B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 4 2008

Dorota KUCHTA*

ODPORNY WYBÓR PROJEKTÓW INWESTYCYJNYCH

Zaproponowano zastosowanie podejścia odpornego do wyboru jednego spośród zbioru projektów inwestycyjnych. Omówiono zasady podejścia odpornego i różne, stosowane w nim kryteria decyzyjne. Zaproponowano algorytm pozwalający zastosować to podejście do wyboru projektów inwestycyjnych, zwracając uwagę na numeryczną stronę zastosowania algorytmu. Następnie zaprezentowano przykład liczbowy.

Słowa kluczowe: *projekt inwestycyjny, wybór projektów, niepewność*

1. Wstęp

Projekty inwestycyjne charakteryzują się coraz większym stopniem niepewności informacji – w momencie podejmowania decyzji dokonuje się oczywiście estymacji nakładów, kosztów, stopy dyskontowej w poszczególnych latach realizacji projektu, ale wiadomo, że w rzeczywistości najprawdopodobniej wystąpią inne kwoty, niekiedy znacznie różniące się od wykazanych z estymacji. Dlatego bardzo ważne są metody oceny projektów w sytuacji niepewności i niepełności informacji. Jednym z nowych podejść do wyboru rozwiązania optymalnego w takich właśnie sytuacjach jest tzw. podejście odporne (ang. *robust*, [1]–[3]). Ideą tego podejścia jest szukanie takiego rozwiązania czy dokonanie takiego wyboru, z którego będziemy w miarę zadowoleni w przypadku, gdy rzeczywiste wartości parametrów decyzji okażą się najmniej korzystne z przewidywanych (nakłady okażą się najwyższe z przewidywanych, wydatki najniższe itp.). Podejście odporne reprezentuje zatem podejście „pesymisty”, który uważa, że zazwyczaj nie ma szczęścia i nie lubi ryzyka ani przegranych.

* Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wrocławska, ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław, e-mail: Dorota.Kuchta@pwr.wroc.pl

W niniejszym artykule zaproponujemy zastosowanie podejścia odpornego do wyboru spośród kilku projektów jednego, który będzie ostatecznie realizowany jako najkorzystniejszy.

Na początku sformalizujemy ideę podejścia odpornego wyboru, a następnie zastosujemy ją do wyboru projektów. Podejście zilustrowano przykładem liczbowym.

2. Odporny wybór najkorzystniejszego wariantu

Załóżmy, że mamy do wyboru m wariantów W_j ($j = 1, ..., m$), których najważniejszą charakterystyką jest wielkość N_j ($j = 1, ..., m$), która powinna być jak najmniejsza lub jak największa, w zależności od sytuacji (tu przyjmujemy, że chodzi o minimalizację tej charakterystyki). Niestety w momencie podejmowania decyzji wiadomo tylko, że wielkość ta będzie przyjmować (znane) wartości $N_j(s)$ ($j = 1, ..., m$), gdzie s może być dowolnym scenariuszem ze (znanego) zbioru scenariuszy S, nie wiadomo natomiast, który ze scenariuszy wystąpi w rzeczywistości. To okaże się dopiero po dokonaniu wyboru wariantu. Podejście odporne nakazuje dokonać wyboru wariantu po zastosowaniu jednego z dwóch kryteriów:

1. Kryterium najgorszego przypadku

Stosując kryterium najgorszego przypadku, zakładamy, że niezależnie od tego, który wariant wybierzemy, zrealizuje się ten scenariusz, w którym wybrany wariant W_{j_0} ma najmniej korzystną wartość N_{j_0}. Dlatego wybieramy taki wariant W_{j_0}, który spełnia następujący warunek:

i) przy maksymalizacji charakterystyki: $\min\limits_{s \in S} N_{j_0}(s) = \max\limits_{j=1,\ldots,m} (\min\limits_{s \in S} N_j(s))$,

ii) przy minimalizacji charakterystyki: $\max\limits_{s \in S} N_{j_0}(s) = \min\limits_{j=1,\ldots,m} (\max\limits_{s \in S} N_j(s))$,

czyli dla którego najmniej korzystny scenariusz daje lepszą wartość charakterystyki wariantu niż najmniej korzystny scenariusz dla wszystkich innych wariantów.

2. Kryterium najmniejszego żalu

Stosując kryterium najmniejszego żalu, zakładamy, że decydujący dla decydenta jest właśnie „żal”, odczuwany przez decydenta w momencie, kiedy już wiadomo, jaki wystąpił scenariusz – żal spowodowany wyborem nie tego rozwiązania, jakie w faktycznie zaistniałym scenariuszu byłoby najlepsze. Żal ten mierzymy różnicą między osiągniętą charakterystyką wybranego wariantu i charakterystyką wariantu, który w zaistniałym scenariuszu byłby najlepszy. Stosując kryterium minimalnego żalu, wybieramy taki wariant, który zapewnia najmniejszy możliwy żal – zakładamy bowiem ponownie, pesymistycznie, że sytuacja okaże się niekorzystna: okaże się, że wybraliśmy nie ten wariant, który należało wybrać i będziemy odczuwać żal. Kryterium minimalnego żalu prowadzi zatem do wyboru takiego wariantu W_{j_0}, który spełnia następujący warunek:

i) przy maksymalizacji charakterystyki:

$$\max_{s\in S}\left(\max_{l=1,\dots m} N_l(s)-N_{j_0}(s)\right)=\min_{j=1,\dots,m}\max_{s\in S}\left(\max_{l=1,\dots m} N_l(s)-N_j(s)\right),$$

ii) przy minimalizacji charakterystyki:

$$\max_{s\in S}\left(N_{j_0}(s)-\min_{l=1,\dots m} N_l(s)\right)=\min_{j=1,\dots,m}\max_{s\in S}\left(N_j(s)-\min_{l=1,\dots m} N_l(s)\right).$$

3. Zastosowanie kryterium najgorszego scenariusza i najmniejszego żalu do wyboru projektów inwestycyjnych

Przy ocenie projektów inwestycyjnych stosuje się różne charakterystyki, z których często występującą jest teraźniejsza wartość netto przepływów, jakie mają być generowane przez projekt. Jeśli projekt ma generować więcej wydatków niż wpływów, liczy się NPV wydatków netto (po odjęciu wpływów) i wówczas chodzi o minimalizację tej charakterystyki projektów. Jeśli projekt ma generować więcej wpływów, liczy się NPV wpływów netto i wówczas chodzi oczywiście o maksymalizację tak rozumianej NPV.

Naszymi wariantami W_j (j = 1, ..., m) będą zatem różne projekty, z których ma być wybrany jeden. Załóżmy, że wszystkie mają trwać n lat. Oznaczmy estymowane zdyskontowane [4] przepływy projektu W_j w poszczególnych latach i = 1, ..., n przez F_i^j. Niech N_j (j = 1, ..., m) oznacza NPV poszczególnych projektów. Mamy wówczas

$$N_j=\sum_{i=1}^{n}F_i^j .$$

Wybór projektu byłby oczywisty, gdyby przepływy F_i^j mogły być dokładnie oszacowane w momencie podejmowania decyzji. Tak może być jednak bardzo rzadko. Załóżmy zatem, że przepływy F_i^j mogą być oszacowane tylko jako funkcje parametru $t_i^j\in[0,1]$ w postaci następującego wzoru:

$$F_i^j=\underline{f}_i^j+t_i^j\left(\overline{f}_i^j-\underline{f}_i^j\right).$$

Parametr $t_i^j \in [0, 1]$ reprezentuje w pewnym sensie scenariusz. Jeśli przepływy projektu są zdyskontowanymi wydatkami, to dobry scenariusz odpowiada wartości $t_i^j = 0$ (najmniejsze wydatki, równe $\underline{f}_i^j$), a zły scenariusz $t_i^j = 1$ (największe wydatki, równe $\overline{f}_i^j$). W przypadku zdyskontowanych wpływów $t_i^j = 0$ odpowiada najgorszemu scenariuszowi, $t_i^j = 1$ natomiast najlepszemu.

Nas jednak interesuje interpretacja scenariusza nie w stosunku do jednego roku, lecz w stosunku do całego projektu, czyli wariantu. Załóżmy, że dla każdego z projektów dany rok oznacza tak samo złą lub dobrą „passę”, czyli że t_i^j jest dla ustalonego j identyczne; możemy zatem mówić po prostu o t_i. Założenie to oznacza, iż przyjmujemy, że dany rok będzie dla firmy dobry lub zły i że odbije się to w każdym realizowanym projekcie.

Scenariuszem będzie zatem n-ka liczb $(t_1, ..., t_n)$, $t_1, ..., t_n \in [0, 1]$, a charakterystyką oceniającą projekt W_j dla danego scenariusza $(t_1, ..., t_n)$ będzie

$$N_j(t_1, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{f}_i^j + t_i \left(\overline{f}_i^j - \underline{f}_i^j \right) \right).$$

Oczywiście w momencie podejmowania decyzji scenariusz nie jest znany. Do wyboru projektów zastosujemy zatem podane wyżej metody. Posłużmy się najpierw kryterium najgorszego scenariusza. Wybrany zostanie przy nim projekt W_{j_0}, który spełnia następujący warunek:

- przy maksymalizacji NPV

$$\min_{\substack{(t_1,...,t_n) \\ t_1,...,t_n \in [0,1]}} N_{j_0}((t_1, ..., t_n)) = \max_{j=1,...,m} \left(\min_{\substack{(t_1,...,t_n) \\ t_1,...,t_n \in [0,1]}} N_j((t_1, ..., t_n)) \right),$$

- przy minimalizacji NPV

$$\max_{\substack{(t_1,...,t_n) \\ t_1,...,t_n \in [0,1]}} N_{j_0}((t_1, ..., t_n)) = \min_{j=1,...,m} \left(\max_{\substack{(t_1,...,t_n) \\ t_1,...,t_n \in [0,1]}} N_j((t_1, ..., t_n)) \right).$$

Wzory te można w rozpatrywanym przypadku mocno uprościć. Ponieważ w przypadku wydatków najgorsze NPV jest osiągane dla wartości parametru 1, a w przypadku wpływów dla wartości zero wzory te należy wyrazić w następującej postaci:

- przy minimalizacji NPV

$$N_{j_0}((1, ..., 1)) = \max_{j=1,...,m} (N_j((1, ..., 1))), \quad \text{czyli} \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i^{j_0} = \max_{j=1,...m} \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i^j,$$

• przy maksymalizacji NPV

$$N_{j_0}((0, ..., 0)) = \max_{j=1,...,m}(N_j((0, ..., 0))), \text{ czyli } \sum_{i=1}^{n} \underline{f}_i^{j_0} = \max_{j=1,...m} \sum_{i=1}^{n} \underline{f}_i^{j} .$$

Wybór projektu przy zastosowaniu kryterium najgorszego scenariusza jest zatem bardzo prosty – wystarczy policzyć NPV wszystkich projektów dla scenariusza (0, …, 0) lub (1, …, 1) i wybrać ten, dla którego otrzymano wartość maksymalną (minimalną).

Zajmijmy się teraz kryterium minimalnego żalu. Przy zastosowaniu tego kryterium zostanie wybrany projekt W_{j_0}, który spełnia następujący warunek:

• przy maksymalizacji NPV

$$\max_{s\in S}\left(\max_{l=1,...m} N_l(s) - N_{j_0}(s)\right) = \min_{j=1,...,m}\max_{s\in S}\left(\max_{l=1,...m} N_l(s) - N_j(s)\right),$$

• przy minimalizacji NPV

$$\max_{s\in S}\left(N_{j_0}(s) - \min_{l=1,...m} N_l(s)\right) = \min_{j=1,...,m}\max_{s\in S}\left(N_j(s) - \min_{l=1,...m} N_l(s)\right).$$

W przypadku rozpatrywanego przez nas rozumienia scenariuszy otrzymujemy następujące warunki:

• przy maksymalizacji NPV

$$\max_{\substack{(t_1,...,t_n)\\ t_1,...,t_n\in[0,1]}}\left(\max_{l=1,...m} N_l(t_1,...,t_n) - N_{j_0}(t_1,...,t_n)\right)$$
$$= \min_{j=1,...,m}\max_{\substack{(t_1,...,t_n)\\ t_1,...,t_n\in[0,1]}}\left(\max_{l=1,...m} N_l(t_1,...,t_n) - N_j(t_1,...,t_n)\right),$$

• przy minimalizacji NPV

$$\max_{\substack{(t_1,...,t_n)\\ t_1,...,t_n\in[0,1]}}\left(N_{j_0}(t_1,...,t_n) - \min_{l=1,...m} N_l(t_1,...,t_n)\right)$$
$$= \min_{j=1,...,m}\max_{\substack{(t_1,...,t_n)\\ t_1,...,t_n\in[0,1]}}\left(N_j(t_1,...,t_n) - \min_{l=1,...m} N_l(t_1,...,t_n)\right),$$

Przedstawimy teraz praktyczne wyznaczenie projektu, który będzie najlepszy zgodnie z kryterium minimalnego żalu. Będzie ono polegało na realizacji następujących kroków:

Krok 1. Wyznaczenie dla każdego j = 1, ..., m podzbioru:

- w przypadku maksymalizacji NPV

$$S_j \subset \left\{ (t_1,...t_n) : t_1,...t_n \in [0,1] \quad \text{i} \quad \max_{l=1,...,m} N_l(t_1,...,t_n) = N_j(t_1,...,t_n) \right\},$$

- w przypadku minimalizacji NPV

$$S_j \subset \left\{ (t_1,...t_n) : t_1,...t_n \in [0,1] \quad \text{i} \quad \min_{l=1,...,m} N_l(t_1,...t_n) = N_j(t_1,...t_n) \right\},$$

czyli takiego podzbioru zbioru scenariuszy S_j, dla których projekt W_j ma najlepszą wartość charakterystyki.

Numeryczna realizacja tego kroku polega na rozwiązaniu układu m–1 + 2n nierówności liniowych z n niewiadomymi:

- niewiadomymi będą parametry $t_1, ..., t_n$,
- nierówności pierwszego typu to m–1 porównań między NPV projektu W_j i NPV pozostałych projektów, czyli $N_l(t_1,...,t_n) \le N_j(t_1,...,t_n)\ i = 1,...,m, i \ne j$ przy maksymalizacji NPV i $N_l(t_1,...,t_n) \ge N_j(t_1,...,t_n)\ i = 1,...,m, i \ne j$ przy minimalizacji NPV,
- 2n nierówności zapewniających, że $t_1, ..., t_n \in [0,1]$.

Krok 2. Rozwiązanie dla każdego j = 1, …, m i l = 1, …, m, $j \ne l$ zadania programowania liniowego:

- w przypadku maksymalizacji NPV

$$N_l(t_1,...,t_n) - N_j(t_1,...,t_n) \to \max$$
$$(t_1,...,t_n) \in S_l,$$

- w przypadku minimalizacji NPV

$$N_j(t_1,...,t_n) - N_l(t_1,...,t_n) \to \max$$
$$(t_1,...,t_n) \in S_l.$$

Otrzymaną optymalną wartość funkcji celu oznaczamy przez R_{jl}.

Numeryczna realizacja tego kroku polega na zastosowaniu np. powszechnie znanego algorytmu simpleks.

Krok 3. Wyznaczenie dla każdego j = 1, …, m wartości $R_j = \max_{l=1,..,m} R_{jl}$

R_j będzie maksymalnym żalem, jaki decydent może odczuwać, jeśli wybierze projekt W_j, łatwo bowiem pokazać, że:

- przy maksymalizacji NPV

$$R_j = \max_{\substack{(t_1,...,t_n) \\ t_1,...,t_n \in [0,1]}} \left(\max_{l=1,...m} N_l(t_1,...,t_n) - N_j(t_1,...,t_n) \right),$$

- przy minimalizacji NPV

$$R_j = \max_{\substack{(t_1,...,t_n) \\ t_1,...,t_n \in [0,1]}} \left(N_j(t_1,...,t_n) - \min_{l=1,...m} N_l(t_1,...,t_n) \right).$$

Krok 4. Wybranie do realizacji projektu W_j o minimalnym R_j

Przedstawiony algorytm jest łatwy do numerycznej realizacji. Pozwala wyznaczyć projekt spełniający kryterium minimalnego żalu. W następnym rozdziale zaprezentujemy przykład, ilustrujący opisany sposób postępowania przy wyborze projektów bądź zgodnie z kryterium najgorszego scenariusza, bądź najmniejszego żalu.

4. Przykład liczbowy

Rozpatrzmy zbiór następujących czterech projektów, z których każdy ma trwać trzy lata. Należy wybrać tylko jeden z nich. Planowane zdyskontowane przepływy dla każdego z projektów (zakładamy, że chodzi o projekty generujące tylko wydatki, zatem najlepsze będą projekty mające jak najmniejszą NPV) przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Dane liczbowe do przykładu, t_1, t_2, t3 $\in$ [0, 1]

	Rok 1	Rok 2	Rok 3	NPV
W_1	$2 + t_1$	$4 + t_2$	$6 + t_3$	$12 + t_1 + t_2 + 2t_3$
W_2	$2 + 3t_1$	$3 + 3t_2$	$2 + 6t_3$	$7 + 3t_1 + 3t_2 + 6t_3$
W_3	$1 + t_1$	$8 + t_2$	$10 + 2t_3$	$19 + t_1 + t_2 + 2t_3$
W_4	$4 + t_1$	$6 + t_2$	$8 + t_3$	$18 + t_1 + t_2 + t_3$

Zastosowanie kryterium najgorszego scenariusza wymaga znalezienia projektu, który charakteryzuje się najmniejszą NPV przy najgorszym scenariuszu, czyli dla $t_1 = t_2 = t_3 = 1$. Łatwo policzyć, że stosując to kryterium dokonamy wyboru W_1.

Zastosujmy teraz kryterium najmniejszego żalu. Po zrealizowaniu pierwszego kroku algorytmu, zaproponowanego w poprzednim rozdziale, otrzymamy następujące podzbiory zbioru $\{(t_1,t_2,t_3): t_1,t_2,t_3 \in [0,1]\}$:

$S_1 = \{(t_1,t_2,t_3): 2t_1 + 2t_2 + 4t_3 \geq 5, t_1,t_2,t_3 \in [0,1]\}$,

$S_2 = \{(t_1,t_2,t_3): 2t_1 + 2t_2 + 4t_3 \leq 5, t_1,t_2,t_3 \in [0,1]\}$,

S_3 i S_4 są zbiorami pustymi.

Wartości R_{jl} dla j = 1, 2, 3, 4 i l = 1, 2 (na skrzyżowaniu wiersza W_j i kolumny S_l) oraz R_j dla j = 1, 2, 3, 4 podano w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości R_{jl} dla j = 1, 2, 3, 4 i l = 1, 2

	S_1	S_2	R_j
W_1	0	5	5
W_2	3	0	3
W_3	7	12	12
W_4	6	11	11

Widzimy zatem, że maksymalny żal, jaki może odczuwać decydent, będzie najmniejszy w przypadku wyboru projektu W_2.

W omawianym przykładzie występuje zatem typowa sytuacja, z jaką mamy do czynienia w przypadku podejmowania decyzji w warunkach niepełności/niepewności informacji. Wybór projektu nie jest jednoznaczny – jedno kryterium wskazuje na W_1, drugie na W_2. Zasadniczą rolę odgrywa tutaj decydent; to on musi wiedzieć, czy najważniejsze jest dla niego to, co się stanie przy najgorszym scenariuszu, czy też decydujące znaczenie ma żal, jaki może odczuwać z powodu wyboru nie tego rozwiązania, co trzeba. Ważne jest jednak zastosowanie więcej niż jednego kryterium. W naszym przypadku oba kryteria „wyłoniły” po jednym kandydacie, których można między sobą porównać. Warto też rozważać nie tylko projekty, które przy poszczególnych kryteriach są najlepsze, ale również te, które są bliskie tym najlepszym. Takie projekty łatwo wyznaczyć poprzez drobną modyfikację metody. U nas rozpatrzenie przy obu kryteriach zarówno projektu najlepszego, jak i kolejnego pod względem wartości kryterium, wskazałoby w obu przypadkach na projekty W_1 i W_2, a także pokazałoby, że projekty te nie różną się bardzo pomiędzy sobą pod względem wartości obu kryteriów. Ten fakt potwierdziłby, że są to projekty najlepsze, aczkolwiek wybór konkretnego projektu spośród nich nie jest jednoznaczny. W takim przypadku można zastosować inne kryteria, nie ilościowe, które występują w każdej sytuacji w praktyce.

5. Podsumowanie

W niniejszym artykule zaproponowano sposób wyboru jednego spośród zbioru alternatywnych projektów w warunkach niepewności informacji – kiedy parametry projektów (przepływy pieniężne) nie są znane dokładnie, wiadomo tylko, w jaki sposób zależą od wystąpienia różnych scenariuszy (np. lepszego lub gorszego roku). Podstawowym kryterium oceny projektów, jaki wykorzystano, jest teraźniejsza wartość netto, ale zaprezentowane w artykule rezultaty można przenieść również na inne kryteria oceny projektów, np. zysk czy okres zwrotu, ponieważ w warunkach niepełnej informacji samo zastosowanie kryterium teraźniejszej wartości netto (czy jakiegokolwiek innego kryterium oceny projektów) nie wystarczy. Nie daje ono bowiem jednoznacznego wyniku, ponieważ to, który projekt jest najlepszy pod względem danego kryterium zależy od scenariusza. Z różnorodności możliwych scenariuszy literatura proponuje stosowanie kryterium najgorszego scenariusza lub najmniejszego żalu, przy czym oba te kryteria są kryteriami prowadzącymi do decyzji tzw. „odpornych", czyli dość zadowalających nawet w najgorszym przypadku. Właśnie to podejście zostało zastosowane do wyboru projektów w niniejszym artykule. Podano odpowiedni algorytm postępowania oraz omówiono numeryczną stronę jego zastosowania.

Bibliografia

[1] AVERBAKH A., *Minimax regret solutions for minimax optimization problems with uncertainty*, Operations Research Letters, 2000, 27, 57–65.

[2] KUCHTA D., *Optimization with Fuzzy Present worth Analysis and Applications* [w:] Kahraman, Cengiz (red.), *Fuzzy Engineering Economics with Applications*, Springer-Verlag, 2008, 49–78.

[3] KUCHTA D., *Robust selection of investment projects. Odporny wybór projektów inwestycyjnych* [w:] International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance, FSSCEF 2004, Proceedings, Saint-Petersburg, Russia, June 17–20, 2004, Vol. 2. Mexico: Instituto Mexicano del Petroleo, 2004,438–445

[4] SIERPIŃSKA M., JACHNA T., *Ocena przedsiębiorstwa według standardów światowych*, PWN, Warszawa 2007.

Robust choice of investment projects

In the paper we discuss the problem of selecting one investment project from a set containing several projects in the situation when their parameters (above all the cash flows) are still unknown exactly. In such a situation the choice of one project is not unequivocal. While taking similar decisions, various approaches are used: probabilistic, fuzzy, and recently more and more often the robust one. The robust approach an approach which assures us that we will choose a fair project, no matter what its actual parameters will be (which will become known only in the future).

In the robust approach various criteria are applied, most often the criterion of the worst scenario and the one of the smallest regret. It is these criteria that we apply here to the choice of investment projects. For both criteria we give an exact algorithm, allowing to determine the best project in the respect to the respective criterion. The algorithm is good from the computational point of view also for a big number of projects, from among which we are to choose one, because it is based on the well known simplex algorithm.

We illustrate our approach with a numerical example. It shows that both criteria may give different solutions, thus the method proposed here does not an unequivocal answer. However, when we analyze both solutions we notice that it is precisely both criteria together that can distinguish a set of those projects which are the best ones. The decision maker can choose from this heavily reduced projects group one project, using non-quantitative criteria (often political ones), which exist in each decision situation, but which are difficult to include in the general model.

Keywords: *investment project, project selection, uncertainty*