

Bogusław GUZIK\*

## GŁÓWNE ANALIZY EKONOMICZNE NA PODSTAWIE MODELU NADEFEKTYWNOŚCI CCR

Celem autora artykułu jest zaprezentowanie głównych możliwości analitycznych modelu *super-efficiency* (nedefektywności) CCR, zaproponowanego przez Andersena i Petersena [1], Bankera i Gilforda [2] oraz Charnsa i innych [4]. Oprócz klasycznych analiz, spotykanych w literaturze przedmiotu, sformułowano też propozycję prostego testu jednorodności obiektów oraz metodykę określania konkurentów obiektów i ustalania struktury konkurencji technologicznej.

Podstawą rozważań jest ukierunkowany na nakłady standardowy model nedefektywności CCR, w skrócie SE-CCR. Należy dodać, że wyniki dotyczące modelu SE-CCR przenoszą się praktycznie bez większych zmian na inne modele nedefektywności.

Słowa kluczowe: *DEA, nedefektywność, konkurencja technologiczna*

### 1. Standardowe zadanie SE-CCR ukierunkowane na nakłady

#### 1.1. Uwagi wstępne

Z formalnego punktu widzenia zadanie nedefektywności jest bardzo prostą modyfikacją zadania CCR, sformułowanego w 1978 r. przez Charnesa, Coopera i Rhodesa [3]. Jednakże jego znaczenie praktyczne i interpretacyjne jest o wiele poważniejsze, niż wynika to z prostoty modyfikacji. Choć w literaturze zagranicznej podejście nedefektywności stosowane jest często, w polskiej literaturze ekonomicznej, w której dominuje klasyczny model CCR, jest ono praktycznie biorąc nieznane. Krótkie uwagi na jego temat znalazły się tylko w pracy Rogowskiego [8, s. 144].

---

\* Katedra Ekonometrii, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Uniwersytet Ekonomiczny, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: b.guzik@ae.poznan.pl

## 1.2. Sformułowanie modelu nadefektywności CCR

Model SE-CCR, jak model CCR czy większość modeli DEA, formułowany jest z osobna dla poszczególnych obiektów poddawanych analizie. W odniesieniu do obiektu numer  $o$  ( $o$  – obiekt) model SE-CCR można zapisać następująco:

### I. Dane

– wielkości nakładów,  $x_{nj}$ , ( $n = 1, \dots, N$ ) oraz rezultatów,  $y_{rj}$ , ( $r = 1, \dots, R$ ) w poszczególnych obiektach  $j = 1, \dots, J$ .

### II. Zmienne decyzyjne

– krotności technologii poszczególnych obiektów w technologii „wspólnej”, niezbędnej do uzyskania rezultatów obiektu  $o$ -tego:

$$\lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \dots, \lambda_{oJ} \text{ (z wyłączeniem współczynnika } \lambda_{o,o});$$

– mnożnik poziomu nakładów obiektu  $o$ -tego; określa on górny pułap nakładów technologii wspólnej jako krotność nakładów obiektu  $o$ -tego:  $\rho_o$ .

### III. Funkcja celu

– minimalizacja nakładów technologii wspólnej:

$$\rho_o \rightarrow \min. \quad (1)$$

### IV. Warunki ograniczające

– rezultaty technologii wspólnej są nie mniejsze od rezultatów obiektu  $o$ -tego:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^J y_{rj} \lambda_{oj} \geq y_{ro} \quad (\text{dla } r = 1, \dots, R); \quad (2)$$

– nakłady technologii wspólnej są nie większe od możliwie najmniejszej części nakładów obiektu  $o$ -tego:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^J x_{nj} \lambda_{oj} \leq x_{no} \rho_o \quad (\text{dla } n = 1, \dots, N). \quad (3)$$

### V. Warunki znakowe

$$\rho_o; \lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \dots, \lambda_{oJ} \geq 0 \quad (\text{przy czym } \lambda_{o,o} = 0). \quad (4)$$

Nawiązując do modelu CCR, generalną ideę podejścia nadefektywności można sformułować następująco:

1. Rozwiązuje się zadanie CCR dla obiektu  $o$ -tego przy dodatkowym założeniu, że własny współczynnik lambda obiektu jest zerowy, a więc przy założeniu, że  $\lambda_{o,o} = 0$  (co oznacza założenie, że  $j \neq o$ ).

2. Nie postuluje się, aby mnożnik poziomu nakładów był mniejszy od 1<sup>1</sup>.

Dotyczący obiektu  $o$ -tego mnożnik poziomu nakładów w modelu nadefektywności będziemy oznaczać przez  $\rho_o$ <sup>2</sup>. Nazwiemy go *wskaźnikiem rankingowym* obiektu  $o$ -tego.

Warto dodać, że termin *super-efficiency* wywodzi się z tego, że dla obiektów efektywnych w sensie CCR wskaźniki  $\rho_o$  przyjmują wartości większe od 1, co sugeruje jakoby nadefektywność tych obiektów.

### 1.3. Interpretacja zadania SE-CCR ukierunkowanego na nakłady

Dla interpretacji zadania SE-CCR istotne jest, że wielkości dotyczące badanego obiektu nie występują po lewej stronie warunków ograniczających dla nakładów oraz rezultatów – zob. wzory (2), (3). Występują natomiast tylko po prawej stronie tych warunków<sup>3</sup>.

O ile w klasycznym podejściu CCR badany obiekt rozpatruje się na tle wszystkich obiektów, o tyle w profilu nadefektywności badany obiekt rozpatruje się na tle grupy wszystkich obiektów poza obiektem badanym.

Tę grupę obiektów będziemy interpretować jako *konkurentów* obiektu  $o$ -tego i oznaczymy symbolem  $K_o$ ;  $K_o = \{j = 1, \dots, J; j \neq o\}$ .

Niech  $\mathbf{T}_j$  oznacza technologię empiryczną obiektu  $j$ -tego:

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie:

$\mathbf{x}_j = [x_{nj}]_{n=1, \dots, N}$  – wektor nakładów obiektu  $j$ -tego,

$\mathbf{y}_j = [y_{rj}]_{r=1, \dots, R}$  – wektor rezultatów obiektu  $j$ -tego.

Występująca po lewej stronie warunków (2), (3) technologia

$$\hat{\mathbf{T}}_o = \sum_{j \in K_o} \lambda_{oj} \mathbf{T}_j \quad (6)$$

jest wspólną technologią *konkurentów* obiektu  $o$ -tego<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Może więc być większy od 1.

<sup>2</sup> Przez analogię do CCR wskaźnik poziomu nakładów w podejściu nadefektywności częściej w literaturze oznaczany jest symbolem  $\theta$ , co jednak niekiedy może prowadzić do nieporozumień. Dlatego używamy innego symbolu ( $\rho$  – od *ranking*u).

<sup>3</sup> W zadaniu CCR wielkości dotyczące badanego obiektu występują po obu stronach warunków dla nakładów i dla rezultatów.

<sup>4</sup> W CCR też konstruuje się technologię wspólną, ale jest to technologia wspólna dla wszystkich obiektów i dlatego może do niej wejść technologia badanego obiektu. W modelu nadefektywności jest to wykluczone.

Używając proponowanej interpretacji, można stwierdzić, że ukierunkowane na nakłady zadanie SE-CCR polega na znalezieniu takiego najmniejszego mnożnika poziomu nakładów  $\rho_o$  oraz takich współczynników  $\lambda_{oj}$  technologii wspólnej konkurentów obiektu  $o$ -tego, że:

- rezultaty technologii wspólnej konkurentów są nie mniejsze od rezultatów rzeczywiście uzyskanych przez badany obiekt; wyraża to warunek (2),
- nakłady technologii wspólnej konkurentów są nie większe od możliwie najmniejszej krotności nakładów poniesionych w badanym obiekcie; wyraża to warunek (3).

#### 1.4. Interpretacja mnożnika nakładów $\rho_o$

Mnożnik  $\rho_o$  jest najmniejszą dodatnią liczbą określającą minimalne nakłady konkurentów na zrealizowanie zadań uzyskanych przez obiekt  $o$ -ty. Określa przeto *względna przewagę* obiektu  $o$ -tego nad konkurentami.

Im mnożnik  $\rho_o$  jest większy, tym obiekt jest bardziej skuteczny, bowiem mniejszym nakładem uzyskuje się założone rezultaty.

W szczególności, jeśli:

a)  $\rho_o > 1$ , to obiekt  $o$ -ty jest skuteczniejszy od grupy wszystkich pozostałych obiektów, a więc jest efektywny<sup>5</sup>.

b)  $\rho_o < 1$ , to obiekt  $o$ -ty nie jest tak skuteczny jak grupa wszystkich pozostałych obiektów, a więc nie jest efektywny<sup>6</sup>.

c)  $\rho_o = 1$ , to obiekt nie jest gorszy od konkurentów, a więc jest jeszcze efektywny.

Kolokwialnie mówiąc:

*obiekt jest efektywny w sensie nadefektywności, gdy inni z zadaniami obiektu  $o$ -tego poradziliby sobie gorzej*<sup>7</sup>.

Definicja efektywności Farrella w modelu nadefektywności jest następująca: Obiekt  $o$ -ty jest:

<sup>5</sup>  $\rho_o > 1$  oznacza, że dla uzyskania takich samych rezultatów, jakie uzyskał obiekt  $o$ -ty, konkurenci – nawet stosując optymalną kombinację swoich technologii – potrzebowaliby więcej nakładów niż nakłady autentycznie poniesione w badanym obiekcie. Oznacza to, że badany obiekt był lepszy od swoich konkurentów (był „tańszy”).

<sup>6</sup> Jeśli  $\rho_o < 1$ , to inne obiekty z zadaniami wykonanymi przez badany obiekt uporałyby się mniejszym nakładem (obiekt był „droższy” od konkurentów).

<sup>7</sup> Inaczej mówiąc, obiekt jest efektywny w sensie nadefektywności, gdy jest silny „słabością” konkurentów. Osoba, która sądzi, że jego zadania inni wykonają gorzej, myśli właśnie w kategoriach swojej nadefektywności. Przykładem postępowania typu „nadefektywności” jest następująca sytuacja. Banki B1 oraz B2 przejęły bank B3. Banki B1 oraz B2 zastanawiają się nad konstrukcją takiej technologii wspólnej, dzięki której zrealizuje się dotychczasowe rezultaty banku B3, i która będzie oparta wyłącznie na technologiach banków B1 i B2.

(a) w pełni efektywny, gdy  $\rho_o \geq 1$ ; (7)

(b) nieefektywny, gdy  $0 \leq \rho_o < 1$ .

### 1.5. Uwagi informatyczne

1. Numerycznie najwygodniej rozwiązywać zadanie SE-CCR jako „zwykłe” zadanie CCR, uwzględniając wszystkie współczynniki  $\lambda$  (również własny  $\lambda_{o,o}$ ), ale stawiając warunek, iż własny współczynnik  $\lambda$  obiektu  $o$ -tego jest zerowy.

2. Można wręcz oba zadania (CCR oraz SE-CCR) rozwiązywać według tego samego programu, np. tego samego arkusza Solver-Excel, modyfikując tylko warunki dotyczące  $\lambda_{o,o}$ . Zadanie SE-CCR można zapisać jako zwykłe zadanie CCR, dołączając warunek:

$$\lambda_{o,o} = 0 \text{ lub warunek } \lambda_{o,o} \leq 0^8. \quad (8)$$

3. W modelu nadefektywności rezygnuje się też z warunku, by wskaźnik poziomu nakładów był nie większy od 1, lub zamiast tego formułuje się warunek

$$\rho_o \leq M, \quad (9)$$

gdzie  $M$  – wystarczająco duża liczba dodatnia, np. 100.

## 2. Podstawowe możliwości analityczne modelu nadefektywności

Większość możliwości analitycznych modelu nadefektywności CCR wynika z możliwości analitycznych modelu CCR. Dotyczy to na przykład:

- 1) ustalania obiektów efektywnych oraz nieefektywnych,
- 2) porządkowania (rankingu) obiektów nieefektywnych,
- 3) określania formuł benchmarkingowych dla obiektów nieefektywnych,
- 4) ustalania typu niekorzyści skali w obiektach nieefektywnych,
- 5) konstrukcji technologii „docelowych” (np. optymalnych) dla obiektów nieefektywnych,
- 6) określania struktury technologii docelowych,
- 7) wykorzystania informacji z raportów simpleksowych na temat wrażliwości rozwiązania na zmiany parametrów (ceny dualne, kryteria simpleks, przedziały neutralnych zmian).

---

<sup>8</sup> To ostatnie przy warunku nieujemności oznacza, że  $\lambda_{o,o}$  jest zerowe.

Ponadto dochodzą jeszcze inne, już specyficzne dla podejścia nadefektywności, możliwości prowadzenia analiz:

- 8) porządkowanie (ranking) obiektów efektywnych,
- 9) ustalanie tzw.  $\rho$ -efektywności,
- 10) testowanie jednorodności zbioru obiektów,
- 11) określanie głównych konkurentów technologicznych dla obiektu efektywnego,
- 12) określanie struktury konkurencji technologicznej.

Omówiono niektóre specyficzne możliwości analityczne modelu SE-CCR.

### 3. Jednorodność zbioru obiektów

W wielu opracowaniach z zakresu DEA podkreśla się, że zbiór obiektów musi być jednorodny. Jest to zrozumiałe. Analizy porównawcze, zwłaszcza w ekonomii, powinny dotyczyć tylko obiektów, które nie pochodzą z wyraźnie różnych grup typologicznych<sup>9</sup>. Po ustaleniu zestawu zmiennych charakteryzujących nakłady oraz rezultaty powinno się więc przystąpić do oceny jednorodności zbioru obiektów.

Na tle dominującego w naszej literaturze klasycznego zadania CCR jest to jednak niewykonalne, gdyż wszystkie obiekty w pełni efektywne mają współczynnik  $\theta = 1$  i w odniesieniu do nich – posługując się tylko wskaźnikiem efektywności – jednorodności lub niejednorodności obiektów zbadać się nie da. Naturalnie można stosować, i są stosowane, inne metody badania jednorodności, np. znane z wielowymiarowej analizy porównawczej<sup>10</sup>. Są to jednak rozwiązania pośrednie, które odwołują się do charakterystyk niezwiązanych bezpośrednio z efektywnością.

Inaczej jest w przypadku nadefektywności. Obiekty o efektywności  $\theta = 1$  są rozróżnialne poprzez wskaźniki rankingowe, gdyż na ogół nie powtarzają się one, co stwarza możliwość bezpośredniej, czyli opartej na efektywności, oceny jednorodności zbioru obiektów.

#### 3.1. Proste kryterium jednorodności

Niech  $\rho_G > 1$  oraz  $\rho_D < 1$  oznaczają progowe wartości takie, że wskaźnik rankingowy większy od  $\rho_G$  jest za duży, a wskaźnik mniejszy od  $\rho_D$  jest za mały na to, by można było obiekt zaliczyć do obiektów podobnych do innych. W szczególności  $\rho_D = 1/\rho_G$ .

---

<sup>9</sup> Choć naturalnie nie wyklucza to porównywania obiektów niejednorodnych, np. porównuje się kraje o różnym poziomie rozwoju czy też akceptuje się w głosowaniach politycznych takie samo znaczenie każdego kraju, niezależnie od jego wielkości.

<sup>10</sup> Zob. na przykład Domagała [5].

Badanie jednorodności zbioru obiektów na podstawie współczynników rankingowych polega na odrzuceniu obiektów, dla których współczynniki rankingowe są zbyt duże lub zbyt małe w stosunku do pozostałych.

Obiekt  $j$ -ty jest „nietypowy”, gdy jego nadefektywność:

$$\rho_j < \rho_D \quad \text{lub} \quad \rho_j > \rho_G. \quad (10)$$

### Przykład

Nawiązujemy do badanego przez autora przykładu, dotyczącego efektywności banków [7]. Dane empiryczne przytoczono w tabeli 1.

**Tabela 1.** Rezultaty i nakłady wybranych banków w 1998 r.

Nakłady i rezultaty		Banki									
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
Nakłady	majątek	626	466	98,7	242	1367	57,2	549	807	1,4	567
	wkłady	13292	8762	5881	5449	51182	346	10560	31455	323	13170
	zatrudnienie	3997	2152	1250	645	40807	367	6939	25380	58	9363
	Koszty	531	283	75,5	214	2102	32,9	536	900	14,2	476
Rezultaty	kredyty	9471	5859	1866	3540	17009	529	6761	7756	371	8027
	należności	2811	1200	3772	1807	3895	274	1162	5644	5	952

Źródło: Gospodarowicz [6, tab. 3].

Chcemy sprawdzić, czy wszystkie banki są jednorodne pod względem skuteczności przekształcania nakładów w rezultaty. Rozwiązanie ukierunkowanego na nakłady standardowego zadania SE-CCR, dotyczącego danych z tabeli 1, podano w tabeli 2.

**Tabela 2.** Wyniki standardowej metody SE-CCR ukierunkowanej na nakłady

Bank	Współczynnik rankingowy $\rho_o$	Współczynniki $\lambda_{oj}$									
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
B1	<b>0,757</b>	0	0	0,506	0	0	2,952	0	0	18,775	0
B2	<b>0,799</b>	0	0	0,446	0	0	0	0	0	13,549	0
B3	<b>5,917</b>	0	0	0	2,087	0	0	0	0	0	0
B4	<b>1,556</b>	0	0	0,469	0	0	0	0	0	7,180	0
B5	<b>0,336</b>	0	0	0,678	0	0	4,207	0	0	36,434	0
B6	<b>2,207</b>	0	0	0,071	0	0	0	0	0	1,067	0
B7	<b>0,554</b>	0	0	0,072	0	0	2,996	0	0	13,587	0
B8	<b>0,377</b>	0	0	1,274	0	0	2,861	0	0	10,415	0
B9	<b>14,017</b>	0	0	0,199	0	0	0	0	0	0	0
B10	<b>0,649</b>	0	0	0,365	0	0	0	0	0	19,801	0

Źródło: Obliczenia własne.

Przyjmijmy, że banki, dla których współczynniki rankingowe są większe od 10 oraz mniejsze od 0,1 należy uznać za niejednorodne. Pierwsze z nich są zbyt skutecz-

ne w stosunku do typowego trybu przekształcania nakładów w rezultaty, drugie zaś są za mało skuteczne. Tak więc:

$$\rho_G = 10, \quad \rho_D = 0,1.$$

#### *Wnioski*

- Warunek  $\rho > \rho_G = 10$  jest spełniony dla banku B9 i dlatego uznajemy go za nietypowy. Jego nadefektywność jest zbyt duża.

- Nie ma banków o współczynniku rankingowym  $\rho$  mniejszym od  $\rho_D = 0,1$ , a więc nie ma banków o efektywności zbyt małej na tle innych.

- Za jednorodny zbiór obiektów (przy założonych wartościach progowych) uznajemy banki B1–B8 oraz B10.

Analizy przeprowadzane w dalszym ciągu artykułu dotyczą zredukowanego zbioru banków, z wyłączeniem banku B9.

## 4. Ranking obiektów

Metoda CCR pozwala ustalić ranking tylko obiektów nieefektywnych. Obiekty efektywne umieszczane są natomiast na tym samym (pierwszym) miejscu.

Ranking wszystkich obiektów – zarówno nieefektywnych, jak i efektywnych może być ustalony na podstawie rozwiązania modelu nadefektywności<sup>11</sup>.

Obiekt uzyskuje tym wyższe miejsce, im jego wskaźnik rankingowy  $\rho$  jest większy.

#### **Przykład**

W tabeli 3 podano rozwiązanie zadania nadefektywności, dotyczącego zredukowanego zbioru banków.

**Tabela 3.** Wyniki standardowej metody SE-CCR ukierunkowanej na nakłady

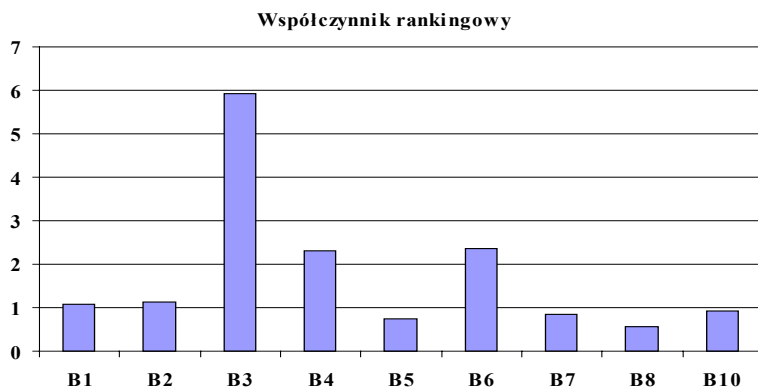
Bank	Współczynnik rankingowy $\rho_o$	Współczynniki $\lambda_{oj}$								
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B10
B1	1,078	0	0	0	1,859	0	1,044	0	0	0,291
B2	1,129	0,413	0	0,468	0,305	0	0	0	0	0
B3	5,917	0	0	0	2,087	0	0	0	0	0
B4	2,295	0	0,503	0,319	0	0	0	0	0	0
B5	0,744	0,938	0	4,354	0	0	0	0	0	0
B6	2,366	0	0	0,001	0,149	0	0	0	0	0
B7	0,858	0,653	0	0	0	0	1,084	0	0	0
B8	0,569	0,394	0	2,154	0	0	0	0	0	0
B10	0,926	0,779	0,020	0,283	0	0	0	0	0	0

Źródło: Obliczenia własne.

<sup>11</sup> Do tego właśnie celu proponowali model nadefektywności Andersen i Petersen [1].



Współczynniki rankingowe zilustrowano na rysunku 1<sup>12</sup>.



Rys. 1. Współczynniki rankingowe dla skorygowanego zbioru banków  
Źródło: Obliczenia własne.

Uporządkowanie obiektów przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Ranking banków według standardowej metody SE-CCR

Miejsce	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Obiekt	B3	B6	B4	B2	B1	B10	B7	B5	B8
Wskaźnik rankingowy	5,917	2,366	2,295	1,129	1,078	0,926	0,858	0,744	0,569

Źródło: Obliczenia własne.

## 5. Efektywność obiektów

### 5.1. $\theta$ -efektywność oraz $\rho$ -efektywność

W metodzie DEA, w szczególności w CCR, standardowo stosowana jest efektywność w sensie Farrella, tu – w związku z jej zastosowaniem w metodzie CCR – nazywana niekiedy efektywnością w sensie CCR. Zwykle oznacza się ją, jak to czyniliśmy, symbolem  $\theta$  i dlatego można ją nazwać  $\theta$ -efektywnością:

<sup>12</sup> To, że obecnie prawie dla wszystkich obiektów współczynniki rankingowe wzrosły w stosunku do podanych w tabeli 2, a niektóre obiekty wręcz zostały efektywne, powinno być zrozumiałe. Obecnie nie ma obiektu B9, który był skrajnie efektywny. Efektywność obiektów oceniana jest zatem na tle znacznie niższego poziomu wzorcowego.

$$E_{\theta} = \theta \text{ (litera } E \text{ oznacza „efektywność”).} \quad (11)$$

Trzeba sobie jednak zdawać sprawę, że w DEA używa się jeszcze innych rodzajów efektywności, np. efektywności w sensie nadefektywności czy w sensie efektywności nieradialnej (Russella)<sup>13</sup>. Jeśli idzie o omawiany w tym artykule profil nadefektywności, to w kwestiach terminologicznych dotyczących efektywności można sobie poradzić w dwojaki sposób:

1. ( $\theta$ -efektywność) Można przyjąć, że efektywność jest rozumiana w sensie Farrela, czyli przyjąć, że efektywność jest mierzona za pomocą współczynnika  $\theta$ . Wówczas wynosi ona co najwyżej 100%. Przypadki, gdy w sensie współczynników rankingowych niektóre obiekty w pełni  $\theta$ -efektywne są bardziej sprawne od innych, też w pełni  $\theta$ -efektywnych, można nazwać „nadefektywnością”. Tak powszechnie rozwiązuje się tę sprawę i tak powyżej czyniliśmy. W tym wypadku więc efektywność Farrela określona jest jako

$$E_{\theta} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \rho_o \geq 1 \\ \rho_o & \text{gdy } \rho_o < 1 \end{cases}. \quad (12)$$

2. ( $\rho$ -efektywność) Można jednak, w oparciu o wskaźniki rankingowe, skonstruować inny wskaźnik efektywności, który uwzględni zarówno kolejność obiektów, jak i ich zróżnicowanie według współczynnika rankingowego  $\rho$ . Tę efektywność nazwiemy  $\rho$ -efektywnością.

Wskaźnikiem  $\rho$ -efektywności może być sam współczynnik  $\rho$ , ale nie jest to wygodne, bo wartość ta nie jest unormowana. Prosty unormowany wskaźnik  $\rho$ -efektywności to iloraz wartości  $\rho$  przez wartość maksymalną w danym zbiorze obiektów. Mielibyśmy więc wskaźnik  $\rho$ -efektywności

$$E_{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, \quad (13)$$

gdzie

$$\rho_{\max} = \max(\rho_j; j = 1, \dots, J). \quad (14)$$

Wskaźnik  $\rho$ -efektywności, z uwagi na interpretację wskaźnika rankingowego  $\rho_o$  jako określającego to, o ile razy konkurenci „zrobią rzecz gorzej”, czyli określającego, ile razy więcej nakładów będą oni potrzebowali dla uzyskania rezultatu obiektu  $o$ -tego, można interpretować jako – ustaloną w skali od 0 do 100% – „sprawność” technologii obiektu  $o$ -tego w stosunku do technologii obiektu najlepszego, o sprawności 100%.

---

<sup>13</sup> Tę ostatnią omawia się np. w pracach Thanassoulis, Dyson [9], Zhu [10].

**Przykład**

Współczynniki  $\theta$ -efektywności oraz  $\rho$ -efektywności dla danych z tabeli 1 przedstawiono w tabeli 5.

**Tabela 5.** Wskaźniki efektywności banków

Bank	Współczynnik rankingowy $\rho_o$	$\theta$ -efektywność	$\rho$ -efektywność
B1	<b>1,078</b>	<b>1</b>	0,182
B2	<b>1,129</b>	<b>1</b>	0,191
B3	<b>5,917</b>	<b>1</b>	1,000
B4	<b>2,295</b>	<b>1</b>	0,388
B5	0,744	0,744	0,126
B6	<b>2,366</b>	<b>1</b>	0,400
B7	0,858	0,858	0,145
B8	0,569	0,569	0,096
B10	0,926	0,926	0,156

Źródło: Obliczenia własne.

*Przykładowe wnioski na temat  $\theta$ -efektywności*

- Bankami w pełni  $\theta$ -efektywnymi są: B1, B2, B3, B4, B6, gdyż dotyczące ich współczynniki rankingowe są nie mniejsze od 1. Pozostałe banki nie są w pełni efektywne, bowiem ich współczynniki rankingowe są mniejsze od 1.

- Współczynniki  $\theta$ -efektywności są następujące:

(a)  $\theta_o = 1$  dla banków B1, B2, B3, B4, B6,

(b)  $\theta_o = \rho_o$  dla pozostałych banków, czyli:  $\theta_{10} = 0,926$ ;  $\theta_7 = 0,858$ ;  $\theta_5 = 0,744$ ;  $\theta_8 = 0,569$ .

*Przykładowe wnioski na temat  $\rho$ -efektywności*

- Nakłady w rezultaty najbardziej skutecznie przekształcał bank B3. Dla zrealizowania swoich zadań potrzebował on aż sześć razy mniej nakładów niż potrzebowałyby na to pozostałe banki w swej optymalnej technologii wspólnej.

- Konkurenci banku B1 (najsłabszego spośród charakteryzujących się 100-procentową  $\theta$ -efektywnością) na wykonanie zadań banku B1 musieliby ponieść nakłady tylko o 7,8% większe od nakładów autentycznie poniesionych przez bank B1.

- Konkurenci najmniej efektywnego banku B8 wykonaliby zadania tego banku kosztem ok. 57% rzeczywistych nakładów banku B8.

- Uporządkowanie banków według wskaźników  $\rho$ -efektywności jest następujące:

a) banki efektywne w sensie Farrell'a: B3, B6, B4, B2, B1:

$$E_{\rho,3} = 1,000; \quad E_{\rho,6} = 0,400; \quad E_{\rho,4} = 0,388; \quad E_{\rho,2} = 0,191; \quad E_{\rho,1} = 0,182;$$

b) banki nieefektywne w sensie Farrella: B10, B7, B5, B8:

$$E_{\rho,10} = 0,156; \quad E_{\rho,7} = 0,145; \quad E_{\rho,5} = 0,126; \quad E_{\rho,8} = 0,096.$$

Zauważmy, że w przykładzie zmienność współczynników rankingowych, a zatem i  $\rho$ -efektywności, w obrębie banków efektywnych w sensie Farrella jest znacznie większa od zmienności tych współczynników w obrębie banków nieefektywnych w sensie Farrella. Inne przykłady empiryczne sugerują, że jest to dość typowe.

## 6. Benchmarking oraz technologia optymalna dla obiektu nieefektywnego

Mówiąc o benchmarkingu ma się na myśli ustalanie wzorców dla obiektów, które są nieefektywne w sensie Farrella, czyli – w odniesieniu do modelu nadefektywności – takich, że wskaźniki rankingowe są mniejsze od 1.

Formuła benchmarkingowa dla nieefektywnego obiektu  $o$ -tego opisywana jest przez optymalne współczynniki  $\lambda_{oj}$  ( $j = 1, \dots, J$ ). Mianowicie współczynnik  $\lambda_{oj}$  określa, jaka krotność technologii obiektu wzorcowego ( $j$ -tego) powinna się znaleźć w optymalnej technologii nieefektywnego obiektu  $o$ -tego.

### Przykład

Współczynniki benchmarkingowe podano w wierszach tabeli 6.

**Tabela 6.** Współczynniki benchmarkingowe dla banków nieefektywnych

Bank	Współczynnik rankingowy $\rho_o$	Współczynniki $\lambda_{oj}$								
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B10
B5	0,744	0,938	0	4,354	0	0	0	0	0	0
B7	0,858	0,653	0	0	0	0	1,084	0	0	0
B8	0,569	0,394	0	2,154	0	0	0	0	0	0
B10	0,926	0,779	0,020	0,283	0	0	0	0	0	0

Źródło: Tabela 3.

### Przykładowe wnioski

- Bank B5 powinien wzorować się na bankach B1 oraz B3, przy czym jego optymalna technologia powinna uwzględniać, mniej więcej, jednokrotność wektora nakładów-rezultatów banku B1 oraz 4-krotność wektora nakładów-rezultatów banku B3, a dokładniej: 93,8% technologii B1 + 435,4% technologii B3.

- Kalkulację technologii optymalnej  $\hat{\mathbf{T}}_5 = 0,938\mathbf{T}_1 + 4,354\mathbf{T}_3$  przedstawiono w tabeli 7.

• Bank B10 natomiast powinien się wzorować na technologiach banków B1, B2, B3 według następującej recepty: 78% technologii B1 + 2% technologii B2 + 28% technologii banku B3<sup>14</sup>.

**Tabela 7.** Obliczenia technologii optymalnej dla banku B5

Nakład	T <sub>1</sub> T <sub>3</sub>		Wielkość realizowana w reżimie technologii		Technologia	
	0,938 ×	4,354 ×	T <sub>1</sub>	T <sub>3</sub>	optymalna	empiryczna
Majątek	626	98,7	587	430	1017	1367
Wkłady	13292	5881	12468	25606	38074	51182
Zatrudnienie	3997	1250	3749	5443	9192	40807
Koszty	531	75,5	498	329	827	2102
Kredyty	9471	1866	8884	8125	17009	17009
Należności	2811	3772	2637	16423	19060	3895

Źródło: Obliczenia własne.

\* \* \*

Inne tradycyjne możliwości analityczne, dotyczące np. ustalania technologii docelowej dla obiektu nieefektywnego oraz jej struktury czy też ustalania korzyści skali są bezpośrednią adaptacją możliwości analitycznych modelu CCR. Opisano to, na przykład, w pracy [7]. Obecnie przedstawimy kolejne „nietradycyjne” możliwości analityczne modelu SE-CCR.

## 7. Konkurencja obiektów w pełni $\theta$ -efektywnych

Chodzi tu oczywiście o konkurencję według efektywności (tak jak mamy konkurencję cenową, konkurencję jakościową, konkurencję skali itd.), dotyczącą obiektów charakteryzujących się współczynnikami rankingowymi większymi od 1.

Jak widać z tabeli 3, optymalne rozwiązanie zadania nadefektywności dostarcza współczynników  $\lambda$  także w odniesieniu do obiektów o współczynniku rankingowym większym od 1; czyli w odniesieniu do obiektów o 100% efektywności Farrell'a. Na przykład wiersz dotyczący banku B2 w tabeli 3 definiuje technologię optymalną:

<sup>14</sup> Oczywiście można mieć wątpliwości, czy racjonalnie i technicznie możliwe jest uwzględnienie „drobnej”, 2-procentowej krotności technologii banku B2 i czy nie należy, na przykład, postawić warunku, by niezerowe współczynniki  $\lambda$  były nie mniejsze od pewnej liczby  $a$ , np.  $a = 0,1$ . Ale to jest inny problem.

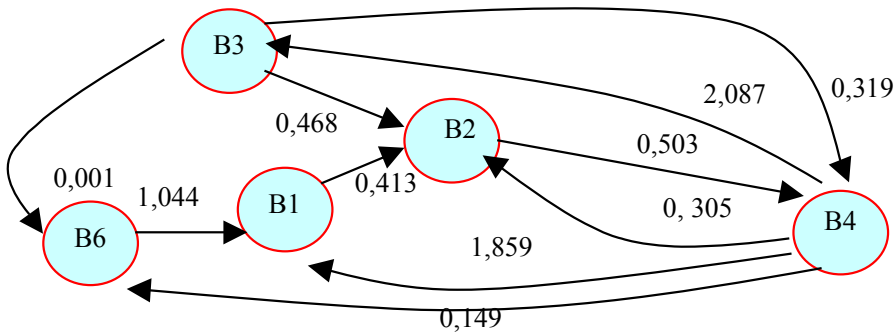
$$\hat{T}_2 = 0,413T_1 + 0,468T_3 + 0,305T_4.$$

Współczynniki te nie określają jednak benchmarkingu, gdyż obiekt jest w pełni efektywny w sensie Farrella i dlatego na nikim się nie wzoruje. Wynikająca z tych współczynników formuła nie jest przeto optymalną technologią obiektu efektywnego, lecz jest optymalną technologią konkurentów tego obiektu. Optymalną technologią obiektu w pełni efektywnego w sensie Farrella jest natomiast jego własna technologia empiryczna. Dlatego też w odniesieniu do obiektu w pełni efektywnego w sensie Farrella nie mówimy o jego benchmarkach, lecz o jego konkurentach.

Ze względu na technologiczną sprawność przekształcania nakładów w rezultaty, konkurentami  $o$ -tego obiektu w pełni  $\theta$ -efektywnego są te obiekty, również w pełni  $\theta$ -efektywne, które tworzą optymalną technologię konkurentów obiektu  $o$ -tego.

### Przykład

Współczynniki  $\lambda_{oj}$  optymalnej technologii konkurentów obiektu  $o$ -tego (gdzie obiekty  $o$  oraz  $j$  są w pełni efektywne w sensie Farrella) zawierają odpowiednie wiersze tabeli 3. Na tej podstawie zbudowano graf konkurencji obiektów w pełni efektywnych (rys. 2). Liczby na krawędzi grafu to optymalne współczynniki  $\lambda$ . W grafie ujęto tylko obiekty w pełni efektywne. Krawędź biegnie od obiektu  $j$ -tego (konkurenta) do obiektu  $o$ -tego (badanego).



Rys. 2. Graf konkurencji w zbiorze banków efektywnych

Źródło: Obliczenia własne.

### Przykładowe wnioski

- Najsilniejszym konkurentem banku B3 jest tylko bank B4<sup>15</sup>.
- Najwięcej konkurentów ma bank B2. Jego najsilniejszymi konkurentami są banki B1, B3 oraz B4.

<sup>15</sup> Choć w ogóle jest to słaby konkurent, potrzebuje bowiem  $5,917/1,078 \approx 6$  razy więcej nakładów niż bank B3.

- Występują powiązania zwrotne: bank B2 jest najsilniejszym konkurentem banku B4 i jednocześnie bank B4 znajduje się na liście najsilniejszych konkurentów banku B2.

**Uwaga:** W technologiach konkurentów dla obiektu w pełni  $\theta$ -efektywnego mogą znaleźć się technologie obiektów nieefektywnych. Badając konkurencję obiektów w pełni efektywnych, trzeba wtedy pominąć relacje między obiektami efektywnymi a obiektami nie w pełni  $\theta$ -efektywnymi.

## 8. Struktura konkurencji technologicznej

Jeśli w technologii wspólnej konkurentów obiektu  $o$ -tego uczestniczy kilka obiektów, to pojawia się pytanie, który z nich jest najważniejszy, a które są mniej ważne. Rozwiązanie tej sprawy w prosty sposób przez porównanie współczynników  $\lambda_{oj}$  do ich sumy nie wchodzi w grę, gdyż wielkość współczynników  $\lambda$  zależy od skali obiektów  $o$ -tego oraz  $j$ -tego. Jeśli  $j$ -ty konkurent jest znacznie większy od obiektu  $o$ -tego, to współczynnik  $\lambda_{oj}$  z natury rzeczy musi być nieduży, a jeśli konkurent jest wyraźnie mniejszy, współczynnik  $\lambda_{oj}$  musi być duży<sup>16</sup>.

Wskaźniki udziału obiektu  $j$ -tego w grupie konkurentów obiektu  $o$ -tego proponujemy określać podobnie jak określa się strukturę technologii optymalnej (zob. Guzik [7]). Obliczamy zatem wielkość „wirtualnego” nakładu (rezultatu) realizowanego w „reżimie” technologii konkurenta obiektu  $o$ -tego i udział tych nakładów (rezultatów) w sumarycznej kwocie tych wirtualnych nakładów (rezultatów) konkurentów obiektu  $o$ -tego.

### Przykład

Jak widać z rysunku 2, konkurentami banku B4 są banki B3 oraz B2, a dotyczące tych banków współczynniki  $\lambda_{oj}$  są następujące:  $\lambda_{4,3} = 0,319$  oraz  $\lambda_{4,2} = 0,503$ . Proste porównanie współczynników do ich sumy mogłoby sugerować, iż bank B3 stanowi ok. 40% łącznej siły konkurentów. Nie jest to jednak prawdą, gdyż – jak już mówiono – trzeba wziąć pod uwagę, ile jednostek danego nakładu (rezultatu) „niesie” technologia danego obiektu–konkurenta w całej grupie konkurentów. Stosowne obliczenia dla banku B4 zawiera tabela 8.

---

<sup>16</sup> Jeśli na przykład w obiekcie  $o$ -tym nakład wynosi 100, a w obiekcie  $j$ -tym 1000, to – wobec tego, że w technologii konkurentów należy wykorzystać mniej nakładów niż poniósł obiekt  $o$ -ty – współczynnik  $\lambda_{oj}$  nie może przekroczyć 0,1. Z kolei, gdyby nakład w obiekcie  $j$ -tym wynosił np. 5, to współczynnik  $\lambda_{oj}$  mógłby osiągnąć wartość aż 20.

### Przykładowe wnioski

• W zakresie nakładów najważniejszym konkurentem banku B4 jest bank B2. Udział banku B2 w optymalnych nakładach konkurentów banku B2 kształtuje się w granicach 70%–90%. W odniesieniu do *majątku* wynosi np. prawie 88%, co znaczy, że w optymalnej technologii konkurentów banku B4 prawie 90% majątku powinno być zarządzane według reguł stosowanych w banku B2. Relatywnie mniejsza (choć też bardzo duża) jest siła banku B2 w odniesieniu do konkurencji *kosztami* (ok. 86%).

• Bank B2 jest też najsilniejszym konkurentem banku B4 w zakresie technologii pozyskiwania kredytów. W odniesieniu do *należności* we wspólnej technologii konkurentów banku B4 dominuje natomiast technologia banku B3 (67% siły konkurentów banku B4).

**Tabela 8.** Udział banków w technologii optymalnej konkurentów banku B4

	Dane empiryczne		Wartości kalkulowane			Udział banku w grupie konkurentów		
	Bank konkurent:		B2 ×	B3 ×	suma	B2	B3	
	B2	B3	0,503	0,319				
Nakłady	466	98,7	234	31	266	88%	12%	Majątek
	8762	5881	4407	1876	6283	70%	30%	Wkłady
	2152	1250	1082	399	1481	73%	27%	Zatrudnienie
	283	75,5	142	24	166	86%	14%	Koszty
Rezultaty	5859	1866	2947	595	3542	83%	17%	Kredyty
	1200	3772	604	1203	1807	33%	67%	Należności

Źródło: Obliczenia własne.

## 9. Podsumowanie

1. Podejście od strony nadefektywności daje np. możliwość:

- ustalenia rankingu obiektów efektywnych i nieefektywnych,
- ustalenia, które obiekty są przypadkami nietypowymi, uzyskującymi bardzo wysokie lub bardzo niskie wskaźniki rankingowe,
- ustalenia tzw.  $\rho$ -efektywności,
- określenia najważniejszych konkurentów danego obiektu pod względem technologicznym, czyli skuteczności przekształcania nakładów w rezultaty.

2. Umożliwia ono ponadto przeprowadzenie tych samych analiz, które są możliwe na podstawie podejścia CCR. Podejście nadefektywności jest więc ogólniejsze. Dlatego też warto je stosować zamiast tradycyjnego podejścia CCR.



## Bibliografia

- [1] ANDERSEN P., PETERSEN N.C., *A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis*, Management Science, 1993, 39, 10.
- [2] BANKER R.D., GILFORD J.L., *A relative efficiency model for the evaluation of public health nurse productivity*, Mellon University Mimeo, Carnegie 1988.
- [3] CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research, 1978, 2.
- [4] CHARNES A., HAAG S., JASKA P., SEMPLE J., *Sensitivity of efficiency classifications in the additive model of data envelopment analysis*, International Journal System Science, 1992, 23.
- [5] DOMAGAŁA A., *Postulat homogeniczności jednostek decyzyjnych w metodzie DEA. Sugestie teoretyczne a wyniki symulacji empirycznych*, [w:] *Ekonometria finansowa, Zeszyty Naukowe AE w Poznaniu*, z. 84, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 2007.
- [6] GOSPODAROWICZ M., *Procedury analizy i oceny banków*, Materiały i Studia, z. 103, NBP, Warszawa 2000.
- [7] GUZIK B., *Główne możliwości analityczne modelu CCR-DEA w badaniu efektywności gospodarczej*, złożone do druku w BOiD.
- [8] ROGOWSKI G., *Metody analizy i oceny działalności banku na potrzeby zarządzania strategicznego*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1999.
- [9] THANASSOULIS E., DYSON R., *Estimating preferred target input-output levels using Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research, 1992, 56.
- [10] ZHU J., *Quantitative models for performance evaluation and benchmarking*, Springer, 2003.

## Important applications of the super-efficiency CCR model to economic analysis

This article presents the super-efficiency model (SE-CCR), which is one of the most important modifications of the classic CCR model, and describes the main analytical capabilities of the SE-CCR model. Some of these capabilities are direct equivalents to the capabilities of the CCR model, e.g. defining benchmarks, identifying types of scale economies for inefficient objects, constructing target technologies, using simplex reports in the sensitivity analysis of the solution proposed by the SE-CCR model. Other analytical capabilities of the SE-CCR model are specific to the super-efficiency model.

Since the SE-CCR model is a generalization of the CCR model, it provides more information and is more general than the classical approach. Everything that can be done using the CCR model can also be achieved by the SE-CCR model. In particular, the super-efficiency approach enables the construction of a full ranking of all objects (hence, also the efficient ones) and to identify the strongest competitors in a group of efficient objects.

The author describes two types of efficiency in the super-efficiency approach – classical, which is called  $\theta$ -efficiency (Farrell's efficiency), and so-called  $\rho$ -efficiency. The author also suggests how to determine the significance of technology competitors with respect to a given object and how to determine the structure of technology competition. A simple method for testing the homogeneity of a given group of objects with regard to their efficiency is also provided.

Keywords: *DEA, super-efficiency, technology competition*