ISSN 1507-3866
e-ISSN 2449-9994

Antoni Smoluk
e-mail: math@ue.wroc.pl

PROSTY DOWÓD TWIERDZENIA O CZTERECH BARWACH

A SIMPLE PROOF OF THE FOUR-COLORS THEOREM

DOI: 10.15611/ekt.2017.1.02

Streszczenie: W pracy indukcyjnie dowodzi się twierdzenie o czterech barwach. Korzysta się z pojęcia produktu map i minimalnych kolorowań lokalnych.

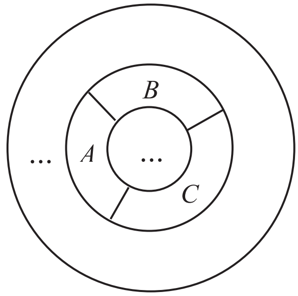
Słowa kluczowe: mapa, minimalne kolorowanie lokalne, rozszerzenie kolorowania lokalnego, pierścień rozcinający, mapa prosta, produkt map, redukcja granicy.

Summary: The paper includes an inductive proof of the four-colors theorem. The notions of product of maps and minimum local colorings are applied.

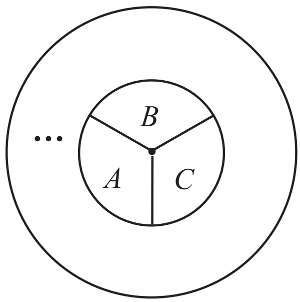
Keywords: map, minimum local coloring, extension of local coloring, ring slotting, simple map, product of maps, reduction of border.

W artykule rozpatruje się klasyczne mapy płaskie lub równoważne z nimi mapy sferyczne. Mapa to wierzchołki, granice, kraje; wierzchołek jest punktem, w którym spotykają się granice, granica jest linią rozdzielającą kraje, kraj jest wielobokiem o brzegach być może zakrzywionych. Kraje mające wspólny wierzchołek V nazywamy mapą lokalną. Z twierdzenia o czterech barwach wynika, że w każdym wierzchołku istnieje zgodne kolorowanie lokalne z co najwyżej trzema barwami; nazywamy je kolorowaniem lokalnym w wierzchołku V. Jest to oczywiście kolorowanie zgodne – kraje sąsiednie, czyli mające wspólną granice, oznaczone są różnymi barwami. Naturalnie kraje mające tylko wspólny wierzchołek nie są uważane za sąsiednie. Mapa M jest iloczynem map M_1 i M_2 , jeżeli zawiera pas rozcinający ją złożony z trzech lub mniejszej liczby państw (rys. 1).

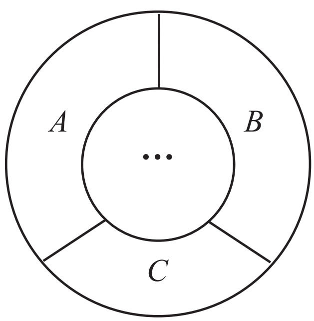
Pierścień oddzielający mapę M_1 oraz M_2 wchodzi do mapy zarówno $M_{1,}$ jak i M_2 – on je łączy. Mapę M_1 reprezentują trzy kropki leżące na zewnątrz pasa rozcinającego, natomiast mapę M_2 trzy kropki leżące wewnątrz tego pasa (rys. 2 i 3).



Rys. 1. Pierścień rozcinający mapę



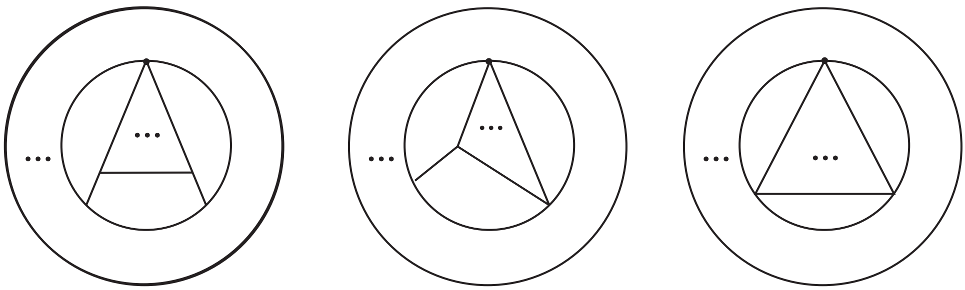
Rys. 2. Mapa M_1



Rys. 3. Mapa M_2

Koło zewnętrze na rysunkach zawsze ściąga się do jednego punktu – bieguna północnego, który jest punktem dodanym przy jednopunktowej kompaktyfikacji płaszczyzny – jest nią oczywiście sfera; jest to albo punkt zwykły, albo wierzchołek mapy, jeżeli do koła zewnętrznego dochodzą granice.

Uwaga. Granice pasa rozdzielającego kraje należące do niego mogą w szczególności redukować się do jednego punktu. Tak więc mogą być jeszcze trzy inne typy pasów rozcinających – spotkamy je w dowodzie; przedstawiono je na rys. 4. Pasy rozdzielające, w których kraje sąsiednie mają jeden punkt wspólny, będziemy uważać za rozcięcia specjalne.



Rys. 4. Pasy specjalne

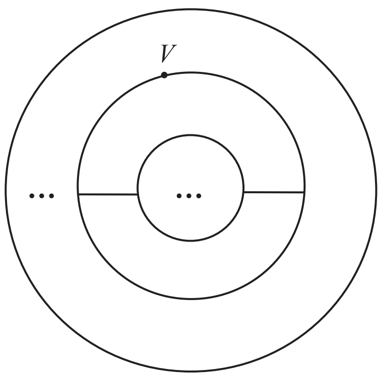
Naturalnie mapa może zawierać pasy rozcinające, utworzone tylko z dwóch państw, a nawet jednego. Pasy rozcinające redukują kolorowanie map złożonych do kolorowania map mniejszych i następnie ich sklejania – produkowania.

Lemat. Jeżeli mapa jest prosta, czyli nie jest produktem map mniejszych, to w każdym wierzchołku tej mapy istnieje kolorowanie lokalne dwiema barwami, gdy wierzchołek jest parzysty – jednoczy parzystą liczbę państw, lub trzema barwami – gdy wierzchołek jest nieparzysty.

Kolorowanie lokalne nazywa się kolorowaniem minimalnym, jeżeli użyto tylko dwóch barw lub trzech, ale jedną z nich tylko raz. Jeżeli do kolorowania minimalnego użyto tylko dwóch barw, wtedy dowolną granicę kończącą się wierzchołkiem V ściągamy do tego wierzchołka; jeżeli użyto trzech barw, wtedy ściągamy do punktu V granicę przyległą do państwa oznaczonego trzecim kolorem – tym występującym tylko jeden raz. Po tej operacji w wierzchołku V znajdzie się kilka państw niepokolorowanych. Ponieważ mapa M jest nierozkładalna, więc wyjściowe kolorowanie minimalne można rozszerzyć do kolorowania minimalnego mapy M′ powstałej z M przez redukcję jednej granicy. Naturalnie w każdym wierzchołku mapy prostej istnieje kolorowanie minimalne.

Twierdzenie. Jeżeli mapa jest prosta, to każde kolorowanie minimalne rozszerza się do zgodnego kolorowania całej mapy co najwyżej czterema barwami.

Dowód jest indukcyjny. Jeżeli mapa zawiera n lub mniej granic, to twierdzenie jest prawdziwe. Niech M ma $n + 1$ granic. W wierzchołku V bierzemy dowolne kolorowanie minimalne. Na podstawie założenia indukcyjnego, gdy zredukowana mapa jest prosta, istnieje rozszerzenie powiększonego kolorowania minimalnego do zgodnego kolorowania co najwyżej czterema barwami całej mapy. Jeżeli zredukowana mapa *M′* nie jest mapą prostą, wtedy jest iloczynem map mniejszych. Do tych map mniejszych stosuje się indukcję lub rozkłada się na jeszcze mniejsze czynniki. Pas rozcinający *M′* przechodzi zawsze przez wierzchołek *V* i ma jeden z kształtów przedstawionych na rys. 4. Jest to oczywiście pas specjalny. Jeżeli kraje *A* i *B* należące do minimalnego kolorowania *V* i jednocześnie do pasa rozcinającego mają różne kolory, wtedy mapy M_1 i M_2 są takie, jak przestawione na rys. 2 i 3. Jeżeli te kraje mają kolor zgodny, wtedy łączymy je w jeden kraj i otrzymujemy pas złożony tylko z dwóch państw, przedstawiony na rys. 5. Zawsze więc można skleić mapę M_1 i M_2 bez psucia minimalnego kolorowania mapy *M′* powstałej z *M* przez redukcję jednej granicy kończącej się punktem *V*. Stąd regenerując zredukowaną granicę, można powrócić do mapy *M* i w ten sposób mamy rozszerzenie kolorowania minimalnego do zgodnego kolorowania całej mapy *M* co najwyżej czterema barwami. Dowód jest więc zakończony.



Rys. 5. Jeden kolor na ścieżce rozcinającej

Literatura przedmiotu jest bogata, różnorodna i łatwo dostępna. Brak powołań oznacza, że autor z niej nie korzystał. Możliwe podobieństwa nie tyle świadczą o zależności wyników, ile wynikają z logiki przedmiotu.