PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 183
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek 2011

Jan Acedański
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

E-STABILNOŚĆ MODELI ADAPTACYJNEGO UCZENIA SIĘ DYNAMIKI CEN AKCJI

Streszczenie: Założenie o adaptacyjnym uczeniu się podmiotów (AL) stanowi poważną alternatywę dla hipotezy racjonalnych oczekiwań (RE) leżącej u podstaw wielu współczesnych modeli ekonomicznych. Jednym z kluczowych zagadnień w tej kwestii jest problem zbieżności algorytmów AL do rozwiązań RE. Warunek E-stabilności, wywodzący się z teorii rekurencyjnych algorytmów stochastycznych, jest podstawowym narzędziem teoretycznym badania zbieżności. W pracy analizowano model AL dynamiki cen akcji dla różnych sposobów modelowania dynamiki strumienia dywidend oraz czynnika dyskontującego. W każdym przypadku stwierdzono teoretycznie, że algorytm rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów jest zbieżny lokalnie do rozwiązania RE.

Słowa kluczowe: wycena akcji, racjonalne oczekiwania, adaptacyjne uczenie się, E-stabilność.

1. Wstęp

Hipoteza racjonalnych oczekiwań (*rational expectations* – RE) jest jednym z kluczowych składników klasycznej teorii wyceny aktywów. Istnieje jednak bardzo wiele prac wskazujących, że w rzeczywistości oczekiwania inwestorów nie są racjonalne (zob. [Bulkley, Harris 1997; Shleifer 2000; Shiller 2005; Gao, Song, Wang 2008]). W efekcie w ostatnich latach pojawiły się nowe koncepcje teoretyczne, które starają się wyjaśnić obserwowane zachowanie się cen akcji bez odwoływania się do hipotezy racjonalnych oczekiwań (zob. [Szyszka 2007]). Jedną z nich jest koncepcja adaptacyjnego uczenia się inwestorów (*adaptive learning* – AL).

Hipoteza RE w wersji przedstawionej przez Mutha [1961] odnosi się do sposobu modelowania oczekiwań w modelach ekonomicznych. Postuluje ona, aby oczekiwania odnośnie do danej zmiennej były formułowane przy założeniu, że dynamika tej zmiennej będzie dokładnie taka, jak to wynika z modelu. Tymczasem koncepcja AL zakłada, że podmioty nie znają wartości parametrów równań dynamiki zmiennych, co do których oczekiwania są formułowane, ale że szacują je na podstawie przeszłych obserwacji. Tym samym adaptacyjne uczenie się można interpretować jako uogólnienie hipotezy RE. Możliwa jest bowiem sytuacja, gdy przy założeniu AL podmioty formułują swoje oczekiwania w taki sposób, w jaki miałoby to miejsce przy zastosowaniu hipotezy racjonalnych oczekiwań, a więc że „nauczą się" prawidłowo formułować oczekiwania. Wówczas oczywiście dynamika modelowanych zmiennych w obu wersjach będzie identyczna.

W ostatnich latach zastosowanie koncepcji AL w modelach cen akcji jest coraz bardziej popularne. Różne aspekty tego problemu poruszane były m.in. w artykułach [Timmermann 1993; Carceles-Poveda, Giannitsarou 2008; Adam, Marcet, Nicolini 2008]. W pracach [Acedański 2009a, 2009b, 2010] badano klasyczny model zdyskontowanych dywidend w sytuacji, gdy dynamika dywidend oraz czynnika dyskontującego dane są oddzielnym modelem makroekonomicznym. Pokazano tam, że zastąpienie hipotezy racjonalnych oczekiwań założeniem o adaptacyjnym uczeniu się inwestorów pozwala na częściowe wyjaśnienie takich zjawisk, jak prognozowalność premii akcyjnej oraz jej wysoki poziom przeciętny.

Niniejsza praca stanowi kontynuację opisanych wyżej badań. Jej celem jest formalne zbadanie zbieżności rozwiązań AL do rozwiązań RE w kilku modelach rozpatrywanych we wspomnianych pracach [Acedański 2009a, 2010], czyli zbadanie, czy dynamika cen akcji w wersji AL, która początkowo różni się od dynamiki uzyskanej przy założeniu RE ze względu na różnice w wartościach parametrów opisujących oczekiwania, w miarę upływu czasu coraz bardziej zbliża się do dynamiki cen akcji w wersji RE. Innymi słowy, bada się, czy podmioty są w stanie nauczyć się formułować oczekiwania dotyczące dynamiki cen akcji w sposób racjonalny.

W cytowanych badaniach analizę zbieżności przeprowadzono bardzo pobieżnie, korzystając z wykresów dynamiki szacowanych współczynników równań, na podstawie których formułowano oczekiwania co do przyszłego zachowania się cen akcji. Stwierdzono, że przy zastosowaniu klasycznej metody najmniejszych kwadratów jako metody szacowania wartości współczynników taka zbieżność nie zachodzi. Ta hipoteza jest weryfikowana w pracy przez zastosowanie formalnej teorii rekurencyjnych algorytmów stochastycznych. Jednym z jej kluczowych składników jest pojęcie E-stabilności wyjaśnione w dalszej części pracy.

Badanie zbieżności algorytmów AL do rozwiązań wersji RE jest istotne z dwóch punktów widzenia. Po pierwsze, w przypadku gdy taka zbieżność zachodzi, stanowi to uzasadnienie stosowania hipotezy RE w danym modelu. Po drugie, jest ono ważne wtedy, gdy model przy założeniu racjonalnych oczekiwań ma kilka rozwiązań. Wówczas analiza, do którego z rozwiązań zbieżne są algorytmy AL, pozwala na ich selekcję. Na przykład w przypadku klasycznego modelu zdyskontowanych dywidend istnieją dwa rozwiązania racjonalnych oczekiwań – fundamentalne oraz prowadzące do powstania bąbla spekulacyjnego. Przez analizę zbieżności algorytmu AL stwierdza się, że podmioty stosujące MNK nigdy nie nauczą się tego drugiego rozwiązania (zob. [Evans, Honkapohja 2001, s. 220-222]). W ten sposób można wykluczyć rozwiązanie prowadzące do powstania bąbli spekulacyjnych.

Praca składa się z trzech części. W pierwszej prezentowana jest koncepcja adaptacyjnego uczenia się w klasycznym modelu cen akcji. W drugiej części omawiana jest teoria rekurencyjnych algorytmów stochastycznych oraz pojęcie E-stabilności służące do badania zbieżności algorytmów AL. Kolejna część zawiera wyniki badania zbieżności dla trzech wersji modelu cen akcji rozpatrywanych we wcześniejszych opracowaniach autora. Pracę kończy podsumowanie.

2. Adaptacyjne uczenie się w modelu ceny akcji

Cena akcji P_t w okresie t dana jest ogólnym wzorem:

$$P_t = E_t\left[M_{t+1}P_{t+1} + M_{t+1}D_{t+1}\right] \tag{1}$$

gdzie: M_t – stochastyczny czynnik dyskontujący,

D_t – dywidendy,

E_t – wartość oczekiwana obliczana ze względu na informacje dostępne w okresie t.

W wersji logarytmicznej powyższe równanie przyjmuje postać:

$$p_t = \ln E_t\left[\exp(m_{t+1} + p_{t+1}) + \exp(m_{t+1} + d_{t+1})\right] \tag{2}$$

przy czym małymi literami oznaczono logarytmy odpowiednich zmiennych. Wykorzystując przybliżenie[1] $E(\exp(X)) \cong \exp(E(X) + 0,5D^2(X))$, otrzymujemy:

$$p_t \cong \ln\begin{bmatrix} \exp\left(E_t(m_{t+1} + p_{t+1}) + 0,5D_t^2(m_{t+1} + p_{t+1})\right) + \\ + \exp\left(E_t(m_{t+1} + d_{t+1}) + 0,5D_t^2(m_{t+1} + d_{t+1})\right) \end{bmatrix} = \tag{3}$$

$$= E_t m_{t+1} + \ln\left[\exp\left(E_t p_{t+1} + 0,5D_t^2(m_{t+1} + p_{t+1})\right) + \exp\left(E_t d_{t+1} + 0,5D_t^2(m_{t+1} + d_{t+1})\right)\right]$$

Aproksymując funkcję $\ln\left[\exp(\cdot) + \exp(\cdot)\right]$ w powyższym równaniu wokół punktów $\alpha_p(\overline{p}, m_{t+1}, p_{t+1}) \equiv \overline{p} + 0,5D_t^2(m_{t+1} + p_{t+1})$ oraz $\alpha_d(\overline{d}, m_{t+1}, d_{t+1}) \equiv \overline{d} + 0,5D_t^2(m_{t+1} + d_{t+1})$, gdzie $\overline{p}$ oraz $\overline{d}$ oznaczają poziomy równowagi zmiennych p_t oraz d_t, przy użyciu funkcji liniowej uzyskuje się:

$$\begin{aligned} p_t \cong{} & E_t m_{t+1} + \ln\left[\exp(\alpha_p) + \exp(\alpha_d)\right] + \\ & + \frac{\exp(\alpha_p)E_t(p_{t+1} - \overline{p})}{\exp(\alpha_p) + \exp(\alpha_d)} + \frac{\exp(\alpha_d)E_t(d_{t+1} - \overline{d})}{\exp(\alpha_p) + \exp(\alpha_d)} \end{aligned} \tag{4}$$

---

[1] Wzór ten jest dokładny, jeżeli zmienna losowa X ma rozkład normalny. Jak to będzie pokazane w dalszej części, tak jest w przypadku zmiennych m_t oraz d_t.

Równanie (4) wskazuje, że cena akcji w okresie t zależy od oczekiwanej dynamiki w okresie $t + 1$: stochastycznego czynnika dyskontującego $E_t m_{t+1}$, dywidend $E_t(d_{t+1} - \bar{d})$ oraz ceny akcji $E_t(p_{t+1} - \bar{p})$, a także od warunkowych wariancji: $D_t^2(m_{t+1} + p_{t+1})$ oraz $D_t^2(m_{t+1} + d_{t+1})$ zawartych w składnikach α_p i α_d. Prawa strona powyższego równania stanowi przybliżenie prawej strony wyjściowego równania (2). Przedstawione przybliżenie cechuje się dużą dokładnością, co można sprawdzić, porównując dynamikę cen akcji uzyskaną bezpośrednio z równania (2)[2] oraz z przybliżenia (4).

O zmiennych m_t oraz d_t zakłada się, że ich dynamika jest liniową funkcją wektora zmiennych stanu $\mathbf{s}_t$ oraz zaburzeń stochastycznych $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$:

$$m_t = \bar{m} + \mathbf{M}_m \hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{W}_m \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad d_t = \bar{d} + \mathbf{M}_d \hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{W}_d \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{5}$$

przy czym $\bar{m}$ oraz $\bar{d}$ są parametrami, natomiast $\mathbf{M}_m$, $\mathbf{W}_m$, $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{W}_d$ są wektorami parametrów modelu. Daszek nad zmienną $\mathbf{s}_t$ oznacza odchylenia od poziomu długookresowej równowagi: $\hat{\mathbf{s}}_t = \mathbf{s}_t - \bar{\mathbf{s}}$. Dynamika zmiennych stanu dana jest modelem autoregresyjnym:

$$\hat{\mathbf{s}}_t = \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6}$$

Macierze $\mathbf{M}$ oraz $\mathbf{W}$ są macierzami parametrów modelu. Bardzo wiele współczesnych modeli makroekonomicznych, najczęściej typu DSGE, pozwala na wyrażenie dynamiki czynnika dyskontującego oraz strumienia dywidend właśnie w postaci (5)-(6). W dalszej części dla uproszczenia rozważań zakłada się, że $\bar{m}, \bar{d}, \mathbf{M}, \mathbf{W}, \mathbf{M}_m, \mathbf{W}_m, \mathbf{M}_d, \mathbf{W}_d$ oraz $\boldsymbol{\Sigma}$ są dane.

Dla modelu opisanego układem (4)-(6) dynamika ceny akcji w wersji RE przyjmuje postać [Acedański 2009a]:

$$p_t^{RE} = \bar{p}^{RE} + \mathbf{M}_p^{RE}\hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{W}_p^{RE}\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{7}$$

przy czym parametry $\bar{p}^{RE}$, $\mathbf{M}_p^{RE}$ oraz $\mathbf{W}_p^{RE}$ są funkcjami wyjściowych parametrów modelu $\bar{m}, \bar{d}, \mathbf{M}, \mathbf{W}, \mathbf{M}_m, \mathbf{W}_m, \mathbf{M}_d, \mathbf{W}_d$ oraz $\boldsymbol{\Sigma}$. Równanie to opisuje postrzeganą przez inwestorów dynamikę cen akcji (*perceived law of motion*) i zgodnie z nim formułowane są oczekiwania. Wstawiając je wraz z równaniami (5) oraz (6) do równania ceny akcji (4) i wyliczając występujące tam warunkowe wartości oczekiwane oraz wariancje, uzyskujemy faktyczną dynamikę cen akcji w modelu (*actual law of motion*):

---

[2] Sposób wyznaczenia tej dynamiki zaprezentowano w pracy [Acedański 2010].

$$
\begin{aligned}
p_t = \overline{m} + \ln\left[A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d \right] + \\
+\left(\mathbf{M}_m + \frac{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE})\mathbf{M}_p^{RE} + A_d \mathbf{M}_d}{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d} \right) \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \\
+\left(\mathbf{W}_m + \frac{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE})\mathbf{W}_p^{RE} + A_d \mathbf{W}_d}{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_t
\end{aligned}
\tag{8}
$$

gdzie:

$$
A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}) = \exp\left[\overline{p}^{RE} + 0,5\left(\mathbf{W}_p^{RE} + \mathbf{W}_m\right)\boldsymbol{\Sigma}\left(\mathbf{W}_p^{RE} + \mathbf{W}_m\right)^T \right],
$$

$$
A_d = \exp\left[\overline{d} + 0,5\left(\mathbf{W}_d + \mathbf{W}_m\right)\boldsymbol{\Sigma}\left(\mathbf{W}_d + \mathbf{W}_m\right)^T \right].
$$

Porównując wyrazy wolne oraz współczynniki stojące przy $\hat{\mathbf{s}}_{t-1}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ w równaniach (7) i (8), definiuje się odwzorowanie przekształcające postrzegane równanie dynamiki w rzeczywiste równanie dynamiki:

$$
T\begin{pmatrix} \overline{p}^{RE} \\ \mathbf{M}_p^{RE} \\ \mathbf{W}_p^{RE} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{m} + \ln\left[A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d \right] \\ \left(\mathbf{M}_m + \dfrac{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE})\mathbf{M}_p^{RE} + A_d \mathbf{M}_d}{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d} \right)\mathbf{M} \\ \mathbf{W}_m + \dfrac{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE})\mathbf{W}_p^{RE} + A_d \mathbf{W}_d}{A_p(\overline{p}^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d} \end{bmatrix}
\tag{9}
$$

Dokładne wartości parametrów $\overline{p}^{RE}, \mathbf{M}_p^{RE}, \mathbf{W}_p^{RE}$ można wyznaczyć jako punkt stacjonarny powyższego odwzorowania.

W przypadku adaptacyjnego uczenia się zakłada się, że postrzegana przez inwestorów dynamika cen akcji dana jest równaniem:

$$
p_t^{AL} = \overline{p}_t^{AL} + \mathbf{M}_{pt}^{AL}\hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{W}_p^{RE}\boldsymbol{\varepsilon}_t
\tag{10}
$$

Przyjmuje się więc, że inwestorzy znają prawidłową postać funkcyjną równania dynamiki oraz stałą w czasie wariancję ceny $\mathbf{W}_p^{RE}$. Pozostałe parametry $\overline{p}_t^{AL}$ oraz $\mathbf{M}_{pt}^{AL}$ są im nieznane. Ich wartości w każdym okresie szacowane są klasyczną metodą najmniejszych kwadratów na podstawie obserwacji dostępnych w okresie t–1. Rzeczywista dynamika cen akcji w przypadku AL jest więc dana równaniem:

$$\begin{aligned} p_t &= \overline{m} + \ln\left[A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d \right] + \\ &+ \left(\mathbf{M}_m + \frac{A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE})\mathbf{M}_{pt}^{AL} + A_d \mathbf{M}_d}{A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d} \right) \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \\ &+ \left(\mathbf{W}_m + \frac{A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE})\mathbf{W}_p^{RE} + A_d \mathbf{W}_d}{A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{aligned} \tag{11}$$

Natomiast odwzorowanie T przyjmuje postać:

$$T\begin{pmatrix} \overline{p}_t^{AL} \\ \mathbf{M}_{pt}^{AL} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{m} + \ln\left[A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d \right] \\ \left(\mathbf{M}_m + \dfrac{A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE})\mathbf{M}_{pt}^{AL} + A_d \mathbf{M}_d}{A_p(\overline{p}_t^{AL}, \mathbf{W}_p^{RE}) + A_d} \right) \mathbf{M} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Rekurencyjny algorytm szacowania wartości nieznanych parametrów $\overline{p}_t^{AL}$ oraz $\mathbf{M}_{pt}^{AL}$ metodą najmniejszych kwadratów można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_t &= \boldsymbol{\varphi}_{t-1} + t^{-1}\mathbf{R}_t^{-1}\mathbf{z}_t(p_{t-1} - \boldsymbol{\varphi}_{t-1}^T \mathbf{z}_{t-2}) \\ \mathbf{R}_t &= \mathbf{R}_{t-1} + t^{-1}(\mathbf{z}_{t-1}\mathbf{z}_{t-1}^T - \mathbf{R}_{t-1}) \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie: $\boldsymbol{\varphi}_t = \left[\overline{p}_t^{AL} \quad \mathbf{M}_{pt}^{AL} \right]^T$, $\mathbf{z}_t = \left[1 \quad \hat{\mathbf{s}}_t^T \right]^T$,

$\mathbf{R}_t$ – oszacowanie macierzy kowariancji estymatorów $\boldsymbol{\varphi}_t$.

Pytanie postawione w tej pracy brzmi: czy algorytm opisany przez układ równań (13) jest zbieżny do rozwiązania RE, przy założeniu, że dynamikę p_{t-1} opisuje wzór (11), a dynamika $\mathbf{z}_t$ dana jest wzorem (6)? Czy, innymi słowy, w miarę upływu czasu wartości parametrów $\overline{p}_t^{AL}$ oraz $\mathbf{M}_{pt}^{AL}$, których dynamika opisana jest układem (13), zbliżają się do wartości parametrów $\overline{p}^{RE}$ oraz $\mathbf{M}_p^{RE}$?

3. Zbieżność algorytmów adaptacyjnego uczenia się

Formalnym narzędziem badania zbieżności algorytmów AL jest teoria rekurencyjnych algorytmów stochastycznych. Poniżej podano najważniejsze wyniki z tego zakresu wykorzystane do badania zbieżności schematu opisanego w poprzedniej części. Zrezygnowano z podawania dokładnych twierdzeń z uwagi na ograniczenia redakcyjne i konieczność wprowadzenia obszernej nowej notacji. Wszystkie potrzebne wyniki zawiera monografia [Evans, Honkapohja 2001], na której oparto poniższy opis.

3.1. Zbieżność rekurencyjnych algorytmów stochastycznych

Ogólnie rekurencyjny algorytm stochastyczny opisywany jest równaniem:

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \gamma_t f_1(\boldsymbol{\theta}_{t-1}, \mathbf{X}_t) + \gamma_t^2 f_2(\boldsymbol{\theta}_{t-1}, \mathbf{X}_t) \tag{14}$$

gdzie: $\boldsymbol{\theta}_t$ – wektor parametrów,

γ_t – nierosnący ciąg współczynników,

f_1 oraz f_2 – pewne funkcje,

$\mathbf{X}_t$ – wektor zmiennych egzogenicznych, których dynamika dana jest wzorem:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}_t \tag{15}$$

przy czym **A** i **B** są macierzami parametrów, a $\boldsymbol{\xi}_t$ wektorem zaburzeń stochastycznych. Kluczem do badania zachowania się takich układów jest równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \tau} = h(\boldsymbol{\theta}) \tag{16}$$

gdzie: $h(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{t\to\infty} Ef_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}_t)$.

Najważniejsze twierdzenia teorii rekurencyjnych algorytmów stochastycznych (zob. [Evans, Honkapohja 2001, twierdzenia 6.4 i 6.5, s. 133]) wskazują, że jeżeli $\boldsymbol{\theta}^*$ jest lokalnie stabilnym punktem równowagi równania (16), a algorytm (14) przez *n* ostatnich kroków nie opuścił pewnego otoczenia punktu $\boldsymbol{\theta}^*$, wtedy prawdopodobieństwo, że $\boldsymbol{\theta}$ jest zbieżne do $\boldsymbol{\theta}^*$ zmierza do 1 wraz ze wzrostem *n*. Innymi słowy, jeżeli algorytm przez dłuższy czas nie opuści pewnego otoczenia $\boldsymbol{\theta}^*$, mamy praktycznie pewność, że będzie on zbieżny do $\boldsymbol{\theta}^*$.

Alternatywne twierdzenia (zob. [Evans, Honkapohja 2001, twierdzenie 6.9, s. 139]) gwarantują, że algorytm nie będzie zbieżny do punktu, który nie jest punktem równowagi równania (16) lub jest punktem równowagi, ale niestabilnym.

Należy także zaznaczyć, że istnieją metody analizy globalnej zbieżności wykorzystujące twierdzenie Lapunowa. W omawianym w pracy przypadku nie mają one jednak zastosowania.

3.2. Warunek E-stabilności

Ważnym etapem badania zbieżności rekurencyjnych algorytmów stochastycznych jest badanie stabilności punktu równowagi $\boldsymbol{\theta}^*$ równania (16). Okazuje się, że w praktyce bardzo często badanie stabilności $\boldsymbol{\theta}^*$ sprowadza się do badania stabilności punktów równowagi $\boldsymbol{\varphi}^*$ równania[3]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \tau} = T(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\varphi}, \tag{17}$$

gdzie: T – przekształcenie parametrów równania dynamiki postrzeganej w parametry rzeczywistej dynamiki badanej zmiennej. Jeżeli $\boldsymbol{\varphi}^*$ jest lokalnie stabilnym punktem równowagi równania (17), wtedy mówi się, że spełniony jest warunek E-stabilności.

Dla wielu typów modeli liniowych można wykazać, że E-stabilność jest warunkiem wystarczającym lokalnej stabilności $\boldsymbol{\theta}^*$. W przypadku modeli nieliniowych tak już nie jest, więc za każdym razem konieczne jest wychodzenie od definicji funkcji $h(\boldsymbol{\theta})$ w celu badania zbieżności algorytmu.

3.3. Stabilność punktów równowagi nieliniowych równań różniczkowych

Ostatnim elementem analizy zbieżności rekurencyjnych algorytmów stochastycznych jest badanie stabilności punktów równowagi nieliniowych równań różniczkowych ogólnej postaci $\partial y / \partial \tau = f(y)$. W literaturze powszechnie znany jest rezultat dotyczący stabilności lokalnej (zob. [Panek 2003, twierdzenie H.6, s. 862]). Jeżeli wszystkie części rzeczywiste wartości własnych jakobianu funkcji $f(y)$ w punkcie y^* są ujemne, wtedy y^* jest lokalnie stabilnym punktem równowagi powyższego równania różniczkowego. Gdy co najmniej jedna wartość własna ma dodatnią część rzeczywistą, to punkt równowagi jest niestabilny.

4. Wyniki

Analizowane w pracy równanie dynamiki cen akcji postrzegane przez inwestorów (10) jest liniowe. W monografii [Evans, Honkapohja 2001, s. 232-235] pokazano, że w takiej sytuacji zbieżność algorytmu rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów jest określana przez warunek E-stabilności modelu. W rezultacie na mocy wyników opisanych w poprzedniej części zbieżność zachodzi, jeżeli wszystkie części rzeczywiste wartości własnych jakobianu przekształcenia T postaci (12) w punkcie $(\overline{p}^{RE}, \mathbf{M}_p^{RE})$ są ujemne. Jakobian ten ma postać:

[3] Wektor $\boldsymbol{\theta}$ obejmuje zarówno wektor parametrów $\boldsymbol{\varphi}$, jak i elementy macierzy kowariancji $\mathbf{R}$.

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=\begin{bmatrix} \dfrac{A_p(\bar{p}^{RE},\mathbf{W}_p^{RE})}{A_p(\bar{p}^{RE},\mathbf{W}_p^{RE})+A_d}-1 & \mathbf{0} \\ \left[\left[\dfrac{A_p(\bar{p}^{RE},\mathbf{W}_p^{RE})A_d(\mathbf{M}_p^{RE}-\mathbf{M}_d)}{\left(A_p(\bar{p}^{RE},\mathbf{W}_p^{RE})+A_d\right)^2}\mathbf{M}\right]^T & \dfrac{A_p(\bar{p}^{RE},\mathbf{W}_p^{RE})}{A_p(\bar{p}^{RE},\mathbf{W}_p^{RE})+A_d}\mathbf{M}^T-\mathbf{I}\right.\end{bmatrix} \quad (18)$$

Wartości własne powyższej macierzy zależą od wartości parametrów $\bar{d}, \mathbf{M}$, $\mathbf{W}, \mathbf{W}_m, \mathbf{M}_d, \mathbf{W}_d$ oraz $\boldsymbol{\Sigma}$, a więc od przyjętego modelu ekonomicznego determinującego dynamikę strumienia dywidend, stochastycznego czynnika dyskontującego oraz zmiennych stanu. W badaniu wzięto pod uwagę trzy modele opisane w pracach [Acedański 2009a, 2010]: standardowy model realnego cyklu koniunkturalnego oraz jego modyfikacje zaproponowane przez Jermanna [1998] oraz Jaccarda [2010]. Parametry tych modeli były kalibrowane w taki sposób, by podstawowe momenty statystyczne zmiennych występujących w modelu były zbliżone do ich odpowiedników obserwowanych dla gospodarki USA.

4.1. Model realnego cyklu koniunkturalnego

W modelu tym występują dwie zmienne stanu: kapitał oraz zaburzenie technologiczne, a także jeden składnik losowy. Dla oszacowanych wartości parametrów wartości macierzy są następujące:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0{,}98 & 0{,}06\\ 0 & 0{,}97\end{bmatrix},\ \mathbf{W}=\begin{bmatrix}0{,}06\\ 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Sigma}=0{,}013,\ \bar{d}=-0{,}38,$$
$$\mathbf{M}_d=\begin{bmatrix}0{,}47 & -0{,}54\end{bmatrix},\ \mathbf{W}_d=-0{,}56,\ \mathbf{W}_m=-3.$$

Odpowiadające im wartości parametrów równania dynamiki w wersji RE są równe:

$$\bar{p}^{RE}=3{,}17,\ \mathbf{M}_p^{RE}=\begin{bmatrix}0{,}99 & 0{,}08\end{bmatrix},\ \mathbf{W}_p^{RE}=0{,}08.$$

W efekcie jakobian przekształcenia (18) i wektor jego wartości własnych $\boldsymbol{\lambda}$ są postaci:

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=\begin{bmatrix}-0{,}028 & 0 & 0\\ 0{,}014 & -0{,}043 & 0\\ 0{,}017 & 0{,}061 & -0{,}055\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}-0{,}055\\ -0{,}043\\ -0{,}028\end{bmatrix}.$$

Wyniki te wskazują, że algorytm adaptacyjnego uczenia się cen akcji jest w tym przypadku asymptotycznie zbieżny do rozwiązania uzyskanego przy założeniu racjonalnych oczekiwań.

4.2. Model Jermanna

W modelu tym występują trzy zmienne stanu. Oprócz kapitału i zaburzenia technologicznego jest to poziom konsumpcji. W tym przypadku omawiane macierze są postaci:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1,00 & -0,04 & 0,06\\ 0,06 & 0,75 & 0,25\\ 0 & 0 & 0,99\end{bmatrix},\ \mathbf{W}=\begin{bmatrix}0,06\\ 0,25\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{\Sigma}=0,013,\ \overline{d}=-0,79,$$

$$\mathbf{M}_d=\begin{bmatrix}-1,79 & 5,36 & -4,30\end{bmatrix},\ \mathbf{W}_d=-4,34,\ \mathbf{W}_m=-11,98.$$

Wartości parametrów równania dynamiki w wersji RE kształtują się więc następująco:

$$\overline{p}^{RE}=4,22,\ \mathbf{M}_p^{RE}=\begin{bmatrix}1,72 & -6,20 & 8,99\end{bmatrix},\ \mathbf{W}_p^{RE}=9,09,$$

a jakobian i wektor jego wartości własnych równe są:

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=\begin{bmatrix}-0,007 & 0 & 0 & 0\\ 0,019 & -0,002 & 0,058 & 0\\ -0,060 & -0,040 & -0,253 & 0\\ 0,071 & 0,058 & 0,246 & -0,017\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}-0,017\\ -0,244\\ -0,012\\ -0,007\end{bmatrix}.$$

A więc mimo dużych różnic w wartościach parametrów początkowych, wartości własne pozostają ujemne.

4.3. Model Jaccarda

W modelu tym dochodzi jeszcze jedna zmienna stanu – zasób przyzwyczajeń konsumpcyjnych. Pozostałe zmienne stanu są takie same jak w modelu Jaccarda. Wyniki przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1,00 & 0 & -0,02 & 0,04\\ 0,13 & 0,01 & 0,39 & 0,53\\ 0 & 0,03 & 0,97 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,99\end{bmatrix},\ \mathbf{W}=\begin{bmatrix}0,04\\ 0,53\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{\Sigma}=0,013,\ \overline{d}=-0,86,$$

$$\mathbf{M}_d=\begin{bmatrix}-1,41 & 0,08 & 3,05 & -2,58\end{bmatrix},\ \mathbf{W}_d=-2,61,\ \mathbf{W}_m=-10,80.$$

Wartości parametrów równania dynamiki w wersji RE:

$$\overline{p}^{RE}=4,49,\ \mathbf{M}_p^{RE}=\begin{bmatrix}1,30 & -0,09 & -3,23 & 6,12\end{bmatrix},\ \mathbf{W}_p^{RE}=6,18.$$

Jakobian przekształcenia oraz wartości własne $\boldsymbol{\lambda}$ równe są:

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} -0,005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,013 & -0,005 & 0,130 & 0 & 0 \\ -0,001 & -0,001 & -0,989 & 0,026 & 0 \\ -0,030 & -0,020 & 0,393 & -0,031 & 0 \\ 0,041 & 0,042 & 0,526 & 0 & -0,015 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0,015 \\ -0,013 + 0,003i \\ -0,013 - 0,003i \\ -0,005 \end{bmatrix}.$$

A więc także i w tym przypadku części rzeczywiste wartości własnych są zawsze ujemne.

5. Podsumowanie

Wyniki przedstawione w poprzedniej części wskazują, że w przypadku wszystkich analizowanych wersji zachodzi zbieżność modeli AL do rozwiązań RE, ponieważ spełniony jest warunek E-stabilności. Z uwagi na nieliniowy charakter modeli stwierdzono jednak tylko zbieżność lokalną. Rezultaty te przeczą więc hipotezie postawionej we wstępie. Jednocześnie nie oznaczają jednak, że zbieżność zachodzi zawsze, ale jedynie wtedy, gdy wartości parametrów w modelu adaptacyjnego uczenia się podmiotów będą przez dłuższy czas znajdować się w okolicach wartości odpowiadającym modelowi RE. Przeprowadzone badania symulacyjne wskazują, że obszar oraz tempo zbieżności są niewielkie. W praktyce należy się więc spodziewać, że zbieżność będzie zachodziła rzadko.

Literatura

Acedański J., *Ceny akcji w wybranych modelach makroekonomicznych w warunkach uczenia się podmiotów*, [w:] *Metody matematyczne, ekonometryczne i informatyczne w finansach i ubezpieczeniach 2008*, red. P. Chrzan, E. Dziwok, AE, Katowice 2009a.

Acedański J., *Prognozowalność cen akcji w modelach DSGE w warunkach ograniczonej racjonalności*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, red. W. Ronka-Chmielowiec, K. Jajuga, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 60, UE, Wrocław 2009b.

Acedański J., *Ceny aktywów giełdowych a wielkości makroekonomiczne w dynamiczno-stochastycznych modelach równowagi ogólnej*, Praca doktorska, AE, Katowice 2010.

Adam K., Marcet A., Nicolini J., *Stock market volatility and learning*, ECB Working Paper Series 2008, no. 862.
Bulkley G., Harris R., *Irrational analysts' expectations as a cause of excess volatility in stock prices*, "The Economic Journal" 1997, vol. 107(441).
Carceles-Poveda E., Giannitsarou C., *Asset pricing with adaptive learning*, "Review of Economic Dynamics" 2008, vol. 11(3).
Evans G., Honkapohja S., *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press, Princeton 2001.
Gao F., Song F., Wang J., *Rational or irrational expectations? Evidence from China's stock market*, "Journal of Risk Finance" 2008, vol. 9(5).
Jaccard I., *Asset pricing, habit memory, and the labor market*, ECB Working Paper Series 2010, no. 1163.
Jermann U., *Asset pricing in production economies*, "Journal of Monetary Economics" 1998, vol. 41(2).
Muth J., *Rational expectations and the theory of price movements*, "Econometrica" 1961, vol. 29.
Panek E., *Ekonomia matematyczna*, AE, Poznań 2003.
Shiller R., *Irrational Exuberrance*, Princeton University Press, Princeton 2005.
Shleifer A., *Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance*, Oxford University Press, Oxford 2000.
Szyszka A., *Wycena papierów wartościowych na rynku kapitałowym w świetle finansów behawioralnych*, AE, Poznań 2007.
Timmermann A., *How learning in financial markets generates volatility and predictability in stock prices*, "Quarterly Journal of Economics" 1993, vol. 108(4).

E-STABILITY OF STOCK PRICE ADAPTIVE LEARNING MODELS

Summary: Adaptive learning (AL) is a serious alternative for rational expectations (RE) hypothesis which is a key assumption for a variety of economic models. One of the main issues in this research area is convergence analysis of AL algorithms to RE solutions. In many models E-stability condition rooted in stochastic recursive algorithms theory is used for establishing the convergence. In the paper AL model of stock price with different assumptions on dividends and stochastic discount factor dynamic processes was analyzed. In every case it was formally proved that recursive ordinary least squares algorithm converged locally to the RE solution.