowali autorzy, nie jest w każdym przypadku obliczeniowym poprawny, ponieważ funkcja całkowa powinna być dzielona przez sumę pola Ω i funkcji wagowej $Q(r)$ [33]. Uwzględniając ekwiwalentne naprężenie w postaci naprężeń H-M-H otrzymuje się wtedy

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\int_{\Omega} Q(r) d\Omega} \int_{\Omega} \sigma_{H-M-H} Q(r) d\Omega. \quad (4.47)$$

Dla płaskiego stanu, naprężenie ekwiwalentne H-M-H ma postać

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eq} = \sigma_{H-M-H} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2}, \quad (4.48)$$

a wyrażone w naprężeniach głównych

$$\sigma_{H-M-H} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}. \quad (4.49)$$

Dla stanu trójwymiarowego otrzymuje się zależność

$$\sigma_{H-M-H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}, \quad (4.50)$$

a w przypadku zastosowania naprężeń głównych

$$\sigma_{H-M-H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \quad (4.51)$$

Funkcja wagowa $Q(r)$ zastosowana w zależności (4.47) ma postać

$$Q(r) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{eq,i}}{\sigma_{eq,max}}\right) r_y (1 + \sin \theta), \quad (4.52)$$

gdzie: $\sigma_{eq,i}$ – naprężenie ekwiwalentne w kolejnym i – tym elemencie skończonym, $\sigma_{eq,max}$ – maksymalne naprężenie ekwiwalentne w okolicy karbu, r_y – moduł wektora wodzącego określającego położenie kolejnego elementu skończonego (promień wodzący od powierzchni karbu), θ – kąt wektora \mathbf{r}_y z płaszczyzną prostopadłą do promienia karbu.

W pracy [103] Yao i inni przedstawili metodę uśredniania intensywności pola naprężeń dla obciążeń losowych wykorzystując procedurę zliczania cykli (Rainflow) oraz kumulację uszkodzeń zmęczeniowych. Badania wykonano dla normalizowanej stali 45, wykorzystując w analizie MES sprężysto-plastyczne właściwości materiałowe.

Metodę płaszczyznową zaproponowali także Seweryn i Mróz w pracach [72], [102] jako rozwinięcie metody liniowej opisanej w punkcie 4.3.2. Zaproponowali oni model nielokalny z wykorzystaniem płaszczyzny krytycznej.

4.3.4. Metoda objętościowa

W nielokalnej metodzie objętościowej zakłada się, że ekwiwalentne naprężenie jest obliczane poprzez uśrednianie pola naprężeń w pewnej przestrzeni trójwymiarowej, a więc w objętości. Operacje nielokalne w przestrzeni trójwymiarowej są wykonywane zgodnie z zależnością

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{V} \int_V \sigma(V) dV . \quad (4.53)$$

W praktyce, z powodu nieznaności funkcji $\sigma(V)$, stosuje się zastąpienie operacji całkowania funkcji ciągłej wybierając operację sumy

$$\sigma_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^n (\sigma_i \cdot V_i)}{\sum_{i=1}^n V_i} . \quad (4.54)$$

Jedną z pierwszych metod objętościowych jest algorytm zaproponowany przez Kuguela [46], który był następnie rozwijany przez Sonsino [94]. W metodzie tej, stosowanej najczęściej do złączy spawanych, wyznacza się obszar obejmujący wyłączenie objętości, w której jest ono większe od 90% wartości maksymalnego lokalnego naprężenia generowanego przez obecność karbu. Ekwiwalentna amplituda naprężenia jest funkcją naprężenia działającego w objętości $V_{0,9}$, co można zapisać w postaci

$$\sigma_{a,k,eq} = f(V_{0,9}) . \quad (4.55)$$

Obliczenia w tej metodzie polegają na wyznaczeniu objętości $V_{0,9}$ z normalizowanego gradientu naprężenia σ_k w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni karbu. Dla płaskiej próbki rozciąganej wyznacza się średnicę obszaru $d_{0,9}$ z zależności

$$d_{0,9} = \frac{0,1}{\chi} , \quad (4.56)$$

gdzie, χ to normalizowany gradient naprężenia działający wzdłuż płaszczyzny n opisany zależnością

$$\chi = \frac{1}{\sigma_k} \frac{d\sigma_k}{dn} . \quad (4.57)$$

Obszar $V_{0,9}$ wynosi więc w tym przypadku w przybliżeniu

$$V_{0,9} = d_{0,9} b \frac{\pi R}{8}, \quad (4.58)$$

gdzie: R – promień karbu, b – grubość próbki.

Przy zastosowaniu obliczeń MES, wyznaczenie obszaru, w którym naprężenia przekraczają 90% wartości maksymalnego naprężenia nie stanowi dużego problemu. Konieczne jest sprawdzenie wartości naprężeń w elementach skończonych, wyselekcjonowanie ich z modelu numerycznego, a następnie obliczenie ich objętości. Dalsze obliczenia można poprowadzić stosując uśrednianie naprężeń w przyjętej objętości.

W metodach objętościowych wykorzystano także teorię krytycznego dystansu (TCD).

Bellet w pracy [8] zaproponował, aby wytężenie w okolicy karbu było uśredniane w trójwymiarowej przestrzeni w kształcie półkuli. Średnica półkuli przyjmuje według autora wartość 1,54 długości krytycznej L . Parametrem zmęczeniowym przyjętym w tej metodzie jest zakres zmian maksymalnych naprężeń głównych $\Delta\sigma_1$ obliczonych w zakresie liniowo-sprężystym. Okazało się jednak, że otrzymane wyniki trwałości są bardzo konserwatywne.

W kolejnej pracy [7] Bellet i Taylor stwierdzili, że tak konserwatywne wyniki wynikają z różnych geometrii pęknięć występujących w obiektach trójwymiarowych, co nie ma znaczenia w przypadku obiektów płaskich. Zaproponowali oni korekcję trójwymiarowej przestrzeni z wykorzystaniem współczynnika korygującego.

Yao i inni w pracy [103] zaproponowali zastosowanie intensywności pola naprężeń w postaci naprężenia zredukowanego według hipotezy H-M-H lub maksymalnego naprężenia głównego σ_1 , uśrednianego wraz z funkcją wagową. Metoda ta, jak wspomniano przy okazji metod płaszczyznowych, jest używana w przypadku występowania trójosiowego stanu naprężenia. Jej zapis w przypadku przyjęcia naprężenia zredukowanego według hipotezy H-M-H ma postać

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\int_V Q(r) dV} \int_V \sigma_{H-M-H} Q(r) dV. \quad (4.59)$$

Palin-Luc i Lasserre [81] przedstawili parametr oparty na gęstości energii odkształcenia. Kryterium to jest stosowane do zakresu dużej liczby cykli, w którym naprężenie i odkształcenie jest obliczane w zakresie sprężystym. Kryterium to oparte jest o wcześniejsze założenia Frousteya w postaci

$$W_a(M) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_{ij}(M, t) \varepsilon_{ij}^s(M, t) dt, \quad (4.60)$$

gdzie: M – rozpatrywany punkt w elemencie, t – czas, T – cykl obciążenia.

Za pomocą zależności (4.60) przedstawiono średnią wartość z sumy objętościowej gęstości energii odkształceń sprężystych w jednym cyklu obciążenia. Wartość W_a jest średnią wartością całkowitej gęstości energii odkształcenia w analizowanym punkcie przypadającej na jeden cykl obciążenia. Autorzy na podstawie badań zdefiniowali dodatkową granicę zmęczenia σ^* , przy której nie występuje inicjacja pęknięcia w skali mikroskopowej. Oznacza to, że przy naprężeniu na poziomie σ^* , nie następują mikropęknięcia w osnowie stali. Z wartości granicy zmęczenia σ^* wynika także graniczna gęstość energii odkształcenia W_a^* zapisana w postaci

$$W_a^* = \frac{\sigma^{*2}}{4E}. \quad (4.61)$$

Zgodnie z kryterium przedstawionym w pracy [26], dla punktów M otaczających punkt o największym wyężeniu C_i , możliwe jest wyznaczenie objętości $V^*(C_i)$, w której wyężenie W_a przekracza wartość granicy zmęczenia W_a^*

$$V^*(C_i) = \left\{ \text{punkty } M \text{ w okolicy punktu } C_i, \text{ gdzie } W_a(M) \geq W_a^*(C_i) \right\}, \quad (4.62)$$

$$\omega_a(C_i) = \frac{1}{V^*(C_i)} \int_{V^*(C_i)} [W_a(x, y, z) - W_a^*(C_i)] dV, \quad (4.63)$$

gdzie: $\omega_a(C_i)$ – część gęstości energii odkształcenia sprężystego powodująca uszkodzenie zmęczeniowe.

Kryterium to może być zastosowane do jednoosiowego i złożonego stanu obciążenia, ale ogranicza się tylko do obciążeń cyklicznych. Uśredniona wartość gęstości energii $\omega_a(C_i)$ jest porównywana z wartością uzyskiwaną z próby jednoosiowego zmęczenia $\omega_a^D(C_i)$ w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia. W przypadku, gdy wartość uśrednionej gęstości energii będzie mniejsza od gęstości energii z próby jednoosiowego rozciągania,

$$\omega_a(C_i) < \omega_a^D(C_i), \quad (4.64)$$

to uznaje się, że nie spowoduje to uszkodzenia zmęczeniowego.

Metoda ta wymaga nie tylko określenia rozmiaru trójwymiarowej ekwiwalentnej strefy zmęczeniowej, ale także wyselekcjonowania tej objętości z modelu numerycznego.

Wykorzystując MES można obliczyć tę strefę poprzez sumowanie objętości poszczególnych elementów skończonych.

Metody objętościowe oparte o gęstość energii odkształcenia są także stosowane w wieloosiowym zmęczeniu [12], [58], [93]. Są to metody, w których kontrolowana objętość jest obszarem, w którym dokonuje się uśrednienia gęstości energii odkształcenia według wybranego sposobu obciążenia.

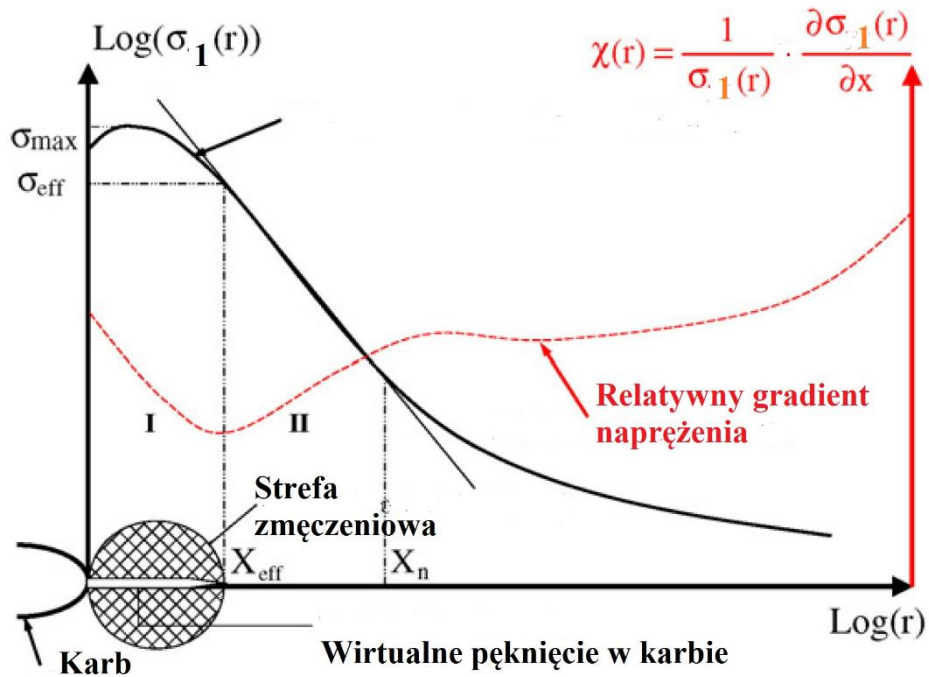
Inną szeroko stosowaną i rozwijaną metodą objętościową jest algorytm obliczeniowy zaproponowany przez Pluinagea [86]. Autor w pracy stwierdza, że proces zniszczenia wymaga pewnej fizycznej objętości. W metodzie tej zakłada się, że strefa zmęczeniowa zawiera się w objętości w kształcie kuli, w której jednowymiarowa efektywna odległość określa jej średnicę. Efektywna odległość X_{ef} odgrywa w tej metodzie decydującą rolę, a jej wyznaczenie zostało oparte o relatywny gradient naprężenia. Jako parametr zmęczenia autorzy przyjęli maksymalne naprężenie główne σ_1 , choć w swoich pracach stosują oznaczenie σ_{yy} . Autor pracy [86] przedstawił, że w przypadku obliczeń numerycznych MES wykonanych dla sprężysto-plastycznych właściwości materiałowych, maksymalne naprężenia główne osiągają swoje największe wartości pod powierzchnią dna karbu.

Gradient naprężenia oraz maksymalna wartość naprężenia znajdująca się pod powierzchnią powoduje, że możliwe jest obliczenie minimalnej wartości relatywnego gradientu naprężenia zgodnie z zależnością

$$\chi(r) = \frac{1}{\sigma_1(r)} \cdot \frac{d\sigma_1(r)}{dr}. \quad (4.65)$$

Relatywny gradient naprężenia możliwy jest do obliczenia w sposób numeryczny bazując na wynikach analizy MES. Aby jednak dokładnie obliczyć gradient, należy opisać dyskretne wartości funkcją ciągłą, co prowadzi do pewnych trudności w przyjęciu wielomianu odpowiedniego stopnia. Obliczenie gradientu z wartości naprężeń w węzłach elementów skończonych może powodować otrzymanie niedokładnych wyników z powodu ich nierównomiernego rozmieszczenia względem osi, lub innej przyjętej płaszczyzny. Konieczne jest wtedy zastosowanie metod interpolacji o stałym i gęstym kroku obliczeniowym. Wyznaczona za pomocą tej metody odległość efektywna definiuje zatem strefę zmęczeniową, która może zmieniać swój rozmiar. Jest więc ona zmienna w zależności od poziomu obciążenia i rodzaju karbu. Wyznaczona odległość efektywna X_{ef} , oznacza promień kuli, która definiuje strefę procesów zniszczeniowych (Fracture

Process Zone) (rys. 4.13). Dalsze obliczenia ekwiwalentnej wartości naprężenia następują poprzez nielocalne obliczenia jednowymiarowe wzdłuż odległości efektywnej X_{ef} .



Rys. 4.13. Schematyczne przedstawienie metody wykorzystującej efektywną odległość X_{ef}

5. Funkcje wagowe

Funkcje wagowe zastosowane w metodach nielokalnych mają za zadanie uwzględnić znaczenie poszczególnych warstw materiału w procesie zmęczenia. Nadają one więc wagę poszczególnym wartościom przyjętego parametru zmęczeniowego (naprężenia) w zależności od odległości poszczególnych punktów od punktu bazowego. Związane jest to z efektem gradientu oraz założeniem, że na proces inicjacji pęknięcia ma wpływ nie tylko zniszczenie wiązań w jednym punkcie, ale także wiązań w pewnym obszarze znajdującym się w okolicy punktu o lokalnym maksimum parametru zmęczeniowego [33]. Funkcje wagowe powinny zawierać swoje wartości w zakresie $\langle 0 \div 1 \rangle$ oraz spełniać następujące założenia [4]

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq Q(r, \chi) \leq 1 \\ Q(r=0) = 1 \\ Q(R=\infty, \chi=0) = 1 \end{aligned} \right\} . \quad (5.1)$$

Można także przyjąć, że w przypadku, gdy maksymalne naprężenie znajduje się pod powierzchnią dna karbu, to funkcja wagowa dla tego punktu także może przyjmować maksymalną wartość, a więc

$$Q(\chi=0, r=r_{\sigma_{max}}) = 1. \quad (5.2)$$

Taką zasadę zastosowali w swojej funkcji wagowej Yao i inni w pracy [103].

Wartość funkcji wagowej powinna zatem przyjmować największą wartość na powierzchni elementu, ale także pod powierzchnią w punkcie o największym działającym naprężeniu oraz w całym przekroju w przypadku elementu gładkiego bez gradientu naprężenia. W pozostałych obszarach funkcja wagowa powinna być funkcją monotonicznie malejącą.

W pracy doktorskiej Qyłałku (cyt. za [4]) zaproponował funkcję wagową opartą o gradient naprężenia w postaci

$$Q(r, \chi) = 1 - \chi \cdot r, \quad (5.3)$$

gdzie relatywny gradient naprężenia χ opisany jest zależnością

$$\chi(r) = \frac{1}{\sigma(r)} \frac{\partial \sigma(r)}{\partial r}. \quad (5.4)$$

Relatywny gradient naprężenia zaproponował Brand w postaci [91]

$$\chi = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{\sigma_{max}} \frac{d\sigma}{dx} \Big|_{x=0}. \quad (5.5)$$

Różnica w opisie gradientu naprężenia polega na tym, że w metodzie objętościowej zaproponowanej przez Pluinagea zastosowany jest relatywny gradient liczony w odniesieniu do kolejnych wartości naprężeń $\sigma(r)$, a nie do naprężenia maksymalnego σ_{max} . W przypadku zmniejszających się wartości naprężeń liczonych od powierzchni dna karbu, gradient naprężenia przyjmuje wartości ujemne. Konieczne jest zatem uwzględnienie tej sytuacji poprzez zastosowanie wartości bezwzględnej lub zmiany znaku funkcji gradientu [112].

Również Kadi w swojej pracy doktorskiej (cyt. za [4]) zaproponował podobny opis funkcji wagowej w postaci

$$Q(r, \chi) = e^{\left(\frac{\chi \cdot r}{2}\right)}. \quad (5.6)$$

Z uwagi na zmieniający się znak gradientu naprężenia, Adib i Jeong w pracy [4] zaproponowali zmodyfikowaną funkcję wagową w postaci

$$Q(r, \chi) = 1 - |\chi| \cdot r. \quad (5.7)$$

Spowodowało to, że funkcja wagowa przyjmuje wartości nieprzekraczające 1.

Yao i inni w pracy [130] zaproponowali funkcję wagową przechodząc na sferyczny układ współrzędnych, jednocześnie wprowadzając kąt θ wychylenia wektora \mathbf{r}_v [130], któremu nadawana jest waga zgodnie z zależnością

$$Q(r, \theta, \chi) = 1 - |\chi| \cdot r \cdot (1 + \sin \theta). \quad (5.8)$$

Następnie autorzy zaproponowali zastąpienie wartości bezwzględnej gradientu naprężenia przez zapis

$$Q(r, \theta, \chi) = 1 - c^* \cdot r \cdot (1 + \sin \theta), \quad (5.9)$$

przyjmując, że wielkość c^* zależy od gradientu naprężenia i przyjmuje wartości ≥ 0 .

Wielkość c^* jest ostatecznie równa

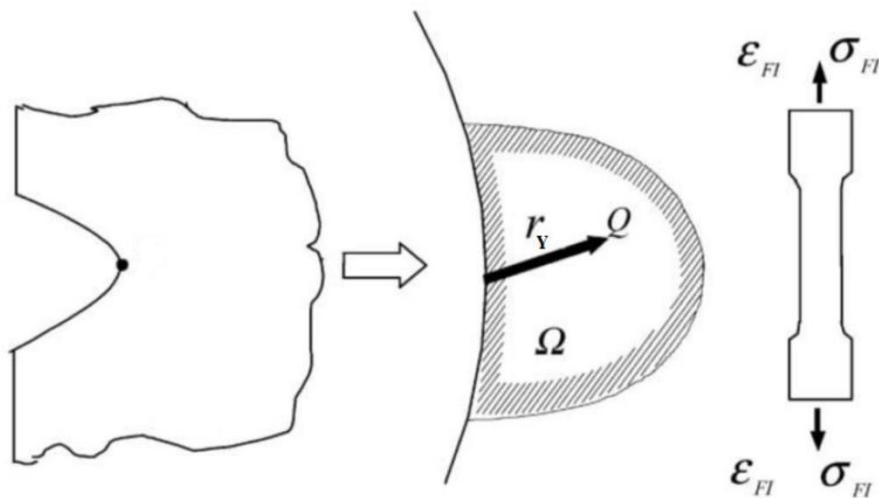
$$c^* = 1 - \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{eq,max}}. \quad (5.10)$$

Po uwzględnieniu tej modyfikacji, opis funkcji wagowej zaproponowana przez Yao ma postać [103]

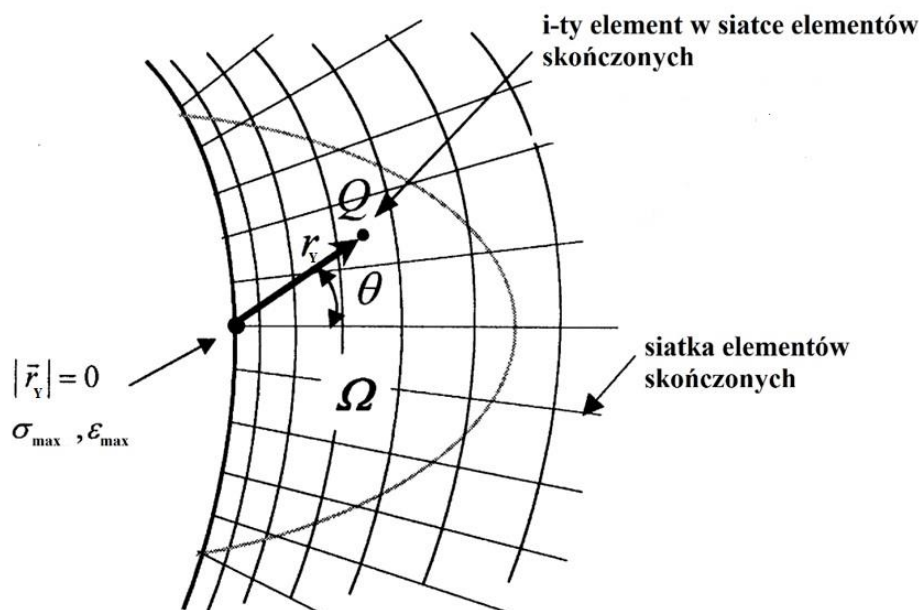
$$Q(r) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{eq,i}}{\sigma_{eq,max}} \right) r_Y (1 + \sin \theta), \quad (5.11)$$

gdzie: $\sigma_{eq,i}$ – naprężenie ekwiwalentne w kolejnym elemencie skończonym, $\sigma_{eq,max}$ – maksymalne naprężenie ekwiwalentne w okolicy karbu, r_Y – moduł wektora określającego położenie kolejnego elementu skończonego, θ – kąt wektora \mathbf{r}_Y z płaszczyzną prostopadłą do promienia karbu.

Wektor \mathbf{r}_Y określa położenie kolejnego punktu w przestrzeni uśredniania (rys. 5.1), a jego moduł określa wartość zastosowaną w zależności (5.11) (rys. 5.2).



Rys. 5.1. Schematyczne przedstawienie wektora \mathbf{r}_Y w strefie zmęczeniowej Ω [103]



Rys. 5.2. Sposób wyznaczania funkcji wagowej na tle siatki MES [103]

Yao wprowadził zmodyfikowany zapis na gradient naprężenia, jednocześnie upraszczając obliczenia poprzez rezygnację z zastosowania pochodnych funkcji. Jednocześnie poprawiło to możliwość zastosowania tego zapisu do większych wartości promienia r .

Kolejną funkcję wagową, zastosowaną w metodzie płaszczyznowej zaproponował Karolczuk [33], [34], [35]. Funkcja ta jest opisana zależnością

$$Q(r) = e^{-\left(\frac{2r}{l_c}\right)}, \quad (5.12)$$

gdzie: e – funkcja eksponentyjna, r – długość promienia określający położenie punktu, l_c – długość krytyczna.

Funkcja ta opisem i kształtem przedstawia połowę normalnego rozkładu prawdopodobieństwa. Kształt (spłaszczenie) tego rozkładu zależy od przyjętej wartości długości krytycznej l_c . Idea i założenia tej funkcji wagowej zostały wykorzystane do własnego algorytmu nielokalnej metody liniowej. Zaproponowano jednak modyfikację, która jest związana z rozkładem naprężenia w okolicy karbu obliczonego w zakresie sprężysto-plastycznym.

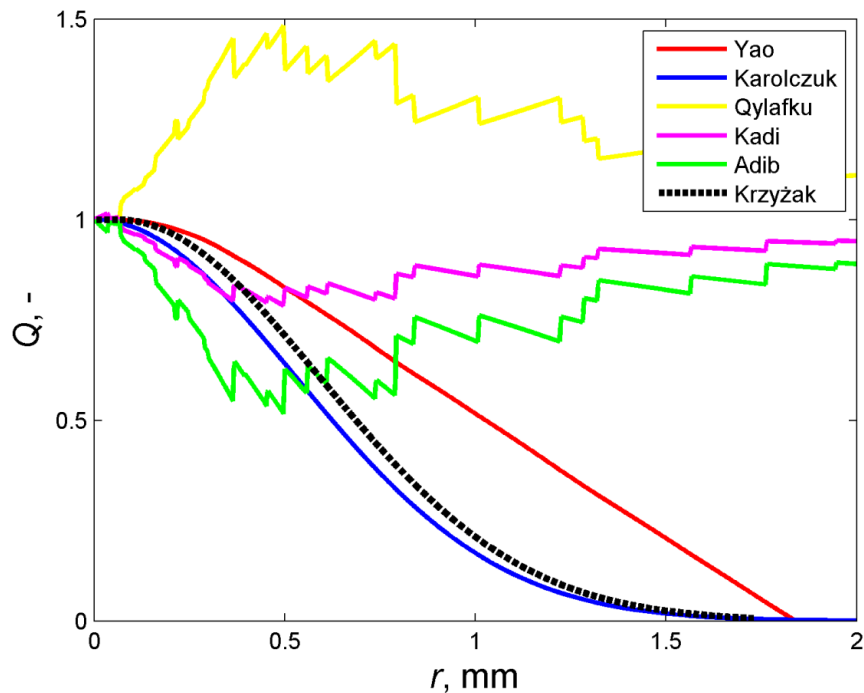
W przypadku, gdy maksymalne naprężenie znajduje się pod powierzchnią elementu, funkcja wagowa przyjmuje wartości monotonicznie malejące od punktu bazowego na powierzchni elementu. W takiej sytuacji warstwy materiału znajdujące się pomiędzy powierzchnią a punktem o maksymalnym naprężeniu mają wagę o zmniejszających się wartościach, a powinny mieć większą wagę na proces inicjacji pęknięcia. Przyjmując, że proces inicjacji pęknięcia związany jest ze zgromadzeniem się pętli dyslokacji wzdłuż pasm poślizgów w pewnej strefie związanej ze strefą plastyczną, należy uznać te warstwy za najbardziej istotne. Z tego względu, zdecydowano nadać wszystkim warstwom znajdującym się pomiędzy powierzchnią a punktem o maksymalnym naprężeniu wagę równą 1. Prowadzi to do kolejnego warunku w postaci

$$Q(0 \leq r \leq r_{\sigma_{max}}) = 1. \quad (5.13)$$

Zatem postać funkcji wagowej bazującej na kształcie normalnego rozkładu prawdopodobieństwa wyrażona w zależności od długości l ma postać

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ dla warstw } 0 \leq l < l_{\sigma_{n,max}} \\ e^{-\left(\frac{2(l-l_{\sigma_{n,max}})}{l_f}\right)^2} \text{ dla warstw } l \geq l_{\sigma_{n,max}} \end{array} \right\}. \quad (5.14)$$

Przebiegi opisanych wyżej funkcji wagowych można także przedstawić we wspólnym zestawieniu. W przypadku, gdy maksymalne naprężenia znajdują się pod powierzchnią dna karbu, przebiegi funkcji wagowych mają postać jak to przedstawiono na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Przebieg funkcji wagowych dla analizy próbki z karbem ze stali EA4T,
 $R = 0,2 \text{ mm}$, $P = 16 \text{ kN}$

Z analizy rys. 5.3 wynika, że funkcje wagowe w których wykorzystano relatywny gradient naprężenia nie są w pełnym zakresie promienia prawidłowe. Zastosowanie pochodnych wymaga także wyznaczenia ciągłej funkcji zmiany naprężenia, gdyż operowanie wartościami dyskretnymi powoduje nieciągłości funkcji. Zastosowanie interpolacji z gęstym krokiem nie powoduje zaniku nieciągłości pochodnych funkcji. Z analizy rys. 5.3 wynika także, że wartości funkcji wagowej Yao oraz modyfikowanej zgodnie z zależnością (5.14) przyjmują maksymalne wartości zarówno na powierzchni, jak i w punkcie o największym naprężeniu znajdującym się pod powierzchnią.

Z przeprowadzonego przeglądu literaturowego wynika, że większość metod nielokalnych bazuje na sprężystych właściwościach materiałowych oraz na zależnościach wykorzystujących strefę plastyczną przed frontem szczeliny zmęczeniowej.

Tylko w niektórych metodach wykorzystywane są cykliczne właściwości materiałowe oraz funkcje wagowe. Dysponując danymi materiałowymi zawierającymi cykliczne właściwości, można uzyskać informacje o efektywnych wartościach pól naprężeń w okolicy karbu. Jak wynika z przeglądu literaturowego, takie podejście nie zawsze jest stosowane przez naukowców. Nie są także stosowane modele, w których jednocześnie wykorzystuje się efektywne wartości naprężeń w płaszczyźnie krytycznej, funkcje wagowe oraz dokładnie zdefiniowaną długość pęknięcia odpowiadającą trwałości eksperymentalnej. Wiele prac i prezentowanych w nich rozwiązań przeznaczona jest do zakresu dużej liczby cykli lub odnosi się do trwałości na poziomie granicy zmęczenia. W takim przypadku modele obliczeniowe sprowadzają się do stwierdzenia, czy przy danym poziomie obciążenia, dany element ulegnie zniszczeniu czy też nie.

W wyniku przeprowadzonego przeglądu literaturowego, analizy pól i rozkładów naprężenia w okolicy karbu oraz wykonanych symulacji w metodzie objętościowej i metodzie promienia fikcyjnego uznano, że konieczne jest przeprowadzenie własnych badań eksperymentalnych oraz opracowanie modelu nielokalnego, za pomocą którego zostanie wykazana zmienność ekwiwalentnej strefy zmęczeniowej od poziomu obciążenia i geometrii karbu.

6. Obliczenia własne wybranymi metodami na podstawie badań literaturowych

6.1. Obliczenia metodą objętościową z wykorzystaniem parametru energetycznego

Podejścia energetyczne są stosowane głównie w zakresie odkształceń sprężystych. Łatwość obliczania energii metodami analitycznymi powoduje, że metody te są często stosowane do elementów gładkich. W przypadku elementów bez korbów, możliwe jest obliczenie rozkładu naprężeń w elementach zginanych z wykorzystaniem układu równań równowagi momentu zginającego i wykorzystania równania Ramberga-Osgooda. Wynikiem takich obliczeń jest rozkład wartości efektywnych naprężeń w przekroju elementu, który można także zweryfikować poprzez obliczenia MES [38]. Sytuacja komplikuje się jednak w przypadku korbów, gdzie założenie nie występowania odkształceń plastycznych nie zawsze jest właściwe. Chęć obliczania odkształceń plastycznych, a zarazem odpowiadającym im naprężeń sprawia już pewne trudności. O ile można wykorzystać MES i symulacje w pełnej pętli obciążenia, o tyle opracowanie zależności analitycznych jest skomplikowane. Wszystkie te trudności powodują, że naukowcy opracowują metody energetyczne bazujące na parametrach energetycznych. Do obliczenia wartości takich parametrów najczęściej konieczna jest znajomość maksymalnej wartości odkształcenia i naprężenia. Podczas badań eksperymentalnych próbek gładkich, wystarczy więc dokonać pomiaru odkształcenia całkowitego oraz wykonać obliczenia naprężenia, na przykład stosując jeden z modeli korekcji naprężenia. Taka procedura nie umożliwia jednak otrzymania informacji o przebiegu zmian naprężenia, która w zakresie plastycznym jest nieliniowa. Prowadzi to do niedokładności w obliczaniu wartości parametru energetycznego. Możliwe jest więc dokładne obliczenie jedynie gęstości energii odkształcenia sprężystego. Większość metod energetycznych należy więc traktować jako metody bazujące na parametrach energetycznych, w których próbuje się uwzględnić zarówno odkształcenie i naprężenie.

W pracy [41] zastosowano parametr energetyczny obliczony z wykorzystaniem nieliniowej analizy MES. Ograniczenie, jakim była moc obliczeniowa komputera, nie pozwalało na przeprowadzenie obliczeń w pełnej pętli obciążenia z jednoczesnym uwzględnieniem modelu wieloliniowego umocnienia. Innym czynnikiem ograniczającym jest konieczność wykonania obliczeń dla całego modelu numerycznego

oraz konieczność stosowania dużego zagęszczenia siatki elementów skończonych w pobliżu karbu. Z tych powodów, zrezygnowano z obliczeń w pełnej pętli obciążenia i wykonano analizę iteracyjną jedynie w pierwszej ćwiartce (rozciąganie). Dane do analizy zaczerpnięto z wyników badań eksperymentalnych prowadzonych wcześniej na Politechnice Opolskiej [1], [109]. W pracy przedstawiono symulacje dla dwóch rodzajów materiału, stali S235JRG2 oraz S355J2G1W, poddanych rozciąganiu-ściskaniu i cyklicznemu zginaniu. Dysponując danymi z eksperymentu dla próbek gładkich oraz cyklicznymi właściwościami materiałowymi, obliczono parametr energetyczny wykorzystując model korekcji naprężeń Łagody-Machy [51]. Dla próbek z karbem wykorzystano wyniki nieliniowej analizy MES, w której zastosowano model wieloliniowego umocnienia. Otrzymane wartości odkształceń i naprężeń wykorzystano do obliczenia parametru energetycznego dla każdego elementu skończonego. Dalsza procedura obliczeniowa zawierała obliczenia według nielokalnego modelu objętościowego. Objętość poszczególnych elementów skończonych obliczono wykorzystując program Matlab [67] i skrypt programowy, w którym wskazano położenie przestrzenne czterech węzłów skrajnych tetragonalnego elementu skończonego. Obliczenie objętości dla elementów o nieregularnych kształtach wymaga zastosowania wyznacznika macierzy 3x3, poprzez zastosowanie reguły Sarrusa w postaci

$$V_i = \frac{1}{6} \cdot \left| \det \left(\begin{bmatrix} a_{w,i} - b_{w,i} & b_{w,i} - c_{w,i} & c_{w,i} - v_{w,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \right) \right|, \quad (6.1)$$

gdzie: a_w, b_w, c_w, v_w – to współrzędne przestrzenne czterech narożnych i -tych węzłów elementu skończonego.

Obliczenie wartości parametru energetycznego $W_{a,eq}$ przeprowadzono zgodnie z zależnością

$$W_a = \frac{1}{2} \sigma_{a,eq} \left(\varepsilon_a^s \cdot \varepsilon_{a,ef}^p \right) \quad (6.2)$$

gdzie: $\sigma_{a,eq}$ – amplituda naprężenia zredukowanego, ε_a^s – amplituda odkształcenia sprężystego, $\varepsilon_{a,ef}^p$ – amplituda efektywnego odkształcenia plastycznego.

Obliczenia nielocalne przeprowadzono w ten sposób, że do uśredniania wykorzystano elementy skończone poszukiwane wzdłuż iteracyjnie zmienianego promienia, o początku na powierzchni dna karbu. Promień ten określał, czy dany element skończony będący w jego zasięgu (środek geometryczny elementu skończonego) będzie uwzględniany w obliczeniach. Środek tetragonalnego elementu skończonego wyznaczono obliczając średnią z czterech współrzędnych węzłowych elementu w kierunkach x, y, z .

W chwili gdy obliczona wartość uśrednionego parametru energetycznego $W_{a,śr}$ osiągnęła wartość dla tej z próbki gładkiej $W_{a,gl}$ przy zadanej liczbie cykli, procedura obliczeniowa była zatrzymywana. Obliczono w ten sposób objętość V wszystkich elementów, liczbę elementów skończonych oraz uśrednioną wartość parametru energetycznego $W_{a,śr}$. Z przeprowadzonych symulacji i obliczeń można było wnioskować, że objętość referencyjna V określająca strefę zmęczeniową zmienia się w zależności od poziomu obciążenia. Strefa zmęczeniowa w tym modelu obliczeniowym zwiększa się wraz ze wzrostem obciążenia. Odnosząc się do granicy zmęczenia dla rozciągania-ściskania W_{rc} wyrażonej parametrem energetycznym, można obliczyć wartość progową parametru energetycznego W^* , która równocześnie określa objętość, którą należy przyjąć za ekwiwalentną strefę zmęczenia. Progowy parametr energetyczny W^* jest w tej sytuacji wielokrotnością energetycznej granicy zmęczenia W_{rc} . Wyniki tych symulacji wskazały na konieczność sprawdzenia i poszukiwania zależności zmienności strefy zmęczeniowej także z wykorzystaniem innych metod oraz z zastosowaniem większej dokładności obliczeniowej. Niestety, zastosowanie metody objętościowej wiąże się z bardzo długim czasem obliczeń numerycznych, spowodowanych zarówno przez zastosowanie modelu wieloliniowego umocnienia jak i konieczności stosowania dużego zagęszczenia siatki elementów skończonych. Także obliczenia w skrypcie programowym dodatkowo wydłużają analizę, głównie przez konieczność porządkowania danych wejściowych w postaci współrzędnych poszczególnych węzłów elementów skończonych, numerów tych węzłów i elementów skończonych. W przypadku obliczania elementów zginanych, konieczne jest zastosowanie pełnego modelu numerycznego, co powoduje dużą ilość elementów skończonych nie tylko w okolicy karbu, ale także w pozostałej części modelu.

6.2. Obliczenia metodą promienia fikcyjnego Neubera

Metoda promienia fikcyjnego została opublikowana przez Neubera w 1968 roku [76]. Metoda ta jest stosowana głównie do połączeń spawanych, gdzie występują trudności z określeniem pola naprężenia koniecznego do wyznaczenia trwałości zmęczeniowej złącza. Promień karbu geometrycznego znajdujący się w spoinie jest trudny do zmierzenia, co dodatkowo utrudnia proces analizy. Neuber zaproponował zastosowanie wielkości nazwanej promieniem fikcyjnym ρ_f , w której rzeczywisty promień karbu ρ , został powiększony o iloczyn dwóch dodatkowych wielkości. Pierwsza wielkość to

współczynnik wieloosiowości s_N . Za pomocą tego współczynnika, w zależności od przyjętego kryterium, rodzaju obciążenia i geometrii próbki, uwzględnia się wieloosiowy stan naprężenia (tabela 6.1).

Tabela 6.1. Wartości współczynnika wieloosiowości s_N [76]

Sposób obciążenia	Osiowe lub zginanie		Ścinanie lub skręcanie
	Płaska	Okrągła	-
Kryterium			
Huber-Mises-Hencky	2,5	$\frac{5-2\nu+2\nu^2}{2-2\nu+2\nu^2}$	1
Treski	2	$\frac{2-\nu}{1-\nu}$	1
Maksymalnych naprężeń głównych	2	2	1
Beltramiego	2- ν	$\frac{2-\nu}{1-\nu}$	1

Drugą wielkością jest zastępcza długość mikrostrukturalna ρ^* . Jest to wielkość określająca odcinek uśredniania, zgodnie z zasadą nielokalnej metody liniowej

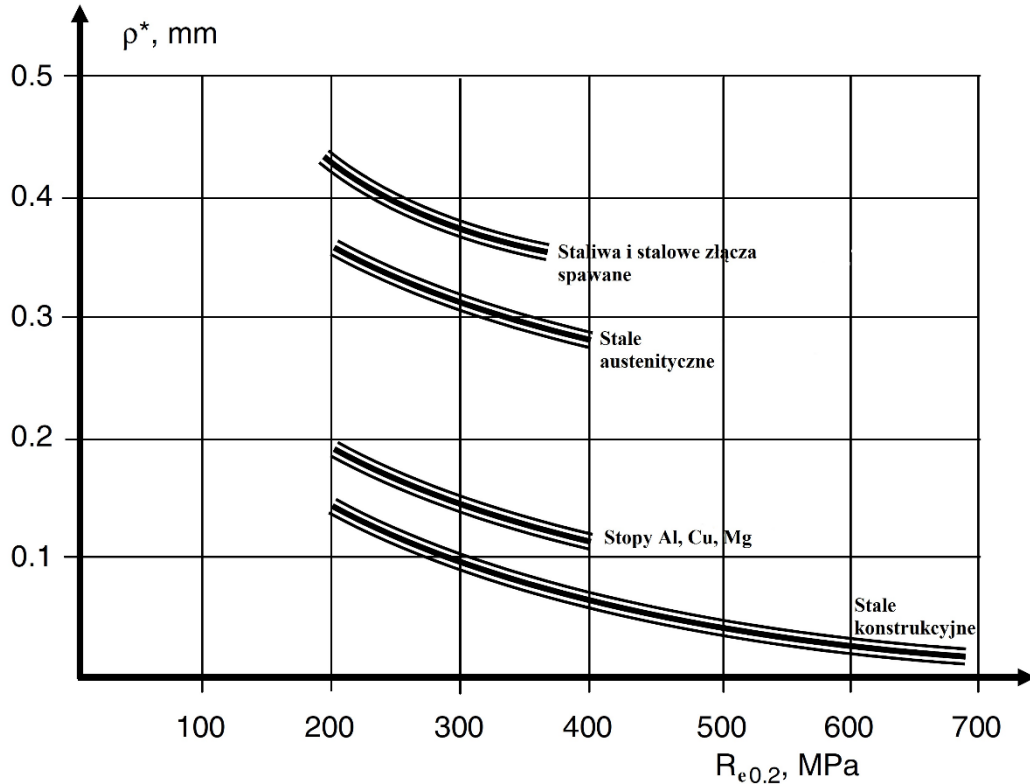
$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\rho^*} \int_{y=y_0}^{y_0+\rho^*} \sigma_r dy, \quad (6.3)$$

gdzie: σ_r – teoretyczne (ekwiwalentne) naprężenie w karbie działające wzdłuż promienia.

Zależność na obliczenie promienia fikcyjnego ρ_f ma postać

$$\rho_f = \rho + s_N \cdot \rho^*, \quad (6.4)$$

gdzie: ρ – zmierzony promień rzeczywisty karbu, s_N – współczynnik wieloosiowości. Można przyjąć, że wielkość ρ^* określa rozmiar pola naprężenia, które jest istotne w analizie, a więc określa pewną strefę zmęczenia. Neuber przedstawił wartości zastępczej długości ρ^* jako zależną od grupy rodzaju materiału oraz ich granicy plastyczności R_e (rys. 6.1). Jest to więc stała materiałowa wyrażona w jednostkach długości.

Rys. 6.1. Zależność długości ρ^* [50]

W przypadku spoin często przyjmuje się przypadek najgorszy, czyli że promień rzeczywisty ρ jest równy zero.

W pracy [94] autorzy wskazali także, że długość ρ^* dla spoin liniowych wykonanych z nisko wytrzymałych stali może być przyjmowana na poziomie 0,4 mm. Przyjęcie tej wartości wraz ze współczynnikiem wieloosiowości obciążenia $s_N = 2,5$ (dla PSO, kryterium H-M-H) powoduje, że wartość promienia fikcyjnego ρ_f wynosi 1 mm. Wartość ta jest zgodna z zaleceniami Międzynarodowego Instytutu Spawalnictwa i jest stosowana dla stalowych złączy spawanych. Dla spawania punktowego zaleca się przyjmować wartość ρ^* na poziomie 0,1 mm, co odpowiada promieniowi fikcyjnemu $\rho_f = 0,4$ mm. Dokładność tej metody dla połączeń spawanych została już wielokrotnie zweryfikowana zarówno dla różnego rodzaju spoin, jak i materiałów [50], [94], [95]. Metoda ta jest zwykle stosowana w zakresie dużej liczby cykli.

W pracy [75] przedstawiono analizę z zastosowaniem promienia fikcyjnego do próbek z korbem i otworem, w których uwzględniono naprężenie w płaszczyźnie maksymalnych naprężeń stycznych. Autorzy w pracy uwzględnili naprężenie w płaszczyźnie, przedstawiając jednocześnie zależności analityczne oraz walidację z wykorzystaniem MES.

Próba zaimplementowania metody promienia fikcyjnego do elementów z karbem została także przeprowadzona w pracach [44], [45], [99]. Wykazano, że aby uzyskać bardzo dobrą zgodność z charakterystyką referencyjną, którą jest charakterystyka próbek gładkich, należy przyjąć zmienną wartość długości ρ^* . W procedurze obliczeniowej przyjęto rzeczywisty promień karbu oraz stałą, zgodną z propozycją Neubera wartość współczynnika s_N . Obliczona została natomiast wartość długości ρ^* , która przyjmuje zmienne wartości w zależności od poziomu obciążenia i rodzaju karbu. Obliczenia dokonano z zależności

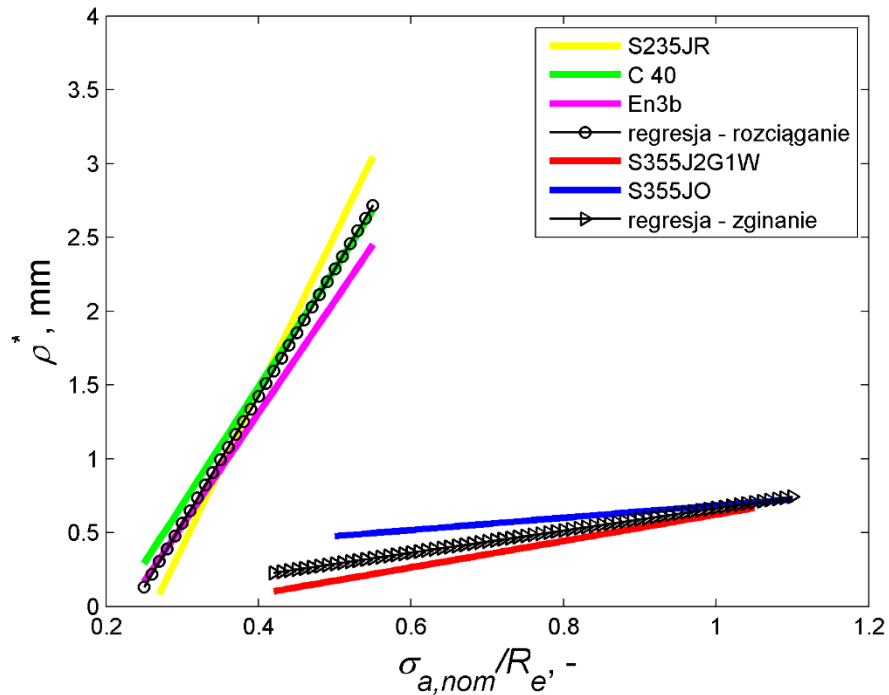
$$\rho^* = \frac{\rho_f - \rho}{s_N}. \quad (6.5)$$

Aby dodatkowo uzależnić obliczoną wartość długości ρ^* od granicy plastyczności materiału R_e , zaproponowano opis tej zmienności od iloczynu poziomu obciążenia naprężenia nominalnego i granicy plastyczności R_e w postaci

$$\rho^* = A_\rho \cdot \frac{\sigma_{nom,k}}{R_e} + B_\rho, \quad (6.6)$$

gdzie: A_ρ , B_ρ – współczynniki regresji liniowej, $\sigma_{nom,k}$ – naprężenie nominalne próbki z karbem.

Obliczenia wykonano dla pięciu rodzajów stali. Uzyskane wyniki zmienności długości ρ^* przedstawiono na rys. 6.2. Z analizy rysunku można wnioskować, że długości ρ^* jest zależna także od rodzaju obciążenia i że wartość ta zwiększa się wraz ze wzrostem poziomu obciążenia.

Rys. 6.2. Zależność długości ρ^* uzyskana w badaniach własnych [44]

Propozycja wykorzystania metody promienia fikcyjnego, w porównaniu z naprężeniową i energetyczną metodą opartą na idei płaszczyźnie krytycznej, została przedstawiona w pracy [111]. Wyznaczenie lokalnych wartości ekwiwalentnego naprężenia oparto także o propozycję DangVana [17]. W wynikach dla stali StE460 wskazano rozrzut otrzymanych wartości naprężeń określając ich położenie w strefie bezpiecznej lub niebezpiecznej. Możliwe jest więc zastosowanie kilku metod na określenie stanu naprężenia w dnie spoiny.

W pracy [10], [11] autorzy wskazali także na zmienność promienia fikcyjnego ρ_f , z uwagi na zmienne wartości współczynnika wieloosiowości obciążenia s_N obliczonych przy kombinacji obciążenia o charakterze rozciągania i skręcania.

7. Cel i zakres pracy

Celem pracy było zastosowanie wybranych metod do obliczenia trwałości zmęczeniowej elementów z karbem oraz opracowanie własnego modelu obliczeniowego. We własnym modelu uwzględniono cykliczne właściwości materiałowe, przebieg zmian efektywnego naprężenia w płaszczyźnie krytycznej oraz zastosowano funkcję wagową. Naprężenie efektywne jest tu rozumiane jako naprężenie uwzględniające umocnienie materiału (odkształcenia plastyczne), a jego obliczenie bazuje na modelu wieloliniowego izotropowego umocnienia. Uśrednione naprężenie efektywne obliczane jest w płaszczyźnie krytycznej wraz z funkcją wagową opisującą znaczenie poszczególnych warstw materiału w procesie zmęczenia. W algorytmie obliczeniowym przyjęto także trwałość eksperymentalną próbek z karbem odpowiadającą liczbie cykli przy długości pęknięcia na poziomie 0,1 mm.

Zakres pracy obejmuje przeprowadzenie testów zmęczeniowych na próbkach gładkich i z karbem, wykonanie obliczeń MES oraz symulacji numerycznych. Na podstawie wyników analizy MES, uzyskano rozkłady zmiany naprężenia w niewielkiej odległości od dna karbu, które były następnie uśredniane wraz z funkcją wagową. Jest to konieczne do wyznaczenia długości efektywnej, a więc takiej długości, która określa ekwiwalentną strefę zmęczeniową. Strefa ta jest wyznaczona w oparciu o porównanie uśrednionego rozkładu naprężenia z próbki z karbem z naprężeniem z próbki gładkiej dla tej samej trwałości. Trwałość eksperymentalna została wyznaczona podczas testów zmęczeniowych, jako liczba cykli do momentu inicjacji pęknięcia. Na podstawie uzyskanych wyników, określono zależność długości efektywnej od poziomu obciążenia i promienia karbu. W większości prac naukowych nie uzależnia się rozmiaru strefy zmęczeniowej od poziomu obciążenia i geometrii karbu. Podjęto także próbę opisanie zmienności długości efektywnej przez zależność dwuwymiarową w postaci płaszczyzny. Główną częścią pracy jest autorski model obliczeniowy bazujący na nielokalnym modelu liniowym, w którym naprężenie obliczane jest przy wykorzystaniu cyklicznych właściwości materiałowych. Kolejną nowością naukową jest zaimplementowanie do modelu obliczeniowego metody płaszczyzny krytycznej oraz funkcji wagowej, za pomocą których uwzględniono wieloosiowy stan naprężenia i wagę poszczególnych punktów obszaru na proces zmęczenia. Dodatkowym czynnikiem wpływającym na dokładność analizy jest sposób prowadzenia badań eksperymentalnych próbek z karbem.

W badaniach tych obserwowano i rejestrowano powierzchnię próbki, co umożliwiło przyjęcie niewielkiej długości pęknięcia, jako długość określającą inicjację pęknięcia uznany jako kryterium zniszczenia. Wszystkie te aspekty zostały wykorzystane w modelu obliczeniowym z zamiarem jak najlepszego odzwierciedlenia rzeczywistych nielokalnych warunków wyężenia w elemencie z karbem. Wykorzystanie w obliczeniach MES modelu wieloliniowego umocnienia, efektywnego naprężenia w płaszczyźnie krytycznej oraz funkcji wagowej bazującej na rozkładzie normalnym prawdopodobieństwa sprawia, że zastosowany model obliczeniowy może być użytecznym narzędziem do określania trwałości zmęczeniowej elementów z karbem. Za pomocą tego algorytmu możliwe jest wyznaczenie długości efektywnych dla różnych materiałów, geometrii karbu i poziomów obciążenia. Możliwe jest następnie wyznaczenie zależności długości efektywnej od promienia karbu i poziomu obciążenia, wykorzystując na przykład równanie liniowe, równanie płaszczyzny lub innej powierzchni. Praca obok zastosowania praktycznego ma jednak głównie charakter poznawczy, w której wykazano zmienność ekwiwalentnych stref zmęczenia w każdym z zastosowanych modeli obliczeniowych.

Przed przystąpieniem do opracowania autorskiego modelu obliczeniowego, wykonano obliczenia wykorzystując model objętościowy oraz metodę promienia fikcyjnego Neubera. W obu przypadkach wskazano na zmienność stref ekwiwalentnych, zarówno strefy objętościowej jak i długości mikrostrukturalnej ρ^* .

8. Badania eksperymentalne własne

Badania eksperymentalne przeprowadzono na próbkach gładkich i próbkach z karbem. Wszystkie badania zmęczeniowe przeprowadzono przy kontrolowanej sile obciążenia. Podczas badań próbek gładkich, do rejestracji odkształceń w części pomiarowej próbki wykorzystano ekstensometr. Umożliwiło to wyznaczenie pętli histerezy w układzie siła-odkształcenie, a po przeliczeniu, naprężenie-odkształcenie. W wyniku tych badań wyznaczono charakterystyki zmęczeniowe Basquina i Mansona-Coffina-Basquina oraz określono cykliczne właściwości materiałowe.

Badania eksperymentalne na próbkach z karbem przeprowadzono dla kilku rodzajów promieni karbu, rejestrując w tym czasie liczbę cykli do inicjacji pęknięcia, a następnie liczbę cykli podczas propagacji pęknięcia. W wyniku tych badań wyznaczono charakterystyki zmęczeniowe Basquina oraz określono liczbę cykli do inicjacji pęknięcia zdefiniowanego na długości 0,1 mm. Badania przeprowadzono dla dwóch gatunków stali stosowanych w kolejnictwie do produkcji haków ciągowych. Badania dla stali EA4T przeprowadzono tylko dla elementów gładkich i jednego rodzaju karbu z powodu braku dostępności materiału, który został pobrany z konkretnego elementu konstrukcyjnego, jakim jest kolejowy hak ciągowy. Badania dla stali 42CrMo4+QT przeprowadzono dla 4 rodzajów karbu. Próbki z materiału 42CrMo4+QT zostały pobrane z pręta, a materiał ten także jest stosowany do produkcji kolejowych sprzęgów ciągowych. Z uwagi na trudności w pozyskaniu danych literaturowych, które powinny zawierać zarówno cykliczne właściwości materiałowe oraz dokładnie zdefiniowaną liczbę cykli do inicjacji pęknięcia, w badaniach literaturowych zastosowano jedynie wyniki uzyskane dla dwóch rodzajów stali oraz jednego rodzaju karbu.

8.1. Badania stali EA4T

Stal EA4T jest stosowana w kolejnictwie pod nazwą P55G (stare oznaczenie według PN). Stal ta jest stosowana między innymi do produkcji kolejowych haków i sprzęgów ciągowych zgodnie z normą [87]. Stale gatunkowo podobne (P45, P55, P60), stosowane są także do produkcji osi, obręczy, elementów sprzęgów ciągowych oraz podwozi pojazdów szynowych. Są to stale trudno spawalne, które poddawane są procesowi

obróbki plastycznej, szczególnie kuciu. Do obróbki dostarczane są w postaci kęsisk lub odkuwek.

Materiał do badań został pozyskany z nowego, nieeksploatowanego haka ciągowego. Próbki zostały wycięte z drąga haka, w kierunku zgodnym z warunkami działania obciążenia rozciągającego. Wycięcia dokonano przy pomocy piły i frezarki. Pozyskano w ten sposób 18 próbek, które poddano badaniom statycznym i zmęczeniowym.

Podczas badań statycznych przeprowadzonych na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej (rys. 8.1) wyznaczono krzywą rozciągania i współczynnik Poissona.



Rys. 8.1. Uniwersalna maszyna wytrzymałościowa (typ 10991)

Do pomiaru odkształceń zastosowano rozetę tensometryczną wraz z mostkiem tensometrycznym i oprogramowaniem LabVIEW [49]. W wyniku badań statycznych wyznaczono właściwości mechaniczne, które przedstawiono w tabeli 8.1. Celem tych badań było pozyskanie właściwości materiałowych koniecznych do analizy MES, głównie współczynnika Poissona.

Tabela 8.1. Właściwości wytrzymałości statycznej stali EA4T

E , GPa	ν , -	$R_{0,2}$, MPa	R_m , MPa	A_5 , %
215	0,29	430	860	12

Skład chemiczny stali EA4T podany w normie [87] przedstawiono w tabeli 8.2.

Tabela 8.2. Skład chemiczny stali EA4T w % (reszta Fe)

C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Cu	Mo	Al
0,52÷0,60	0,80÷1,10	0,15÷0,40	0,04	0,04	0,30	0,30	0,30	0,10	0,02

Wykonano także badania metalograficzne z wykorzystaniem mikroskopu skaningowego, w których uzyskano zdjęcia mikrostruktury przedstawione na rys. 8.2 i 8.3.



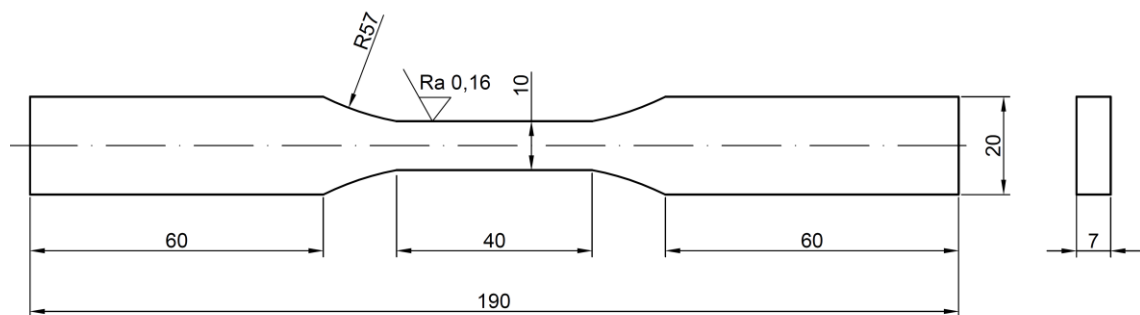
Rys. 8.2. Zdjęcie mikrostruktury stali EA4T w powiększeniu $\times 500$



Rys. 8.3. Zdjęcie mikrostruktury stali EA4T w powiększeniu $\times 200$

Z analizy zdjęć przedstawionych na rys. 8.2 i 8.3 wynika, że stal EA4T ma strukturę perlityczną z dużą zawartością węgla.

Kolejnym etapem badań były testy zmęczeniowe przeprowadzone na próbkach gładkich. Próbki te wykonano jako płaskie (rys. 8.4), zarówno do badań statycznych jak i zmęczeniowych.



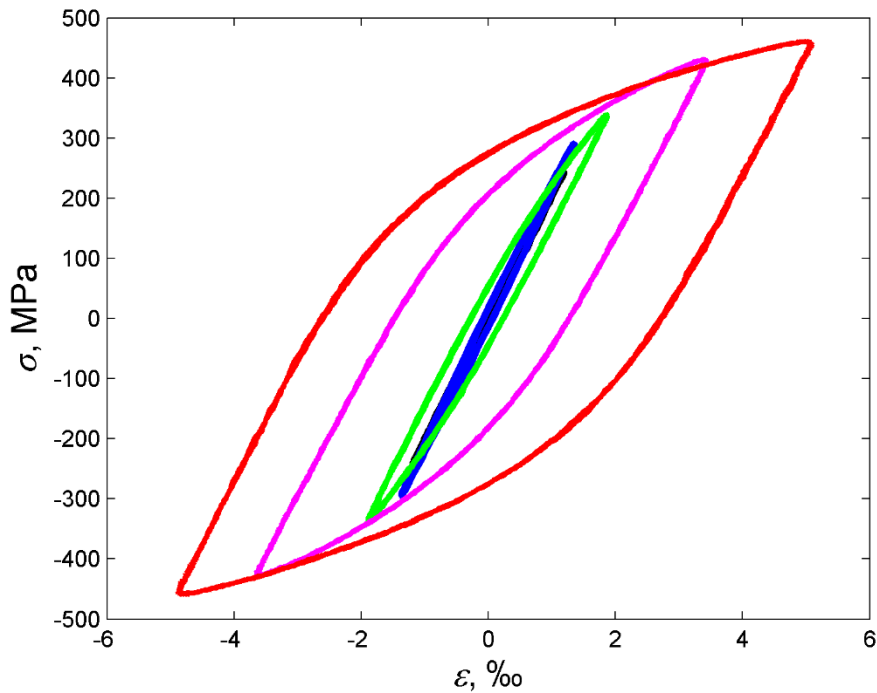
Rys. 8.4. Kształt i wymiary próbek gładkich do badań statycznych i zmęczeniowych ze stali EA4T

Zastosowanie próbek płaskich pozwoliło na uzyskanie większej ilości elementów z jednego haka ciąglowego. Badania zmęczeniowe na próbkach gładkich przeprowadzono na maszynie zmęczeniowej SHM-250 (rys. 8.5).

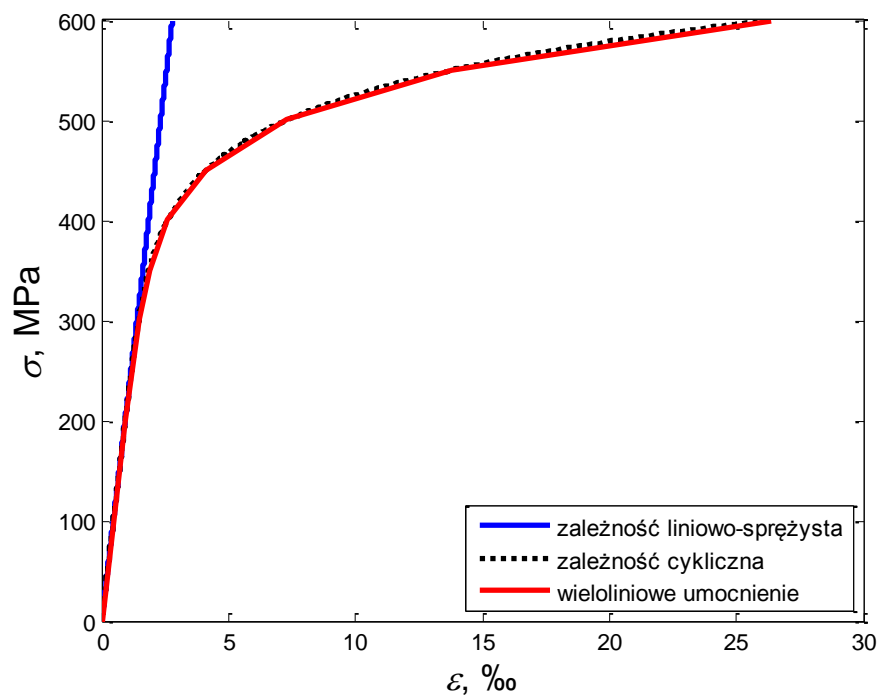


Rys. 8.5. Maszyna zmęczeniowa SHM-250

Oprogramowanie maszyny SHM-250 umożliwia rejestrację wartości siły obciążenia oraz wartości odkształcenia z ekstensometru. Po przeliczeniu na wartość naprężenia wyznaczono pętle histerezy (rys. 8.6), a następnie wykorzystując punktowe wartości maksymalne amplitudy naprężeń i odkształceń z poszczególnych poziomów obciążeń, wyznaczono cykliczne właściwości materiałowe. Cykliczne właściwości materiałowe, zależność liniowo-sprężystą i zastosowany w obliczeniach MES model wieloliniowego umocnienia przedstawiono na rys. 8.7.



Rys. 8.6. Wybrane pętle histerezy zarejestrowane podczas badań próbek gładkich stali EA4T



Rys. 8.7. Relacje pomiędzy naprężeniem a odkształceniem dla stali EA4T

Cykliczne właściwości materiałowe badanych stali opisano równaniem Ramberga-Osgooda w postaci

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (8.1)$$

gdzie: σ_a – amplituda naprężenia, K' – współczynnik cyklicznego umocnienia, n' – wykładnik cyklicznego umocnienia.

Amplituda naprężenia została obliczona z zależności

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \quad (8.2)$$

a amplituda odkształcenia z zależności

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{2}. \quad (8.3)$$

Podczas badań próbek gładkich, obciążenie realizowano na 5 poziomach. Wyznaczono stałe równania Ramberga-Osgooda oraz współczynniki regresji liniowej równania Basquina

$$\log N_f = A - m \cdot \log \sigma_a, \quad (8.4)$$

gdzie: A , m – współczynniki regresji liniowej charakterystyki Basquina.

Współczynniki te przedstawiono w tabeli 8.3. Wartości naprężeń z poszczególnych poziomów obciążeń oraz uzyskane liczby cykli do inicjacji pęknięcia przedstawiono w załączniku.

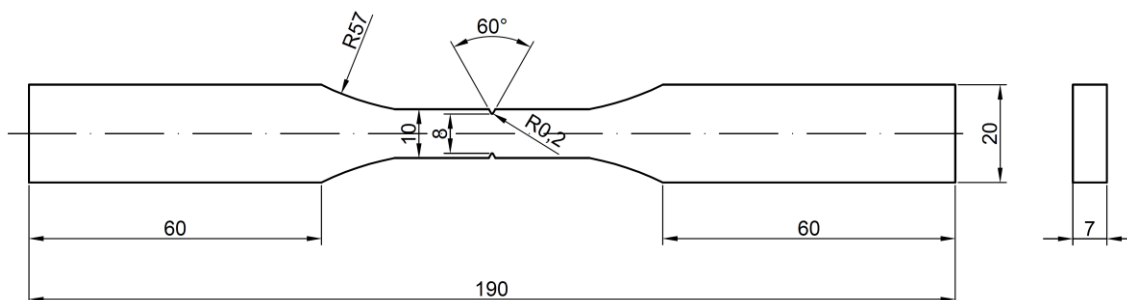
Tabela 8.3. Właściwości zmęczeniowe stali EA4T

Stal	A , -	m , -	K' , MPa	n' , -
EA4T	30,33	9,99	930,15	0,117

Charakterystyka Basquina wyznaczona dla próbek gładkich poddanych rozciąganiu-ściskaniu, została w dalszej części pracy wykorzystana, jako charakterystyka referencyjna do opracowanej nielokalnej metody liniowej. Jest to charakterystyka odniesienia, do której porównywany jest uśredniony stan naprężenia z próbek z karbem.

Aby wykonać obliczenia z wykorzystaniem nielokalnego modelu obliczeniowego, przeprowadzono także badania eksperymentalne na próbkach z karbem. Wykorzystując próbki pobrane z haka, w części pomiarowej wykonano karb metodą elektroiskrową. W próbkach nacięto obustronnie karb o promieniu $R = 0,2$ mm (rys. 8.8). Następnie na maszynie SHM-250, wykonano testy zmęczeniowe stosując obciążenie symetryczne rozciągania-ściskania. Wyznaczone stałe równania Basquina dla naprężeń nominalnych,

naprężeń σ_{nom} z uwzględnieniem współczynnika K_t oraz maksymalnych lokalnych naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H (wyniki analizy MES) przedstawiono w tabeli 8.4.



Rys. 8.8. Kształt i wymiary próbek z karbem ze stali EA4T

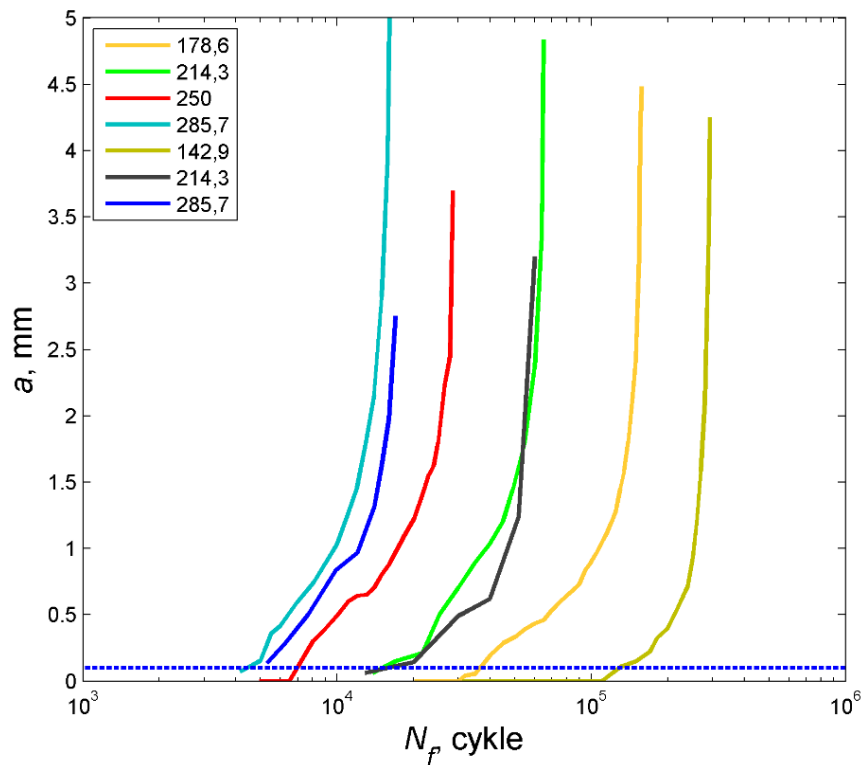
Tabela 8.4. Stałe charakterystyki Basquina dla próbek z karbem ze stali EA4T

Współczynnik	A , -	m , -
Materiał, geometria, naprężenie		
EA4T, $R = 0,2$ mm, σ_{nom}	15,65	4,91
EA4T, $R = 0,2$ mm, $\sigma_{nom} \cdot K_t$	18,92	4,91
EA4T, $R = 0,2$ mm, σ_{H-M-H}	48,37	16,36

Jednocześnie podczas badań obserwowano i rejestrowano powierzchnię próbki, w celu zaobserwowania momentu inicjacji pęknięcia, a następnie przyrostu jego propagacji. Obserwacji powierzchni próbki dokonywano co około 5000 cykli zmęczeniowych z obu stron naciętego karbu. Po opracowaniu wyników, wyznaczono wykresy przyrostów długości pęknięcia dla poszczególnych wartości naprężenia nominalnego w funkcji liczby cykli, które przedstawiono na rys. 8.9.

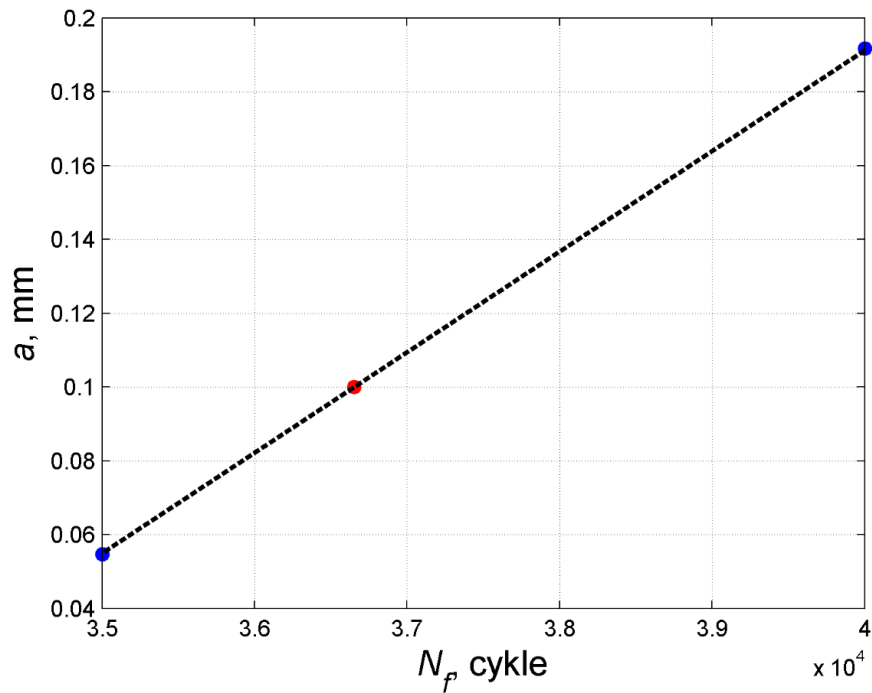
Z uwagi na konieczność zdefiniowania liczby cykli do inicjacji pęknięcia, na podstawie wyników zaobserwowanych długości pęknięć zdecydowano, że moment inicjacji odpowiada pęknięciu o długości 0,1 mm.

W pracy [94] wskazano, że inicjujące pęknięcie (initial crack size) nie powinno być zbyt małe, to znaczy wynosić nie mniej niż tak zwane krótkie pęknięcie (short crack), a więc $a \geq 0,1$ mm.



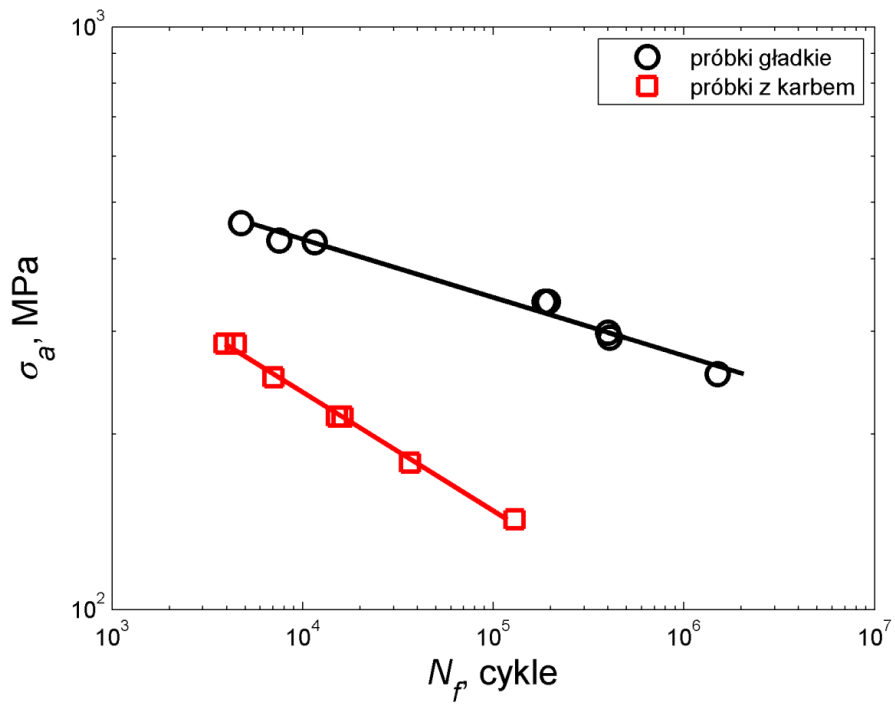
Rys. 8.9. Wykresy przyrostów długości pęknięcia w funkcji liczby cykli zależne od obciążenia wyrażonego przez naprężenie nominalne σ_{nom}

W przypadku, gdy zarejestrowana długość pęknięcia była większa lub mniejsza od 0,1 mm, dokonano interpolacji liniowej pomiędzy dwoma sąsiednimi wynikami obserwacji (rys. 8.10). W badanych elementach z karbem, liczba cykli do całkowitego zniszczenia była nawet trzykrotnie większa od liczby cykli do zainicjowania pęknięcia. W przypadku większych obciążeń, proces propagacji pęknięcia przebiegał szybciej niż w przypadku mniejszej wartości obciążenia. W tej sytuacji istotne jest, aby za kryterium zniszczenia uznać moment inicjacji pęknięcia lub przyjąć niewielką długość pęknięcia.

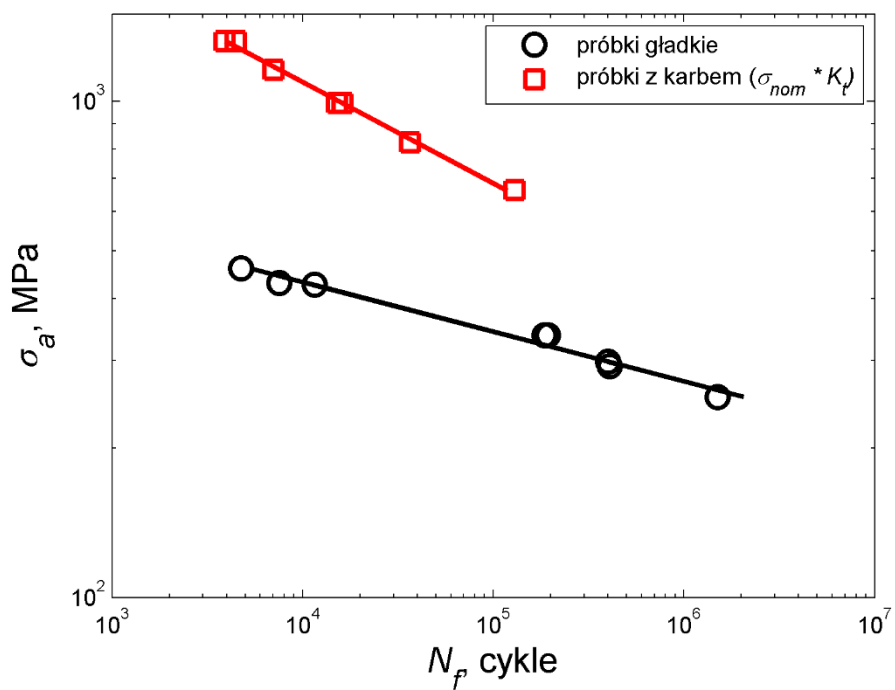


Rys. 8.10. Interpolacja liniowa pomiędzy dwoma punktami pomiarowymi z badań eksperymentalnych

Liczba cykli do inicjacji pęknięcia została przyjęta jako trwałość eksperymentalna, a następnie odniesiona do naprężenia nominalnego, bez i z uwzględnieniem teoretycznego współczynnika działania karbu K_t . W przypadku próbek gładkich, jako kryterium zniszczenia przyjęto całkowite uszkodzenie (zerwanie) próbki. Wyznaczone w ten sposób charakterystyki próbek gładkich i próbek z karbem przedstawiono na rys. 8.11 i 8.12.

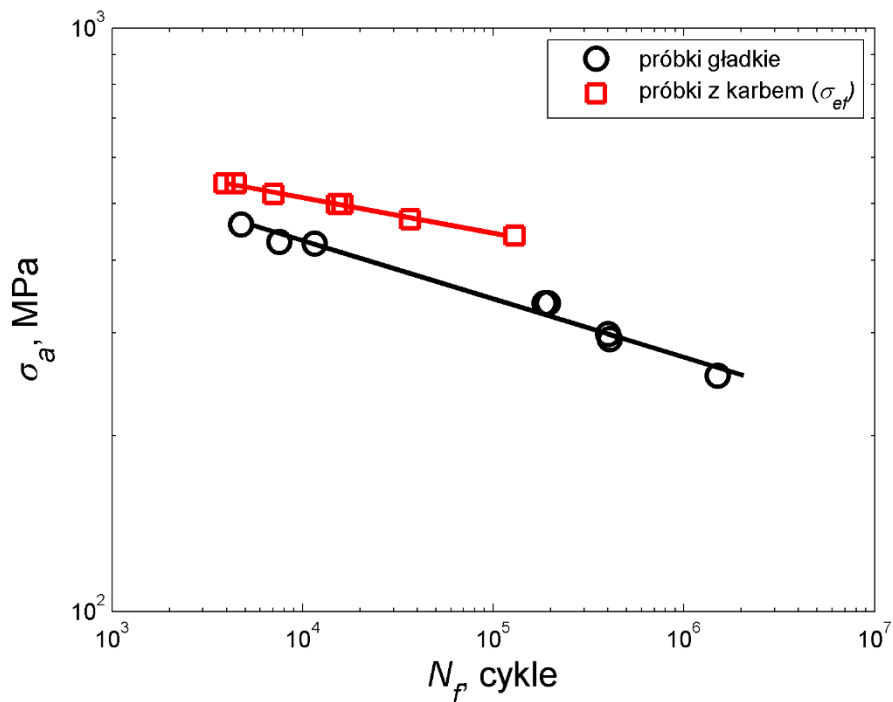


Rys. 8.11. Charakterystyki Basquina dla próbek gładkich i próbek z karbem oparte o naprężenia nominalne



Rys. 8.12. Charakterystyki Basquina dla próbek gładkich i próbek z karbem oparte o naprężenia nominalne i współczynnik K_t

W dalszej części pracy, po wykonaniu nieliniowej analizy MES dla próbek z karbem, otrzymane wartości naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H zostały dodatkowo użyte do wyznaczenia charakterystyk zmęczeniowych opartych o efektywne ekwiwalentne naprężenia. W ten sposób uwzględniono efektywne maksymalne lokalne naprężenia, które dla tej samej trwałości mają wartości większe od naprężeń w próbkach gładkich (rys. 8.13). Jednocześnie spowodowało to uzyskanie bardziej równoległych charakterystyk zmęczeniowych, na skutek mniejszego wzrostu naprężeń w zakresie małej liczby cykli.



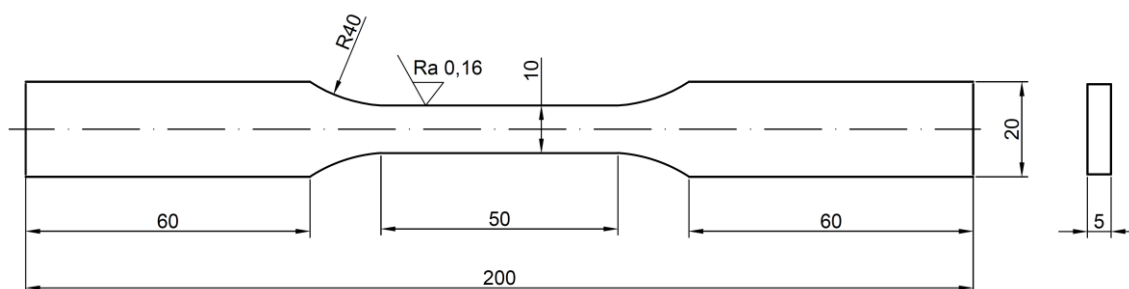
Rys. 8.13. Charakterystyki Basquina dla próbek gładkich i próbek karbem dla lokalnych efektywnych wartości naprężeń σ_{H-M-H}

Z analizy rysunków 8.11 ÷ 8.13 wynika, że wartości naprężeń obliczone z wykorzystaniem cyklicznych właściwości materiałowych są znacznie mniejsze od naprężeń powiększonych o współczynnik K_t oraz że są one większe od naprężeń dla próbek gładkich, dla tych samych trwałości eksperymentalnych. Naprężenia efektywne są najbardziej zbliżone do naprężeń rzeczywistych działających w karbie podczas cyklicznych obciążeń.

8.2. Badania stali 42CrMo4+QT

Badania eksperymentalne dla stali 42CrMo4+QT przeprowadzono w podobnym zakresie jak dla stali EA4T. Stal 42CrMo4+QT jest w kolejnictwie stosowana także do produkcji haków ciąglowych. Ponieważ norma [88] nie precyzuje wykorzystania konkretnego materiału a jedynie wskazuje jego właściwości mechaniczne, niektóre zakłady produkują haki ciąglowe właśnie z zastosowaniem stali 42CrMo4+QT.

Materiał do badań został pozyskany z pręta ciągnionego o średnicy 20 mm. Właściwości mechaniczne stali podane w certyfikacie [90] są przedstawione w tabeli 8.6. Brak informacji o wartości modułu Younga oraz współczynnika Poissona spowodował konieczność przeprowadzenia dodatkowych badań wytrzymałości statycznej. Na wykonanych próbkach płaskich (rys. 8.14) przeprowadzono badania na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej.



Rys. 8.14. Próbkę gładkie do badań statycznych

Wyznaczone statyczne właściwości mechaniczne przedstawiono w tabeli 8.5.

Tabela 8.5. Właściwości wytrzymałości statycznej stali 42CrMo4+QT

E , GPa	ν , -	$R_{0,2}$, MPa	R_m , MPa	A_5 , %
210	0,31	1074*	1170*	14*

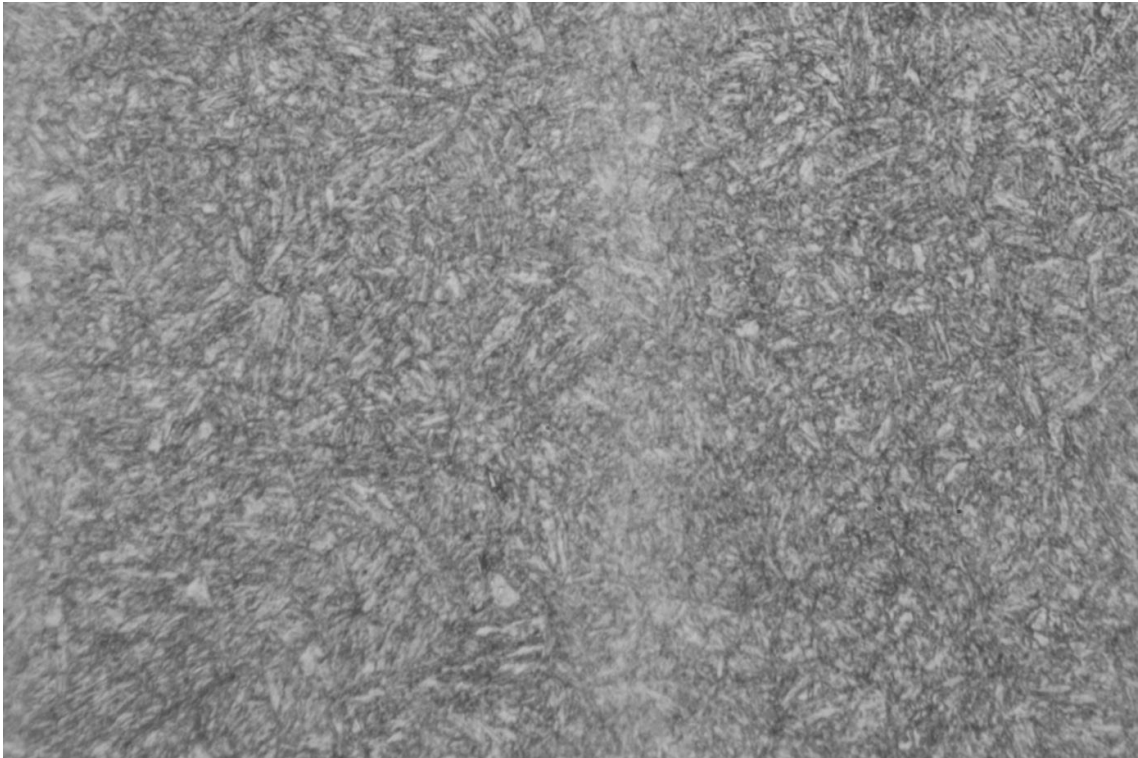
* – wartości z certyfikatu [90].

Skład chemiczny podany w certyfikacie [90] uzyskany podczas zakupu materiału przedstawiono w tabeli 8.6.

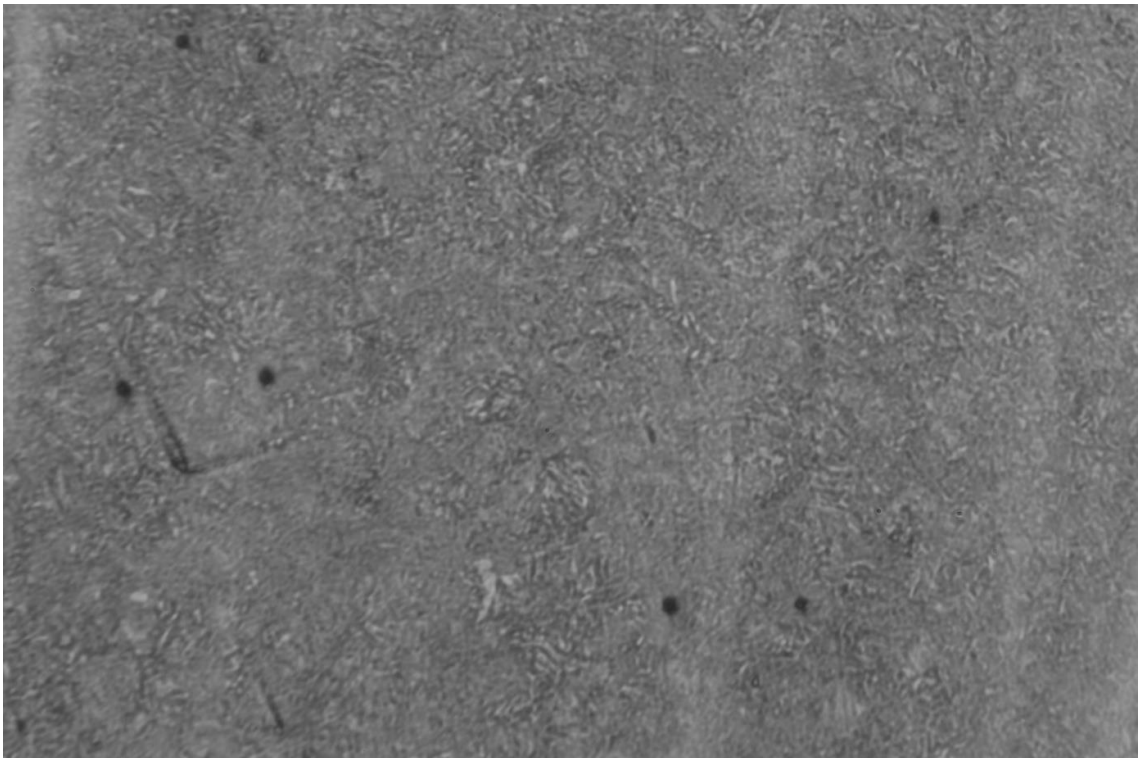
Tabela 8.6. Skład chemiczny stali 42CrMo4+QT w % (reszta Fe)

C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Cu	Mo	Al
0,44	0,77	0,27	0,011	0,008	1,18	0,12	0,19	0,18	0,022

Z wykonanych zglądów metalograficznych wykonano badania mikrostruktury, które przedstawiono na rys. 8.15 i 8.16.



Rys. 8.15. Zdjęcie mikrostruktury stali 40HM-T w powiększeniu $\times 500$

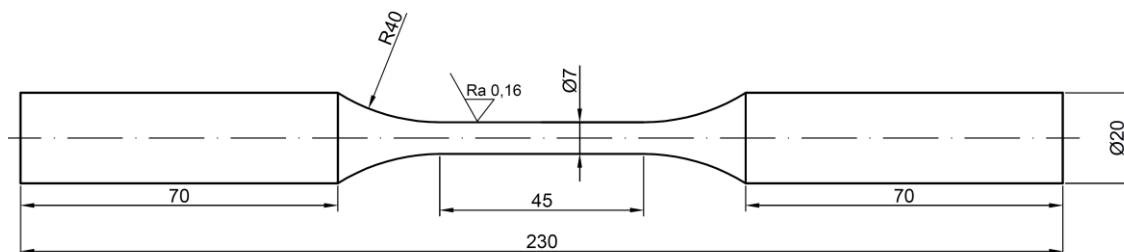


Rys. 8.16. Zdjęcie mikrostruktury stali 40HM-T w powiększeniu $\times 200$

8. Badania eksperymentalne własne

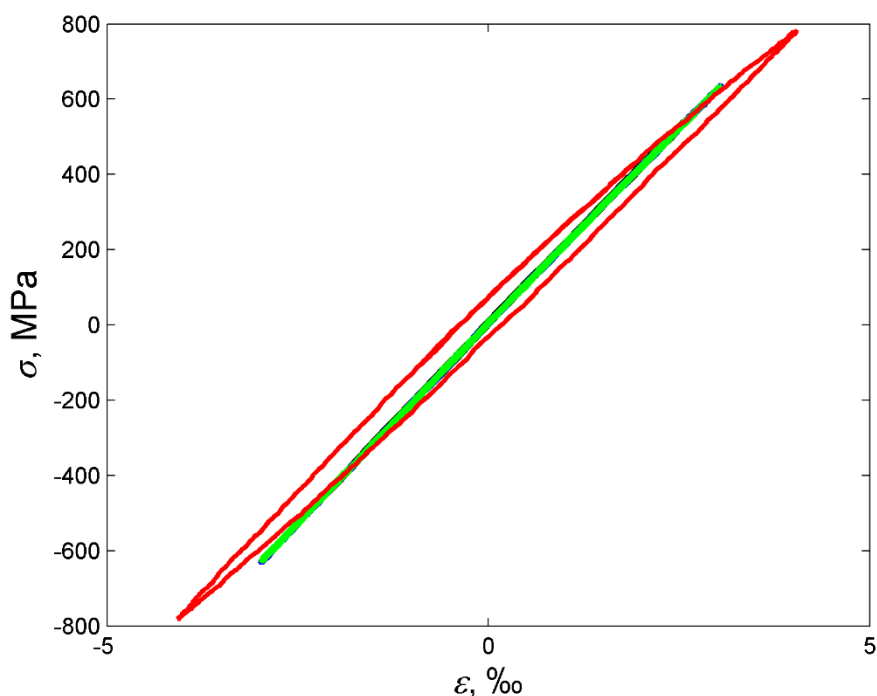
Stal 42CrMo4+QT charakteryzuje się strukturą martenzytyczną (igielkowa) oraz wskazuje na stan po obróbce cieplnej.

Badania zmęczeniowe próbek gładkich (rys. 8.17) wykonano na maszynie zmęczeniowej SHM-250.



Rys. 8.17. Kształt i wymiary próbek gładkich do badań zmęczeniowych ze stali 42CrMo4+QT

Pętle histerezy rejestrowane podczas badań nie wykazywały znaczących odkształceń plastycznych (rys. 8.18). Jest to spowodowane wysoką wartością statycznej i cyklicznej granicy plastyczności. Obciążenie stosowane podczas badań zmęczeniowych było niższe od statycznej granicy plastyczności, a stal ta charakteryzuje się małymi odkształceniami w zakresie sprężystym.

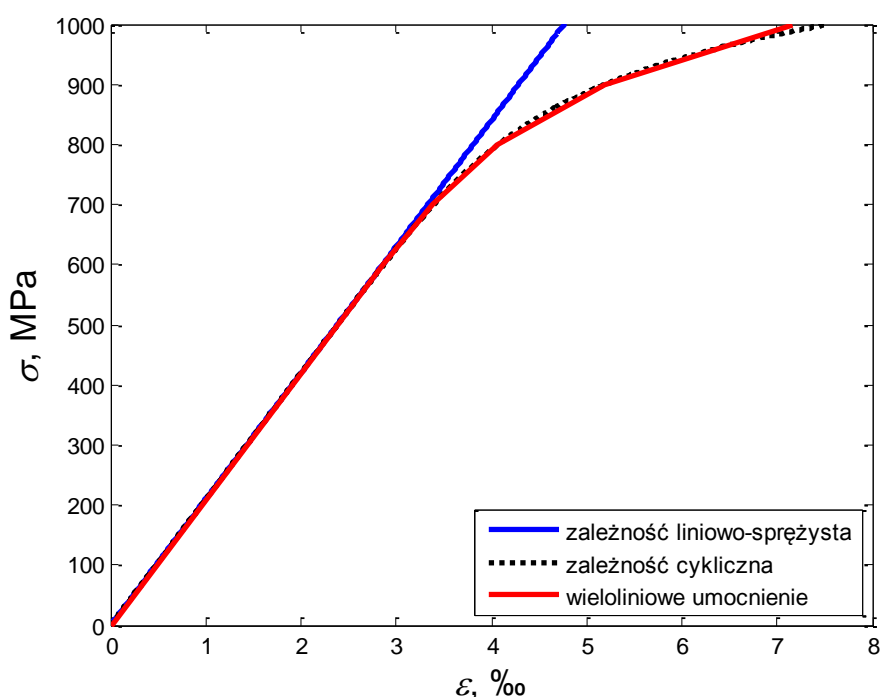


Rys. 8.18. Pętle histerezy zarejestrowane podczas badań próbek gładkich ze stali 42CrMo4+QT

Właściwości cykliczne opisane równaniem Ramberga-Osgooda oraz współczynniki charakterystyki Basquina wyznaczone w badaniach eksperymentalnych są przedstawione w tabeli 8.7. Właściwości cykliczne na tle zależności liniowo-sprężystych oraz zastosowanego modelu wieloliniowego umocnienia przedstawiono na rys. 8.19.

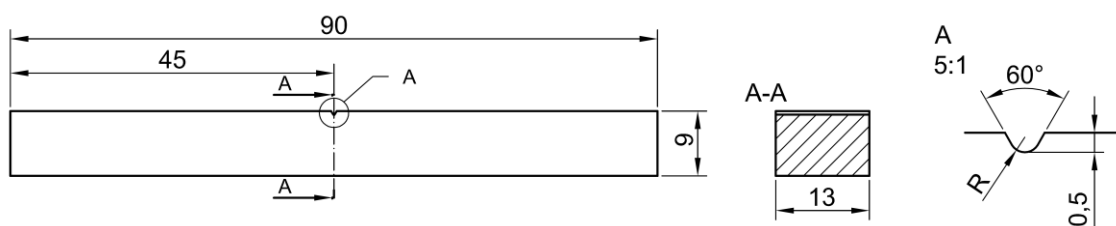
Tabela 8.7. Właściwości zmęczeniowe i cykliczne stali 42CrMo4+QT

Stal	A , -	m , -	K' , MPa	n' , -
42CrMo4+QT	25,016	7,39	1750,5	0,095



Rys. 8.19. Relacje pomiędzy naprężeniem a odkształceniem dla stali 42CrMo4+QT

Następnym etapem badań było wykonanie próbek z karbem o zróżnicowanym promieniu. Próbki z karbem o promieniu $R = 0,2; 0,5; 0,8; 1$ mm (rys. 8.20) poddano badaniom zmęczeniowym pod obciążeniem cyklicznego wahadłowego zginania.

Rys. 8.20. Próbki z karbem o zróżnicowanym promieniu R

Badania wykonano na stanowisku do badań materiałów konstrukcyjnych z napędem wzbudnikowym, które przedstawione jest na rys. 8.21.



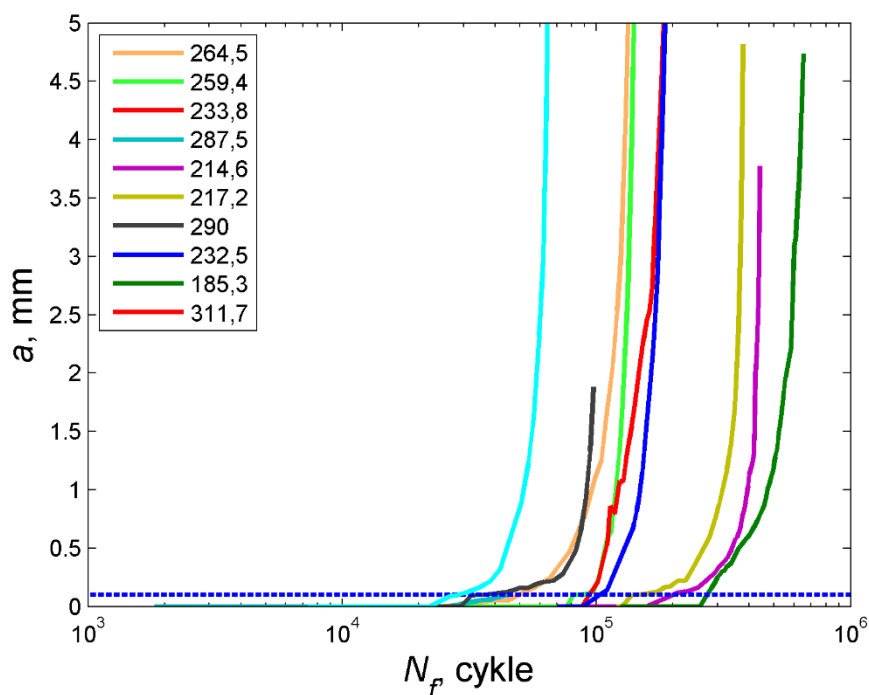
Rys. 8.21. Stanowisko do badań materiałów konstrukcyjnych

Wyznaczone stałe A , m równania Basquina dla naprężeń nominalnych, naprężeń pseudosprężystych uwzględniających współczynnik K_t oraz maksymalnych lokalnych naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H (wyniki analizy MES) przedstawiono w tabeli 8.8.

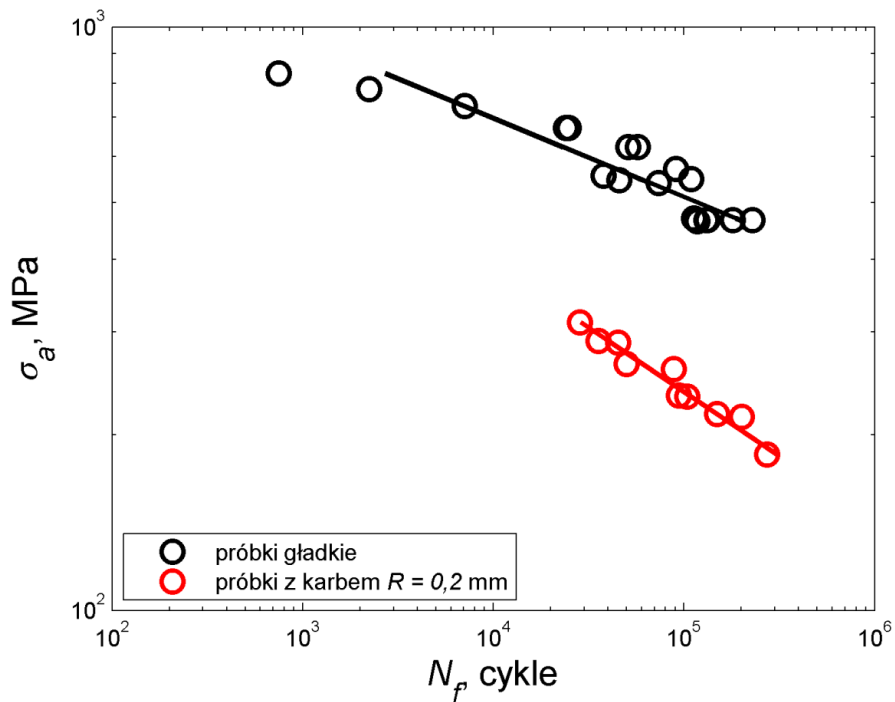
Podczas badań obserwowano i rejestrowano moment inicjacji, a następnie propagację pęknięcia. Wyznaczone przykładowe (dla próbek z promieniem karbu $R = 0,2$ mm) zależności przyrostów długości pęknięcia w funkcji liczby cykli, dla poszczególnych wartości naprężeń nominalnych przedstawiono na rys. 8.22.

Tabela 8.8. Stałe charakterystyki Basquina dla próbek z karbem ze stali 42CrMo4+QT

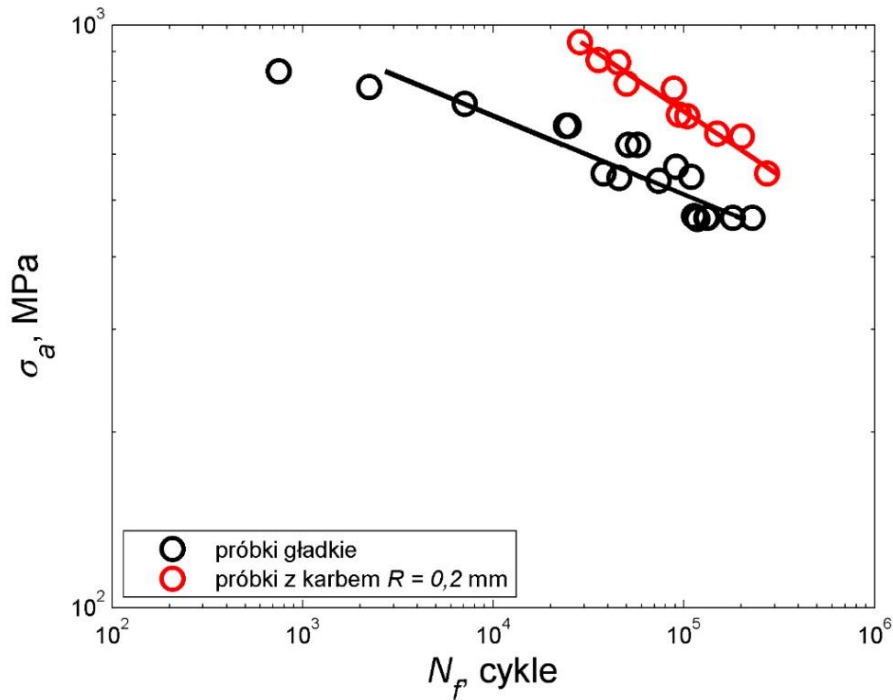
Współczynnik	$A, -$	$m, -$
Materiał, geometria, naprężenie		
42CrMo4+QT, $R = 0,2$ mm, σ_{nom}	15,78	4,91
42CrMo4+QT, $R = 0,2$ mm, $\sigma_{nom} \cdot K_t$	17,95	4,54
42CrMo4+QT, $R = 0,2$ mm, σ_{H-M-H}	22,56	6,11
42CrMo4+QT, $R = 0,5$ mm, σ_{nom}	19,06	5,76
42CrMo4+QT, $R = 0,5$ mm, $\sigma_{nom} \cdot K_t$	21,37	5,76
42CrMo4+QT, $R = 0,5$ mm, σ_{H-M-H}	24,20	6,86
42CrMo4+QT, $R = 0,8$ mm, σ_{nom}	19,24	5,74
42CrMo4+QT, $R = 0,8$ mm, $\sigma_{nom} \cdot K_t$	21,15	5,74
42CrMo4+QT, $R = 0,8$ mm, σ_{H-M-H}	22,70	6,39
42CrMo4+QT, $R = 1$ mm, σ_{nom}	20,50	6,16
42CrMo4+QT, $R = 1$ mm, $\sigma_{nom} \cdot K_t$	22,36	6,16
42CrMo4+QT, $R = 1$ mm, σ_{H-M-H}	24,38	6,98

Rys. 8.22. Wykresy przyrostów długości pęknięcia w funkcji liczby cykli dla próbek z karbem o promieniu $R = 0,2$ mm zależne od naprężenia nominalnego

Wszystkie badania próbek z karbem wykonano przy kontrolowanym momencie zginającym. W wyniku przeprowadzonych badań, wyznaczono charakterystyki zmęczeniowe w oparciu o liczbę cykli do inicjacji pęknięcia oraz naprężenie nominalne i współczynnik K_t . Charakterystyki zmęczeniowe dla stali 42CrMo4+QT i promienia karbu $R = 0,2$ mm przedstawiono na rys. 8.23 i 8.24.



Rys. 8.23. Charakterystyki zmęczeniowe próbek gładkich i próbek z karbem dla naprężeń nominalnych

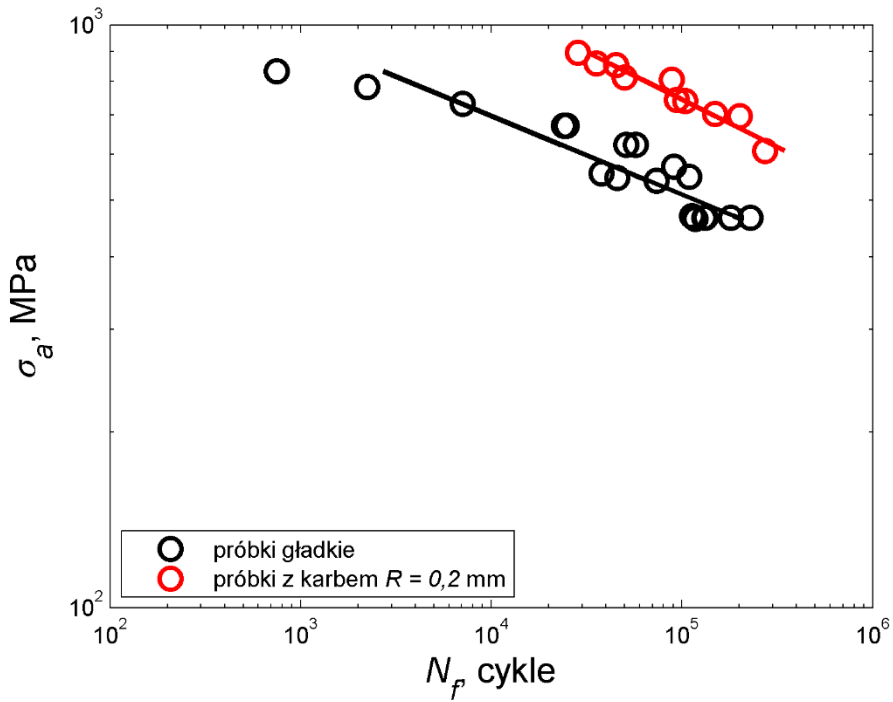


Rys. 8.24. Charakterystyki Basquina dla próbek gładkich i próbek z karbem dla lokalnych wartości naprężeń (uwzględnienie współczynnika K_t)

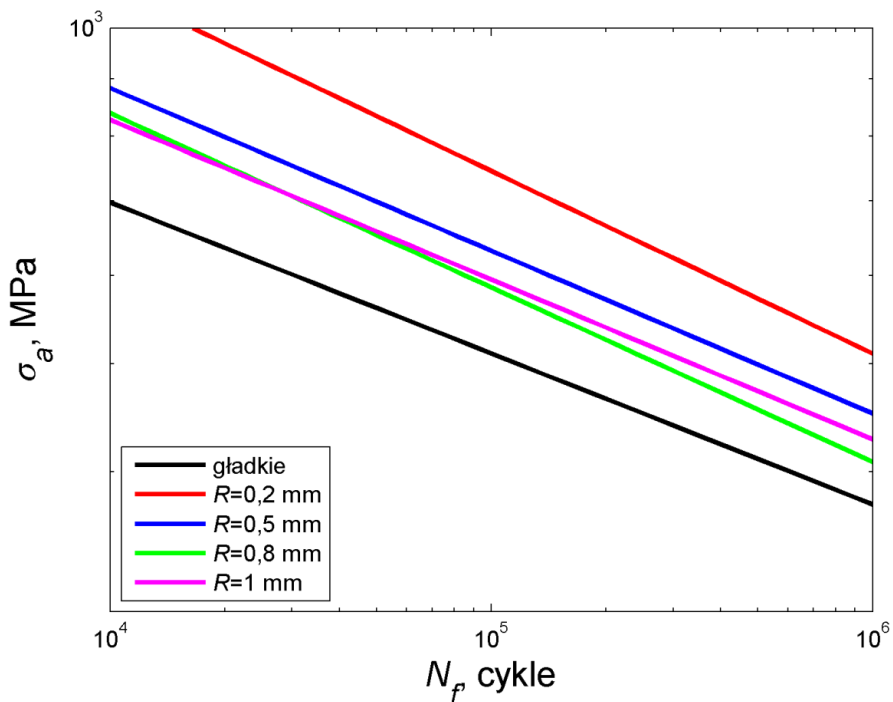
W kolejnym etapie, uwzględniono lokalne maksymalne wartości naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H, które obliczone zostały w nieliniowej analizie MES. Na bazie otrzymanych wyników, sporządzono także charakterystykę uwzględniającą efektywne wartości naprężeń. Przykładową charakterystykę dla promienia karbu $R = 0,2$ mm przedstawiono na rys. 8.25.

Zestawienie wszystkich charakterystyk zmęczeniowych próbek z karbem dla efektywnych naprężeń lokalnych H-M-H przedstawiono na rys. 8.26.

Warunki analizy z wykorzystaniem MES, jakie zostały zastosowane w obliczeniu naprężeń efektywnych, opisano szczegółowo w rozdziale 9.



Rys. 8.25. Charakterystyki Basquina dla próbek gładkich i próbek z karbem dla lokalnych efektywnych wartości naprężeń σ_{H-M-H}

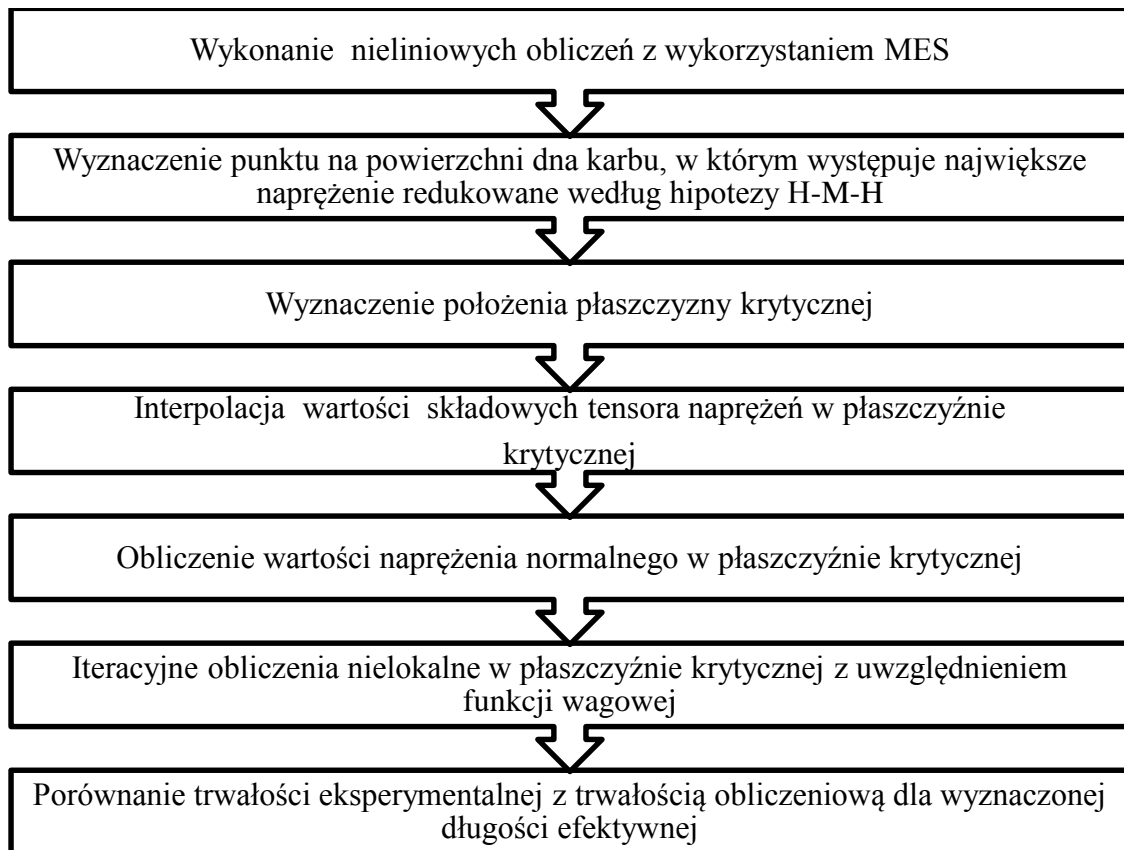


Rys. 8.26. Charakterystyki zmęczeniowe dla stali 42CrMo4+QT uzyskane z własnych badań eksperymentalnych

9. Nielokalna metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie badań własnych

Bazując na wynikach badań eksperymentalnych, opracowano nielokalny model z podejściem liniowym, w którym uwzględniono efektywne wartości naprężenia oraz ustalono moment inicjacji pęknięcia na jak najniższym poziomie jego długości [42], [43]. Wszystkie niezbędne dane do tych obliczeń zostały uzyskane po przeprowadzeniu własnych badań na próbkach gładkich i próbkach z karbem. Wyznaczone cykliczne właściwości materiałowe oraz cykliczna granica plastyczności mają decydujący wpływ na obliczane efektywne wartości naprężeń z wykorzystaniem MES. Uwzględnienie w modelu obliczeniowym efektywnych wartości naprężeń normalnych w płaszczyźnie krytycznej wraz z zastosowaniem funkcji wagowej, pozwala na odniesienie uśrednionego naprężenia ekwiwalentnego do amplitudy naprężenia z próby rozciągania-ściskania próbek gładkich, w której wartości naprężenia w całym przekroju są wartościami rzeczywistymi. Także odniesienie liczby cykli trwałości obliczeniowej do trwałości eksperymentalnej odpowiadającej zainicjowanemu pęknięciu o długości 0,1 mm, powinno jak najlepiej odzwierciedlać to wzajemne porównanie. Algorytm obliczeniowy proponowanej nielokalnej metody liniowej jest przedstawiony na rys. 9.1.

Poszczególne etapy wskazane w algorytmie obliczeniowym mogą być realizowane w programach wykorzystujących MES oraz w programach umożliwiających programowanie własnych skryptów. W badaniach własnych do analizy MES użyto programu FEMAP, Patran oraz COMSOL. Do obliczeń w nielokalnej metodzie liniowej zastosowano program COMSOL, który umożliwia współpracę z programem MATLAB dzięki modułowi LiveLink for MATLAB [15]. Dalsze obliczenia bazujące na wynikach analizy MES zostały wykonane z wykorzystaniem skryptów programowych zapisanych w programie MATLAB.



Rys. 9.1. Algorytm obliczeniowy nielokalnej metody liniowej

9.1. Dane wejściowe do algorytmu obliczeniowego z badań eksperymentalnych własnych

Dane eksperymentalne podawane w literaturze zwykle nie zawierają pełnych informacji o badaniach, a jedynie podawane są opracowane ich wyniki. Prowadzi to do sytuacji, w której wykorzystanie danych literaturowych do własnych symulacji i obliczeń jest utrudnione, a nawet niemożliwe. W przypadku proponowanego modelu obliczeniowego, oprócz niektórych statycznych właściwości materiałowych, konieczne są także właściwości cykliczne. Algorytm proponowanego modelu wymaga także dokładnego zdefiniowania liczby cykli do inicjacji pęknięcia. Wskazane jest, aby moment inicjacji pęknięcia był jasno sprecyzowany, gdyż obliczona trwałość jest porównywana z trwałością eksperymentalną, w której stosuje się liczbę cykli do inicjacji pęknięcia. Podczas własnych badań zaobserwowano także, że czas propagacji pęknięcia w próbkach z karbem może wynosić nawet 3-krotnie więcej od liczby cykli do inicjacji pęknięcia. Zdefiniowanie momentu inicjacji pęknięcia na poziomie bardzo małej długości powoduje także, że wpływ rodzaju obciążenia (rozciąganie czy zginanie) w strefie przy

powierzchni, nie ma dużego znaczenia na procesy zmęczeniowe i inicjację pęknięcia. Warstwy te są wyteżone w podobny sposób, a występujące niejednorodne pole naprężeń, choć zmienne, jest rozpatrywane w małej przestrzeni. Na potrzeby pracy przeprowadzono badania eksperymentalne na próbkach gładkich i próbkach z karbem, a uzyskane wyniki są niezbędne do przeprowadzenia obliczeń według nielokalnego modelu liniowego.

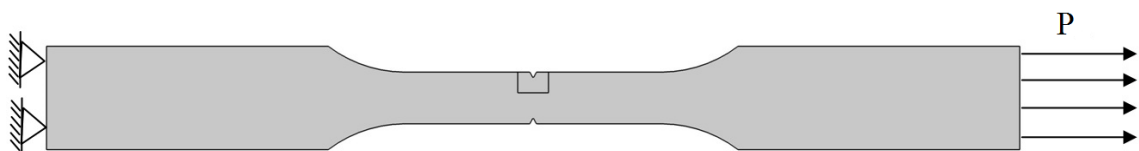
Dane wejściowe do algorytmu obliczeniowego muszą zawierać informację o charakterystykach zmęczeniowych, cyklicznych właściwościach materiałowych i cyklicznej granicy plastyczności R_e' . Konieczna jest także znajomość liczby cykli do inicjacji pęknięcia, która jest przyjmowana jako kryterium zniszczenia.

9.2. Analiza naprężeń z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych

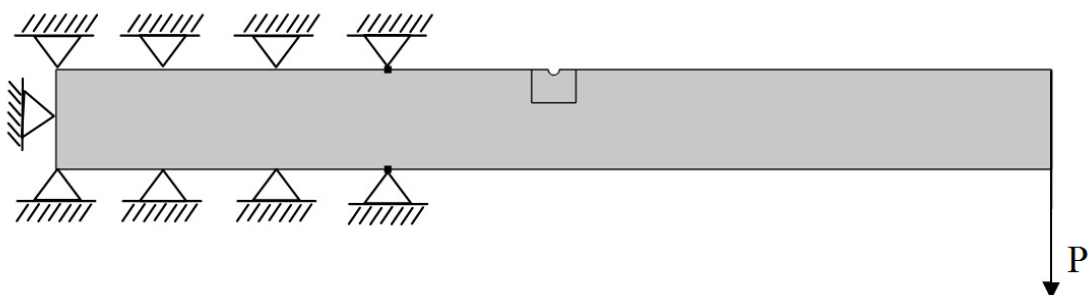
Obliczenie efektywnych naprężeń w elementach z karbem wymaga zastosowania MES [4], [48], [110]. Analityczne zależności mogą być stosowane do obliczenia maksymalnych naprężeń w dnie karbu, jednak wyniki można w łatwy sposób uzyskać jedynie w zakresie sprężystym, a w zakresie sprężysto-plastycznym wymagane są bardziej rozbudowane zależności [29]. Wyznaczenie maksymalnych naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym może być uzyskane przez bezpośrednie zastosowanie modeli plastyczności, jednak w tym przypadku konieczna jest znajomość odkształceń. Odkształcenia te powinny być zmierzone za pomocą tensometrów lub metod elastooptycznych. Pomiar odkształceń metodą tensometryczną można przeprowadzić jedynie w wybranych punktach, co powoduje ograniczenie w wyznaczeniu pola odkształceń w pożądanym obszarze. Skutecznym i wygodnym jest w tej sytuacji zastosowanie MES, która już powszechnie jest stosowana w przemyśle i nauce. Metoda ta pozwala na wyznaczenie naprężeń w elementach o dowolnych kształtach i rozmiarach, a także do obliczeń w zakresie sprężysto-plastycznym. Wyniki otrzymane z analizy MES przedstawiają warstwicę naprężeń lub odkształceń w całym elemencie. Wraz ze wzrostem możliwości obliczeniowej współczesnych komputerów, możliwe jest wykonanie obliczeń dla coraz to większej ilości węzłów i elementów skończonych oraz z coraz to większą dokładnością odzwierciedlającą nieliniowe właściwości materiałowe. Konieczność zagęszczenia siatki w miejscach spiętrzenia naprężeń oraz zastosowanie modelu wieloliniowego umocnienia jest więc możliwe do uzyskania, ale wymaga dużej mocy obliczeniowej, co ma wpływ na czas obliczeń. Na potrzeby prezentowanej metody, wykonano obliczenia MES przyjmując płaski stan odkształcenia (PSO). Obliczenia na

pełnym modelu w postaci bryły, w połączeniu z zagęszczoną siatką oraz obliczeniami w zakresie sprężysto-plastycznymi z modelem wieloliniowego umocnienia są bardzo długotrwałe. Biorąc pod uwagę wieloosiowy stan naprężenia w karbie oraz grubości próbek, które w porównaniu do pozostałych wymiarów były znaczące, zdecydowano na wykonanie obliczeń przyjmując PSO. W dnie karbu panuje trójosiowy stan naprężenia, a przyjęcie PSO powoduje uzyskanie trzeciej składowej naprężenia σ_{zz} . Wykonano także obliczenia dla płaskiego stanu naprężenia (PSN) uzyskując w ten sposób większe wartości naprężenia zredukowanego według hipotezy H-M-H i większe wartości składowych σ_{xx} i σ_{yy} . Obliczenia testowe wykonane na modelu bryłowym wskazały na lepszą zbieżność wyników z analizą wykonaną dla PSO.

Płaski model numeryczny został utwierdzony w sposób odzwierciedlający zamocowanie próbki w uchwycie maszyny zmęczeniowej. Obciążenie zrealizowano zakładając działanie siły na skrajnej prawej części modelu (rys. 9.2 i 9.3). W modelu numerycznym zdefiniowano dodatkowy obszar w okolicy karbu w celu większego zagęszczenia siatki i możliwości analizy wyników tylko w tej części modelu. W przypadku próbek zginanych (rys. 9.3), wartość siły obciążającej P przyjęto w taki sposób, aby wywołany moment zginający w środkowej części próbki, był równy momentowi zginającemu działającemu podczas badań eksperymentalnych. Uwzględniono w ten sposób ramię dźwigni maszyny zmęczeniowej o długości 200 mm.



Rys. 9.2. Warunki utwierdzenia i obciążenia modelu numerycznego poddanego rozciąganiu



Rys. 9.3. Warunki utwierdzenia i obciążenia modelu numerycznego poddanego zginaniu

9. Nielokalna metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie badań własnych

Jednym z założeń w prezentowanej metodzie było wykorzystanie procedury programowania w środowisku MATLAB-COMSOL, w której za pomocą odpowiednich poleceń możliwe było modelowanie wszystkich ustawień analizy MES, w szczególności geometrii próbki, siatki elementów skończonych, właściwości materiałowych oraz obciążenia. Pozwoliło to na wykonanie obliczeń z poziomu programowanego skryptu, który umożliwia wykonanie wszystkich punktów algorytmu obliczeniowego.

Przed wykonaniem obliczeń MES, zbadano wpływ rodzaju i zagęszczenia siatki na wartości obliczonych naprężeń. W tabeli 9.1 i 9.2 zamieszczono wyniki uzyskanych wartości naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H σ_{H-M-H} , naprężeń normalnych σ_{xx} oraz efektywnych odkształceń plastycznych ε_{ef}^P .

Tabela 9.1. Wyniki analizy MES dla próbki z korbem ze stali 42CrMo4+QT, $R = 1$ mm obciążonej siłą $P = 322$ N

Nr. analizy	Rodzaj siatki	Metoda zagęszczenia siatki	Minimalny rozmiar elementu, mm	σ_{H-M-H} , MPa	σ_{xx} , MPa	ε_{ef}^P , -
1	Prostokątna	Ręczne	0,02	859,6	859,4	0,000636
2	Prostokątna	Ręczne	0,05	859,4	859,9	0,000636
3	Prostokątna	Ręczne	0,1	860	861,9	0,000640
4	Prostokątna	Ręczne	0,2	861,8	869,5	0,000650
5	Prostokątna	Automatyczne, maksymalnie zagęszczone	0,25	861,9	868,9	0,000651
6	Trójkątna	Ręczne	0,02	859,5	859,2	0,000636
7	Trójkątna	Ręczne	0,05	859,5	859,3	0,000635
8	Trójkątna	Ręczne	0,1	861	861,1	0,000634
9	Trójkątna	Ręczne	0,2	862,2	858,5	0,000630
10	Trójkątna	Automatyczne, maksymalnie zagęszczone	0,25	862,3	857,3	0,000629

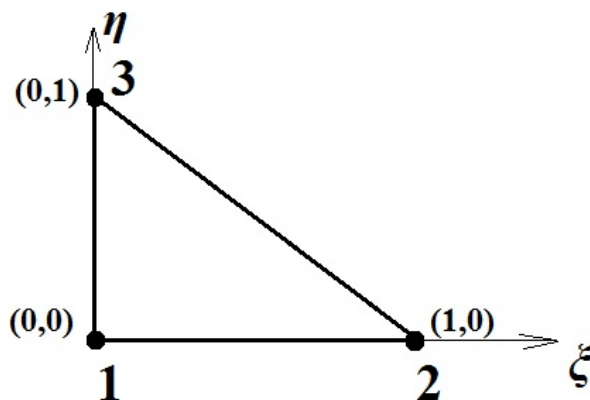
Tabela 9.2. Wyniki analizy MES dla próbki z karbem ze stali EA4T, $R = 0,2$ mm obciążonej siłą $P = 16$ kN

Nr analizy	Rodzaj siatki	Metoda zagęszczenia siatki	Minimalny rozmiar elementu, mm	σ_{H-M-H} , MPa	σ_{xx} , MPa	ε_{ef}^p , -
1	Prostokątna	Ręczne	0,002	544	557,6	0,0105
2	Prostokątna	Ręczne	0,005	544	557,6	0,0105
3	Prostokątna	Ręczne	0,01	544	557,6	0,0105
4	Prostokątna	Ręczne	0,05	540,5	557,7	0,0105
5	Prostokątna	Automatyczne, maksymalnie zagęszczone	0,003	542,3	556	0,0105
6	Trójkątna	Ręczne	0,002	541,2	557,9	0,0103
7	Trójkątna	Ręczne	0,005	542	557,9	0,0103
8	Trójkątna	Ręczne	0,01	542	558	0,0103
9	Trójkątna	Ręczne	0,05	540,9	558	0,0103
10	Trójkątna	Automatyczne, maksymalnie zagęszczone	0,003	542,2	554,7	0,0106

W rezultacie, w celu zapewnienia powtarzalności obliczeń przyjęto rozmiar siatki zdefiniowany jako maksymalnie zagęszczona (extremely fine), co nie wpłynęło znacząco na wartości uzyskiwanych naprężeń i na czas obliczeń. W obliczeniach zastosowano siatkę trójkątną z trzema węzłami (rys. 9.4), której funkcje kształtu są opisane zależnościami

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta, \\ N_2 &= \xi, \\ N_3 &= \eta, \end{aligned} \tag{9.1}$$

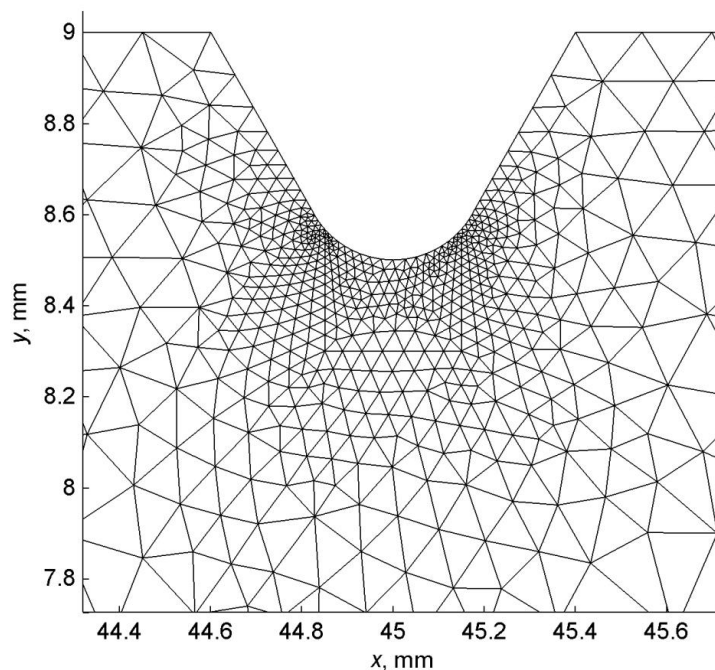
gdzie: η – lokalna współrzędna pionowa, ξ – lokalna współrzędna pozioma.



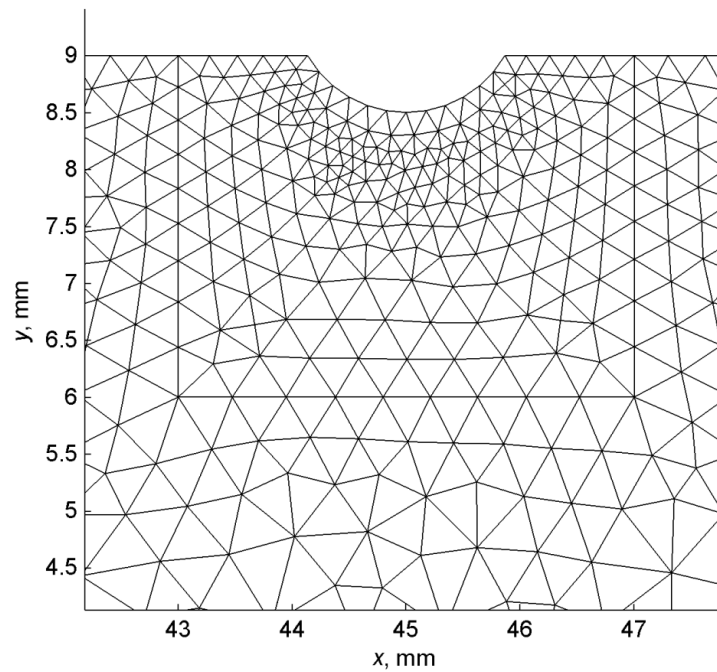
Rys. 9.4. Trójkątny element skończony użyty w analizie MES

Zastosowaną siatkę elementów skończonych przedstawiono na rys. 9.5 i 9.6.

Algorytmy generacji siatki w programie COMSOL umożliwiają otrzymanie optymalnego poziomu jej rozmiaru, przez co można uniknąć ręcznego ustawienia rozmiaru i gradacji siatki, który musiałby być ustawiony w zdefiniowanych obszarach w okolicy karbu. Jest to szczególnie widoczne w przypadku modeli o małym promieniu karbu, gdzie zastosowane duże zagęszczenie siatki nie wpływa na otrzymane wyniki.

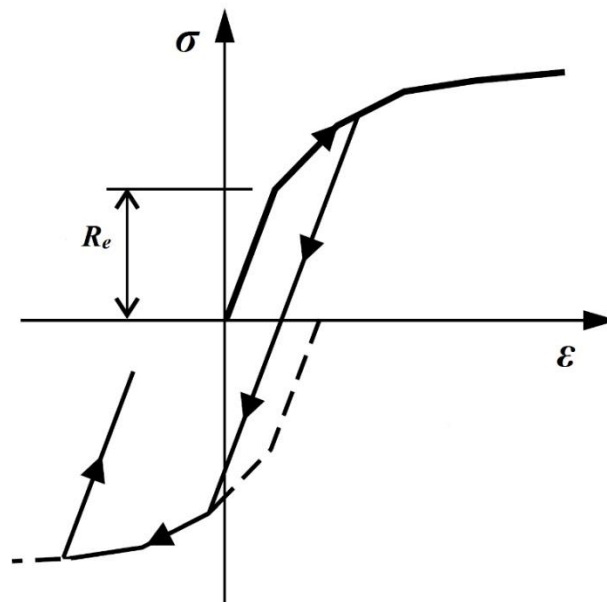


Rys. 9.5. Rozmiar i gradacja siatki elementów skończonych dla próbki z karbem o promieniu $R = 0,2$ mm



Rys. 9.6. Rozmiar i gradacja siatki elementów skończonych dla próbki z karbem o promieniu $R = 1$ mm

Do analizy nieliniowej MES przyjęto model wieloliniowego izotropowego umocnienia (rys. 9.7).



Rys. 9.7. Wieloliniowe izotropowe umocnienie [80]

Obliczenia dokonano w pierwszej ćwiartce obciążenia (rozciąganie) zadając liniowy przyrost siły. Cykliczne właściwości materiałowe opisane funkcją ciągłą zastąpiono kilkoma modułami plastyczności, których wartości przyrastały, co 50 lub 100 MPa. Cykliczną granicę plastyczności przyjęto jako wartość, dla której pojawiały się odkształcenia plastyczne bazując na relacji σ - ε , dla liniowo-sprężystych i cyklicznych właściwościach materiałowych. Dla stali EA4T cykliczna granica plastyczności wynosi 200 MPa, a dla stali 42CrMo4+QT, 600 MPa.

Jako warunek plastyczności przyjęto kryterium naprężenia redukowanego według hipotezy H-M-H w postaci

$$\sigma_{H-M-H} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sqrt{3J_2}, \quad (9.2)$$

gdzie: $\mathbf{s} : \mathbf{s}$ oznacza iloczyn skalarny tensorów II rzędu (dewiatorów naprężenia),

$$\mathbf{s} : \mathbf{s} = s_{xx} \cdot s_{xx} + s_{yy} \cdot s_{yy} + s_{zz} \cdot s_{zz} + 2 \cdot s_{xy} \cdot s_{xy} + 2 \cdot s_{xz} \cdot s_{xz} + 2 \cdot s_{yz} \cdot s_{yz}, \quad (9.3)$$

który może być także zapisany w notacji sumacyjnej Einsteina w postaci,

$$s_{ij} s_{ij} = s_{xx} \cdot s_{xx} + s_{yy} \cdot s_{yy} + s_{zz} \cdot s_{zz} + 2 \cdot s_{xy} \cdot s_{xy} + 2 \cdot s_{xz} \cdot s_{xz} + 2 \cdot s_{yz} \cdot s_{yz}, \quad (9.4)$$

gdzie: J_2 – drugi niezmiennik tensora naprężenia, \mathbf{s} – dewiator tensora naprężenia, który można także zapisać przez

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) \mathbf{I}, \quad (9.5)$$

gdzie, \mathbf{I} oznacza macierz jednostkową,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.6)$$

lub w zapisie wykorzystując deltę Kroneckera

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Człon w równaniu (9.5)

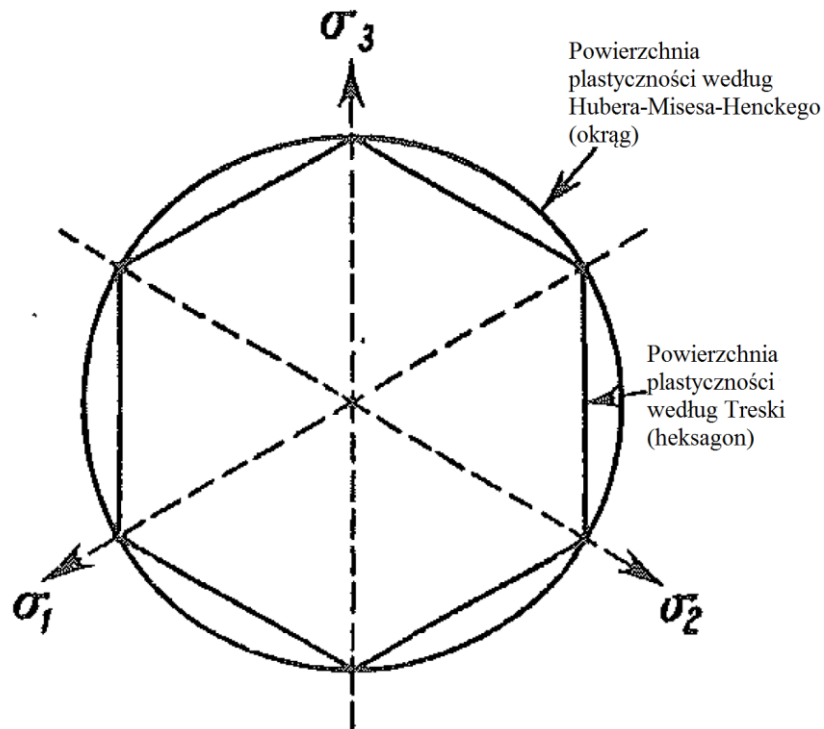
$$\frac{1}{3} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \quad (9.8)$$

to naprężenie hydrostatyczne σ_H odpowiedzialne za zmianę objętości ciała.

Powierzchnia plastyczności F_y zgodna z kryterium H-M-H (rys. 9.8) jest opisana zależnością

$$F_y = \frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \sigma_e^2, \quad (9.9)$$

gdzie, σ_e – promień powierzchni plastyczności odpowiadający granicy plastyczności.



Rys. 9.8. Powierzchnia plastyczności H-M-H i Treski [29]

W obliczeniach wykorzystano prawo plastycznego płynięcia [29]

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial Q_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (9.10)$$

gdzie: Q_p – potencjał plastyczności, λ – mnożnik plastyczności (dodatnia stała plastyczności), $\boldsymbol{\sigma}$ – tensor naprężenia.

Prawo plastycznego płynięcia wynika z przyjęcia założenia poszukiwania maksymalnej wartości funkcji potencjału plastyczności

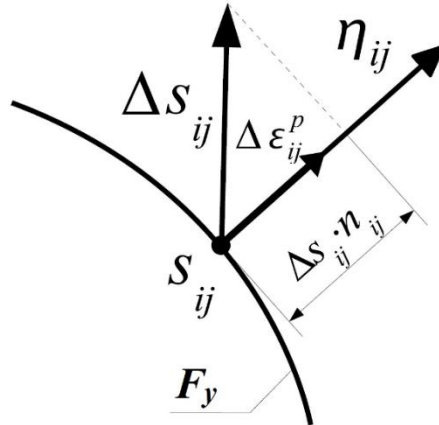
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p - d\lambda Q_p) = 0. \quad (9.11)$$

Jeśli powierzchnia plastyczności F_y oraz potencjał plastyczności Q_p są zbieżne, czyli $Q_p = F_y$, to można zastosować stowarzyszone (normalne) prawo płynięcia w postaci

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial F_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (9.12)$$

W przeprowadzonych w pracy nieliniowych obliczeniach MES, wykorzystano stowarzyszone prawo płynięcia, w którym zakłada się, że kierunek przyrostu odkształceń

plastycznych jest prostopadły do powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń głównych (rys. 9.9).



Rys. 9.9. Stowarzyszone prawo płynięcia [33]

W modelu numerycznym założono model dużych odkształceń plastycznych, który bazuje na rozdzieleniu całkowitych odkształceń na część sprężystą i plastyczną.

Jeśli deformacje są duże, należy uwzględnić nieliniowy efekt zmiany geometrii i naprężeń. Do miary odkształceń w dużych deformacjach używa się tensora odkształcenia Greena-Lagrangea. W jednoosiowym rozciąganiu duże odkształcenia są równe

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2, \quad (9.13)$$

czyli odkształcenia inżynierskie uzupełniono o człon kwadratowy.

W wykorzystanym do obliczeń MES programie COMSOL, zastosowano model dużych odkształceń plastycznych [16], [20], [32]. Program ten na podstawie obliczonych przemieszczeń dokonuje obliczenia odkształceń, stosując dekompozycję tensora całkowitego gradientu deformacji \mathbf{F} na część sprężystą i plastyczną

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s \mathbf{F}_p. \quad (9.14)$$

Gradient deformacji plastycznej \mathbf{F}_p jest zależny od przyjętego prawa plastycznego płynięcia, powierzchni plastyczności i potencjału plastyczności. Wykorzystując gradient deformacji możliwe jest zastosowanie prawego tensora deformacji Cauchy-Greena w postaci

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (9.15)$$

Tensor Greena-Lagrangea opisujący duże odkształcenia ma więc postać

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (9.16)$$

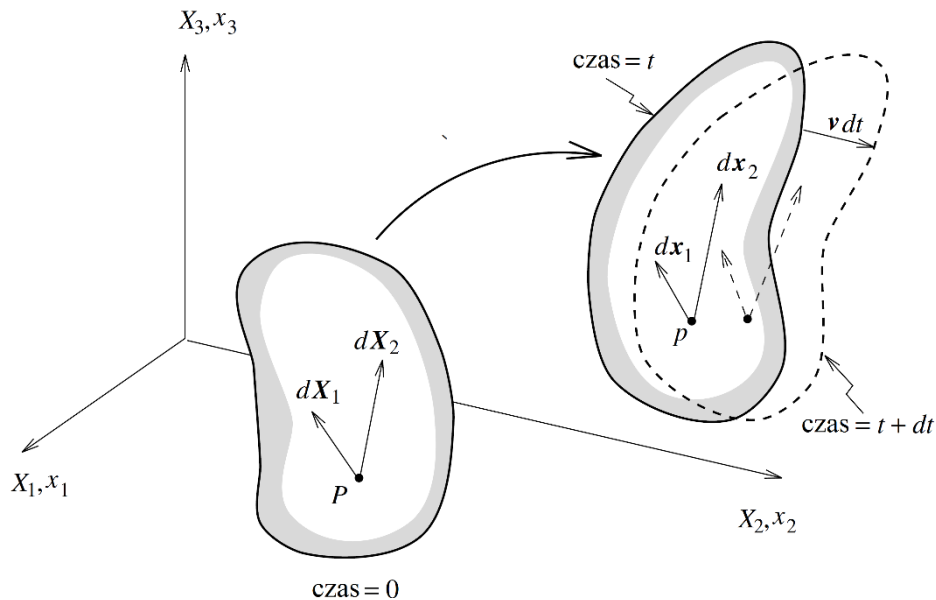
Odształcenia Greena-Lagrangea są oparte o konfigurację materiałową, czyli stałe punkty materiałowe, których układ współrzędnych zmienia się w czasie. Ruch jest więc opisywany przez współrzędne materiałowe i czas. Model ten jest użyteczny do modeli konstytutywnych i jest szeroko stosowany w mechanice brył w przeciwieństwie do modelu odształceń Eulera.

Gradient deformacji \mathbf{F} zawiera wszelkie informacje o lokalnych odształceniach i rotacjach. Jeśli po odształceniu zmienia się długość i kierunek wektora $d\mathbf{x}$ łączącego dwa punkty w elemencie zdeformowanym, to obliczenia długości wektora $d\mathbf{x}$ można dokonać stosując zależność

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (9.17)$$

gdzie: \mathbf{X} – wektor określający położenie punktów przed deformacją, \mathbf{x} – wektor określający położenie punktów po deformacji, $d\mathbf{X}$ – wektor łączący dwa punkty w ciała przed deformacją.

Zasadę obrazującą gradient deformacji przedstawiono na rys. 9.10.



Rys. 9.10. Miara szybkości deformacji [14]

Gradient deformacji \mathbf{F} jest zapisywany w postaci macierzy, jako pochodna cząstkowa każdej funkcji ruchu w opisie materialnym względem współrzędnej w opisie materialnym

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Przemieszczenie \mathbf{u} każdego punktu może być zdefiniowane jako

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (9.19)$$

a więc

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}. \quad (9.20)$$

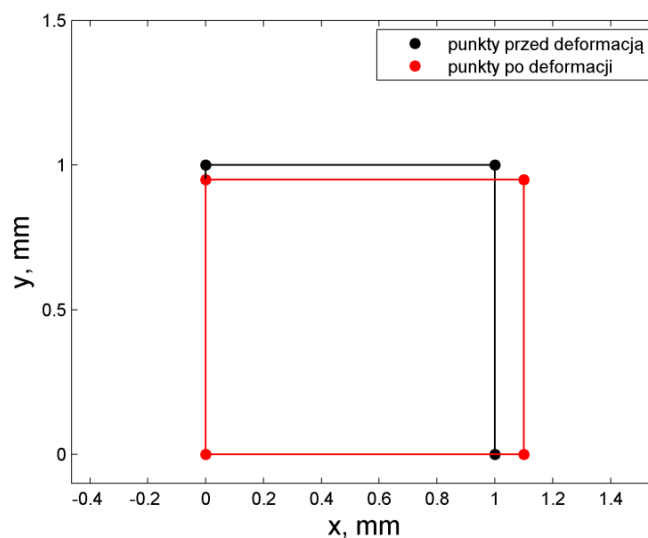
Wtedy gradient deformacji \mathbf{F} można zapisać

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (9.21)$$

Wyznaczenie gradientu deformacji wymaga więc znajomości położenia punktów przed deformacją oraz znajomości funkcji opisującej przemieszczenie tych punktów po deformacji. Wartości te mogą być obliczone na podstawie analizy MES, gdzie wyznaczane są przemieszczenia poszczególnych węzłów elementów skończonych.

Przykładowo dla prostokątnego elementu skończonego o wymiarach 1x1mm (rys. 9.11), który po obciążeniu uległ wydłużeniu o 10% oraz przewężeniu o 5 % równania przemieszczeń wszystkich punktów narożnych (węzłów) w układzie osi x, y mają postać:

$$\begin{aligned} x &= 1,1 \cdot X + 0 \cdot Y, \\ y &= 0 \cdot X + 0,95 \cdot Y. \end{aligned} \quad (9.22)$$



Rys. 9.11. Przykład przemieszczenia punktów elementu czworokątnego

Tensor gradientu deformacji \mathbf{F} dla przykładu z rys. 9.11 wynosi

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0 & 0,95 \end{bmatrix}, \quad (9.23)$$

a odkształcenia mają wartość

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0,105 & 0 \\ 0 & -0,0488 \end{bmatrix}, \quad (9.24)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,105 \\ -0,0488 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.25)$$

Relacja pomiędzy odkształceniami sprężystymi i plastycznymi dla dużych odkształceń, obliczona jest przy zastosowaniu sprężystego i plastycznego tensora odkształceń Greena-Lagrangea w postaci

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{F}_p^{-T} \frac{\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p}{\mathbf{F}_p^{-1}}. \quad (9.26)$$

Wykorzystując zarówno sprężysty i plastyczny gradient deformacji, sprężysty tensor odkształcenia Greena-Lagrangea wynosi

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_s - \mathbf{I}), \quad (9.27)$$

a odkształceniowy tensor plastyczny

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{I}). \quad (9.28)$$

Często stosowaną miarą odkształceń plastycznych są efektywne odkształcenie plastyczne

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p_{ef} = \sqrt{\frac{2}{3}} d\boldsymbol{\varepsilon}_p : d\boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (9.29)$$

W modelu dużych odkształceń efektywne odkształcenia plastyczne są obliczane jako rzeczywiste efektywne odkształcenia plastyczne zwane także odkształceniami Henckego lub logarytmicznymi.

W prowadzonych obliczeniach plastycznych, to znaczy po przekroczeniu powierzchni plastyczności ($F_y \geq 0$), prawo plastycznego płynięcia, jest razem z warunkiem

dotyczącym mnożnika plastyczności, obliczane jako nieliniowe równanie za pomocą tłumionej metody Newtona

$$-\frac{1}{2} \mathbf{F} (2\mathbf{M}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}_{\Delta t_{i-1}} \mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{M}_{\Delta t_{i-1}}^T) = \lambda \Delta t_i \frac{\partial Q_p}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{M}^T, \quad (9.30)$$

gdzie, \mathbf{M} – odwrotny tensor plastycznego gradientu deformacji, czyli

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_p^{-1}. \quad (9.31)$$

Obliczenie wartości w macierzy \mathbf{M} , powoduje, że możliwe jest obliczenie odkształceń plastycznych, poprzez znajomość plastycznego gradientu odkształceń \mathbf{F}_p .

Ogólną zasadą obliczeń nieliniowych jest, że obliczenia MES dokonywane w zakresie sprężysto-plastycznym są wykonywane iteracyjnie. Program obliczeniowy, stosując przyrost obciążenia dokonuje sprawdzenia, czy w poszczególnych elementach skończonych nastąpiło przekroczenie warunku plastyczności. Jeśli obliczona wartość warunku plastyczności F_y jest większa lub równa zero, oznacza to, że w danym elemencie nastąpiło uplastycznienie. W każdym kroku obciążenia, obliczane są przemieszczenia dla poszczególnych punktów Gaussa elementu skończonego, a następnie obliczane są wartości odkształceń i naprężeń wykorzystując macierze sztywności elementu \mathbf{K} , macierzy odkształceń (pochodnych funkcji kształtu) \mathbf{B} , macierz materiałową (konstrytutywną – liniową lub plastyczną) \mathbf{D} :

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f}_i, \quad (9.32)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_i, \quad (9.33)$$

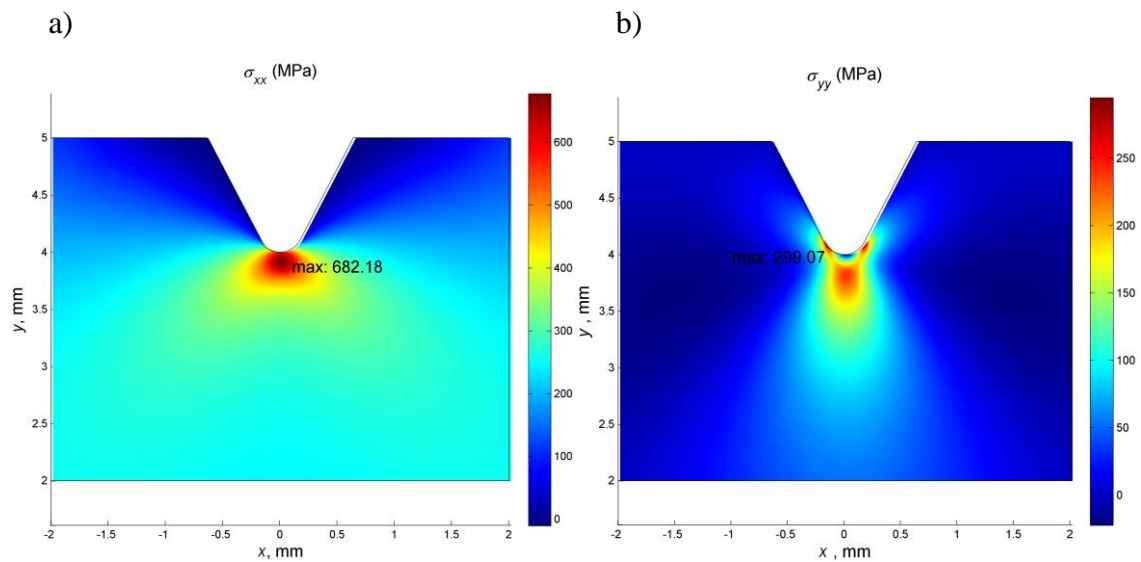
$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (9.34)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_i, \quad (9.35)$$

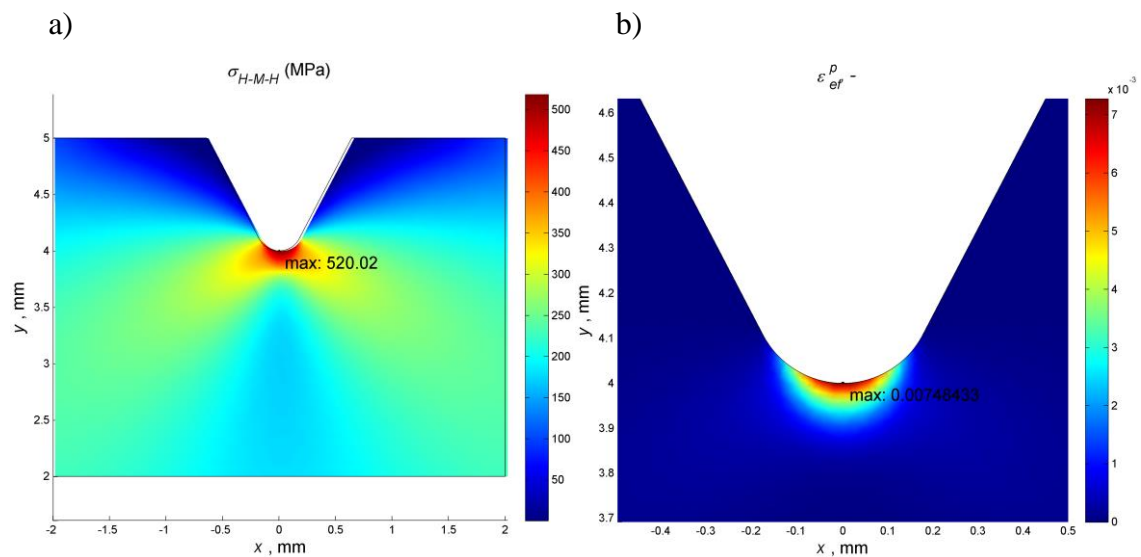
gdzie: i – oznacza kolejny krok obliczeniowy.

Każdy kolejny proces obliczeniowy jest kontrolowany przez zbieżność (convergence), która zapewnia przy ustawionej wartości tolerancji, aby naprężenie zastępcze było możliwie blisko naprężenia kryterialnego związanego w warunkiem plastyczności, czyli aby wartość obliczanego parametru F_y było możliwie niewiele powyżej wartości zero.

Przykładowe wyniki analizy MES dla rozciąganych próbek z karbem ($\sigma_{nom} = 286$ MPa) ze stali EA4T o promieniu karbu $R = 0,2$ mm przedstawiono na rys. 9.12 i 9.13.

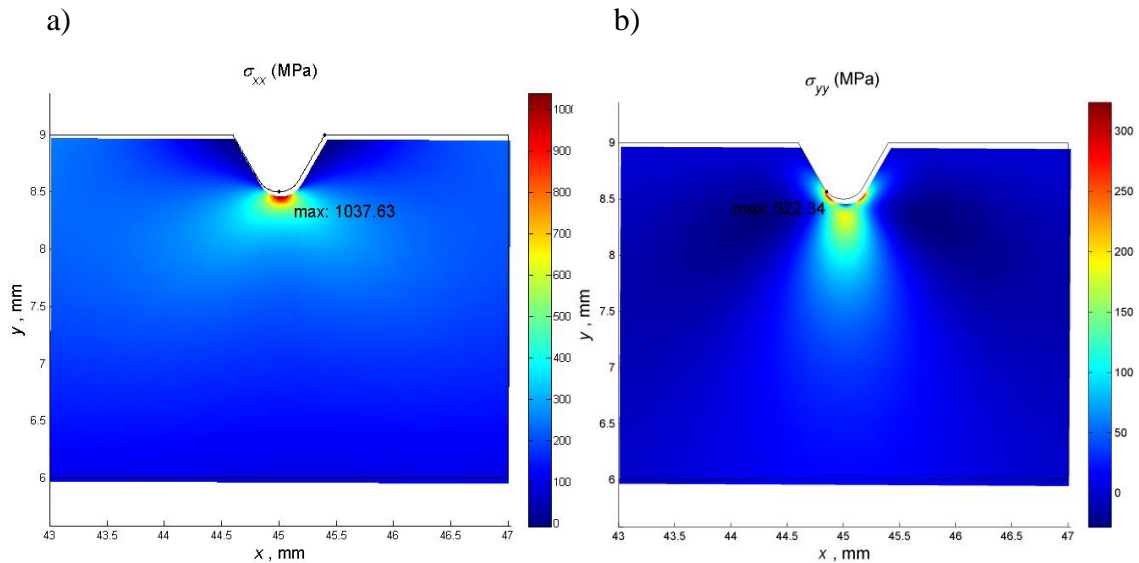


Rys. 9.12. Naprężenia w elemencie z karbem ze stali EA4T, a) σ_{xx} , b) σ_{yy}

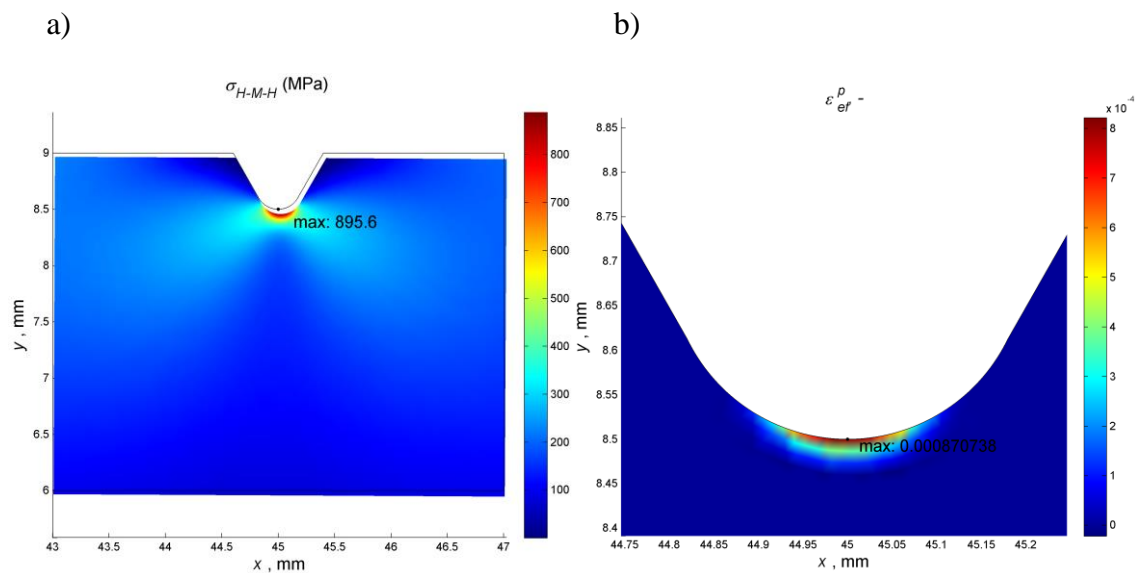


Rys. 9.13. Naprężenia i efektywne odkształcenia plastyczne w elemencie z karbem ze stali EA4T, a) σ_{H-M-H} , b) ε_{ef}^P

Przykładowe wyniki analizy MES dla zginanych próbek z karbem ($\sigma_{nom} = 312$ MPa) ze stali 42CrMo4+QT o promieniu karbu $R = 0,2$ mm przedstawiono na rys. 9.14 i 9.15.



Rys. 9.14. Naprężenia w elemencie z karbem ze stali 42CrMo4+QT, a) σ_{xx} , b) σ_{yy}

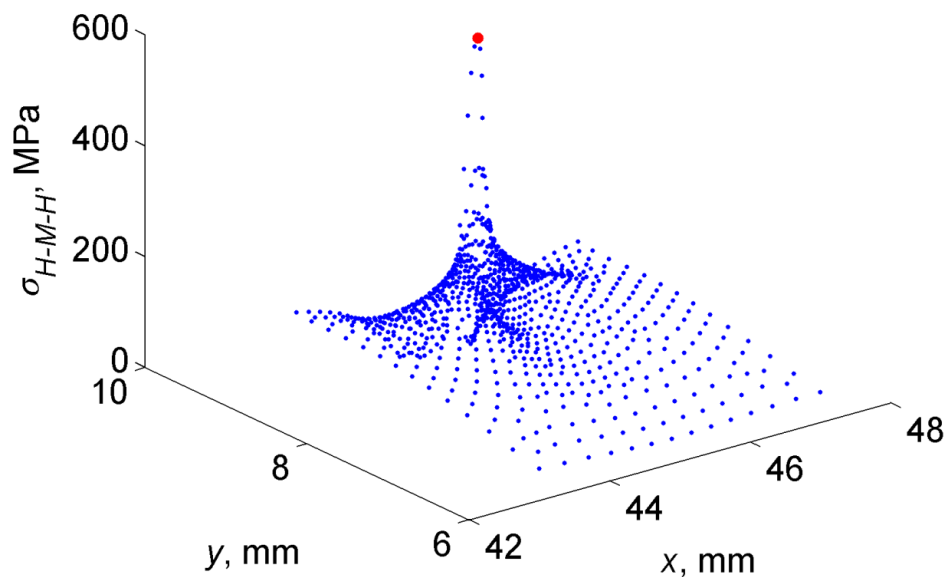


Rys. 9.15. Naprężenia i efektywne odkształcenia plastyczne w elemencie z karbem ze stali 42CrMo4+QT, a) σ_{H-M-H} , b) ε_{ef}^P

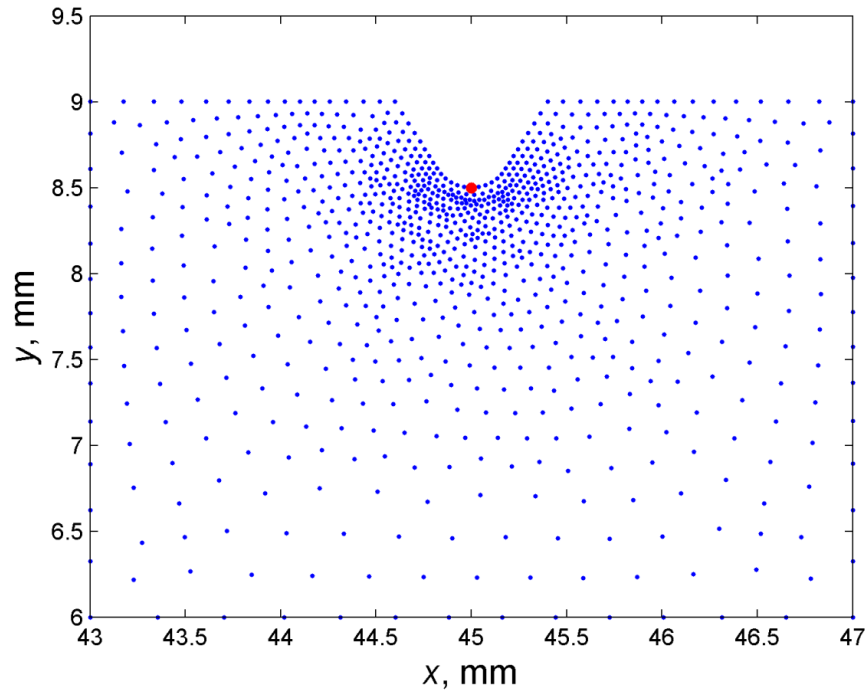
9.3. Obliczenie położenia płaszczyzny krytycznej

Bazując na obliczeniach MES, wykonywane były dalsze obliczenia zgodnie z algorytmem metody. Kolejnym etapem było wczytanie danych z obliczeń MES zawierających współrzędne węzłów elementów skończonych oraz wartości naprężeń im odpowiadających. W dalszej analizie istotnymi wielkościami są naprężenia σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , σ_{H-M-H} . Ponieważ w karbie panuje wieloosiowy stan naprężenia, powszechnie stosowanym i uznanym parametrem opisującym w sposób ekwiwalentny wyężenie jest naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera-Misesa-Henckego. Naprężenie to jest

także często stosowane w praktyce inżynierskiej, jako kryterium redukujące wieloosiowy stan naprężenia do stanu ekwiwalentnego. W punkcie, w którym działa największe naprężenie H-M-H, można mówić o wieloosiowym stanie naprężenia, w którym kierunek działania naprężenia stycznego może być zgodny z płaszczyznami poślizgu poszczególnych kryształów. Zatem przyjęto, że punkt na powierzchni w dnie karbu, w którym działa największa wartość naprężenia H-M-H, jest punktem, w którym nastąpić może zainicjowanie pęknięcia zmęczeniowego. Jest to tak zwany punkt krytyczny (punkt bazowy), od wyznaczenia którego rozpoczynają się obliczenia nielokalne. Położenie tego punktu pokrywa się z miejscem, w którym inicjuje się pęknięcie i który znajduje się na środku dna karbu. Wyszukanie tego punktu zrealizowano poprzez sprawdzenie wszystkich wartości naprężenia σ_{H-M-H} w węzłach znajdujących się na powierzchni dna karbu. W ten sposób wyznaczono punkt krytyczny, który pośród węzłów elementów skończonych oznaczony jest kolorem czerwonym na rys. 9.16 i 9.17.



Rys. 9.16. Położenie węzłów z modelu MES z zaznaczonym punktem o największym naprężeniu H-M-H



Rys. 9.17. Położenie węzłów z modelu MES w układzie osi x i y , z zaznaczonym punktem o największym naprężeniu H-M-H

Przyjmuje się, że zainicjowane pęknięcie powinno propagować następnie w kierunku wyznaczonym przez położenie płaszczyzny krytycznej, powodując otwieranie płaszczyzn pęknięcia. Zastosowanie idei płaszczyzny krytycznej [36], [53], [54], [64] ma na celu redukcję wieloosiowego stanu naprężenia do stanu ekwiwalentnego. Zatem położenie płaszczyzny krytycznej jest obliczane dla wybranych wartości składowych tensora naprężeń w punkcie na powierzchni, gdzie występuje największe naprężenie zredukowane według hipotezy H-M-H. W tym punkcie następuje obliczenie kąta definiującego położenie płaszczyzny krytycznej. Obliczenie dokonywane jest zgodnie z zależnością

$$\sigma_n = n_i \cdot n_j \cdot \sigma_{ij}, \quad (9.36)$$

lub stosując zapis wektorowy

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (9.37)$$

gdzie: \mathbf{n} to wektor o składowych:

$\mathbf{n} = [\cos \alpha, \sin \alpha, 0]$, i, j - indeks tensorowy, $i, j = (x, y, z)$ - składowe wektora jednostkowego normalnego do płaszczyzny krytycznej.

Wartość naprężenia normalnego σ_n po rozpisaniu na trzy składowe naprężenia w układzie płaskim ma postać

$$\sigma_n = \cos^2 \alpha \cdot \sigma_{xx} + \sin^2 \alpha \cdot \sigma_{yy} + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \tau_{xy}, \quad (9.38)$$

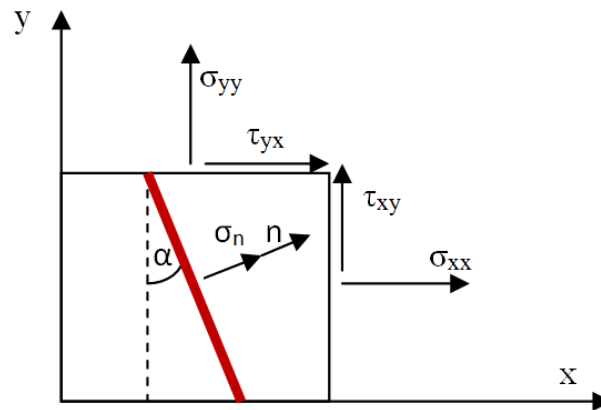
a stosując tożsamość trygonometryczną podwójnego argumentu sinusa i cosinusa w postaci

$$2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \sin 2\alpha, \quad (9.39)$$

otrzymuje się

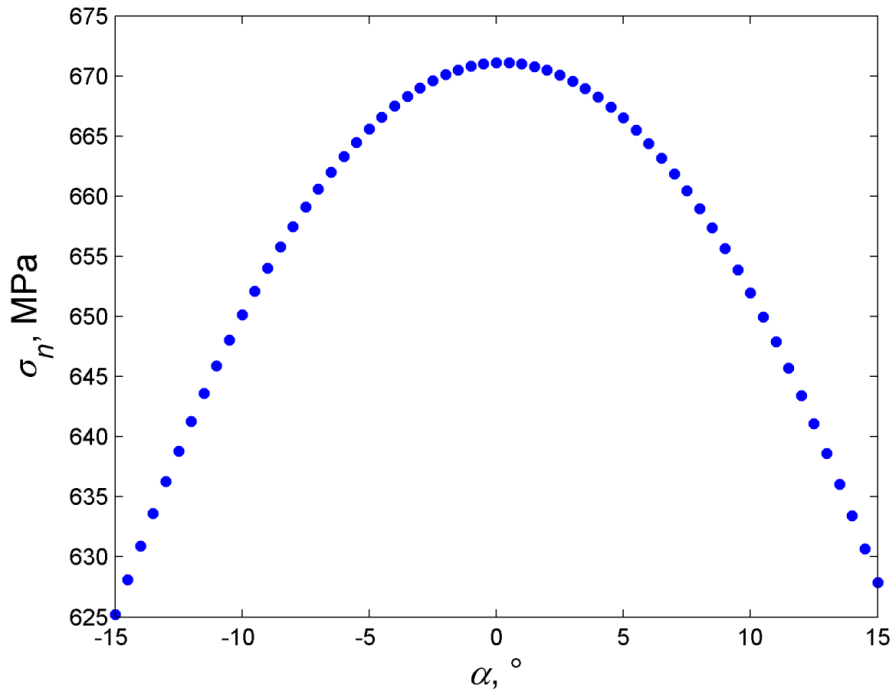
$$\sigma_n = \cos^2 \alpha \cdot \sigma_{xx} + \sin^2 \alpha \cdot \sigma_{yy} + \sin 2\alpha \cdot \tau_{xy}. \quad (9.40)$$

Graficzne przedstawienie naprężenia normalnego σ_n w płaszczyźnie o nachyleniu pod kątem α do osi prostopadłej do kierunku naprężenia σ_{xx} przedstawiono na rys. 9.18.



Rys. 9.18. Graficzne przedstawienie naprężenia w dowolnej płaszczyźnie o normalnej \mathbf{n}

Poszukiwania wartości kąta α można przeprowadzić poprzez iteracyjne obliczenia naprężenia normalnego σ_n w pętli obliczeniowej (rys. 9.19). Kąt α , dla którego wartość naprężenia normalnego przyjmuje największą wartość, jest kątem definiującym położenie (nachylenie) płaszczyzny krytycznej.

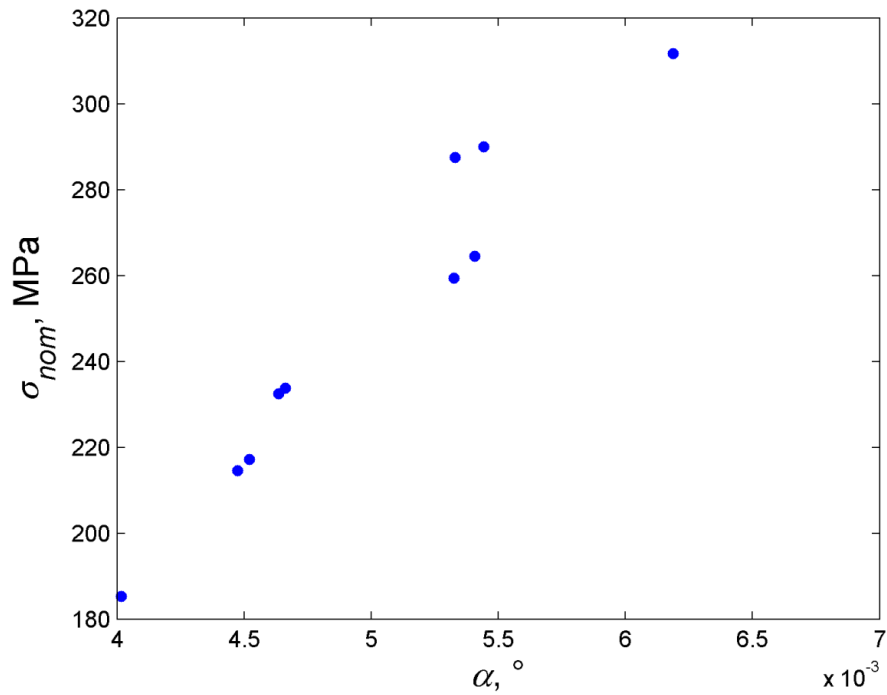


Rys. 9.19. Iteracyjne obliczenie położenia płaszczyzny krytycznej

W płaskim stanie naprężenia lub odkształcenia, poszukiwanie położenia płaszczyzny, w której występuje maksymalne naprężenie normalne σ_n , można także przeprowadzić przez rozwiązanie równania różniczkowego, którego wynik powinien być z niewielkim błędem bliski wartości zero. Jest to poszukiwanie minimum funkcji zgodnie z zależnością

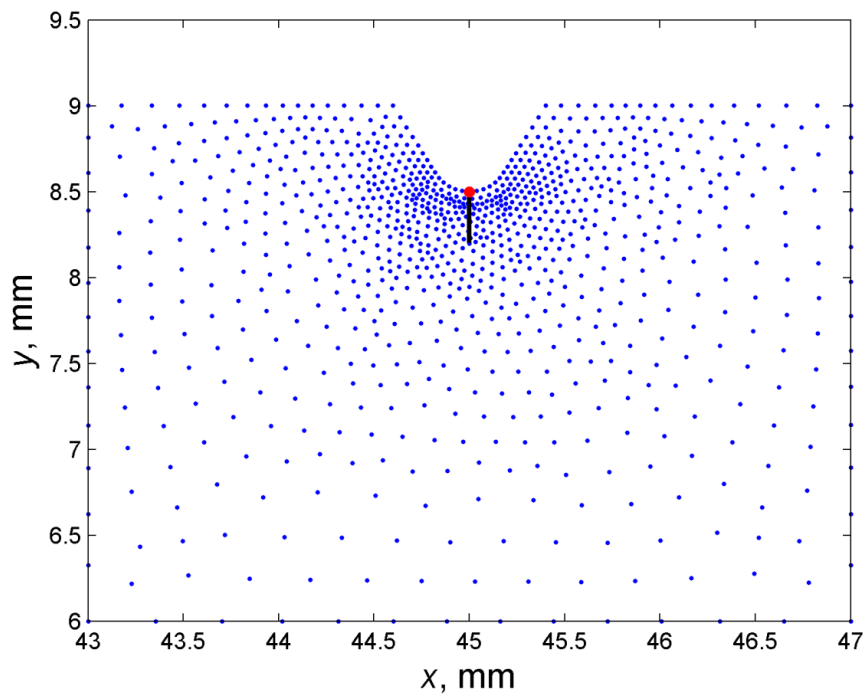
$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = -\sin 2\alpha \cdot \sigma_{xx} + \sin 2\alpha \cdot \sigma_{yy} + \cos 2\alpha \cdot 2\tau_{xy}. \quad (9.41)$$

Dla analizowanych przypadków rozciągania-ściskania i cyklicznego wahadłowego zginania, położenia płaszczyzn krytycznych obliczanych iteracyjnie zawierały się w zakresie $-0,5 \div 0,5^\circ$. Płaszczyzny krytyczne dla poszczególnych poziomów obciążeń σ_{nom} obliczone z równania (9.41), dla wartości bliskiej 0° , dla badań stali 42CrMo4+QT i promienia $R = 0,2$ mm przedstawiono na rys. 9.20.



Rys. 9.20. Obliczenie położenia płaszczyzny krytycznej z równania pochodnej

W obliczeniach iteracyjnych przyjęto przyrost kąta co $0,5^\circ$. Przykładowe położenie płaszczyzny krytycznej (czarna linia) o początku w punkcie bazowym (czerwony punkt) dla zginanej próbki z karbem o promieniu $R = 0,2$ mm przedstawiono na rys. 9.21.

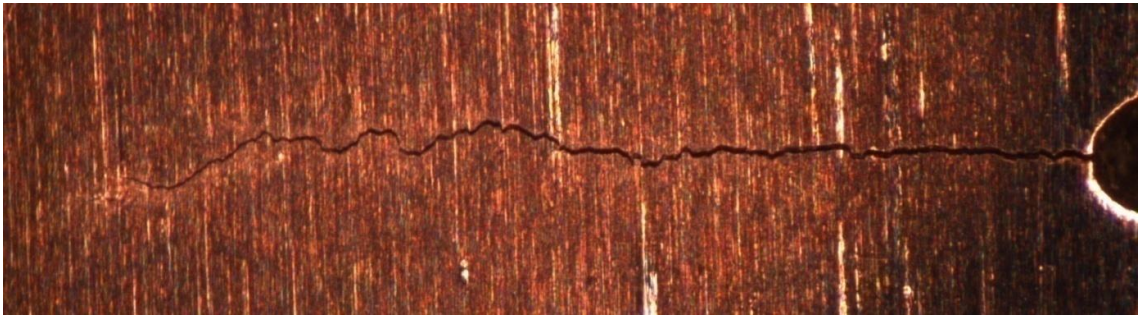


Rys. 9.21. Przykładowe położenie płaszczyzny krytycznej

W większości przypadków kąt określający położenie płaszczyzny krytycznej przyjmował wartość 0° lub $0,5^\circ$. Powodowało to sytuację, w której decydującym naprężeniem było naprężenie osiowe σ_{xx} . Jednak w przypadku złożonego stanu obciążenia, zastosowanie koncepcji płaszczyzny krytycznej umożliwi uwzględnienie składowych naprężeń działających w kierunkach zgodnych z kierunkiem obciążenia.

9.4. Wyznaczenie naprężeń normalnych w płaszczyźnie krytycznej

Kąt położenia płaszczyzny krytycznej wyznacza płaszczyznę przecinającą płaski model numeryczny. Płaszczyzna ta powinna makroskopowo przebiegać prostopadle do kierunku największych wydłużeń [37], co potwierdzają linie propagacji pęknięć i złomy uzyskane z badań eksperymentalnych (rys. 9.22 i 9.23)

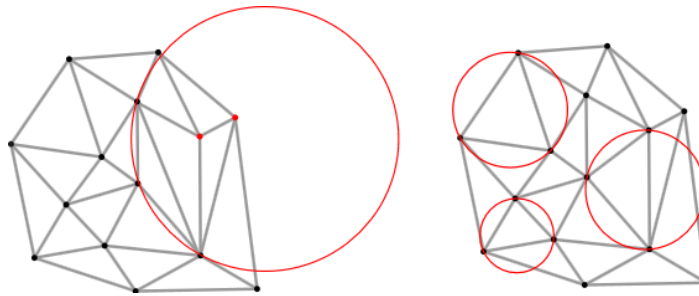


Rys. 9.22. Płaszczyzna propagacji pęknięcia w rozciąganych próbkach ze stali EA4T



Rys. 9.23. Płaszczyzna propagacji pęknięcia w zginanych próbkach ze stali 42CrMo4+QT

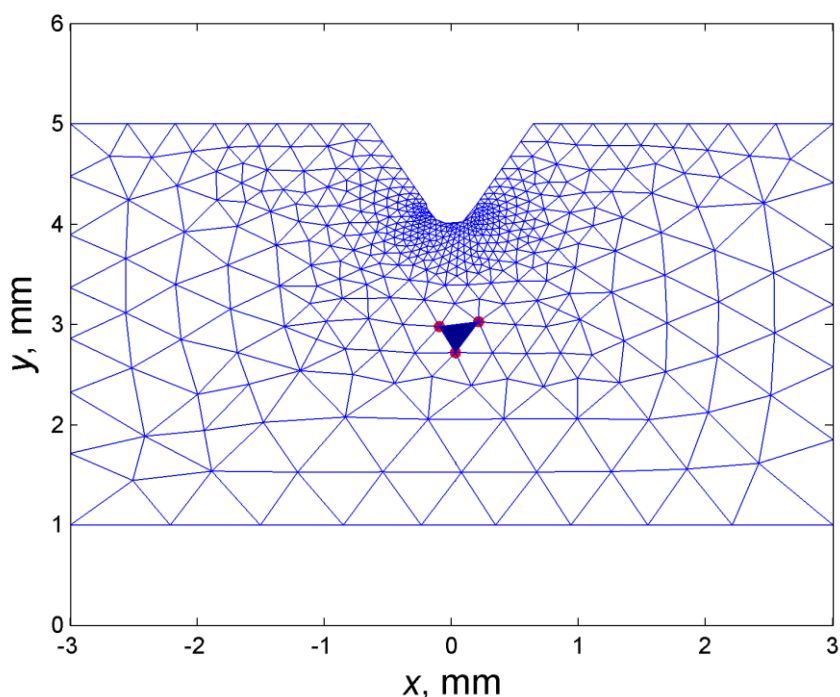
Powoduje to konieczność obliczenia wartości naprężeń w nowych punktach znajdujących się na linii wyznaczonej położeniem płaszczyzny krytycznej. Linia ta nie przebiega dokładnie przez węzły elementów skończonych, ponieważ są one rozrzucone w sposób, który związany jest z generacją siatki. Taka sytuacja wymaga interpolacji wartości naprężeń σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} znajdujących się na ścieżce określonej położeniem płaszczyzny. Konieczne jest zatem zastosowanie metod interpolacji dwuwymiarowej. W programie MATLAB wybrano interpolację liniową opartą na triangulacji (trójkątowaniu) Delaunaya. Procedura ta wykreśla trójkąty ze zbioru punktów o współrzędnych dwuwymiarowych. Zastosowanie dwuwymiarowej triangulacji Delaunaya zapewnia, że we wnętrzu okręgu powstałego z trzech sąsiednich punktów nie znajduje się inny punkt i jednocześnie zapewnia połączenie i utworzenie trójkątów ze wszystkich punktów zbioru (rys. 9.24). Metoda interpolacji powoduje zatem opisanie zmienności danego parametru na podstawie funkcji dwuwymiarowej wyznaczonej z wartości dla trzech węzłów. Zastosowana w programie MATLAB procedura GRIDDATA, wyznacza powierzchnię w postaci zależności $z = f(x, y)$, na podstawie danych wejściowych w postaci nierównomiernie rozmieszczonych wektorów (x, y) . Procedura GRIDDATA interpoluje na tej powierzchni wartości w żądanych punktach określonych przez wskazane współrzędne (XI, YI) w celu uzyskania wartości wynikowych ZI .



Rys. 9.24. Triangulacja [126]

Poniżej przedstawiono przykład programowy, jakim jest wykorzystanie triangulacji Delaunaya. W przykładzie tym wybrano trzy punkty na powierzchni x, y (współrzędne), następnie wyznaczono płaszczyznę z wykorzystaniem znanych wartości parametrów z (wartości naprężeń). Następnie wyznaczono równanie płaszczyzny i obliczono wynikową wartość ZI w żądanym punkcie na tej powierzchni. Dla danych z analizy MES dla próbki z karbem wykonanej ze stali EA4T i obciążeniu 16 kN ($\sigma_{nom} = 286$ MPa), utworzono

siatkę dla węzłów elementów skończonych z wykorzystaniem triangulacji Delaunaya, którą przedstawiono na rys. 9.25.

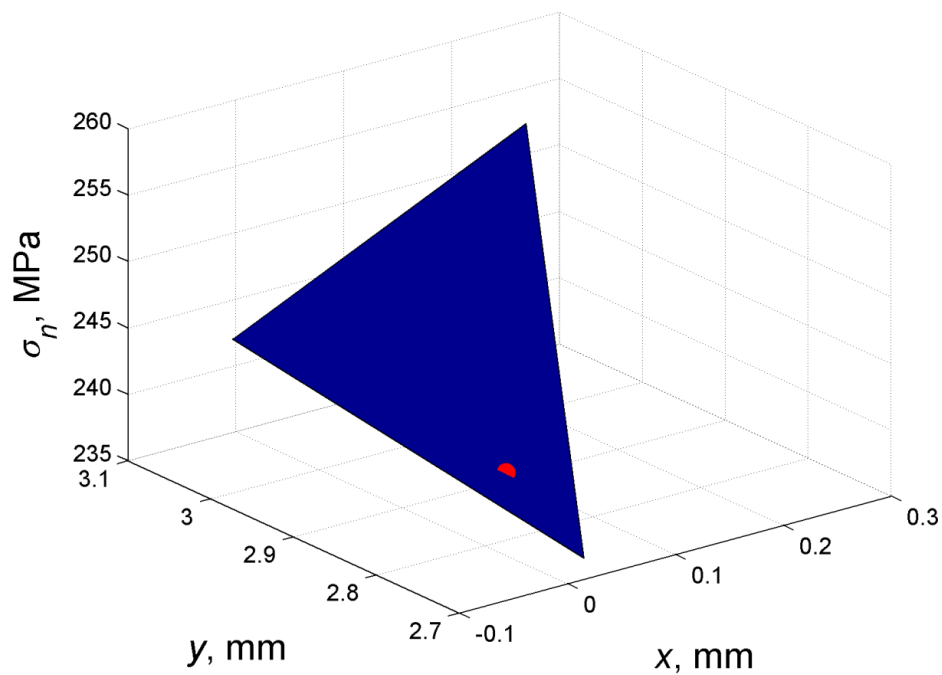


Rys. 9.25. Wykorzystanie procedury triangulacji Delaunaya dla węzłów z analizy MES

Wybrana płaszczyzna zawiera się pomiędzy trzema węzłami tworzącymi element i może być ona przedstawiona z użyciem współrzędnych zawierających trzecią składową, na przykład wartość naprężenia. Dla trójwymiarowych współrzędnych i dla co najmniej trzech punktów, możliwe jest wyznaczenie płaszczyzny przechodzącej przez te punkty. Równanie płaszczyzny za pomocą którego można obliczyć wartość naprężenia dla dowolnego położenia punktu zlokalizowanego na tej płaszczyźnie (rys. 9.26) ma postać

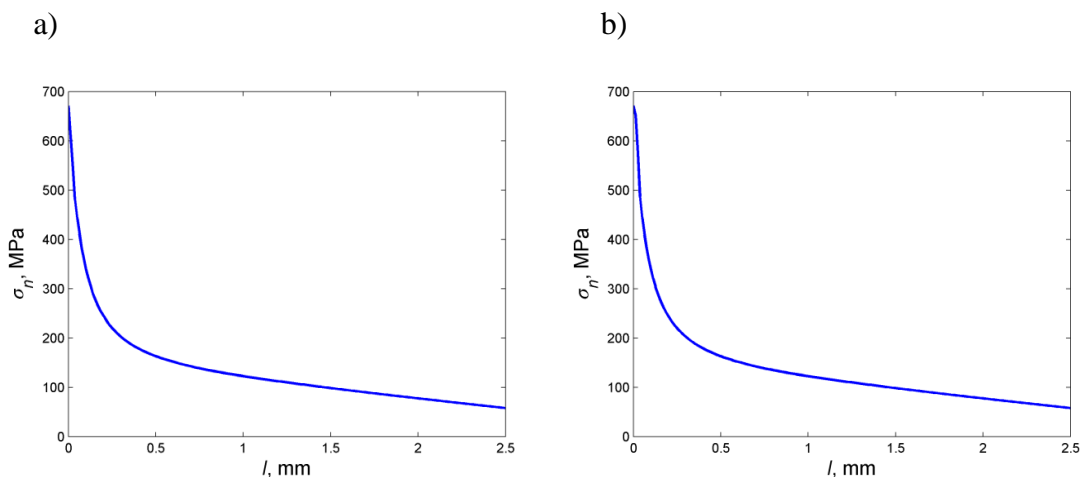
$$\sigma = A_p \cdot x + B_p \cdot y + C_p, \quad (9.42)$$

gdzie: A_p , B_p , C_p – stałe równania płaszczyzny, x , y – zmienne (współrzędne).



Rys. 9.26. Płaszczyzna powstała z połączenia trzech punktów oraz interpolowany punkt

Program MATLAB umożliwia wykonanie interpolacji także z wykorzystaniem innych metod, np. metody kubicznej. Metoda liniowa w przeciwieństwie do metody kubicznej może powodować nieciągłości na zerowej i pierwszej pochodnej, jednak w przypadku zastosowania gęstego kroku interpolacji nieciągłości te mogą nie być znacząco istotne (rys. 9.27).



Rys. 9.27. Metody interpolacji w programie MATLAB, a) liniowa, b) kubiczna

Otrzymane rozkłady zmiennego pola naprężenia normalnego w płaszczyźnie krytycznej są następnie poddawane obliczeniom nielokalnym wykonywanym z uwzględnieniem funkcji wagowej.

9.5. Zastosowanie funkcji wagowej

Zastosowanie funkcji wagowych ma na celu nadać wagę poszczególnym warstwom materiału podczas obliczeń nielokalnych (uśredniania). Pojawienie się pęknięcia zmęczeniowego związane jest z wytężeniem materiału w pewnej przestrzeni geometrycznej, w której często występuje nierównomierne pole naprężeń (gradient naprężenia). Z uwagi na występujący gradient naprężenia, idea zastosowania funkcji wagowej związana jest nie tylko z odległością danej warstwy od powierzchni, ale także z wartością naprężenia w niej działającego. Uwzględnienie efektu gradientu wymaga więc zastosowania funkcji wagowej, gdyż uśrednienie naprężeń wprost, nie uwzględni większego znaczenia warstw znajdujących się bliżej powierzchni lub warstw najbardziej wytężonych. Największa waga powinna być nadana warstwie materiału zlokalizowanej na powierzchni, to jest, dla długości promienia $r = 0$, lub długości $l = 0$ (punkt krytyczny, bazowy), ale także w miejscu, w którym występują największe naprężenia. Naprężenie to w przypadku obliczeń sprężysto-plastycznych i występowania znacznych odkształceń plastycznych często znajduje się w niewielkiej odległości pod powierzchnią. W tej sytuacji nadanie mniejszej wagi warstwie, gdzie występuje największe naprężenie wydaje się nieprawidłowe. Taka sytuacja ma miejsce przy zastosowaniu funkcji wagowej monotonicznie malejącej, która w przypadku przyjęcia małej odległości krytycznej i ostrego karbu ma duży gradient zmiany.

Warunki, jakie powinna spełniać funkcja wagowa, powinny być uzupełnione o warunek nadający największą wagę warstwom materiału znajdującym się pomiędzy powierzchnią, a punktem, w którym występuje największe naprężenie, a więc

$$Q(l = \langle 0, l_{\sigma_{max}} \rangle) = 1, \quad (9.43)$$

gdzie: $l_{\sigma_{max}}$ – odległość od punktu bazowego, w którym występuje największe naprężenie.

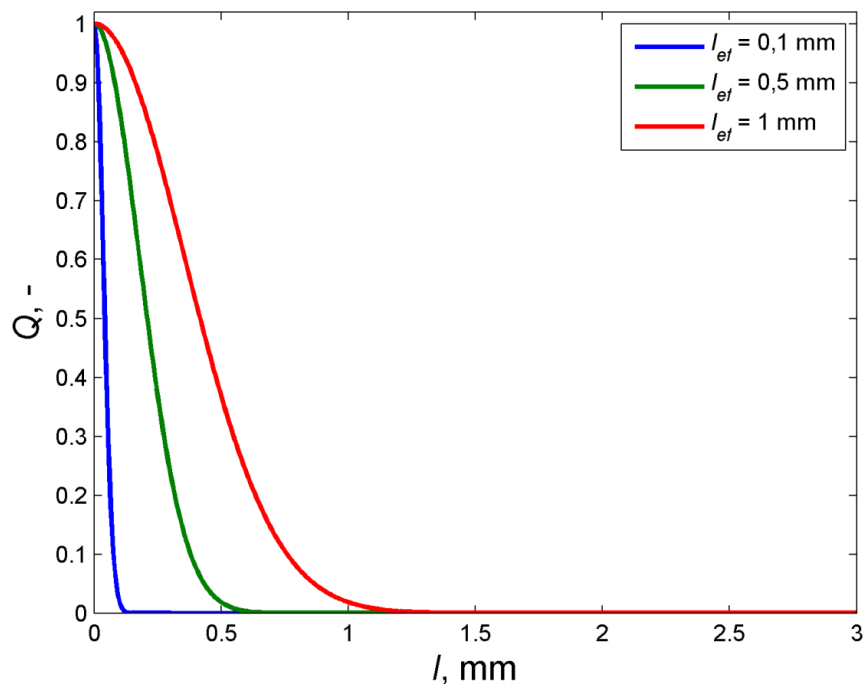
Do prezentowanego algorytmu nielokalnej metody liniowej zastosowano funkcję wagową przedstawioną w pracy [33]. Wprowadzono jednak modyfikację, polegającą na nadaniu maksymalnej wagi warstwom znajdującym się pomiędzy powierzchnią a punktem pod powierzchnią, w którym występuje maksymalne naprężenie. Nadanie

największej wagi warstwom na powierzchni oraz w punkcie, gdzie występuje największe naprężenie było zastosowane także w pracy [103], ale zastosowana funkcja wagowa miała inny przebieg. Po modyfikacji funkcja wagowa ma postać

$$Q(l) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ dla warstw } 0 \leq l < l_{\sigma_{n,max}} \\ e^{-\left(\frac{2(l-l_{\sigma_{n,max}})}{l_{ef}}\right)^2} \text{ dla warstw } l \geq l_{\sigma_{n,max}} \end{array} \right\}, \quad (9.44)$$

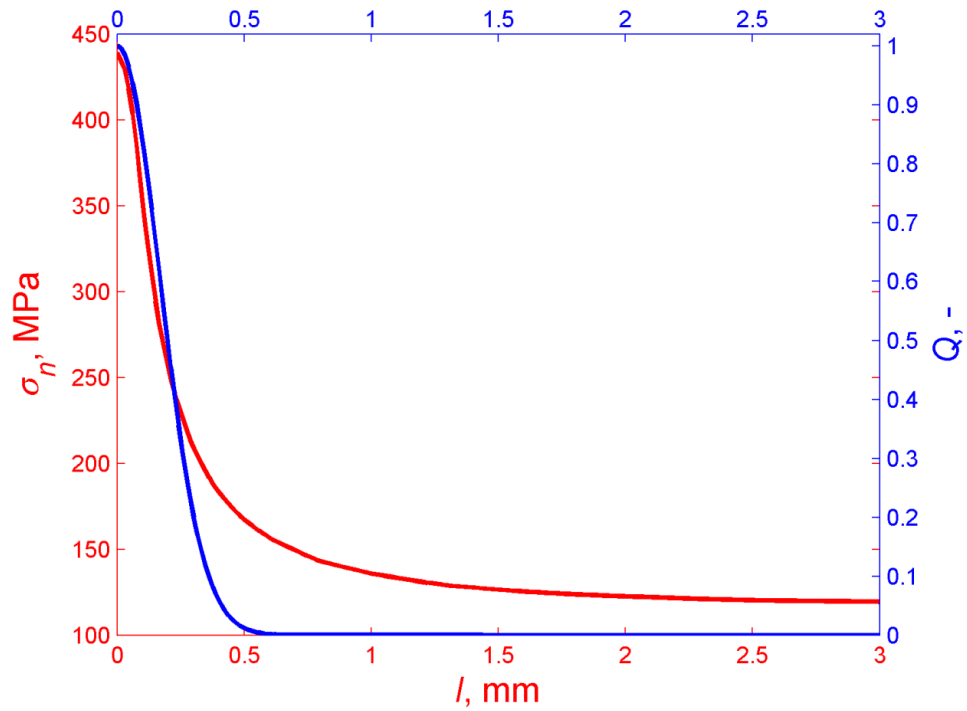
gdzie: l – długość liczona od punktu bazowego w kierunku wyznaczonym położeniem płaszczyzny krytycznej, l_{ef} – długość efektywna.

Kształt funkcji wagowej $Q(l)$ zgodnie ze wzorem (9.44) jest połową wykresu normalnego rozkładu prawdopodobieństwa, w którym długość efektywna l_{ef} decyduje o spłaszczeniu tego rozkładu. W zależności od przyjętej wartości długości l_{ef} , funkcja wagowa przyjmuje inne kształty jak to przedstawiono na rys. 9.28.

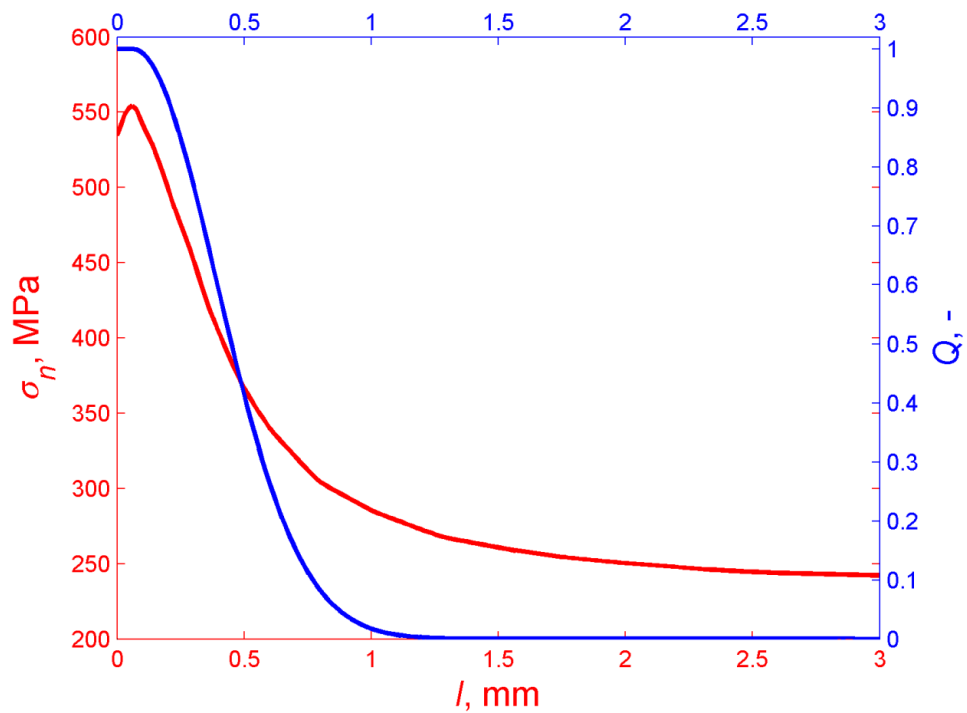


Rys. 9.28. Kształt funkcji wagowej dla różnych wartości l_{ef}

Przebiegi funkcji wagowej dla przykładowych wyników z analizy MES dla próbek z korbem wykonanych ze stali EA4T i obciążeniu odpowiadającemu naprężeniu nominalnemu 143 i 286 MPa przedstawiono na rys. 9.29 i 9.30.



Rys. 9.29. Przebieg naprężenia σ_n i funkcji wagowej Q dla obciążenia odpowiadającego $\sigma_{nom} = 143$ MPa (maksymalne naprężenie występuje na powierzchni)



Rys. 9.30. Przebieg naprężenia σ_n i funkcji wagowej Q dla obciążenia odpowiadającego $\sigma_{nom} = 286$ MPa (maksymalne naprężenie występuje pod powierzchnią)

Zastosowanie funkcji wagowej powoduje zwiększenie długości efektywnej l_{ef} (odcinka uśredniania) w porównaniu z procesem uśredniania naprężenia bez funkcji wagowej. Długość l_{ef} , a zarazem ekwiwalentna strefa zmęczeniowa, jest więc większych rozmiarów, choć znaczenie poszczególnych warstw materiału nie jest jednakowe. Zmniejszenie wagi kolejnych warstw powoduje, że osiągnięcie zadanego poziomu uśrednionych naprężeń ekwiwalentnych σ_{eq} wymaga wydłużenia odcinka uśredniania l .

9.6. Obliczenie długości efektywnej

Obliczenia nielokalne są związane z uśrednianiem zastosowanego parametru zmęczenia w przyjętej przestrzeni geometrycznej materiału. Zależność zmian pola naprężenia w funkcji powierzchni lub objętości jest trudna do wyznaczenia. Łatwiejszym przypadkiem jest wyznaczenie i zastosowanie funkcji zmiany naprężenia w zależności od promienia r lub przyjętej długości l , o początku w punkcie bazowym. Jednak wyznaczenie odpowiedniej funkcji ciągłej do opisu zmienności pola naprężeń nie zawsze jest łatwe, nawet przy zastosowaniu wielomianów wyższych rzędów. Prowadzi to do sytuacji, w której wygodniejszym sposobem jest zastąpienie procedury całkowania funkcji ciągłej działaniami na wartościach dyskretnych. W tej sytuacji, możliwe jest zastosowanie procedur całkowania numerycznego lub zastosowanie operacji sumy (średnia arytmetyczna). Zapis całkowy uśredniania wraz z funkcją wagową

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{l_{ef}} \int_0^{l_{ef}} \sigma_n \cdot Q \cdot dl, \quad (9.45)$$

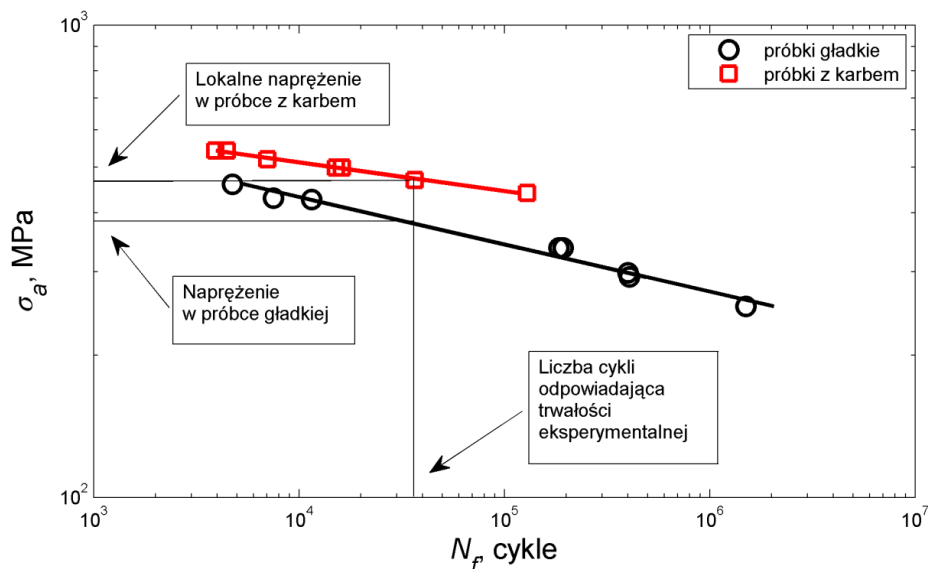
może być zastąpiony przez operację sumy zapisaną w postaci

$$\sigma_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^k (\sigma_{n,i} \cdot Q_i \cdot \Delta l)}{\sum_{i=1}^k (Q_i \cdot \Delta l)}, \quad (9.46)$$

gdzie: k – ilość odcinków podziału długości l , Δl – przyrost długości pomiędzy kolejnymi zmiennymi wartościami naprężenia.

W przypadku występowania stałego i odpowiednio gęstego kroku obliczeniowego związanego z przyrostem Δl , wielkość ta może być pominięta w operacji uśredniania. W prezentowanym algorytmie przyjęto przyrosty Δl bazując na interpolowanych wartościach naprężeń przeprowadzanych ze stałym krokiem o wartości 0,005 mm.

W procedurze obliczeniowej wykorzystano wyniki trwałości eksperymentalnych próbek z karbem otrzymanych dla długości pęknięcia $a = 0,1$ mm. W pierwszej kolejności, bazując na charakterystykach próbek gładkich i charakterystykach próbek z karbem, wyznaczono liczbę cykli odpowiadającą naprężeniu lokalnemu w próbce z karbem. Dla tej wartości liczby cykli, obliczono poziom naprężenia referencyjnego z próbki gładkiej (rys. 9.31).



Rys. 9.31. Przyjęty sposób wyznaczenia naprężenia referencyjnego na przykładzie charakterystyk stali EA4T

Wartość naprężenia dla próbki gładkiej jest równocześnie wartością, jaka powinna być otrzymana z procedury uśredniania, a która otrzymywana jest po uśrednieniu rozkładu naprężenia w próbkach z karbem na odcinku długości efektywnej l_{ef} . Iteracyjne obliczenia uśredniania są prowadzone na przyrastającej iteracyjnie długości l , o początku w punkcie bazowym na powierzchni dna karbu. W każdym kolejnym kroku odcinek uśredniania jest powiększany o przyrost Δl i otrzymywana jest kolejna wartość naprężenia uśrednionego. Wraz z powiększaniem odcinka uśredniania l , generowany jest nowy przebieg funkcji wagowej Q , której wartości związane są z przyjętym w danej pętli odcinkiem uśredniania l , spełniającym w zależności (9.44), rolę długości efektywnej l_{ef} . Do wyznaczenia długości efektywnej przyjęto krok obliczeniowy na poziomie 0,005 mm, który jednocześnie wyznacza dokładności obliczonej wartości długości efektywnej l_{ef} . W kroku obliczeniowym, w którym wartość uśrednionego naprężenia normalnego była mniejsza lub równa naprężeniu referencyjnemu z próbki gładkiej, następowało

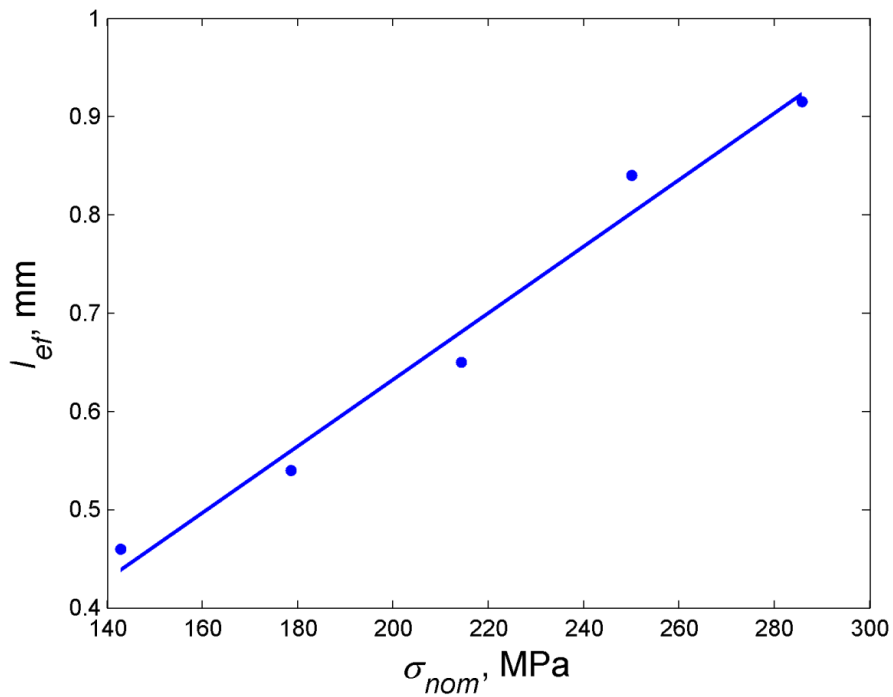
zatrzymanie procedury obliczeniowej. Za wartość długości efektywnej l_{ef} przyjęto wartość mniejszą, otrzymaną z przedostatniego kroku obliczeniowego. Powodowało to w konsekwencji także przyjęcie nieznacznie większej wartości naprężenia ekwiwalentnego σ_{eq} , co miało spowodować zachowanie wyników konserwatywnych. Pomimo tego, obliczone wartości długości efektywnej mogą powodować obliczenie takiej wartości uśrednionego ekwiwalentnego naprężenia, a następnie trwałości obliczeniowej, które po porównaniu z trwałością eksperymentalną nie będą wykazywać wyników konserwatywnych. Spowodowane jest to tym, że obliczone wartości długości efektywnej bazują na charakterystykach zmęczeniowych opisanych charakterystyką Basquina oraz liniowym opisem zmienności długości efektywnej w funkcji naprężenia nominalnego. Trwałości eksperymentalne oraz długości efektywne przyjmują pewien rozrzut w stosunku do wyznaczonych charakterystyk, które opisane są regresją liniową dla 50% prawdopodobieństwa przetrwania, zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów. Problem ten można rozwiązać stosując odpowiednio zmniejszoną wartość długości efektywnej, np. stosując dolną granicę przedziału ufności. Spowoduje to zmniejszenie odcinka uśredniania przy zachowaniu trendu jego zmienności. Przyjęcie przedziału ufności zapewnia z zadaniem prawdopodobieństwem, że wartości obliczonych długości efektywnych znajdują się w tym przedziale. Nie bez znaczenia są także własności cykliczne danego materiału, gdyż otrzymane wartości naprężeń mocno zależą od cyklicznej granicy plastyczności i dalszego umocnienia materiału.

9.7. Ekwiwalentna długość efektywna, jako wielkość zależna od poziomu obciążenia i rodzaju karbu

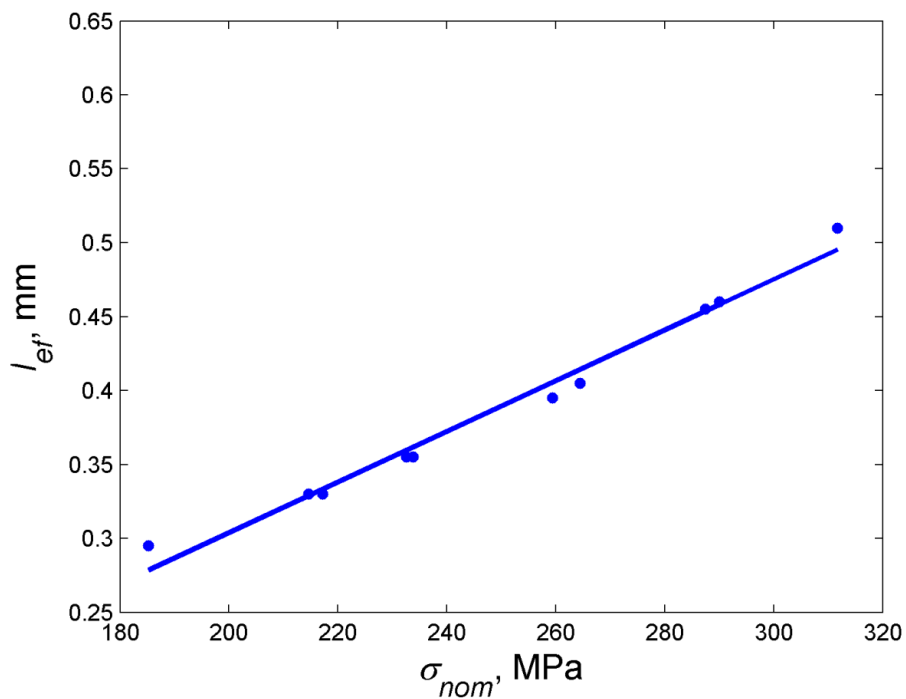
Obliczenia i ich wyniki przeprowadzone dla dwóch rodzajów stali wskazały na zmienność długości efektywnej od geometrii karbu i poziomu obciążenia. Na otrzymane wartości wpływ mają charakterystyki zmęczeniowe, wyznaczone liniowe zależności długości efektywnej oraz cykliczne właściwości materiałowe. Zmienność długości efektywnej można przedstawić na wykresach dwu- lub trzy wymiarowych. Może to być więc równanie liniowe lub równanie płaszczyzny. Wartości długości efektywnych zostały obliczone dla danych z punktów eksperymentalnych a następnie, w pierwszej kolejności zostały aproksymowane równaniem regresji liniowej. Dla obliczeń wykonanych dla stali EA4T oraz stali 42CrMo4+QT wyznaczone wykresy $l_{ef} - \sigma_{nom}$ przedstawiono na rys. 9.32 ÷ 9.36.

9. Nielokalna metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie badań własnych

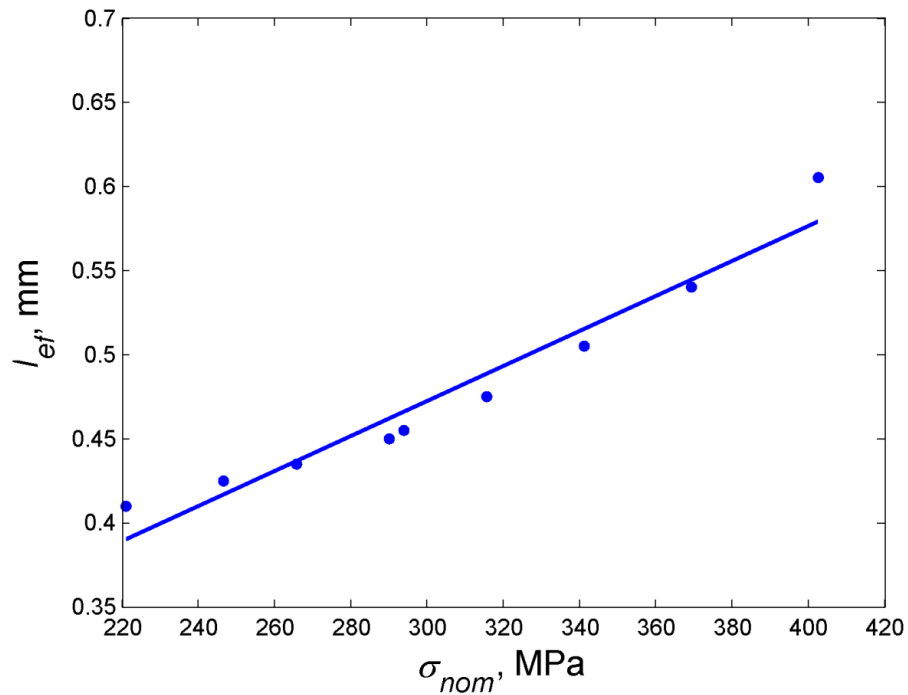
W przypadku równania płaszczyzny, możliwe jest uzależnienie długości efektywnych zarówno od naprężenia nominalnego, jak i promienia karbu.



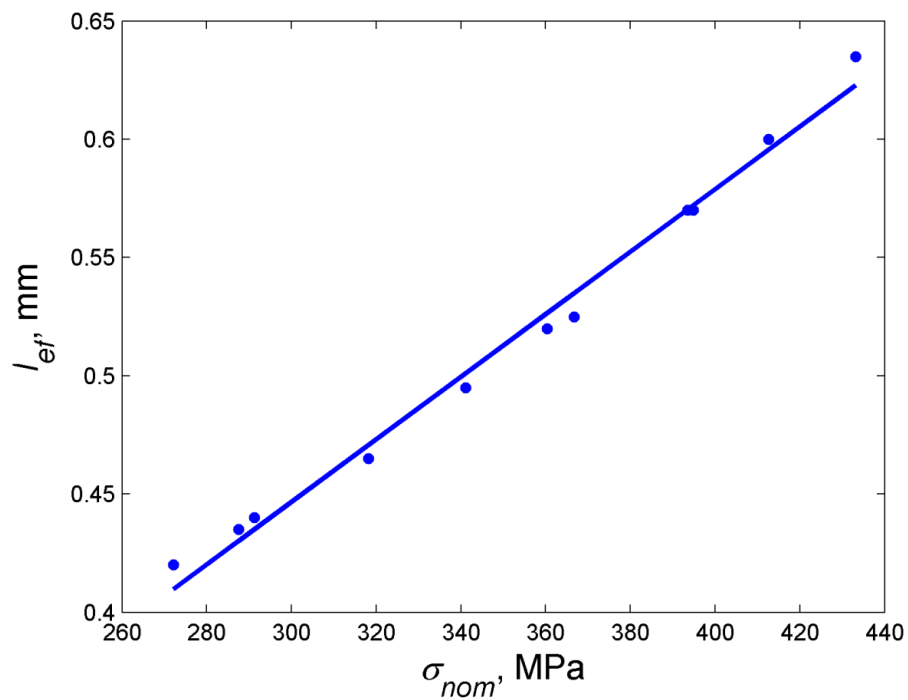
Rys. 9.32. Zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego dla stali EA4T, $R = 0,2$ mm



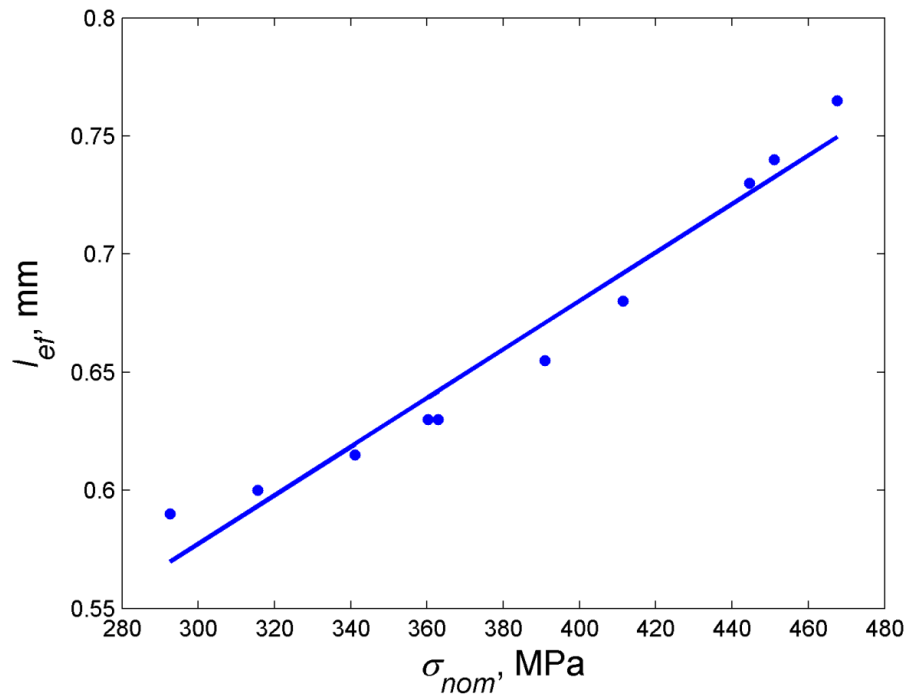
Rys. 9.33. Zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego dla stali 42CrMo4+QT, $R = 0,2$ mm



Rys. 9.34. Zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego dla stali 42CrMo4+QT, $R = 0,5$ mm

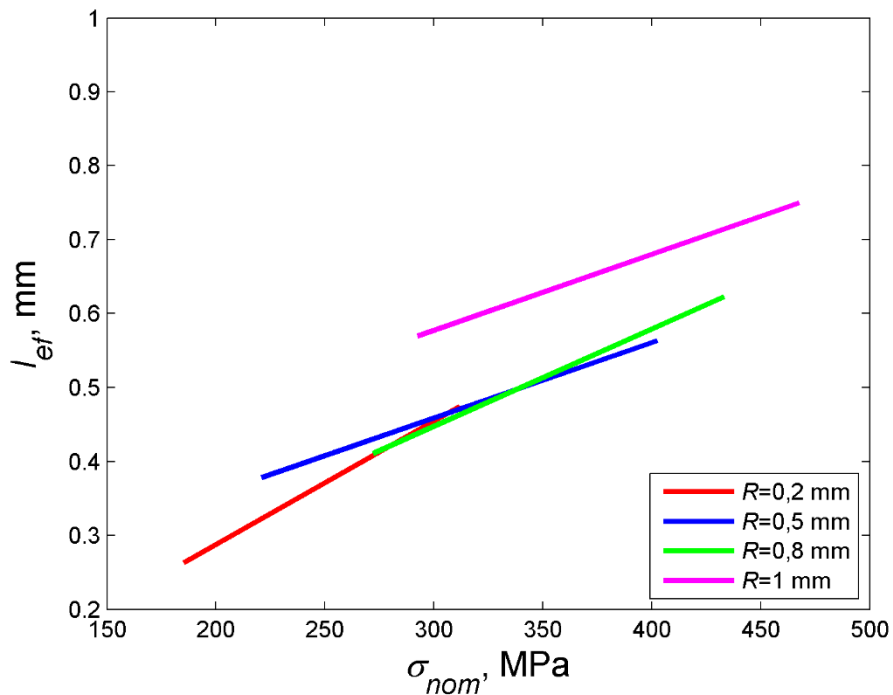


Rys. 9.35. Zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego dla stali 42CrMo4+QT, $R = 0,8$ mm



Rys. 9.36. Zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego dla stali 42CrMo4+QT, $R = 1$ mm

Dla stali 42CrMo4+QT uzyskano zmienności długości efektywnej dla czterech geometrii karbu, co umożliwiło wyznaczenie zbiorczego wykresu dla tej stali (rys. 9.37).



Rys. 9.37. Zbiorczy wykres zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego

9. Nielokalna metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie badań własnych

Bazując na obliczonych z procedury uśredniania wartościach długości efektywnych i opisanu ich liniową zależnością w postaci

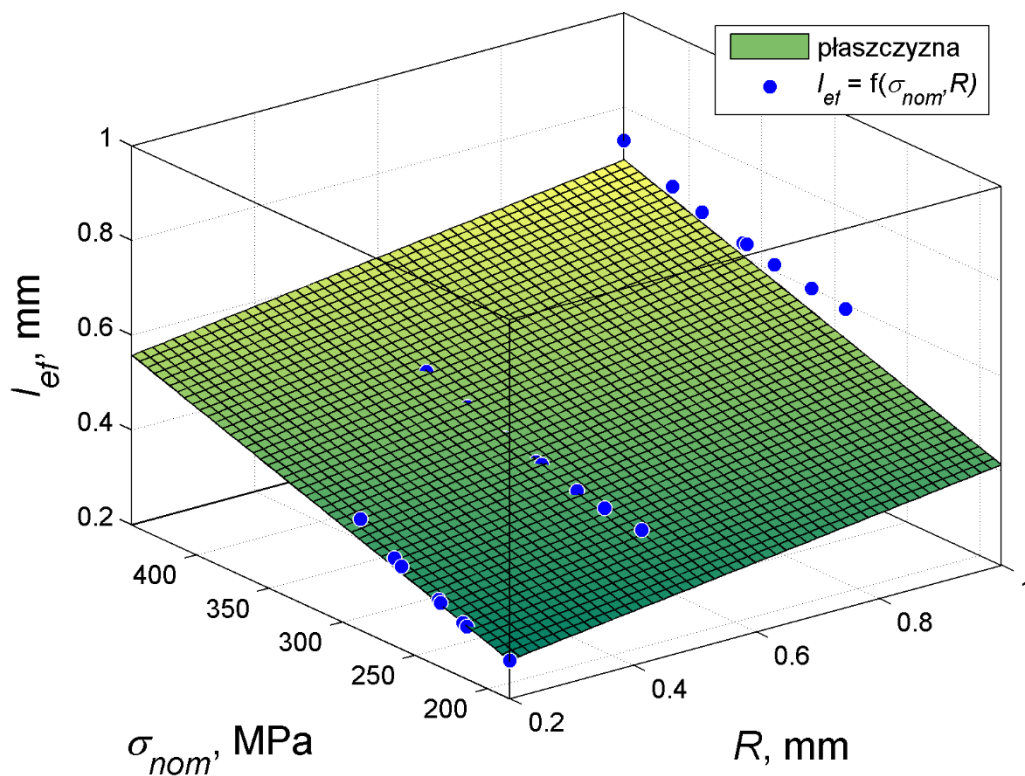
$$l_{ef} = A_l \cdot \sigma_{nom} + B_l, \quad (9.47)$$

otrzymano współczynniki regresji liniowej A_l , B_l , które przedstawiono w tabeli 9.3.

Tabela 9.3. Współczynniki kierunkowe równania liniowego długości efektywnej zgodnie z zależnością (9.47)

Współczynnik Materiał, geometria	A_l , mm ³ /N	B_l , mm
EA4T, $R = 0,2$ mm	0,0034	-0,450
42CrMo4+QT, $R = 0,2$ mm	0,0017	-0,0473
42CrMo4+QT, $R = 0,5$ mm	0,0010	0,1523
42CrMo4+QT, $R = 0,8$ mm	0,0013	0,0501
42CrMo4+QT, $R = 1$ mm	0,0010	0,2696

W przypadku stali 42CrMo4+QT, sporządzono także wykresy trójwymiarowe, w których przedstawiono zależność długości efektywnej od promienia karbu i naprężenia nominalnego (rys. 9.38).



Rys. 9.38. Zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego i promienia karbu dla stali 42CrMo4+QT

Do wykreślenia płaszczyzny wykorzystano równanie w postaci

$$l_{ef} = A_p \cdot R + B_p \cdot \sigma_{nom} + C_p. \quad (9.48)$$

Obliczenia współczynników kierunkowych A_p , B_p , C_p dokonano z wykorzystaniem wielokrokowej regresji liniowej. Obliczenia można wykonać wykorzystując metodę sumy kwadratów residuów, warunek optymalności oraz rozwiązując układ równań macierzowych zawierający wartości punktów w układzie x, y, z . Otrzymane równanie płaszczyzny ma postać

$$l_{ef} = 0,1648 \cdot R + 0,0011 \cdot \sigma_{nom} + 0,0497, \quad (9.49)$$

przy wartości współczynnika dopasowania równym 0,91.

Aproksymacji dokonano wykorzystując obliczeniowe punkty z wartościami długości efektywnej (przed wykonaniem regresji liniowej). Należy się jednak spodziewać, że w wyniku wielokrokowej regresji liniowej, wartości długości efektywnej obliczone z równania płaszczyzny będą przyjmowały większe odchylenia niż w przypadku zastosowania równań liniowych dla poszczególnych promieni karbów. Przy dużych gradientach naprężeń, przyjęcie większych wartości długości efektywnych spowoduje

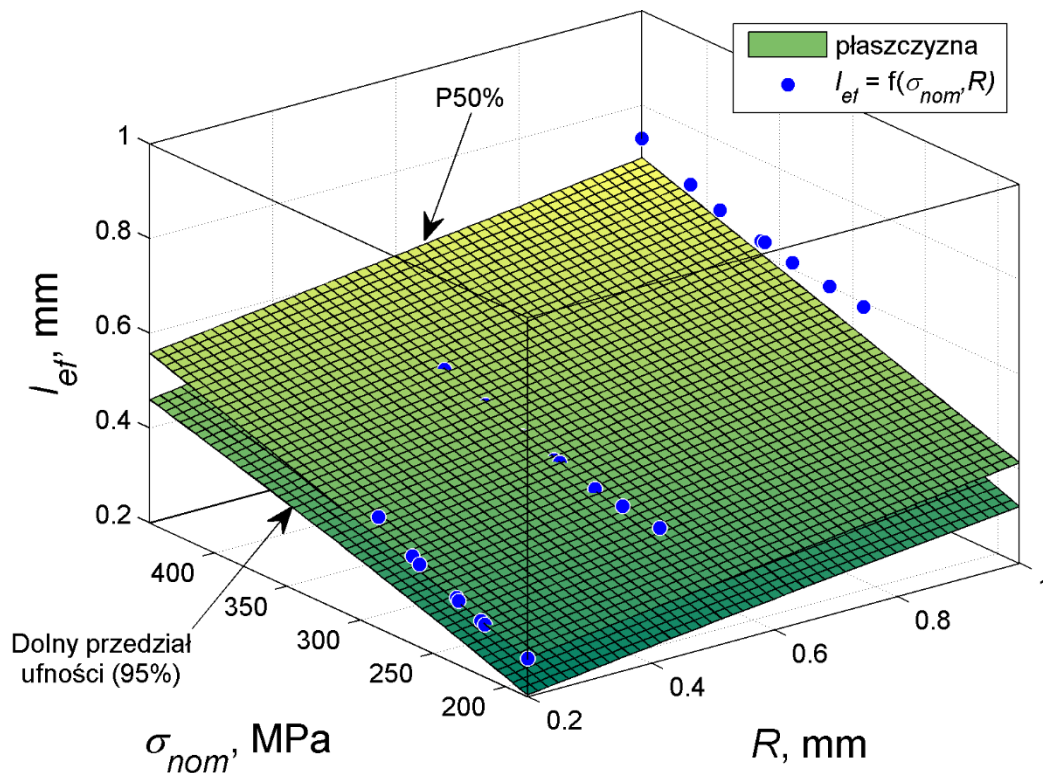
obliczenie mniejszej wartości naprężenia ekwiwalentnego, a zatem większej trwałości. W celu uzyskania bardziej konserwatywnych wyników można dokonać przesunięcia płaszczyzny do dolnej granicy przedziału ufności. Przyjmując przedział ufności o współczynniku ufności 95% otrzymano dla dolnej granicy równanie płaszczyzny w postaci

$$l_{ef} = 0,1013 \cdot R + 0,000764 \cdot \sigma_{nom} - 0,0206. \quad (9.50)$$

Wartości obliczonych współczynników dla dolnych i górnych przedziałów ufności wynoszą:

$$A_p = \langle 0,1013; 0,2283 \rangle, B_p = \langle 0,000764; 0,001376 \rangle, C_p = \langle -0,0206; 0,1199 \rangle.$$

Wyznaczoną płaszczyznę dla prawdopodobieństwa dopasowania P50%, uzupełnioną o płaszczyznę dla dolnej granicy przedziału ufności o współczynniku ufności 95% przedstawiono na rys. 9.39.

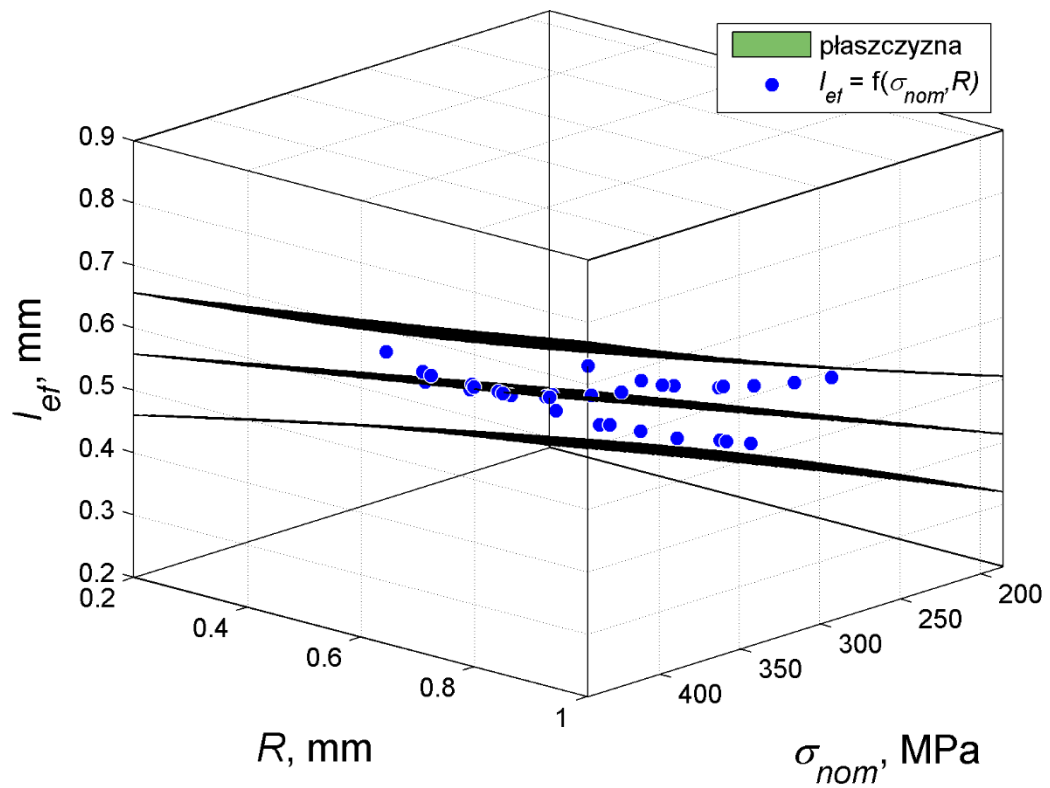


Rys. 9.39. Zależności długości efektywnej od naprężenia nominalnego i promienia karbu dla stali 42CrMo4+QT (dodatkowa płaszczyzna na dolnej granicy przedziału ufności o współczynniku ufności 95%)

Wszystkie punkty długości efektywnych znajdują się w założonym przedziale ufności (rys. 9.40), co zapewnia pewne uogólnienie zastosowanego równania płaszczyzny dla

9. Nielokalna metoda oceny trwałości zmęczeniowej na podstawie badań własnych

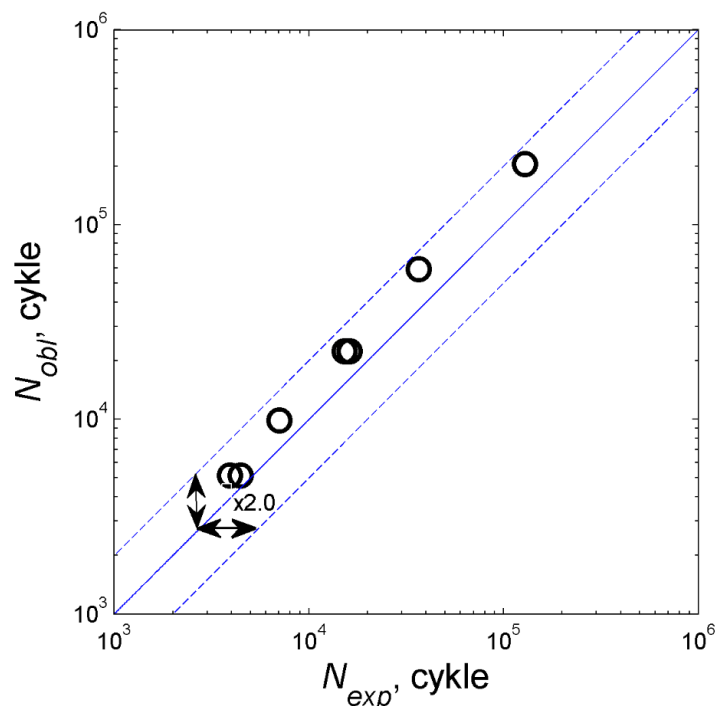
materiału 42CrMo4+QT oraz do badanych elementów z karbem o promieniu R w zakresie od 0,2 do 1 mm.



Rys. 9.40. Wartości długości efektywnej dla stali 42CrMo4+QT znajdujące się w przedziale ufności o współczynniku ufności 95%

10. Analiza wyników badań

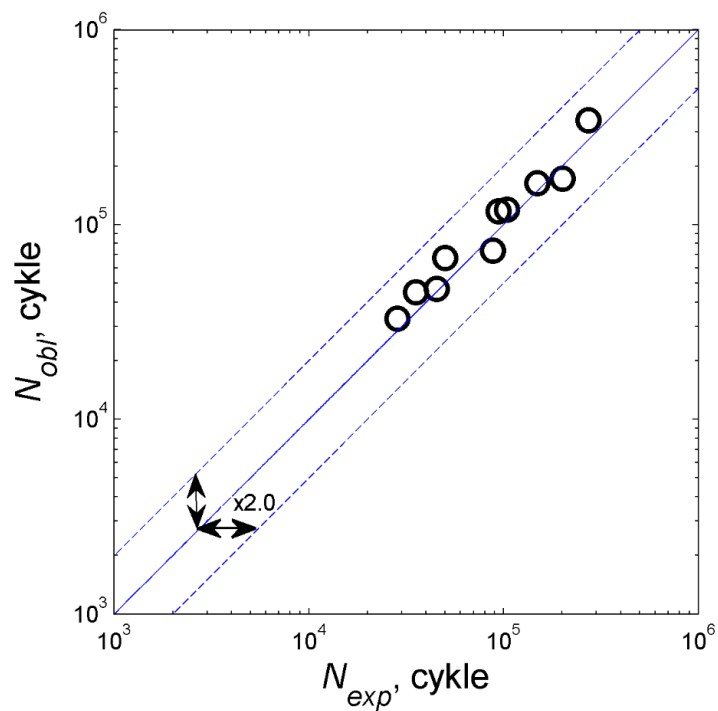
Otrzymane zależności długości efektywnej z wykorzystaniem poszczególnych równań liniowych i równania płaszczyzny wykorzystano do wyznaczenia trwałości obliczeniowej. W tym celu, dokonano ponownego uśredniania rozkładu naprężenia na odcinku długości efektywnej obliczonej z przyjętego równania dla danego materiału i promienia karbu. Obliczona na odcinku długości efektywnej wartość naprężenia ekwiwalentnego została porównana z charakterystyką próbek gładkich w celu odczytania trwałości obliczeniowej. Otrzymane w ten sposób porównania, w kilku przypadkach wskazują na wyniki niekonserwatywnie, co spowodowane jest zarówno przez zastosowanie regresji liniowej do charakterystyk zmęczeniowych, jak i długości efektywnych. Obliczone wartości trwałości bazowały na charakterystykach zmęczeniowych próbek gładkich i próbek z karbem, natomiast porównania dokonano do trwałości eksperymentalnej poszczególnych próbek z karbem otrzymanych z badań. Aby porównane trwałości eksperymentalne z trwałościami obliczeniowymi wykazywały mniejsze rozrzuty, także charakterystyki zmęczeniowe powinny charakteryzować się mniejszymi rozrzutami. Dla stali EA4T, porównanie trwałości przedstawiono na rys. 10.1.



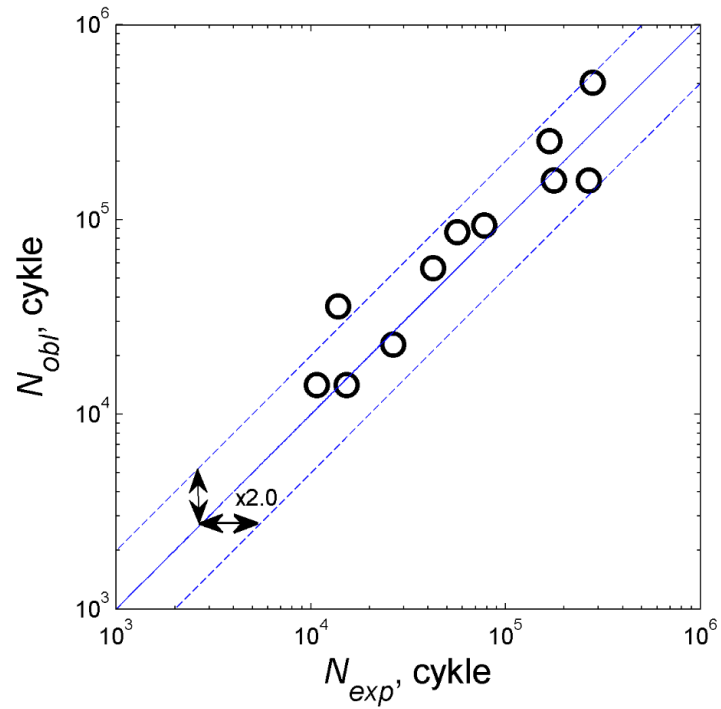
Rys. 10.1. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla stali EA4T

Wszystkie punkty eksperymentalne znajdują się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 2.

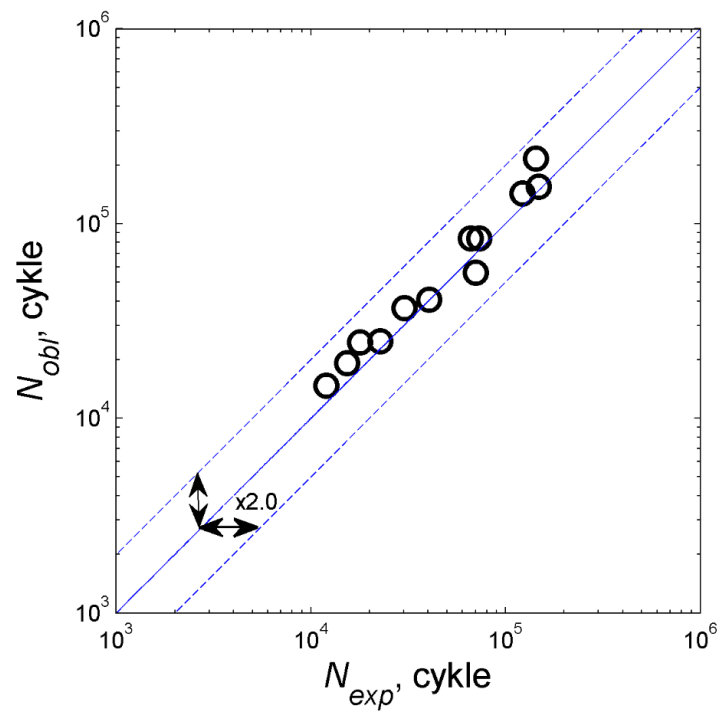
Porównanie trwałości eksperymentalnej z obliczeniową wykonano również dla czterech serii obliczeń dla stali 42CrMo4+QT. Wyniki dla stali 42CrMo4+QT przedstawiono na rys. 10.2 ÷ 10.5. Wyniki trwałości obliczeniowej także znajdują się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 2 (poza jednym punktem na rys. 10.3).



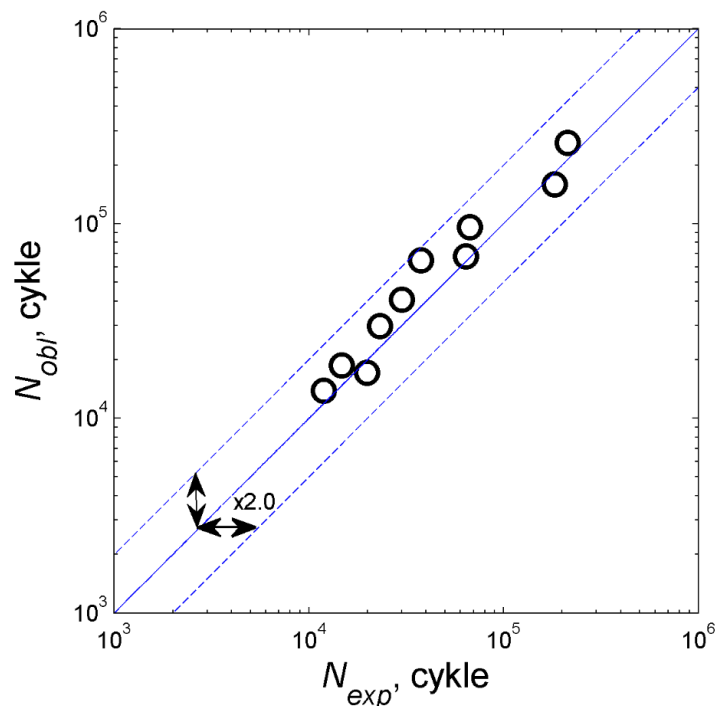
Rys. 10.2. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla stali 42CrMo4+QT, $R = 0,2$ mm



Rys. 10.3. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla stali
42CrMo4+QT, $R = 0,5$ mm



Rys. 10.4. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla stali
42CrMo4+QT, $R = 0,8$ mm

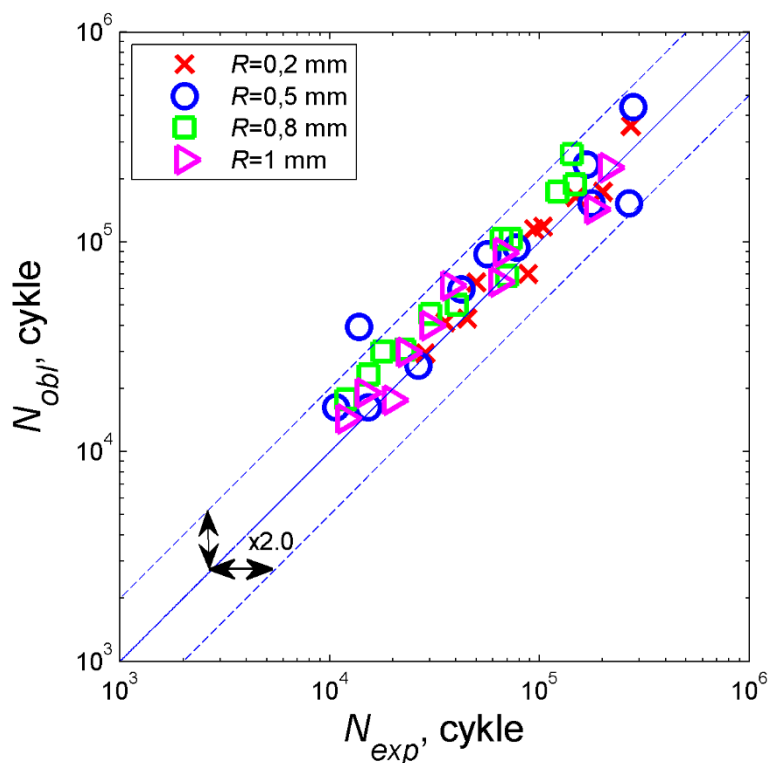


Rys. 10.5. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla stali
42CrMo4+QT, $R = 1 \text{ mm}$

Analizując wyniki obliczeń dla obu stali można stwierdzić, że zastosowanie liniowych funkcji opisujących zmienność długości efektywnej, a tym samym użycie wartości długości efektywnych obliczonych z ich wykorzystaniem, prowadzi do otrzymania zadowalających wyników trwałości obliczeniowej. Możliwe jest jednak uzyskanie wyników jeszcze bardziej konserwatywnych, na przykład poprzez zastosowanie charakterystyki próbek z karbem odpowiadającej większemu prawdopodobieństwu przetrwania lub przyjęciu mniejszych wartości długości efektywnych odpowiadających dolnej granicy przedziału ufności o współczynniku np. 95%. Na uzyskane rozrzuty porównania trwałości wpływ mają także wyniki eksperymentalne uzyskane podczas badań próbek z karbem. Ogólnie można stwierdzić, że niewielka zmiana uśrednionego naprężenia, powoduje znaczne zmiany w wyznaczonej trwałości obliczeniowej. Z tego względu, w przypadku ostrych karbów i dużych gradientów naprężeń wartości trwałości obliczeniowej mogą odbiegać od trwałości eksperymentalnej.

W modelu obliczeniowym założono warunki, które miały na celu uzyskanie dobrej zgodności trwałości obliczeniowej z trwałością eksperymentalną. Zgodność ta powinna zawierać się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 3.

W przypadku przyjęcia do obliczenia długości efektywnej równania płaszczyzny z dolnej granicy przedziału ufności o współczynniku ufności 95%, otrzymano zbiorcze porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną, które przedstawiono na rys. 10.6.



Rys. 10.6. Porównanie trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla stali 42CrMo4+QT przy wykorzystaniu równania płaszczyzny dla dolnej granicy przedziału ufności

Wyniki trwałości obliczeniowej znajdują się także w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 2 (poza jednym punktem). Można zatem stwierdzić, że dokładność wyznaczonej trwałości obliczeniowej zależy od kilku czynników, które mogą być przedmiotem dalszych badań. Możliwe jest zbadanie wpływu rozrzutu trwałości eksperymentalnej próbek z karbem oraz zastosowania trwałości odczytanej z charakterystyki. Jednak w przypadku wykonanych obliczeń, założony cel uzyskania wyników nieprzekraczających rozrzutu o współczynniku równym 3 został osiągnięty.

Wyznaczone zależności długości efektywnej mogą być zastosowane w ocenie trwałości zmęczeniowej elementów z karbem dla stali EA4T i 42CrMo4+QT oraz w zakresie badanych promieni karbu i rodzaju obciążenia.

11. Podsumowanie i wnioski

W pracy przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych elementów gładkich oraz elementów zawierających karby. Bazując na wynikach tych badań, wykonano analizy MES oraz obliczenia numeryczne, mające na celu ustalenie wartości jednowymiarowej długości reprezentującej ekwiwalentną strefę zmęczeniową. Założono, że strefa ta jest obszarem, gdzie zachodzą istotne procesy zmęczeniowe, powodujące w konsekwencji zainicjowanie pęknięcia zmęczeniowego. Liczba cykli obciążeń do zainicjowania tego pęknięcia jest uważana, jako odpowiadająca trwałości elementu, czyli zniszczeniu. Wyznaczone w nieliniowych obliczeniach MES pole naprężeń w okolicy karbu jest wykorzystane do wyznaczenia położenia płaszczyzny krytycznej a następnie rozkładu naprężenia w tej płaszczyźnie. Dodatkowo zastosowano funkcję wagową, która ma za zadanie nadanie znaczenia poszczególnym warstwom materiału w procesie zmęczenia. Przy tych założeniach, dokonano nielokalnych obliczeń uśredniania, których wynikiem są wartości jednowymiarowej długości efektywnej. Długość ta jest odcinkiem uśredniania rozkładu naprężenia oraz określa strefę, w której po uśrednieniu rozkładu naprężenia, uzyskano wartość ekwiwalentną, odpowiadającą naprężeniu w próbce gładkiej z próby rozciągania-ściskania, dla tej samej trwałości. Po wykonaniu badań dla dwóch rodzajów materiału, dwóch rodzajów obciążenia i czterech rodzajów karbu stwierdzono, że długość efektywna jest wielkością zmienną i zależy nie tylko od materiału i rodzaju obciążenia, ale także od poziomu obciążenia i geometrii karbu. Długość efektywna charakteryzuje się zauważalnym trendem zmian. Długość efektywna zwiększa swoją wartość wraz ze wzrostem obciążenia oraz wraz ze wzrostem promienia karbu. Zmienność wartości długości efektywnej może być opisana zależnością liniową lub równaniem powierzchni w przypadku dysponowania wynikami dla kilku geometrii karbu. Zastosowanie płaszczyzny jest uzasadnione dla badań wykonanych dla stali 42CrMo4+QT oraz w przedziale promieni karbów R od 0,2 do 1 mm.

Głównym aspektem pracy było wskazanie zmienności obszaru uśredniania, który często w literaturze jest przedstawiany jako stały, czyli zależny tylko od rodzaju materiału. Zmienność ta jest związana z gradientem naprężenia spowodowanym działaniem karbu. Im promień karbu bardziej ostry, tym gradient naprężenia większy, a zarazem odcinek uśredniania mniejszy. W przypadku karbów łagodnych, w których promień karbu ma duże wartości, odcinek uśredniania przyjmuje większe wartości

z uwagi na niski gradient naprężenia. W przypadku zastosowania prezentowanego modelu obliczeniowego do elementu gładkiego (próbki gładkie), otrzymuje się odcinek uśredniania równy wymiarowi poprzecznemu elementu, w którym funkcja wagowa przyjmuje dla wszystkich warstw wartość 1, a uśrednione naprężenie jest równe naprężeniu referencyjnemu z próbki gładkiej. Z inżynierskiego punktu widzenia, zmienna wartość długości efektywnej jest jednak kłopotliwa w zastosowaniu. Wymaga to wcześniejszego przeprowadzenia badań eksperymentalnych dla danego rodzaju materiału oraz kilku geometrii karbu. Jednak zakładając przeznaczenie elementu konstrukcyjnego do pracy w zakresie małej lub średniej liczby cykli lub w przypadku konieczności zastosowania elementu o ostrym karbie, a więc w zakresie, gdzie możliwe jest wystąpienie lokalnych odkształceń plastycznych, takie podejście, choć skomplikowane, wydaje się właściwe. Prezentowana w pracy metodyka badań umożliwi także sprawdzenie rzeczywistych (efektywnych) wartości naprężeń lub rozkładu naprężeń w okolicy karbu, co ma wpływ na właściwe rozpoznanie wyęczenia materiału.

Prezentowany algorytm obliczeniowy cechuje się pewną zachowawczością, z powodu wykorzystania eksperymentalnej liczby cykli do inicjacji pęknięcia na niskim poziomie jego długości. W przypadku założenia równania liniowego lub równania płaszczyzny do opisu zmienności długości efektywnej, możliwe jest przyjęcie dolnej granicy przedziału ufności w celu uzyskania bardziej konserwatywnych wyników. W tym celu możliwe jest zastosowanie zasad podobnych do wykorzystania konstrukcyjnych charakterystyk Wöhlera (Basquina) odpowiadających większemu prawdopodobieństwu przetrwania.

Na podstawie przeprowadzonych badań eksperymentalnych i symulacyjnych można wnioskować, że:

1. W celu obliczenia efektywnych wartości naprężeń, cykliczne właściwości materiałowe można w dokładny sposób opisać modelem wieloliniowego umocnienia;
2. Przy zastosowaniu modelu wieloliniowego umocnienia, uzyskane wartości naprężeń zależą od cyklicznej granicy plastyczności i stycznych modułów plastyczności;
3. Liczba cykli do całkowitego zniszczenia próbki z karbem jest nawet 3-krotnie większa od liczby cykli do inicjacji pęknięcia;
4. W przypadku dużych odkształceń plastycznych, wyniki analizy MES wskazują, że maksymalne naprężenie normalne występuje w niewielkiej odległości pod powierzchnią dna karbu;

5. Wyznaczone położenia płaszczyzny krytycznej pokrywają się z płaszczyznami złomu z badań eksperymentalnych próbek z karbem;
6. Wartości obliczonych długości efektywnej są zmienne w funkcji obciążenia i promienia karbu;
7. Długość efektywna dla każdego analizowanego promienia karbu zwiększa swoją wartość wraz ze wzrostem obciążenia i promienia karbu;
8. Zmienność długości efektywnej można opisać równaniem liniowym lub równaniem płaszczyzny;
9. Wartości długości efektywnej zależą od gradientu naprężenia w karbie oraz wzajemnego położenia charakterystyk zmęczeniowych;
10. W celu otrzymania bardziej konserwatywnych wyników trwałości obliczeniowej możliwe jest zastosowanie dolnego przedziału ufności dla równania liniowego lub równania płaszczyzny.

Literatura

- [1] Achteлик H., Łagoda T., Macha E.: Trwałość zmęczeniowa elementów gładkich i z karbem poddanych cyklicznym obciążeniom giętnoskrętnym. XI Konf Nauk – Probl Rozw Masz Roboczych 1998;vol. II:ss. 15–22.
- [2] Adib H., Gilgert J., Pluvinage G.: Fatigue life duration prediction for welded spots by volumetric method. *Int J Fatigue* 2004;26:pp. 81–94.
- [3] Adib H., Pluvinage G.: Theoretical and numerical aspects of the volumetric approach for fatigue life prediction in notched components. *Int J Fatigue* 2003;25:pp. 67–76.
- [4] Adib-Ramezani H., Jeong J.: Advanced volumetric method for fatigue life prediction using stress gradient effects at notch roots. *Comput Mater Sci* 2007;39:pp. 649–663.
- [5] Atzori B.: Cracks and notches: analogies and differences of the relevant stress distributions and practical consequences in fatigue limit predictions. *Int J Fatigue* 2001;23:pp. 355–362.
- [6] Ayatollahi MR., Torabi AR., Rahimi AS.: Brittle fracture assessment of engineering components in the presence of notches: a review. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2016;39:pp. 267–291.
- [7] Bellett D., Taylor D.: The effect of crack shape on the fatigue limit of three-dimensional stress concentrations. *Int J Fatigue* 2006;28:pp. 114–123.
- [8] Bellett D., Taylor D., Marco S., Mazzeo E., Guillois J., Pircher T.: The fatigue behaviour of three-dimensional stress concentrations. *Int J Fatigue* 2005;27:pp. 207–221.
- [9] Bentachfine S., Pluvinage G., Gilgert J., Azari Z., Bouami D.: Notch effect in low cycle fatigue. *Int J Fatigue* 1999;21:pp. 421–430.
- [10] Berto F.: Crack Initiation at V-Notch Tip under In-Plane Mixed Mode Loading: A Review of the Fictitious Notch Rounding Concept. *Phys Mesomech* 2015;18:pp. 273–282.
- [11] Berto F., Campagnolo A., Ayatollahi M.: V-notches subjected to combined tension and torsion loadings: the application of the fictitious notch rounding concept. *Eng Fract Mech* 2015;148:pp. 82–96.
- [12] Berto F., Campagnolo A., Lazzarin P.: Fatigue strength of severely notched specimens made of Ti–6Al–4V under multiaxial loading. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2015;38:pp. 503–517.
- [13] Biłous P., Łagoda T.: Structural notch effect in steel welded joints. *Mater Des* 2009;30:pp. 4562–4564.
- [14] Bonet J., Wood RD.: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press; 1997.
- [15] COMSOL Multiphysics. Live Link for MATLAB User’s Guide. COMSOL; 2012.
- [16] COMSOL Multiphysics. *Nonlinear Structural Materials Module User’s Guide*.
- [17] Dang Van K., Griveau B., Message O.: On a new multiaxial fatigue criterion: theory and application. *Brown MW Mill KJ Ed Biaxial Multiaxial Fatigue EGF3 Lond Mech Eng Publ* 1989:pp. 479–498.
- [18] Derpeński L., Seweryn A.: Numerical Analysis of the Strain and Stress State in Cylindrical Notched Tensile Specimens. *Mater Sci* 2013;49:pp. 252–256.
- [19] Dowling NE.: *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue*. Pearson; 2013.
- [20] Dvorkin EN., Goldschmit MB.: *Nonlinear Continua*. Springer Berlin; 2005.

- [21] El Haddad M., Topper T., Smith K.: Fatigue crack propagation of short cracks. *J Engng Mater Tech ASME Trans* 1979;pp. 42–46.
- [22] Ellyin F.: *Fatigue of notched members. Fatigue Damage Crack Growth Life Predict.*, Springer Netherlands; 1997, pp. 381–414.
- [23] Fatemi A., Socie DF.: A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1988;11:pp. 149–165.
- [24] Findley W.N.: Fatigue of metals under combinations of stresses. *Trans ASME* 1956;pp. 1337–1348.
- [25] Findley W.N.: A Theory for the Effect for Mean Stress on Fatigue of Metals Under Combined Torsion and Axial Load or Bending. *Trans ASME J Eng Ind* 1959;pp. 301–306.
- [26] Froustey C., Lasserre S.: Multiaxial fatigue endurance of 30NCD16 steel. *Int J Fatigue* 1989;11:pp. 169–175.
- [27] Gasiak G.: Trwałość stali konstrukcyjnych po jednocyklowym przeciążeniu przy zmiennym zginaniu ze skręcaniem w warunkach rozwoju pęknięcia. *Inż Mater* 2014;Vol. 35:ss. 332–338.
- [28] Glinka G.: Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks. *Eng Fract Mech* 1985;22:pp. 485–508.
- [29] Hill R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press; 1998.
- [30] Huang W., Wang T-J., Garbatov Y., Guedes Soares C. Fatigue reliability assessment of riveted lap joint of aircraft structures. *Int J Fatigue* 2012;43:pp. 54–61.
- [31] Jiang Y., Xu B.: Deformation analysis of notched components and assessment of approximate methods. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2001;24:pp. 729–740.
- [32] Jirasek M., Bazant Z.P.: *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley; 2001.
- [33] Karolczuk A.: *Nielokalne metody obliczeń zmęczeniowych*. Opole: OWPO; 2009.
- [34] Karolczuk A., Blacha Ł.: Fatigue life estimation under variable amplitude bending using the non-local damage parameter and multisurface plasticity model. *Int J Fatigue* 2011;33:pp. 1376–1383.
- [35] Karolczuk A., Cichański A.: Uśrednianie odkształceń w płaszczyźnie krytycznej materiału w ocenie trwałości zmęczeniowej elementów z karbem. *Acta Mech Autom* 2010;Vol. 4, no. 2:ss. 86–92.
- [36] Karolczuk A., Kluger K., Łagoda T.: A correction in the algorithm of fatigue life calculation based on the critical plane approach. *Int J Fatigue* 2016;83:pp. 174–183.
- [37] Kocańda S., Szala J.: *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*. PWN. Warszawa: 1997.
- [38] Krzyżak D., Kurek M., Łagoda T., Sowka D.: Influence of changes of the bending plane position on the fatigue life. *Mater Werkst* 2014;45:pp. 1018–1029.
- [39] Krzyżak D., Łagoda T.: Analiza trwałości zmęczeniowej elementów kolejowego haka i sprzęgu ciągłowego. *Transp Przem Masz Robocze* 2014;Nr. 2:ss. 58–62.
- [40] Krzyżak D., Łagoda T.: Analiza przyczyn rozerwania pociągów towarowych spowodowanych zerwaniem drąga haka ciągłowego. *Przegląd Komun* 2014;Nr. 3:ss. 15–19.
- [41] Krzyżak D., Łagoda T.: Fatigue life estimation of notched elements with use of non-local volumetric method. *Int J Fatigue* 2014;61:pp. 59–66.
- [42] Krzyżak D., Robak G., Łagoda T.: Equivalent Fatigue Zone in a Notched Elements Determined by Use of Non-Local Line Method with Weight Function. *Solid State Phenom* 2016;Vol. 250:pp 77–84.
- [43] Krzyżak D., Robak G., Łagoda T.: Non-local line method for notched elements with use of effective length calculated in an elasto-plastic condition. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2016:doi:10.1111/ffe.12478.

- [44] Krzyżak D., Robak G., Łagoda T.: Determining fatigue life of bent and tensioned elements with a notch, with use of fictitious radius. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2015;38:pp. 693–699.
- [45] Krzyżak D., Robak G., Łagoda T.: Application of Fictitious Radius to Fatigue Life Calculations of Bending Notched Specimens. *Key Eng Mater* 2014;598:pp. 119–124.
- [46] Kuguel R.: A relation between theoretical stress concentration factor and fatigue notch factor deduced from the concept of highly stressed volume. *ASTM Proc* 61 732–744 1961.
- [47] Kuhn P., Hardrath HF.: An engineering method for estimating notch-size effect in fatigue tests on steel. *NACA-TN-2805* 1952.
- [48] Kurek M., Łagoda T., Warmuzek P.: Determination of Stress and Strain Concentrations in the Elastic-Plastic Materials Under Bending and Torsion. *Mater Sci* 2012;47:pp. 545–552.
- [49] LabVIEW User manual - National Instruments.
- [50] Łagoda T.: *Lifetime Estimation of Welded Joints*. Springer Berlin Heidelberg; 2008.
- [51] Łagoda T., Macha E.: Energy approach to fatigue under combined cyclic bending with torsion of smooth and notched specimens. *Mater Sci* 1998;34:pp. 630–639.
- [52] Łagoda T., Macha E., Achteлик H.: *Trwałość zmęczeniowa z uwzględnieniem gradientów naprężeń w ujęciu energetycznym*. Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej; 2002.
- [53] Łagoda T., Ogonowski P.: Criteria of multiaxial random fatigue based on stress, strain and energy parameters of damage in the critical plane. *Mater Werkst* 2005;36:pp. 429–437.
- [54] Łagoda T., Ogonowski P.: Kryteria wieloosiowego zmęczenia losowego oparte na naprężeniowych, odkształceniowych i energetycznych parametrach uszkodzenia w płaszczyźnie krytycznej. *Przegląd Mech* 2004;nr 7-8:ss. 32–40.
- [55] Łagoda T., Robak G., Słowik J.: Fatigue life of steel notched elements including the complex stress state. *Mater Des* 2013;51:pp. 935–942.
- [56] Lanning DB., Nicholas T., Haritos GK.: On the use of critical distance theories for the prediction of the high cycle fatigue limit stress in notched Ti-6Al-4V. *Int J Fatigue* 2005;27:pp. 45–57.
- [57] Lawrence F V., Ho N J., Mazumdar P K.: Predicting the fatigue resistance of welds. *Ann Rev Mater Sci* 1981:pp. 401–425.
- [58] Lazzarin P., Berto F.: Control volumes and strain energy density under small and large scale yielding due to tension and torsion loading. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2008;31:pp. 95–107.
- [59] Lazzarin P., Tovo R., Meneghetti G.: Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity. *Int J Fatigue* 1997;19:pp. 647–657.
- [60] Leis B.N., Gowda CV.B., Topper, T.H.: Some studies of the influence of localized and grow plasticity on the monotonic and cyclic concentration factors. *J Test Eval* 1973:pp. 341–348.
- [61] Lin'kov AM.: Loss of stability, characteristic length, and Novozhilov-Neuber criterion in fracture mechanics. *Mech Solids* 2011;45:pp. 844–855.
- [62] Louks R., Susmel L.: The linear-elastic Theory of Critical Distances to estimate high-cycle fatigue strength of notched metallic materials at elevated temperatures. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2015;38:pp. 629–640.
- [63] Łukaszewicz K., Osipiuk W.: Prognozowanie trwałości zmęczeniowej elementów z karami. *Acta Mech Autom* 2011;Vol. 5, no. 1:ss. 53–58.

- [64] Macha E.: Modele matematyczne trwałości zmęczeniowej materiałów w warunkach losowego złożonego stanu naprężenia. Wrocław: Wydawnictwa PW; 1979.
- [65] Maggiolini E., Livieri P., Tovo R.: Implicit gradient and integral average effective stresses: relationships and numerical approximations. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2015;38:190–199.
- [66] Matake T.: An Explanation on Fatigue Limit under Combined Stress. *Bull JSME* 1977;20:pp. 257–263.
- [67] MATLAB Getting Started Guide.
- [68] Miner MA.: Cumulative damage in fatigue. *J Appl Mech* 1945:pp. 159–164.
- [69] Moftakhar A., Buczynski A., Glinka G.: Calculation of elasto-plastic strains and stresses in notches under multiaxial loading. *Int J Fract* 1994;70:pp. 357–373.
- [70] Molski K., Glinka G.: A Method of Elastic-Plastic Stress and Strain Calculation at a Notch Root. *Mater Sci Eng n.d.*:pp. 93–100.
- [71] Morel F., Palin-Luc T.: A non-local theory applied to high cycle multiaxial fatigue. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2002;25:pp. 649–665.
- [72] Mróz Z., Seweryn A., Tomczyk A.: Fatigue crack growth prediction accounting for the damage zone. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2005;28:pp. 61–71.
- [73] Neuber H.: *Kerbspannungslehre - Grundlagen für Genaue Spannungsrechnung*. Springer; 1937.
- [74] Neuber H.: *Kerbspannungslehre - Grundlagen für genaue Festigkeitsberechnung mit Berücksichtigung von Konstruktionsform und Werkstoff*. Springer; 1958.
- [75] Neuber H.: *Kerbspannungslehre*, Springer, Berlin. Translation: *Theory of Notch Stresses*. U.S. Office of Technical Services, Washington, DC; 1961.
- [76] Neuber H.: Über die berücksichtigung der spannungskonzentration bei festigkeitsberechnungen. *Konstruktion* 1968:s. 245–251.
- [77] Neuber H.: Theory of Stress Concentration for Shear Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Non Linear Stress Strain Law. *J Appl Mech* 1961:pp. 544–550.
- [78] Noda N-A., Sera M., Takase Y.: Stress concentration factors for round and flat test specimens with notches. *Int J Fatigue* 1995;17:pp. 163–178.
- [79] Novozhilov VV.: On a necessary and sufficient criterion for brittle strength: PMM vol. 33, no 2, 1969, pp. 212–222. *J Appl Math Mech* 1969;33:pp. 201–210.
- [80] NX Nastran 7.1 Advanced Nonlinear Theory and Modeling Guide. Siemens; 2010.
- [81] Palin-Luc T., Lasserre S.: An energy based criterion for high cycle multiaxial fatigue. *Eur J Mech - ASolids* 1998;17:pp. 237–251.
- [82] Papadopoulos IV., Panoskaltsis VP.: Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. *Eng Fract Mech* 1996;55:pp. 513–528.
- [83] Park J., Nelson D.: Evaluation of an energy-based approach and a critical plane approach for predicting constant amplitude multiaxial fatigue life. *Int J Fatigue* 2000;22:pp. 23–39.
- [84] Peterson R. E.: *Stress Concentration Factors*. John Wiley, New York, 1974.
- [85] Peterson R. E.: Notch-sensitivity. In *Metal Fatigue* 1959:pp. 293–306.
- [86] Pluvinage G.: *Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 2004.
- [87] PN-88/H-84027.04 Stal dla kolejnictwa - Odkuwki urządzenia sprzęgowego - Gatunki.
- [88] PN-EN-15566+A1:2011, Kolejnictwo - Urządzenie ciąglowe i sprzęg śrubowy.
- [89] Poutiainen I., Tanskanen P., Marquis G.: Finite element methods for structural hot spot stress determination - a comparison of procedures. *Int J Fatigue* 2004;26:pp. 1147–1157.
- [90] Quality certificate No 12086/2013/(125). Akrostal sp. z o. o. Poznań.

- [91] Qylafku G., Azari Z., Kadi N., Gjonaj M., Pluvillage G.: Application of a new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats. *Int J Fatigue* 1999;21:pp. 753–760.
- [92] Qylafku G., Kadi N., Dobranski J., Azari Z., Gjonaj M., Pluvillage G.: Fatigue of specimens subjected to combined loading. Role of hydrostatic pressure. *Int J Fatigue* 2001;23:pp. 689–701.
- [93] Radaj D., Berto F., Lazzarin P.: Local fatigue strength parameters for welded joints based on strain energy density with inclusion of small-size notches. *Eng Fract Mech* 2009;76:pp. 1109–1130.
- [94] Radaj D., Sonsino C.M., Fricke W.: *Fatigue Assessment of Welded Joints by Local Approaches*, 2nd Edition. Woodhead Publishing; 2006.
- [95] Radaj D., Vormwald M.: *Advanced methods of fatigue Assessment*. Springer; 2013.
- [96] Ralph I. Stephens, Ali Fatemi, Robert R. Stephens: *Metal Fatigue in Engineering*, 2nd Edition. Wiley; 2001.
- [97] Ramberg W., Osgood W.: Description of stress-strain curves by three parameters. Tech Note No 902 Natl Advis Comm Aeronaut 1943.
- [98] Ritchie RO., Knott JF., Rice JR.: On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel. *J Mech Phys Solids* 1973;21:pp. 395–410.
- [99] Robak G., Szymaniec M., Łagoda T.: The Fictitious Radius as a Tool for Fatigue Life Estimation of Notched Elements. *Mater Sci Forum* 2012;726:pp. 27–32.
- [100] Savaidis G., Vormwald M.: Hot-spot stress evaluation of fatigue in welded structural connections supported by finite element analysis. *Int J Fatigue* 2000;22:pp. 85–91.
- [101] Seweryn A., Mróz Z.: A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading. *Eng Fract Mech* 1995;51:pp. 955–973.
- [102] Seweryn A., Mróz Z.: On the criterion of damage evolution for variable multiaxial stress states. *Int J Solids Struct* 1998;35:pp. 1589–1616.
- [103] Shang D-G., Wang D-K., Li M., Yao W-X.: Local stress-strain field intensity approach to fatigue life prediction under random cyclic loading. *Int J Fatigue* 2001;23:pp. 903–910.
- [104] Shen F., Voyiadjis GZ., Hu W., Meng Q.: Analysis on the fatigue damage evolution of notched specimens with consideration of cyclic plasticity. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2015;38:pp. 1194–1208.
- [105] Sheppard SD.: Field Effects in Fatigue Crack Initiation: Long Life Fatigue Strength. *J Mech Des* 1991;113:pp. 188–194.
- [106] Skorupa A., Skorupa M., Machniewicz T., Korbel A.: Fatigue crack location and fatigue life for riveted lap joints in aircraft fuselage. *Int J Fatigue* 2014;58:pp. 209–217.
- [107] Skorupa M., Machniewicz T., Skorupa A., Korbel A.: Fatigue strength reduction factors at rivet holes for aircraft fuselage lap joints. *Int J Fatigue* 2015;80:pp. 417–425.
- [108] Skorupa M., Skorupa A., Machniewicz T., Korbel A.: Effect of production variables on the fatigue behaviour of riveted lap joints. *Int J Fatigue* 2010;32:pp. 996–1003.
- [109] Słowik J., Łagoda T.: Wpływ złożonego stanu naprężenia w dnie karbu na trwałość zmęczeniową elementów maszyn. OWPO. Opole: 2008.
- [110] Słowik J., Łagoda T.: Zastosowanie metod numerycznych w wyznaczaniu rozkładu naprężeń i odkształceń w elementach z karbem obrączkowym. *Gór Odkryw* 2006;R 48, nr 7-8:ss. 141–145.

- [111] Sonsino CM., Łagoda T.: Assessment of multiaxial fatigue behaviour of welded joints under combined bending and torsion by application of a fictitious notch radius. *Int J Fatigue* 2004;26:pp. 265–279.
- [112] Strzelecki P., Sempruch J.: Analytical-experimental method of determining fatigue characteristics for design elements. *J Pol CIMAC* 2012;Vol. 7, no 3:pp. 285–292.
- [113] Susmel L.: The theory of critical distances: a review of its applications in fatigue. *Eng Fract Mech* 2008;75:pp. 1706–1724.
- [114] Susmel L.: A unifying approach to estimate the high-cycle fatigue strength of notched components subjected to both uniaxial and multiaxial cyclic loadings. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2004;27:pp. 391–411.
- [115] Susmel L.: *Multiaxial Notch Fatigue*. Elsevier; 2009.
- [116] Susmel L., Lazzarin P.: A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 2002;25:pp. 63–78.
- [117] Susmel L., Taylor D.: The Theory of Critical Distances to estimate lifetime of notched components subjected to variable amplitude uniaxial fatigue loading. *Int J Fatigue* 2011;33:pp. 900–911.
- [118] Susmel L., Taylor D.: Estimating Lifetime of Notched Components Subjected to Variable Amplitude Fatigue Loading According to the Elastoplastic Theory of Critical Distances. *J Eng Mater Technol-Trans Asme* 2015;137:011008.
- [119] Szusta J., Seweryn A.: Damage accumulation modeling under uniaxial low cycle fatigue at elevated temperatures. *Eng Fail Anal* 2015;56:pp. 474–483.
- [120] Szusta J., Seweryn A.: Low-cycle fatigue model of damage accumulation – The strain approach. *Eng Fract Mech* 2010;77:pp. 1604–1616.
- [121] Tanaka K.: Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches. *Int J Fract* 1983.
- [122] Taylor D.: *The Theory of Critical Distances. A New Perspective in Fracture Mechanics*. Oxford: Elsevier; 2007.
- [123] Taylor D.: The theory of critical distances. *Eng Fract Mech* 2008;75:pp.1696–705.
- [124] Taylor D.: Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *Int J Fatigue* 1999;21:pp. 413–420.
- [125] Tovo R., Livieri P.: An implicit gradient application to fatigue of complex structures. *Eng Fract Mech* 2008;75:pp. 1804–1814.
- [126] Triangulation. http://doc.cgal.org/latest/Triangulation_2/index.html. 2015-12-14
- [127] Walter D. Pilkey, Deborah F. Pilkey.: *Peterson's Stress Concentration Factors*, 3rd Edition. Wiley; 2008.
- [128] Weixing Y.: Stress field intensity approach for predicting fatigue life. *Int J Fatigue* 1993;15:pp. 243–246.
- [129] Weixing Y.: The prediction of fatigue behaviours by stress field intensity approach. *Acta Mech Solida Sin* 1996;9:pp. 337–349.
- [130] Yao W., Xia K., Gu Y.: On the fatigue notch factor, Kf. *Int J Fatigue* 1995;17:pp. 245–251.
- [131] Zalt A., Gilgert J., Azari Z.: Application of the volumetric method on welded structures. *Int J Fatigue* 2011;33:pp. 1583–1591.
- [132] Zienkiewicz O. C.: *The finite element method in engineering science*. McGraw-Hill; 1971.

Załączniki

Tabela. Z1. Dane eksperymentalne próbek gładkich z próby rozciągania-ściskania dla stali EA4T (N_f dla długości pęknięcia $a = 0,1$ mm)

Nr	σ_{nom} , MPa	N_f , -
1	337,5	193230
2	337,4	184830
3	427	11540
4	430,4	7520
5	253,8	$1,5 \cdot 10^6$
6	460,2	4740
7	292,9	407030
8	298,9	400120

Tabela Z2. Dane eksperymentalne próbek gładkich z próby rozciągania-ściskania dla stali 42CrMo4+QT (N_f dla długości pęknięcia $a = 0,1$ mm)

Nr	σ_{nom} , MPa	N_f , -
1	623	57040
2	732,7	7080
3	623	50960
4	781,8	2230
5	571,7	90700
6	539,8	73530
7	546	45800
8	549	108780
9	556,5	37910
10	672	23960
11	671	24810
12	833	750
13	466,4	131310
14	469,8	113060
15	464,6	117610
16	467	180040
17	467	132720
18	467	228120

Tabela Z3. Dane eksperymentalne próbek z karbem z próby cyklicznego zginania dla stali 42CrMo4+QT (N_f dla długości pęknięcia $a = 0,1$ mm)

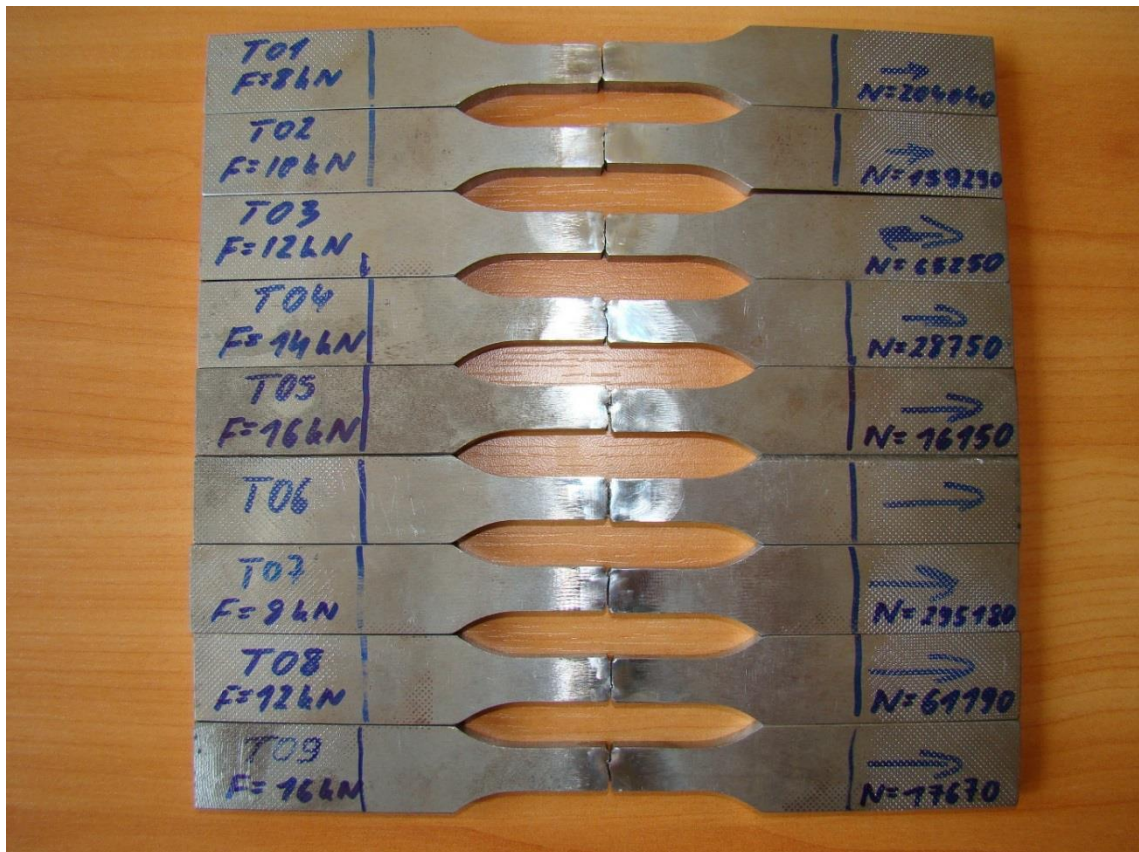
Nr	$R = 0,2$ mm		$R = 0,5$ mm		$R = 0,8$ mm		$R = 1$ mm	
	σ_{nom} , MPa	N_f , -	σ_{nom} , MPa	N_f , -	σ_{nom} , MPa	N_f , -	σ_{nom} , MPa	N_f , -
1	264	49985	265	177440	341	70337	341	67062
2	259	88246	265	266971	360	40506	315	182472
3	234	94032	293	56205	366	30235	292	213403
4	287	45144	246	168160	318	66235	363	37517
5	215	200506	221	279863	318	73030	360	63909
6	217	148717	290	77579	287	147918	391	30078
7	290	35517	315	42410	394	17876	411	23116
8	232	103871	341	13758	393	22641	444	14746
9	185	272289	369	26480	412	15284	450	19843
10	312	28509	402	15258	433	12002	467	11878
11	-	-	402	10667	291	121721	-	-
12	-	-	-	-	272	142679	-	-

Tabela Z4. Dane eksperymentalne próbek z karbem z próby cyklicznego wahadłowego zginania dla stali EA4T (N_f dla długości pęknięcia $a = 0,1$ mm)

Nr	$R = 0,2$ mm	
	σ_{nom} , MPa	N_f , -
1	178	60920
2	214	36652
3	250	15169
4	286	7015
5	107	4463
6	143	129005
7	214	16170
8	285	3908



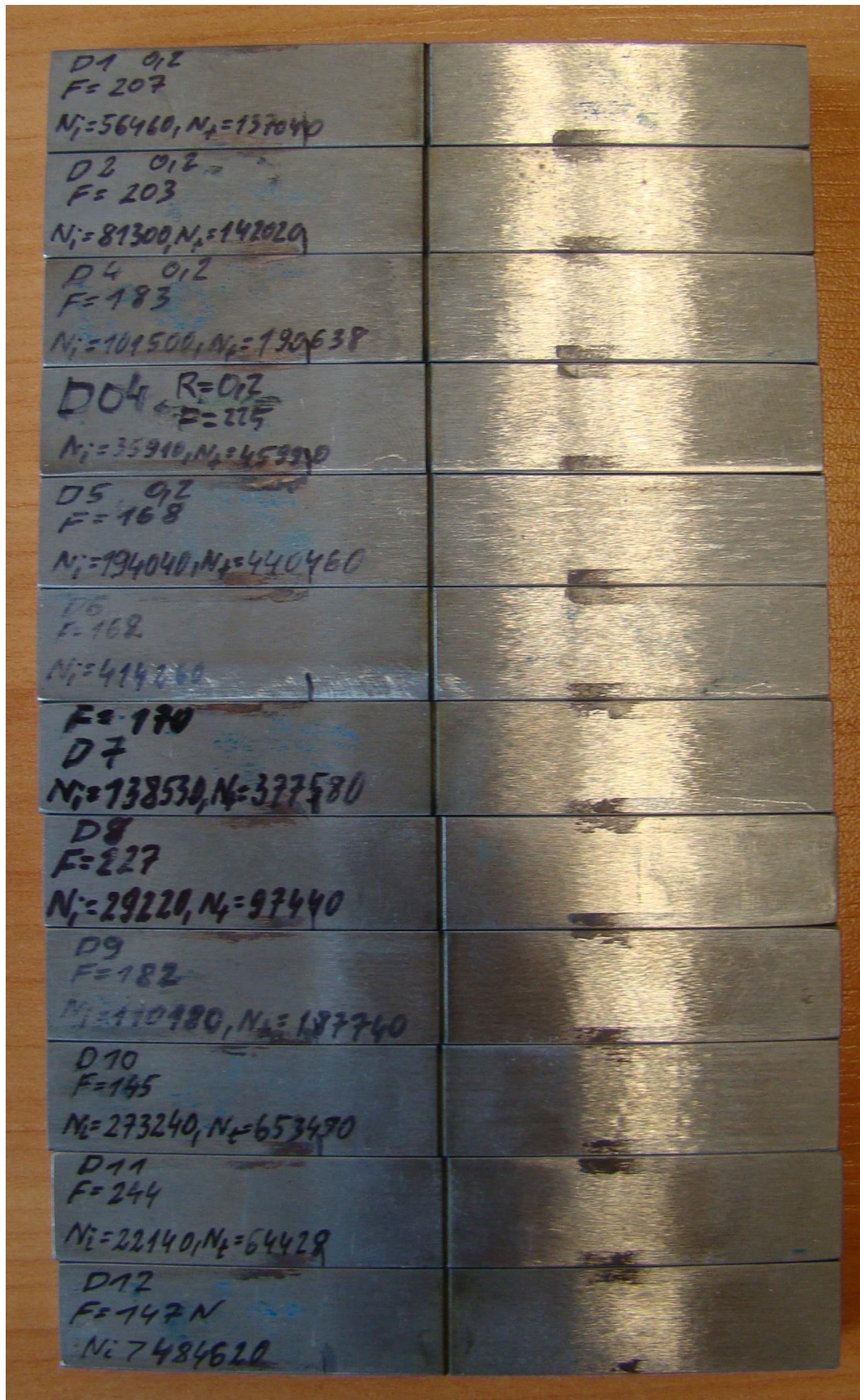
Rys. Z1. Próbki gładkie ze stali EA4T



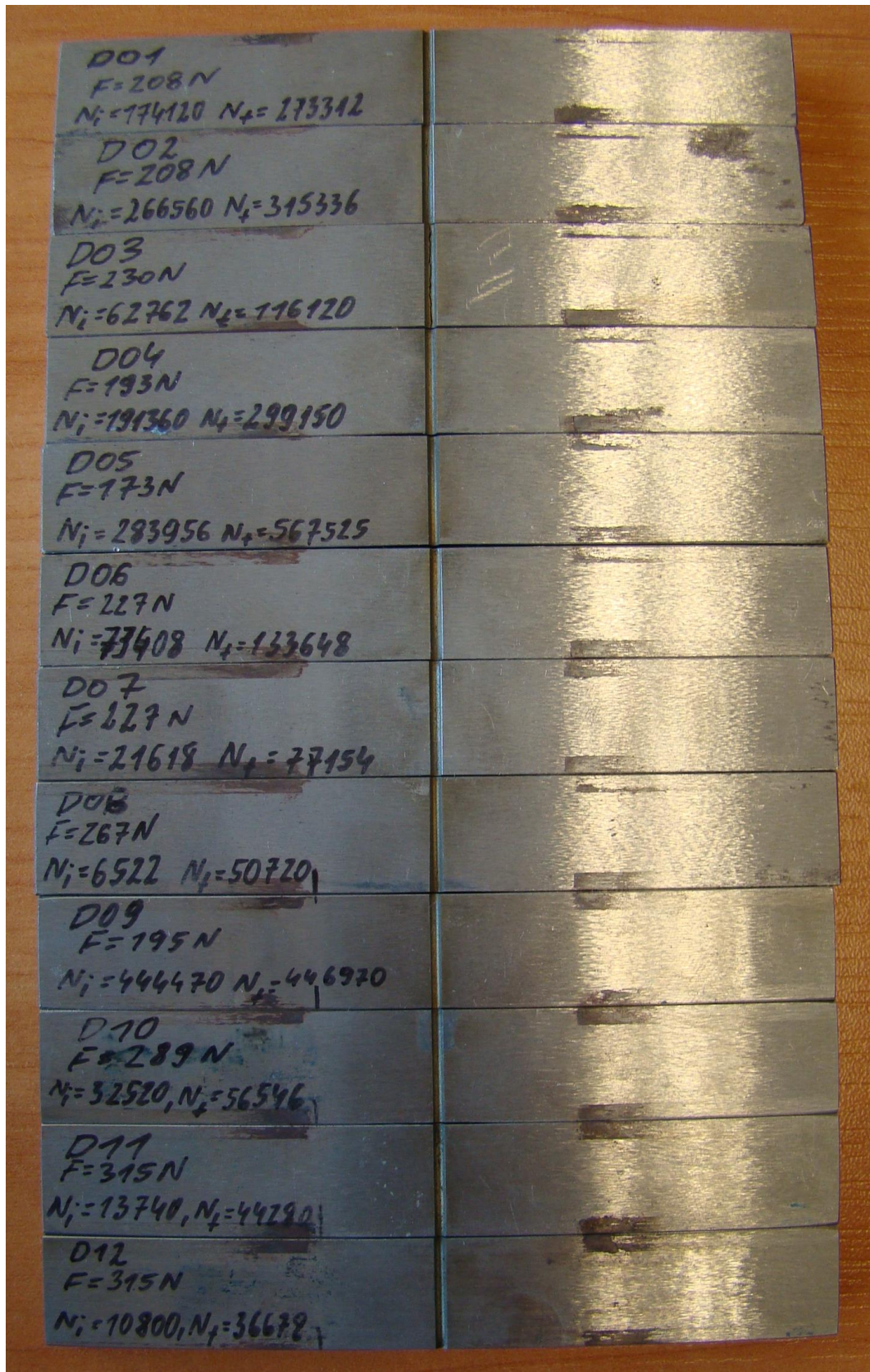
Rys. Z2. Próbkki z karbem $R = 0,2$ mm ze stali EA4T



Rys. Z3. Próbkki gładkie ze stali 42CrMo4+QT



Rys. Z4. Próbkę z karbem $R = 0,2$ mm ze stali 42CrMo4+QT (D05 i D12 nieuwzględnione w charakterystyce)



Rys. Z5. Próbkki z karbem $R = 0,5$ mm ze stali 42CrMo4+QT (D09 nieuwzględnione w charakterystyce)

Rys. Z6. Próbkki z karbem $R = 0,8$ mm ze stali 42CrMo4+QT



Rys. Z7. Próbkki z karbem $R = 1$ mm ze stali 42CrMo4+QT (D11 nieuwzględnione w charakterystyce)

Zastosowanie metod nielokalnych przy wyznaczaniu trwałości zmęczeniowej elementów z karbem

Streszczenie

Celem pracy było zastosowanie wybranych metod do obliczenia trwałości zmęczeniowej elementów z karbem oraz opracowanie własnego modelu obliczeniowego. We własnym modelu uwzględniono cykliczne właściwości materiałowe, przebieg zmian efektywnego naprężenia w płaszczyźnie krytycznej oraz zastosowano funkcję wagową. Obliczenia naprężeń wykonano z wykorzystaniem analizy MES i modelu wieloliniowego umocnienia. Badania eksperymentalne, obliczenia MES oraz symulacje numeryczne wykonano dla dwóch rodzajów stali: EA4T i 42CrMo4+QT. Badania eksperymentalne wykonano na próbkach gładkich i próbkach z karbem o 4 różnych promieniach. Próbki z karbem zbadano przy obciążeniu rozciągania-ściskania (EA4T) i wahadłowego zginania (42CrMo4+QT). Jako kryterium zniszczenia i trwałość eksperymentalna próbek z karbem przyjęto liczbę cykli przy długości pęknięcia równej 0,1 mm.

Obliczenia według metody nielokalnej, przeprowadzono przez uśrednianie rozkładu naprężenia normalnego w płaszczyźnie krytycznej wraz z funkcją wagową. Odcinek uśredniania reprezentujący ekwiwalentną strefę zmęczeniową określono mianem długości efektywnej. W algorytmie obliczeniowym wyznaczono punkt bazowy na powierzchni dna karbu, dla którego wyznaczono położenie płaszczyzny krytycznej. Do obliczenia rozkładu naprężenia w płaszczyźnie krytycznej zastosowano metodę interpolacji. Uśrednianie rozkładu naprężenia wykonano iteracyjnie, przyjmując początek obliczeń w punkcie bazowym na powierzchni dna karbu. Uśredniony na odcinku długości efektywnej rozkład naprężenia normalnego w płaszczyźnie krytycznej, odpowiadał poziomowi naprężenia z próby rozciągania-ściskania próbek gładkich, odczytanej z charakterystyki zmęczeniowej.

We wnioskach wskazano, że długość efektywna jest zmienna w funkcji poziomu obciążenia i promienia karbu. Zmienność długości efektywnej opisano równaniem liniowym i równaniem płaszczyzny. Wartości długości efektywnej zwiększają się wraz ze wzrostem obciążenia i promienia karbu. Porównane wyniki trwałości obliczeniowej z eksperymentalną, dla zastosowanego równania liniowego lub równania płaszczyzny, znajdowały się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 2.