B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 1 2004

Jan MIKUŚ *

PROGNOZOWANIE STOPY ZYSKU PORTFELA AKCJI

Określono stopę zysku portfela akcji zarówno w okresie retrospektywnym, jak i prognozowanym. Wykorzystując aproksymację interpolacyjną, wyznaczono średni błąd prognozy *ex ante* stopy zysku portfela akcji.

Słowa kluczowe: *prognozowanie, operator predykcji, portfel*

1. Wstęp

Decyzje dotyczące inwestowania w papiery wartościowe są decyzjami podejmowanymi w warunkach niepewności. W sytuacjach niepewnych, ze względu na skąpy zbiór informacji, problem prognozowania jest znacznie trudniejszy od prognozowania w sytuacjach losowych. Główną cechą sytuacji niepewnych jest brak informacji o zmiennych i rozkładach prawdopodobieństw, którym one podlegają. Zwykle znane są jedynie przedziały, w których wartości zmiennych mogą być zawarte i ewentualnie szacunkowe prawdopodobieństwo ich występowania. Sporządzenie prognozy dostarcza pewnego rodzaju informacji, co może przyczynić się do zwiększenia skuteczności podejmowania decyzji, zwłaszcza w rozważanej sytuacji. Zauważmy, że inwestora giełdowego interesuje stopa zysku, którą otrzyma od zaangażowanego kapitału. Stopa zysku może w okresie retrospektywnym przyjmować różne wartości z określonymi prawdopodobieństwami. Wartości te zależą od sytuacji na rynku papierów wartościowych (m.in. od ogólnej sytuacji gospodarczej) [5]. Użyteczną miarą stopy zysku jest tzw. oczekiwana stopa zwrotu określona z definicji wzorem

$$E(R) = \sum_{i=1}^{m} R_i p_i \tag{1}$$

* Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wrocławska, ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław.

gdzie:

E – operator wartości oczekiwanej,

R_i – i-ta możliwa wartość stopy zysku,

p_i – prawdopodobieństwo osiągnięcia i-tej możliwej wartości stopy zysku.

Za miarę ryzyka przyjmuje się zwykle wariancję oraz odchylenie standardowe. Wariancja, określona wzorem

$$V = \sum_{i=1}^{m} [R_i - E(R)]^2 \mathrm{p}_i \tag{2}$$

papieru wartościowego jest, jak widać, ważoną średnią kwadratów odchyleń możliwych stóp zysku od oczekiwanej stopy zysku.

Przeciętna wielkość stopy zysku w okresie prognozowanym może być określona na podstawie analizy retrospektywnej różnych stóp zysku.

Podstawą racjonalnego inwestowania w papiery wartościowe jest maksymalizacja stopy zysku i minimalizacja ryzyka. Naturalna jest więc preferencja akcji z wyższą oczekiwaną stopą zysku przy tym samym ryzyku. Przy tej samej oczekiwanej stopie zysku inwestor preferuje akcje o niższym ryzyku. Przy zakupie akcji w przypadku: wyższe ryzyko i wyższa oczekiwana stopa zysku można posłużyć się znanym z ekonometrii współczynnikiem zmienności C, który w kontekście rozważanego problemu określa ryzyko, jakie przypada na jednostkę stopy zysku papieru wartościowego:

$$C = \frac{S}{E(R)}$$

gdzie:

S – odchylenie standardowe,

$E(R)$ – oczekiwana stopa zysku papieru wartościowego.

Łatwo zauważyć, że wielkość ryzyka przypadająca na jednostkę stopy zysku powinna być jak najmniejsza.

Ryzyko inwestowania można zmniejszyć, dokonując zakupu kilku papierów wartościowych. Inaczej mówiąc, gdy inwestor posiada portfel papierów wartościowych, którego struktura zapewnia maksymalizację dochodu całkowitego inwestora, bezpieczeństwo inwestycji oraz dużą płynność walorów w nim zawartych, wtedy ryzyko inwestowania może się zmniejszyć.

W strukturze portfela papierów wartościowych należy uwzględnić nie tylko stopę zysku i ryzyko, lecz również korelację stóp zysku, której miarą jest współczynnik korelacji. Współczynnik ten w przypadku portfela złożonego z dwóch akcji **A** i **B** jest określony następująco [5]:

$$r_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{p}_i (R_{1i} - R_1)(R_{2i} - R_2)}{S_1 S_2} \tag{3}$$

gdzie:

r_{12} – współczynnik korelacji pierwszej i drugiej akcji,
p_i – prawdopodobieństwo wystąpienia możliwych stóp zysku akcji,
R_1 – oczekiwana stopa zysku pierwszej akcji,
R_2 – oczekiwana stopa zysku drugiej akcji,
R_{1i} – możliwe stopy zysku pierwszej akcji,
R_{2i} – możliwe stopy zysku drugiej akcji,
S_1 – odchylenie standardowe pierwszej akcji,
S_2 – odchylenie standardowe drugiej akcji.

Przy konstrukcji portfela wartościowego korzystamy z następującej interpretacji współczynnika korelacji papierów wartościowych:

- jeżeli współczynnik korelacji wynosi 1, co oznacza pełną pozytywną korelację stóp zysku, to dla uniknięcia ryzyka nie należy kupować skorelowanych w ten sposób akcji,
- jeżeli współczynnik korelacji wynosi –1, co interpretuje się jako pełną negatywną korelację stóp zysku, pakiet akcji jest w pełni bezpieczny,
- jeżeli współczynnik korelacji spełnia nierówność $-1 < r < 1$, należy zastanowić się nad możliwością doboru bardziej optymalnego portfela.

Zauważmy, że w rozważanych sposobach obliczania oczekiwanej stopy zysku, odchylenia standardowego oraz współczynnika korelacji stóp zysku (zob. wzory (1), (2), (3)) niezbędna jest znajomość możliwych do zrealizowania stóp zysku oraz prawdopodobieństw wystąpienia różnych stanów gospodarki. Uzyskanie tych informacji nie zawsze jest możliwe. W takiej sytuacji stopa zysku może być wyznaczona za pomocą stóp zysku osiągniętych w okresie retrospektywnym. Wymaga to modyfikacji wzorów służących do szacowania oczekiwanej stopy zysku (1), odchylenia standardowego stopy zysku $S = \sqrt{V}$ (2) oraz współczynnika korelacji stóp zysku (3). Przyjmują one następującą postać:

$$E(R) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}[R_t - E(R)]^2} \tag{4}$$

$$r_{12} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{1t} - R_1)\,(R_{2t} - R_2)}{(n-1)\,S_1 S_2}$$

gdzie:

n – liczna okresów z przeszłości, z których pochodzą informacje,
R_t – stopa zysku papieru wartościowego osiągnięta w t-tym okresie,

R_{1t}– stopa zysku pierwszej akcji osiągnięta w t-tym okresie,
R_{2t}– stopa zysku drugiej akcji osiągnięta w t-tym okresie,
R_1 – oczekiwana stopa zysku pierwszej akcji [$E(R_1) = R_1$],
R_2 – oczekiwana stopa zysku drugiej akcji [$E(R_2) = R_2$],
S_1 – odchylenie standardowe pierwszej akcji,
S_2 – odchylenie standardowe drugiej akcji.

Jak już zaznaczyliśmy, podstawą racjonalnego inwestowania w papiery wartościowe jest maksymalizacja stopy zysku i minimalizacja ryzyka. W celu zwiększenia stopy zysku i zmniejszenia ryzyka związanego z inwestowaniem w akcje można dokonać zakupu portfela akcji. W przypadku dwóch akcji stopa zysku i ryzyko określone są następującymi wzorami [5]:

$$E(R_p^{(2)}) = K_1 E(R^{(1)}) + K_2 E(R^{(2)}) \tag{5}$$

$$S_p^2 = K_1^2 S_1^2 + K_2^2 S_2^2 + 2K_1 K_2 S_1 S_2 r_{12} \tag{6}$$

gdzie:

$E(R_p^{(2)})$ – stopa zysku portfela dwóch akcji,
S_p – ryzyko (odchylenie standardowe) portfela dwóch akcji,
K_1 – udział wartościowy pierwszej akcji w portfelu,
K_2 – udział wartościowy drugiej akcji w portfelu,
$E(R^{(1)})$ – oczekiwana stopa zysku pierwszej akcji,
$E(R^{(2)})$ – oczekiwana stopa zysku drugiej akcji,
S_1 – odchylenie standardowe pierwszej akcji,
S_2 – odchylenie standardowe drugiej akcji,
r_{12} – współczynnik korelacji pierwszej i drugiej akcji.

Minimalna wartość ryzyka portfela dwóch akcji osiągana jest dla następujących udziałów akcji w portfelu (zob. wzór (6)):

$$K_1 = \frac{S_2^2 - S_1 S_2 r_{12}}{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 r_{12}}$$

$$K_2 = \frac{S_1^2 - S_1 S_2 r_{12}}{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 r_{12}} \tag{7}$$

$$K_1 + K_2 = 1$$

Zauważmy, że (zob. wzór (6)) ryzyko portfela dwóch akcji jest tym mniejsze, im bardziej współczynnik korelacji między akcjami zbliża się do –1.

2. Konstrukcja operatora predykcji stopy zysku portfela akcji

Określenie stopy zysku portfela akcji, której miarą jest tzw. oczekiwana stopa zwrotu $E(R_p)$ oraz ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym S_p w okresie prognozowanym wymaga znajomości oczekiwanej stopy zysku pierwszej akcji $E(R_1)$, oczekiwanej stopy zysku drugiej akcji $E(R_2)$, udziałów wartościowych K_1, K_2 odpowiednio pierwszej i drugiej akcji w portfelu, odchyleń standardowych pierwszej akcji S_1, oraz drugiej akcji S_2, jak również współczynnika korelacji tych akcji r_{12} (zob. wzory (5), (6), (7)). Inaczej mówiąc, wyznaczenie prognozy stopy zysku portfela dwóch akcji $\hat{E}(R_p^{(2)}) = E(R_p^{(2)})_{|t=n+1}$ wymaga znajomości następujących prognoz:

$$\hat{E}(R^{(1)}) = E(R^{(1)})_{|t=n+1}, \quad \hat{E}(R^{(2)}) = E(R^{(2)})_{|t=n+1}, \quad \hat{K}_1 = K_{1|t=n+1}, \quad \hat{K}_2 = K_{2|t=n+1}.$$

Do wyznaczenia prognozy ryzyka $\hat{S}_p = S_{p|t=n+1}$ niezbędna jest znajomość prognozy udziałów wartościowych pierwszej i drugiej akcji w portfelu $\hat{K}_1, \hat{K}_2$, odchyleń standardowych pierwszej i drugiej akcji $\hat{S}_1 = S_{1|t=n+1}$, $\hat{S}_2 = S_{2|t=n+1}$ oraz współczynnika korelacji stóp zysku $\hat{r}_{12} = r_{12|t=n+1}$.

Do wyznaczenia prognozy $\hat{E}(R_p^{(1)}) = E(R_p^{(1)})_{|t=n+1}$, $\hat{S}_p = S_{p|t=n+1}$, zdeterminowanej wymienionymi prognozami wykorzystać należy metody prognozowania na podstawie następujących szeregów czasowych:

$$E(R^{(1)})_{|t=1}, E(R^{(1)})_{|t=2}, ..., E(R^{(1)})_{|t=n} \Big| \rightarrow \hat{E}(R^{(1)}) = E(R^{(1)})_{|t=n+1},$$

$$E(R^{(2)})_{|t=1}, E(R^{(2)})_{|t=2}, ..., E(R^{(2)})_{|t=n} \Big| \rightarrow \hat{E}(R^{(2)}) = E(R^{(2)})_{|t=n+1},$$

$$K_{1|t=1}, K_{1|t=2}, ..., K_{1|t=n} \Big| \rightarrow \hat{K}_1 = K_{1|t=n+1},$$

$$K_{2|t=1}, K_{2|t=2}, ..., K_{2|t=n} \Big| \rightarrow \hat{K}_2 = K_{2|t=n+1},$$

$$S_{1|t=1}, S_{1|t=2}, ..., S_{1|t=n} \Big| \rightarrow \hat{S}_1 = S_{1|t=n+1},$$

$$S_{2|t=1}, S_{2|t=2}, ..., S_{2|t=n} \Big| \rightarrow \hat{S}_2 = S_{2|t=n+1},$$

$$r_{12|t=1}, r_{12|t=2}, ..., r_{12|t=n} \Big| \rightarrow \hat{r}_{12} = r_{12|t=n+1}.$$

Ostatecznie prognozy $\hat{E}(R_p)$ stopy zysku $E(R_p)$ oraz prognoza $\hat{S}_p$ ryzyka S_p portfela dwóch akcji wyrażają się wzorami:

$$\hat{E}(R_p^{(2)}) = \hat{K}_1\hat{E}(R^{(1)}) + \hat{K}_2\hat{E}(R^{(2)}) \tag{8}$$

$$\hat{S}_p^2 = \hat{K}_1^2\hat{S}_1^2 + \hat{K}_2^2\hat{S}_2^2 + 2\hat{K}_1\hat{K}_2\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{r}_{12} \tag{9}$$

Prognozy składowych wzorów (8) i (9) określających: udział wartościowy pierwszej akcji w portfelu $(\hat{K}_1)$, udział wartościowy drugiej akcji w portfelu $(\hat{K}_2)$, oczekiwaną stopę zysku pierwszej akcji $(\hat{E}(R^{(1)}))$, oczekiwaną stopę zysku drugiej akcji $(\hat{E}(R^{(2)}))$, odchylenie standardowe pierwszej akcji $(\hat{S}_1)$, odchylenie standardowe drugiej akcji $(\hat{S}_2)$ oraz współczynnik korelacji pierwszej i drugiej akcji $(\hat{r}_{12})$ wyznacza się na ogół różnymi metodami. Metody te zdeterminowane są własnościami podanych szeregów czasowych. Jeżeli np.:

- w szeregu czasowym zaobserwujemy trend (tendencję rozwojową) i wahania przypadkowe, do prognozowania możemy wykorzystać modele analityczne oraz modele adaptacyjne: model liniowy Holta, model trendu pełzającego [2];
- wartości szeregu czasowego tworzą ciąg geometryczny lub szereg generowany jest przez krzywą wykładniczą, do prognozowania można wykorzystać metodę ekstrapolacji średniego tempa wzrostu opartego na ciągu indeksów łańcuchowych; wykorzystując średnią geometryczną ciągu indeksów łańcuchowych, otrzymujemy wartość odpowiedniego predyktora [3];
- rozważany szereg czasowy należy do niesezonowych szeregów czasowych i jest generowany przez model *ARIMA* (p, d, q), to dla praktycznych obliczeń prognoz podejście oparte na wykorzystaniu tego modelu w postaci równania różnicowego jest najprostsze i obserwację z_{t+l}* generowaną przez proces $\varphi^*(\beta)z_t = \theta(\beta)a_t$, gdzie $\varphi^*(\beta) = \varphi(\beta)\nabla^d$, można wyrazić bezpośrednio za pomocą równania różnicowego [1]

$$z_{t+l} = \varphi_1^* z_{t+l-1} + \ldots + \varphi_{p+d}^* z_{t+l-p-d} - \theta_1 a_{t+l-1} - \ldots - \theta_q a_{t+l-q} + a_{t+l} \tag{10}$$

Prognoza $\hat{z}_t(l)$ o najmniejszym błędzie średniokwadratowym z wyprzedzeniem l jest warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej z_{t+l} w momencie t tzn. $\hat{z}_t(l) = \underset{t}{E}[z_{t+l}]$. Przechodząc we wzorze (10) do warunkowych wartości oczekiwanych w momencie t i wprowadzając oznaczenia $[a_{t+l}] = \underset{t}{E}[a_{t+l}]$, $[z_{t+l}] = \underset{t}{E}[z_{t+l}]$, otrzymujemy

$$[z_{t+l}] = \hat{z}_t(l) = \varphi_1^*[z_{t+l-1}] + \ldots + \varphi_{p+d}^*[z_{t+l-p-d}] - \theta_1[a_{t+l-1}] - \ldots - \theta_q[a_{t+l-q}] + [a_{t+l}] \tag{11}$$

Aby obliczyć warunkowe wartości oczekiwane występujące w wyrażeniu (11), należy zauważyć, że jeżeli j jest liczbą całkowitą dodatnią, to (zob. [1]):

* z_{t+l} oznacza jedną ze składowych wzorów (8), (9).

$$[z_{t-j}] = \underset{t}{E}[z_{t-j}] = z_{t-j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$[z_{t+j}] = \underset{t}{E}[z_{t+j}] = \hat{z}_t(j), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$[a_{t+j}] = \underset{t}{E}[a_{t+j}] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$[a_{t-j}] = \underset{t}{E}[a_{t-j}] = a_{t-j} = z_{t-j} - \hat{z}_{t-j-1}(1), \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Składniki po prawej stronie wzoru (11) traktujemy zatem zgodnie z następującymi regułami:

z_{t-j}, ($j = 0, 1, 2, \ldots$), w momencie t już znane pozostawiamy bez zmiany,

z_{t+j}, ($j = 1, 2, \ldots$), jeszcze nie znane zamieniamy ich prognozami w momencie t, $\hat{z}_t(j)$,

a_{t-j}, ($j = 0, 1, 2, \ldots$), już znane określamy jako $z_{t-j} - \hat{z}_{t-j-1}(1)$,

a_{t+j}, ($j = 1, 2, \ldots$), jeszcze nie znane zastępujemy przez zera.

Z podanych reguł i wzoru (10) wynika, że jeżeli operator średniej ruchomej $\theta(\beta)$ jest rzędu q, to równania prognoz dla $\hat{z}_t(1)$, $\hat{z}_t(2)$, ..., $\hat{z}_t(q)$ będą zależały bezpośrednio od a, natomiast dla prognoz z większym wyprzedzeniem takiej bezpośredniej zależności nie ma.

W praktyce w wielu przypadkach niezbędne jest wyznaczenie prognozy dla różnych wyprzedzeń, np. na 1, 2, 3, ..., l kroków naprzód. Można wówczas korzystać ze wzoru (11) i podanych reguł. Wykorzystanie wzoru (11) wymaga znajomości wag $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_{p+d}^*, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$. Wagi te można wykorzystać również do obliczenia prognozy punktowej wartości z_{t+l-1} w momencie $t + l$ ze wzoru

$$\hat{z}_{t+1}(l) = \hat{z}_t(l+1) + \psi_l a_{t+1},$$

gdzie:

$\hat{z}_t(l+1)$ – prognoza wartości z_{t+l+1} w momencie t,

$a_{t+1} = z_{t+1} - \hat{z}_t(1)$ – błąd prognozy na jeden krok naprzód,

$$\psi_1 = \varphi_1^* - \theta_1$$

$$\psi_2 = \varphi_1^* \psi_1 + \varphi_2^* - \theta_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_j = \varphi_1^* \psi_{j-1} + \ldots + \varphi_{p+d}^* \psi_{j-p-d} - \theta_j,$$

gdzie: $\psi_0 = 1$, $\psi_j = 0$ dla $j < 0$ i $\theta_j = 0$ dla $j > q$.

Jeżeli k jest większą z liczb $p + d - 1$ i q, to dla $j > k$ wagi ψ spełniają równanie różnicowe

$$\psi_j = \varphi_1^* \psi_{j-1} + \varphi_2^* \psi_{j-2} + \ldots + \varphi_{p+d}^* \psi_{j-p-d}\,.$$

Prognozę przedziałową dla zadanej z góry wiarygodności prognozy p konstruuje się w następujący sposób [1]:

$$\mathrm{P}(z_{t+l}(-) < z_{t+l} < z_{t+l}(+)) = \mathrm{P} = 1 - \varepsilon\,,$$

gdzie:

$$z_{t+l}(\pm) = \hat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2} \left[1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2 \right]^{1/2} S_a\,,$$

S_a – estymator wariancji σ_a^2,

$u_{\varepsilon/2}$ – kwantyl rzędu 1 – $\varepsilon/2$ standardowego rozkładu normalnego.

Rozpatrywane dotychczas portfele zawierały jedynie dwa składniki. W skład portfela może wchodzić również wiele składowych. W dalszym ciągu rozważymy więc portfel akcji mocy u, $u >> 2$.

Aby dla portfela kilku akcji otrzymać prognozę stopy zysku, należy posłużyć się metodą kolejnego dołączania. Ze wzoru (8) otrzymujemy początkowo prognozy par akcji, następnie – nowe ich pary i proces kontynuuje się dopóty, dopóki otrzyma się ostateczną prognozę $\hat{E}(R_p^{(k)})$ stopy zysku $E(R_p^{(k)})$ portfela akcji. Prognozę tę można również otrzymać, korzystając z następujących wzorów (zob. [4]):

$$\hat{E}(R_p^{(3)}) = \hat{K}_2(\hat{K}_1 \hat{E}(R^{(1)}) + (1 - \hat{K}_1)\, E(R^{(2)})) + (1 - \hat{K}_2)\hat{E}(R^{(3)})\,,$$

$$\hat{E}(R_p^{(4)}) = \hat{K}_3[\hat{K}_2(\hat{K}_1 \hat{E}(R^{(1)}) + (1 - \hat{K}_1)\, E(R^{(2)})) + (1 - \hat{K}_2)\hat{E}(R^{(3)})] + (1 - \hat{K}_3)\hat{E}(R^{(4)})\,,$$

$$\begin{aligned}\hat{E}(R_p^{(5)}) = \hat{K}_4\{\hat{K}_3[\hat{K}_2(\hat{K}_1 \hat{E}(R^{(1)}) + (1 - \hat{K}_1)E(R^{(2)})) + (1 - \hat{K}_2)\hat{E}(R^{(3)})] \\ + (1 - \hat{K}_3)\hat{E}(R^{(4)})\} + (1 - \hat{K}_4)\hat{E}(R^{(5)})\,,\end{aligned}$$

....

gdzie $\hat{E}(R_p^{(k)})$ – prognoza stopy zysku portfela k akcji.

W praktyce wygodnie posługiwać się względnym średnim błędem predykcji $\Phi^{(k)}$, który jest równy błędowi średniemu predykcji podzielonemu przez wartość prognozy, tzn.

$$\Phi^{(k)} = \frac{[\mathrm{var}(\beta_k)]^{1/2}}{\hat{E}(R^k)}, \quad k = 1, 2 \tag{12}$$

gdzie $\beta_k = E(R^k) - \hat{E}(R^k)$ – błąd predykcji stopy zysku pierwszej akcji (k = 1) i drugiej akcji (k = 2).

Łatwo zauważyć, że $\Phi^{(k)}$ (k = 1,2) jest zmienną losową, której wartości zdeterminowane są przez prognozę oraz przez rzeczywistą realizację zmiennej prognozowanej w okresie, na który wyznacza się prognozę.

Jak widać, choć sama definicja błędu prognozy z formalnego punktu widzenia jest oczywista, nie pozwala ona jednak na obliczenie błędu prognozy $\hat{E}(R^k)$ (k = 1, 2) ze względu na brak wartości rzeczywistej w okresie prognozowanym. Błąd taki można jednak w pewnych przypadkach (przy odpowiednich założeniach) oszacować. Wykorzystując analizę retrospektywną, a ściślej wykryte w jej trakcie prawidłowości dotyczące oczekiwanej stopy zysku kolejnych akcji rozważanego portfela i prognozy wygasłe, można za pośrednictwem błędu prognozy *ex post* dokonać jego oszacowania *ex ante*, co w konsekwencji umożliwi wyznaczenie w okresie prognozowanym względnego błędu średniego predykcji $\Phi^{(k)}$. Znajomość tego błędu będzie potrzebna do konstrukcji kryterium jakości prognozy $\hat{E}(R^k)$ stopy zysku $E(R^k)$ portfela akcji.

Niech zmienna prognozowana $R_{T_1}^{(k)}$ przyjmuje w przedziale obserwacji T_1 następujące wartości:

$$E(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_1}, E(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_2}, ..., E(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_j}, ..., E(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_n},$$

a

$$\hat{E}(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_1}, \hat{E}(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_2}, ..., \hat{E}(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_j}, ..., \hat{E}(R_{T_1}^{(k)})_{|t=t_n}$$

oznaczają jej prognozy wygasłe w chwilach $t_1, t_2, ..., t_j, ..., t_n$ dotyczące k (k = 1, 2) akcji. Podzielmy przedział obserwacji T_1 na l podzbiorów ($l < n$): $T_1^{(1)} = \{1, 2, ..., n_1\}$, $T_1^{(2)} = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., 2n_1\}$, ..., $T_1^{(l)} = \{(l-1)n_1 + 1), (l-1)n_1 + 2, ..., n\}$ i wyznaczmy w każdym z nich średni błąd prognozy (miernik dokładności *ex post*) zdefiniowany jako pierwiastek kwadratowy z wariancji błędu, tzn. [4]:

$$[\mathrm{var}(E(R_{1;T_1}^{(k)}) - \hat{E}(R_{1;T_1}^{(k)}))]^{1/2} = \left[\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(E(R_{1;T_1}^{(k)})_{|t=t_i} - \hat{E}(R_{1;T_1}^{(k)})_{|t=t_i})^2\right]^{1/2},$$

$$[\mathrm{var}(E(R_{2;T_1}^{(k)}) - \hat{E}(R_{2;T_1}^{(k)}))]^{1/2} = \left[\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{2n_1}(E(R_{2;T_1}^{(k)})_{|t=t_i} - \hat{E}(R_{2;T_1}^{(k)})_{|t=t_i})^2\right]^{1/2},$$

....

$$[\mathrm{var}(E(R_{l;T_1}^{(k)}) - \hat{E}(R_{l;T_1}^{(k)}))]^{1/2} = \left[\frac{1}{n_1}\sum_{i=(l-1)n_1+1}^{ln_1=n}(E(R_{l;T_1}^{(k)})_{|t=t_i} - \hat{E}(R_{l;T_1}^{(k)})_{|t=t_i})^2\right]^{1/2}, \quad k = 1, 2.$$

W konsekwencji otrzymujemy ciąg wartości

$$[\mathrm{var}(E(R_{1;T}^{(k)})-\hat{E}(R_{1;T}^{(k)}))]^{1/2}, [\mathrm{var}(E(R_{2;T}^{(k)})-\hat{E}(R_{2;T}^{(k)}))]^{1/2}, \ldots, [\mathrm{var}(E(R_{l;T}^{(k)})-\hat{E}(R_{l;T}^{(k)}))]^{1/2}$$

średniego błędu prognozy określonego odpowiednio na podzbiorach $T_1^{(1)}$, $T_1^{(2)}$, ..., $T_1^{(l)}$.

Wyznaczenie błędu prognozy oczekiwanej stopy zysku k-tej akcji sprowadza się do znalezienia średniego błędu prognozy $[\mathrm{var}\,(E(R_T^{(k)})-\hat{E}(R_T^{(k)}))]^{1/2}$ w okresie prognozowanym $T = \{n + 1, n + 2, ..., n + m\}$ w punktach leżących poza zbiorem $T_1 = \{1, 2, ..., n_1, ..., 2n_1, ..., rn_1, ..., n\}$. Inaczej mówiąc, wyznaczenie błędu prognozy w przedstawionej propozycji sprowadza się do aproksymacji interpolacyjnej. Błąd ten może być wyznaczony np. za pomocą przekształconego interpolacyjnego wzoru Lagrange'a, przekształconego interpolacyjnego wzoru Newtona.

Względny błąd średni predykcji stopy zysku k-tej akcji w okresie prognozowanym wyraża się wzorem (zob. (11))

$$\Phi^{(k)} = \frac{[\mathrm{var}\,(E(R_T^{(k)})-\hat{E}(R_T^{(k)}))]^{1/2}}{\hat{E}(R_T^{(k)})}, \quad k = 1, 2 \tag{13}$$

gdzie $\hat{E}(R_T^{(k)})$ – prognoza oczekiwanej stopy zwrotu k-tej akcji w okresie prognozowanym.

Względny średni błąd prognozy stopy zysku portfela k-akcji $\Phi_P^{(k)}$ w okresie prognozowanym T wyraża się wzorem

$$\Phi_P^{(k)} = \frac{[\mathrm{var}\,(\beta_T^{(k)})]^{1/2}}{\hat{E}(R_{P;T}^{(k)})},$$

gdzie $\beta_T^{(k)} = E(R_{P;T}^{(k)}) - \hat{E}(R_{P;T}^{(k)})$.

Bibliografia

[1] BOX G.E.P., JENKINS G.M., *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*, PWN, Warszawa 1983.

[2] CIEŚLAK M., *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, PWN, Warszawa.

[3] ČETYRKIN E.M., *Statističeskije metody prognozirovanija*, Statistika, Moskva 1975.

[4] GALANC T., MIKUŚ J., *The method for constructing a combined forecast en bloc*, Advances in Modelling and Analysis, 1992, C, Vol. 35, No. 4.

[5] SOBCZYK M., *Matematyka finansowa*, Agencja Wydawnicza „Placet", Warszawa 2000.

Forecasting of the portfolio profit rate

The profit rate of the portfolio of shares in retrospective and forecasted periods is determined. Attention is paid to the different forecasting methods taking into account the properties of the forecasting operator time series components of the profit rate and risk of portfolio of shares. To determine a profit rate of some shares forecast, a method of successive adding is proposed obtaining initially pair shares forecast, then new pairs. The process is continued until the final forecast of the profit rate is obtained. Using the approximation method applied to discrete sets, the mean relative error of *ex ante* forecast of the profit rate of the portfolio of shares is determined.

Key words: *prognosing, prediction operator, portfolio*